

QUELQUES INÉGALITÉS POUR LA PERMÉABILITÉ EFFECTIVE
D'UN MILIEU POREUX HÉTÉROGÈNE

Georges MATHERON

CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE
Ecole des Mines de Paris
35 rue Saint-Honoré
77305 FONTAINEBLEAU France

Résumé. Au lieu de chercher à établir directement des bornes pour la perméabilité effective K , on montre ici que ses dérivées partielles satisfont certaines inégalités. Laissant fixes les phases A_i et faisant varier les valeurs numériques k_i de la perméabilité dans chaque phase, on obtient des inégalités en $\partial K/\partial k_i$ qui permettent de retrouver facilement les bornes classiques de Hashin et Shtrikman, et quelques autres. Laissant fixes les k_i et faisant, au contraire, varier les fractions volumiques, on obtient pour les milieux à croissance sans mémoire, des inégalités très fortes en $\partial K/\partial p_i$. On en déduit que, dans l'espace à deux dimensions et pour une mosaïque aléatoire à deux phases, la formule classique du milieu autocohérent fournit une borne inférieure pour $p \leq 1/2$ et supérieure pour $p \geq 1/2$. A titre de conjecture, on suggère que la formule $\sqrt{m m_H}$ (m : moyenne arithmétique, m_H : moyenne harmonique) fournit une borne complémentaire.

Key words: *Heterogeneous media, effective permeability, effective conductivity, self-consistent medium, percolation threshold.*

Table des Matières

INTRODUCTION	2
LES RELATIONS EN $\partial K/\partial k_i$	4
Cas d'un milieu biphasique	5
Cas général	6
Inégalités duales	8
LES RELATIONS EN $\partial K/\partial p$	9
Comparaison avec le milieu autocohérent	11
Cas de la mosaïque aléatoire 2-D	12
Recherche de bornes complémentaires	14
Généralisations possibles	17

0. Introduction

Depuis les travaux classiques de Hashin et Shtrikman [6], le problème de l'évaluation de la conductivité effective d'un milieu diélectrique hétérogène, ou, ce qui revient au même, de la perméabilité effective d'un milieu poreux hétérogène, a suscité une vaste littérature. Voir, par exemple, [4, 11, 12, 13, 14]. Ces travaux, basés le plus souvent (mais pas toujours, voir par exemple [3, 11]) sur des méthodes variationnelles, ont en général pour but d'établir des bornes supérieure et inférieure, qui se révèlent plus ou moins strictes selon les hypothèses plus ou moins restrictives faites sur la microstructure du milieu. Dans ce qui suit, nous proposons une méthode légèrement différente conduisant à des inégalités portant, non plus sur la propriété effective elle-même, mais sur ses *dérivées partielles* par rapport à certains paramètres ayant un sens physique précis. De ces inégalités on peut, naturellement, déduire par intégration des bornes de type classique, mais on peut penser que ces inégalités présentent aussi de l'intérêt par elles-mêmes.

Le cadre général est le suivant. On se donne une fonction aléatoire stationnaire $k(x) \geq 0$, scalaire ou tensorielle, représentant (par exemple) la perméabilité d'un milieu poreux infini, hétérogène au niveau microscopique, mais macroscopiquement homogène. Pour chaque vecteur constant u (que l'on supposera *unitaire*) on cherche alors le gradient stationnaire $\bar{\nabla}\varphi(x)$ (s'il existe) réalisant le minimum de l'espérance de la quantité $(u + \bar{\nabla}\varphi) \cdot k(u + \bar{\nabla}\varphi)$ représentant l'énergie dissipée. L'existence et l'unicité de ce gradient est assurée au moins sous l'hypothèse que $k(x)$ est bornée inférieurement et supérieurement. Dans ce cas, en effet, la norme $\langle Y \cdot k Y \rangle$ est équivalente à la norme hilbertienne $\|Y\|^2$, et le théorème des projections conduit à la conclusion. Noter que la fonction aléatoire $\varphi(x)$ admettant ce gradient stationnaire $\bar{\nabla}\varphi$ n'est, en général, pas stationnaire elle-même, mais seulement intrinsèque (d'ordre 0 : *i.e.* ses accroissements sont stationnaires). La perméabilité effective K est alors définie par la relation

$$u \cdot Ku = \langle u + \bar{\nabla}\varphi, k(u + \bar{\nabla}\varphi) \rangle$$

Noter aussi que la notation $\langle X, Y \rangle$ représente une espérance, et ne prend le sens d'une moyenne spatiale que moyennant une hypothèse ergodique. Dans ce qui suit, nous poserons en général $g = u + \bar{\nabla}\varphi$, g représentant cette fois un gradient d'espérance $E(g) = u$ non nulle, donc le gradient d'une fonction aléatoire intrinsèque admettant une dérive linéaire. Nous nous limiterons ici aux hypothèses suivantes :

- la perméabilité $k(x)$ est *scalaire*
- le milieu est (statistiquement) *isotrope*, ou possède au moins la *symétrie cubique*, de sorte que la perméabilité effective K est elle-même scalaire.

En tant que fonctionnelle de k , la perméabilité effective $K(k)$ est *croissante*, *concave* et *positivement homogène de degré 1*, *i.e.* $K(\lambda k) = \lambda K(k)$ et $K(\lambda k + \mu k') \geq \lambda K(k) + \mu K(k')$, pour $\lambda, \mu \geq 0$. Elle possède aussi la propriété de *continuité* suivante : si une suite $k_n(x)$ est bornée inférieurement et supérieurement

(i.e. $0 < a \leq k_n(x) \leq b < \infty$ pour deux nombres fixes a et b) et converge en moyenne quadratique vers $k(x)$, alors $K(k_n)$ converge vers $K(k)$. Cette propriété permet de se limiter au cas d'une fonction aléatoire $k(x)$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs k_i , $i = 0, 1, \dots, M$. Le modèle correspondant est donc

$$(1) \quad k(x) = \sum_{i=0}^M k_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$$

où les $\mathbf{1}_{A_i}$ sont les indicatrices des classes d'une partition aléatoire stationnaire ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$), et $\cup A_i$ est l'espace \mathbb{R}^N entier).

Concernant la fonctionnelle $K(k)$, on connaît peu de résultats exacts. Nous utiliserons les deux suivants :

• Désignons par m et σ^2 la moyenne et la variance de k , et par N le nombre des dimensions de l'espace. Alors, lorsque les fluctuations sont faibles, i.e. σ^2 petit, on a la relation de Schwydlar [12] :

$$(2) \quad K = m - \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{m} + O(\sigma^2)$$

• Dans le cas de l'espace à $N = 2$ dimensions, et si la fonction aléatoire $k(x)$ est de plus équivalente (à un facteur près) à son inverse, la règle de la moyenne géométrique s'applique rigoureusement :

$$(3) \quad \log K = E(\log k)$$

Ce résultat, dû à J.B. Keller [8] dans le cas de deux composantes seulement, a été établi dans le cas général par l'auteur [9], puis retrouvé, indépendamment, par A.M. Dykhne [5]. Voir aussi Schwydlar [12]. Pour une généralisation à $N > 2$ dimensions, mais sous forme d'inégalité seulement, voir [1].

On dispose, par ailleurs, d'un certain nombre de modèles physiquement plausibles. Nous en utiliserons trois. Désignant par $m = E(k)$ la moyenne (arithmétique) et par $m_H = [E(k^{-1})]^{-1}$ la moyenne harmonique, le premier modèle s'écrit :

$$(4) \quad K = m^{\frac{N-1}{N}} m_H^{\frac{1}{N}}$$

Il est rigoureusement valable dans le cas d'une perméabilité factorisée, c'est-à-dire de la forme :

$$k(x) = k_1(x_1) k_2(x_2), \dots, k_N(x_N)$$

du produit de N fonctions aléatoires indépendantes et équivalentes, dépendant chacune d'une seule coordonnée x_i .

Le second modèle est la moyenne d'ordre α , avec nécessairement $\alpha = 1 - 2/N$, à cause de la relation (2) :

$$(5) \quad K = [E(k^\alpha)]^{1/\alpha} \quad (\alpha = 1 - 2/N)$$

(pour $N = 2$, *i.e.* $\alpha = 0$, (5) est évidemment remplacée par (3)). Ce modèle n'a que peu de justification théorique, mais se situe, le plus souvent, entre (4) et (6).

Le troisième, enfin, est le modèle classique du milieu autocohérent : K est déterminée par la relation :

$$(6) \quad E \frac{k}{k + (N - 1)K} = \frac{1}{N}$$

Numériquement, on constate de grandes différences entre les valeurs fournies par (4) et par (6), et ceci confirme bien qu'en l'absence d'informations précises sur la microstructure, on ne peut espérer obtenir que des bornes très lâches. On peut conjecturer que les formules (4) et (6) constituent des bornes, tantôt supérieures et tantôt inférieures. Nous démontrons ci-dessous que tel est bien le cas pour la formule (6) du milieu autocohérent pour $N = 2$ dimensions et une mosaïque aléatoire à 2 composantes. Dans ce même cas, nous trouvons une borne complémentaire, très proche numériquement de (4), mais légèrement différente. (Voir Fig. 1).

Tout ce qui suit repose sur une relation simple, que nous allons maintenant établir. Soient $k(x)$ et $\tilde{k}(x)$ deux perméabilités sur le même espace (en tant que fonctions aléatoires, nous ne les supposons nullement indépendantes), K et \tilde{K} les perméabilités effectives associées, et g et \tilde{g} les gradients stationnaires vérifiant :

$$K = E (k|g|^2) ; \quad \tilde{K} = E (\tilde{k}|\tilde{g}|^2) ; \quad E g = E \tilde{g} = u$$

Comme g , par exemple, réalise le minimum de l'énergie $E (k|g|^2)$ pour $Eg = u$ unitaire donné, le vecteur kg est orthogonal à tout gradient stationnaire (*i.e.*, a une divergence nulle). Cela entraîne $K = E k g \cdot u$, et aussi $\langle \tilde{g} - u, k g \rangle = 0$. Donc :

$$K = E [k (g \cdot \tilde{g})] ; \quad \tilde{K} = E [\tilde{k} (g \cdot \tilde{g})]$$

Par différence, nous trouvons :

$$(7) \quad \tilde{K} - K = E \left((\tilde{k} - k) g \cdot \tilde{g} \right)$$

C'est cette relation, absolument générale, que nous allons maintenant exploiter dans différents contextes.

1. Les relations en $\partial K / \partial k_i$

Pour une perméabilité de la forme (1), on peut faire varier les paramètres k_i en laissant fixes les ensembles aléatoires A_i . On obtient ainsi une fonction $K(k_0, k_1, \dots)$ des variables k_i . Désignons par $K'_i = \partial K / \partial k_i$ les dérivées partielles correspondantes. De (7) résulte immédiatement :

$$(8) \quad K'_i = E \mathbf{1}_{A_i} |g|^2$$

Si l'on désigne par p_i la fraction volumique de la phase A_i , i.e. la probabilité $p_i = P(x \in A_i)$, on voit que K'_i/p_i est l'espérance conditionnelle de $|g|^2$ dans la phase A_i , tandis que $E(1_{A_i} g)/p_i$ est l'espérance conditionnelle du gradient lui-même. Ecrivant donc que le moment d'ordre 2 est plus grand que le carré du moment d'ordre 1, nous obtenons :

$$(9) \quad K'_i \geq \frac{1}{p_i} \left[E 1_{A_i} g \right]^2$$

Cas d'un milieu biphasique

Dans le cas général, on ne sait pas calculer ces espérances conditionnelles. Mais dans le cas particulier d'un milieu à 2 composantes, soient **deux phases seulement** A_0 et $A_1 = \complement A_0$, on a évidemment

$$1_{A_0} = \frac{k_1 - k}{k_1 - k_0} ; \quad 1_{A_1} = \frac{k - k_0}{k_1 - k_0}$$

et par suite

$$E 1_{A_0} g = \frac{k_1 - K}{k_1 - k_0} u ; \quad E 1_{A_1} g = \frac{K - k_0}{k_1 - k_0} u$$

D'où les inégalités :

$$(10) \quad K'_0 \geq \frac{1}{q} \left(\frac{k_1 - K}{k_1 - k_0} \right)^2 ; \quad K'_1 \geq \frac{1}{p} \left(\frac{K - k_0}{k_1 - k_0} \right)^2$$

On a posé, selon l'usage, $p_1 = p$, $q = p_0 = 1 - p$. Dans ce qui suit, on supposera $k_1 \geq k_0$, sans nuire à la généralité. Comme $K(k_0, k_1)$ est homogène de degré 1, on a $K = k_0 K'_0 + k_1 K'_1$, et les relations (10) se combinent pour donner :

$$(m - K) (K - m_H) \geq 0$$

On retrouve donc ainsi les bornes dites de **Wiener** ($m_H \leq K \leq m$). En fait, la première inégalité (10) exprime qu'à k_1 fixé, la fonction

$$1/(k_1 - K) - 1/[q(k_1 - k_0)]$$

est croissante en k_0 . Si k_0 tend vers k_1 , compte tenu de (2), cette fonction tend vers $-p/(q N k_1)$. Pour $k_0 < k_1$, il vient donc :

$$1/(k_1 - K) \leq 1/[q(k_1 - k_0)] - p/(N q k_1)$$

ce qui s'écrit encore :

$$(11) \quad K \leq m - \frac{p q (k_1 - k_0)^2}{(N - p) k_1 + p k_0}$$

De la même façon, la seconde relation (10) exprime que la fonction $1/(K - k_0) - 1/[p(k_1 - k_0)]$ est décroissante en k_1 , et, compte tenu de (2), on en déduit

$$(11') \quad K \geq m - \frac{p q (k_1 - k_0)^2}{(N - q) k_0 + q k_1}$$

On reconnaît, respectivement, les bornes supérieure et inférieure de *Hashin et Shtrikman* [6] pour le cas du milieu à deux phases.

Pour k_0 nul, K est de la forme $K(0, k_1) = \beta k_1$, avec un coefficient $\beta \geq 0$ indépendant de k_1 . Par définition, on a $\beta = 0$ ou $\beta > 0$ selon que p est $\leq p_c$ ou $> p_c$ (*seuil de percolation*). En intégrant la première inégalité (10) de 0 à k_0 , on trouvera cette fois

$$(12) \quad K \geq m - \frac{q(p - \beta)(k_1 - k_0)^2}{q k_1 + (p - \beta) k_0}$$

De même, pour $p \leq p_c$, il peut arriver (mais non nécessairement) que, à k_0 fixe et k_1 tendant vers l'infini, $K(k_0, k_1)$ tende vers une limite finie nécessairement de la forme γk_0 . En intégrant la seconde inégalité (10) de k_1 à l'infini, il vient cette fois

$$(12') \quad K \leq m - \frac{p^2(k_1 - k_0)^2}{p k_1 + (\gamma - 1 - p) k_0}$$

Aux grandes valeurs de k_1/k_0 , ces bornes sont nettement meilleures que celles de Hashin et Shtrikman (pourvu que $\beta > 0$ et $a < \infty$ respectivement), puisqu'elles impliquent asymptotiquement $K \geq \beta k_1 + c^{st}$ et $K \rightarrow \gamma k_0$.

Cas général

Dans le cas d'un milieu à plus de deux phases, on ne peut plus utiliser l'inégalité (9), faute de connaître les quantités $\bar{\omega}_i$ définies par :

$$E \mathbf{1}_{A_i} g = u \bar{\omega}_i$$

Toutefois, ces quantités sont liées par les relations

$$\sum \bar{\omega}_i = 1 \quad ; \quad \sum \bar{\omega}_i k_i = K$$

Supposons que le milieu comporte $M+1$ phases A_0, A_1, \dots, A_M , ordonnées de manière à avoir $k_0 < k_1 < \dots < k_M$. Si nous remplaçons les probabilités initiales p_i par les quantités

$$\mu_i = \frac{k_i - k_0}{m - k_0} p_i$$

nous pouvons calculer les espérances de $|g|^2$ et de g pour ce nouveau système :

$$E_{\mu} |g|^2 = \sum \frac{k_i - k_0}{m - k_0} E 1_{A_i} |g|^2$$

$$E_{\mu} g = \sum \frac{k_i - k_0}{m - k_0} \bar{\omega}_i u = \frac{K - k_0}{m - k_0} \cdot u$$

Compte tenu de (8), et de $\sum k_i K'_i = K$, l'inégalité $E_{\mu} |g|^2 \geq |E_{\mu} g|^2$ va donc donner :

$$(13) \quad \sum K'_i \leq \frac{1}{k_0} \left(K - \frac{(K - k_0)^2}{m - k_0} \right)$$

En travaillant de la même façon avec le système $v_i = (k_M - k_i) p_i / (k_M - m)$, on trouve encore :

$$(13') \quad \sum K'_i \geq \frac{1}{k_M} \left(K + \frac{(k_M - K)^2}{k_M - m} \right)$$

Pour un système (k_0, k_1, \dots, k_M) donné, et un paramètre $t \geq 0$, posons

$$k_i(t) = k_i + t(k_M - k_i) \quad \text{et} \quad f(t) = K(k_i(t)).$$

Mettant (13') sous la forme :

$$\sum \frac{(k_M - k_i) K'_i}{(k_M - K)^2} \geq \frac{1}{k_M - m}$$

il vient, pour la fonction $f(t)$:

$$\frac{f'(t)}{(k_M - f)^2} \geq \frac{1}{(1 - t)^2} \frac{1}{k_M - m}$$

(m est la valeur fixe $\sum p_i k_i$, soit $m(t)$ pour $t = 0$). Il suffit ensuite d'intégrer en t de $t = 0$ à $1 - \varepsilon$ et de tenir compte de la relation de Schwydlar (2) pour obtenir la borne supérieure :

$$(14) \quad K \leq m - \frac{\sigma^2 (k_M - m)}{N k_M (k_M - m) - \sigma^2}$$

De la même façon, on obtiendra à partir de (13) la borne complémentaire

$$(14') \quad K \geq m - \frac{(m - k_0) \sigma^2}{N k_0 (m - k_0) + \sigma^2}$$

Compte tenu des propriétés de continuité de la fonctionnelle K , la borne supérieure (14) reste valable pour toute perméabilité $k(x)$ majorée par une constante k_M , et de même (14') pour $k(x)$ minorée par une constante $k_0 > 0$. Elles représentent la forme la plus générale des bornes de type Hashin et Shtrikman

Inégalités duales

Dans toutes ces questions, on peut aussi adopter le point de vue dual, c'est-à-dire raisonner sur l'inverse de la perméabilité, appelée généralement *résistivité* r . Nous poserons donc

$$r(x) = 1/k(x) \quad ; \quad R = 1/K \quad ; \quad q = k \, g/K$$

De même que g était un gradient d'espérance u , q est maintenant un vecteur de divergence nulle de même espérance u . La relation de base (7) se met sous la forme équivalente :

$$(7') \quad \bar{R} - R = E \left((\bar{r} - r) \, q \cdot \bar{q} \right)$$

C'est, maintenant, $r_0 = 1/k_0$ qui joue le rôle de borne supérieure, et $r_M = 1/k_M$ celui de borne inférieure. On note d'autre part les relations

$$\frac{\partial R}{\partial r_i} = \frac{k_i^2}{K^2} K'_i \quad ; \quad E(r) = 1/m_H$$

En réitérant les raisonnements précédents, on aboutira donc aux inégalités :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{k_i^2 K'_i}{K^2} \leq \frac{1}{r_M} \left(R - \frac{(R - r_M)^2}{1/m_H - r_0} \right) \\ \sum \frac{k_i^2 K'_i}{K^2} \geq \frac{1}{r_0} \left(R + \frac{(r_0 - R)^2}{r_0 - 1/m_H} \right) \end{array} \right.$$

Au lieu de la variance de r , nous introduisons le coefficient sans dimension C^2 défini par

$$C^2 = \text{Var}(1/k) / (E(1/k))^2$$

On notera que, sous la forme duale, le coefficient $1/N$ doit être remplacé par $(N-1)/N$ dans la formule (2), qui devient ainsi :

$$(2') \quad R = \frac{1}{m_H} \left(1 - \frac{N-1}{N} C^2 \right) + O(C^2)$$

En intégrant ces inégalités selon le même procédé que ci-dessus, on obtient de nouvelles bornes de type Hashin et Shtrikman, que nous transcrivons ici en notation k et K :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} K \leq m_H + \frac{(N-1) k_M (k_M - m_H) C^2}{N(k_M - m_H) + (N-1) k_M C^2} \\ K \geq m_H + \frac{(N-1) k_0 (m_H - k_0) C^2}{N(m_H - k_0) - (N-1) k_0 C^2} \end{array} \right.$$

Dans le cas de deux phases seulement, ces bornes (16) s'identifient à (14) et (14') car, les espérances $E 1_{A_0} g$ et $E 1_{A_1} g$ étant connues, la forme duale n'apporte pas d'information supplémentaire. Dans le cas général, il n'y a pas de relation nécessaire entre C^2 , m_H , m et σ^2 , et, selon les valeurs respectives de ces paramètres, les bornes duales (16) seront tantôt meilleures, tantôt moins bonnes que leurs homologues (14) et (14').

2. Les relations en $\partial K/\partial p$

Nous considérons maintenant, à nouveau, un milieu à **deux phases** seulement, mais, laissant fixes les valeurs de k_0 et k_1 , nous allons au contraire accroître l'une des deux phases aux dépens de l'autre. Autrement dit, avec toujours $k_1 > k_0$, nous considérons une partition aléatoire de \mathbb{R}^N en **trois** ensembles A_0 , B et A_1 , et nous introduisons les perméabilités $k(x)$ et $\tilde{k}(x)$ définies par :

$$(17) \quad k = k_0 1_{A_0} + k_0 1_B + k_1 1_{A_1} ; \quad \tilde{k} = k_0 1_{A_0} + k_1 1_B + k_1 1_{A_1}$$

La relation (7) nous donne alors :

$$\tilde{K} - K = (k_1 - k_0) E (1_B g \tilde{g})$$

et nous déduisons de l'inégalité de Schwarz :

$$(18) \quad \tilde{K} - K \leq (k_1 - k_0) \left[E(1_B |g|^2) E(1_B |\tilde{g}|^2) \right]^{1/2}$$

Restent à évaluer les espérances qui figurent au second membre de cette inégalité. Cela est possible dans le cadre des modèles à **croissance sans mémoire**. Nous entendons par là un modèle dans lequel g a la même distribution conditionnelle dans A_0 et dans B , ainsi que \tilde{g} dans B et dans A_1 . Autrement dit, dans l'ancien milieu (k), rien ne permet de prévoir quelles portions de la phase 0 vont passer dans la phase 1, et, de même, dans le nouveau milieu (\tilde{k}) rien ne permet de distinguer les portions anciennes et récentes de la phase 1. Ces conditions sont réalisées par deux classes de modèles au moins :

• **Les modèles booléens**, [10]. Ici, la phase A_1 (par exemple) est constituée par la réunion de “grains primaires”, qui sont eux-mêmes des ensembles compacts aléatoires, indépendants et équivalents, implantés aux points d’un processus de Poisson stationnaire de densité θ (constante dans l’espace). L’accroissement de la phase 1 correspond à une variation $\delta\theta > 0$ de la densité poissonnienne : ce qui revient à planter de nouveaux grains primaires, équivalents aux précédents, mais indépendants, aux points d’un nouveau processus de Poisson, indépendant du précédent, et de densité $\delta\theta$.

• **Les mosaïques aléatoires** (nombreux exemples dans [7]). Ici, on se donne une partition aléatoire fixe de \mathbb{R}^N en un nombre (infini) d’ensembles C_e , et l’appartenance de chaque C_e à la phase A_1 et A_0 est tirée au sort, indépendamment, avec la même probabilité p . L’accroissement de la phase A_1 est obtenu par de nouveaux tirages au sort indépendants, faisant éventuellement passer en phase 1 avec la probabilité $\delta p/q$ chacun des ensembles C_e classés précédemment dans la phase 0.

Revenons au modèle (17), et posons :

$$q - \delta p = E \mathbf{1}_{A_0} ; \delta p = E \mathbf{1}_B ; p = E \mathbf{1}_{A_1}$$

Compte tenu de (8), nous trouvons, pour un modèle à croissance sans mémoire :

$$E(\mathbf{1}_B |g|^2) = \frac{\delta p}{q} K'_0 ; E(\mathbf{1}_B |\bar{g}|^2) = \frac{\delta p}{p + \delta p} \bar{K}'_1$$

Portant ces valeurs dans (18), et faisant ensuite tendre δp vers 0, nous obtenons une inégalité remarquable :

$$(19) \quad \frac{\partial K}{\partial p} \leq (k_1 - k_0) \sqrt{\frac{K'_0 K'_1}{p q}}$$

écrite, rappelons-le, pour $k_1 > k_0$. Si $k_1 < k_0$, l’inégalité doit évidemment être inversée.

Or, il existe un modèle simple pour lequel l’égalité est réalisée dans la relation (19), c’est le modèle du *milieu autocohérent*. Dans le cas de deux phases seulement, les relations (6) s’écrivent, en effet :

$$(20) \quad \frac{(1-p) k_0}{k_0 + (N-1)K} + \frac{p k_1}{k_1 + (N-1)K} = \frac{1}{N}$$

et des calculs élémentaires montrent qu’elles entraînent :

$$\left(\frac{\partial K}{\partial p}\right)^2 = (k_1 - k_0)^2 \frac{K'_0 K'_1}{p q}$$

Compte tenu de la positivité des dérivées partielles, ceci équivaut bien à l’égalité dans les relations (19).

Il ne résulte pas automatiquement de cette remarque que la formule du milieu autocohérent fournisse nécessairement une borne, supérieure ou inférieure, pour la valeur de K . Il faut y regarder de plus près.

Comparaison avec le milieu autocohérent

Dans ce qui suit, nous désignerons par K_{ac} la valeur de K fournie par la relation (6). Pour préciser les relations existant entre K et K_{ac} , il sera commode d'effectuer le changement de variables suivant :

$$(21) \quad \xi = \frac{k_1 + k_0}{2} ; \quad \eta = (p - q) \left(\frac{k_1 - k_0}{2} \right) ; \quad \sigma = \sqrt{pq} (k_1 - k_0)$$

avec, inversement :

$$(21') \quad k_1 = \xi + \sqrt{\eta^2 + \sigma^2} ; \quad k_0 = \xi - \sqrt{\eta^2 + \sigma^2} ; \quad p = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \sigma^2}} \right]$$

et les contraintes de positivité :

$$(22) \quad \xi \geq 0 ; \quad \xi^2 - \eta^2 - \sigma^2 \geq 0$$

Avec ces nouvelles variables, la relation (19) se met sous la forme :

$$(23) \quad \left(\frac{\partial K}{\partial \xi} \right)^2 - \left(\frac{\partial K}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial K}{\partial \sigma} \right)^2 \geq 0$$

et l'inégalité devient une égalité dans le cas de K_{ac} , qui apparaît ainsi comme une solution de l'équation des ondes, à l'approximation de l'optique géométrique.

Désignons alors par C_+ le **cône** défini par les relations (22). Dans la terminologie de la théorie de la relativité, ce serait le cône du futur. On peut lui associer une **relation d'ordre**, et dire qu'un point M' est postérieur à un point M si le vecteur MM' appartient au cône C_+ , c'est-à-dire si l'on a :

$$\xi' \geq \xi \quad \text{et} \quad (\xi' - \xi)^2 \geq (\eta' - \eta)^2 + (\sigma' - \sigma)^2$$

L'inégalité (23) signifie alors que **K est une fonction croissante pour l'ordre défini par le cône C_+** , autrement dit $MM' \in C_+$ entraîne $K(M') \geq K(M)$. Dans le cas de K_{ac} , on a encore une fonction croissante pour l'ordre C_+ , mais, l'égalité étant atteinte, il va être possible de trouver, en coordonnées (ξ, η, σ) , des chemins le long desquels K_{ac} restera constante, tandis que K augmentera.

Des équations (20), en effet, on déduit sans peine que le gradient de K_{ac} , au point (ξ, η, σ) , a des composantes de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial K_{ac}}{\partial \xi} = A \left(\xi + \left(\frac{N-2}{2} \right) K_{ac} \right) \\ \frac{\partial K_{ac}}{\partial \eta} = A \left(-\eta + \frac{N}{2} K_{ac} \right) \\ \frac{\partial K_{ac}}{\partial \sigma} = -A \sigma \end{array} \right.$$

avec un facteur A qu'il est inutile de préciser. Si nous considérons le vecteur vitesse V de composantes :

$$(24) \quad \frac{d\xi}{dt} = \xi + \left(\frac{N-2}{2} \right) K_{ac} ; \quad \frac{d\eta}{dt} = \eta - \frac{N}{2} K_{ac} ; \quad \frac{d\sigma}{dt} = \sigma$$

la relation

$$\left(\frac{\partial K_{ac}}{\partial \xi} \right)^2 - \left(\frac{\partial K_{ac}}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial K_{ac}}{\partial \sigma} \right)^2 = 0$$

entraîne immédiatement :

$$V \cdot \nabla K_{ac} = \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 = 0$$

Donc K_{ac} reste constant le long des trajectoires définies par les équations différentielles (24), tandis que K devient une fonction croissante de t. Par suite si, sur cette trajectoire, on a $K = K_{ac}$ pour une valeur t_0 de t, on aura $K \leq K_{ac}$ pour $t \leq t_0$, et $K \geq K_{ac}$ pour $t \geq t_0$.

Cas de la mosaïque aléatoire 2-D

Pour exploiter cette remarque, considérons le cas d'une *mosaïque aléatoire* à deux phases dans l'espace à *deux dimensions*. Pour $p = 1/2$, ce modèle vérifie les conditions de validité de la formule (3) — ce qui ne serait pas le cas pour le modèle booléen. Pour la mosaïque, on a donc $K = \sqrt{k_0 k_1}$ en $p = 1/2$, et, K_{ac} prenant la même valeur, $K = K_{ac}$. Or $p = 1/2$ entraîne $\eta = 0$ d'après la relation (21). Inversement, $\eta = 0$ entraîne soit $p = 1/2$, soit $k_0 = k_1$, et donc dans tous les cas $K = K_{ac}$.

Il reste à voir si les trajectoires de la solution de l'équation différentielle (24) comportent toutes un passage par $\eta = 0$. Or, pour $N = 2$, et compte tenu de l'intégrale première $K_{ac} = \text{constante}$, cette solution est de la forme :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi(t) = \xi_0 e^t \\ \eta(t) = K_{ac} - (K_{ac} - \eta_0) e^t \\ \sigma(t) = \sigma_0 e^t \end{array} \right.$$

D'autre part, toujours pour $N = 2$, la relation (20) donne

$$K_{ac} = \eta + \sqrt{\xi^2 - \sigma^2}$$

de sorte que l'on a $K_{ac} > \eta_0$ strictement (sauf si $\xi_0 = \sigma_0$ et $\eta_0 = 0$, c'est-à-dire $k_1 = k_0 = 0$). Donc, il existe une valeur t_0 de t pour laquelle $\eta(t_0) = 0$, définie par

$$e^{t_0} = K_{ac}/(K_{ac} - \eta_0)$$

Il reste à vérifier que la condition $\xi^2 \geq \eta^2 + \sigma^2$ est bien satisfaite en $t = t_0$. Or cette condition est toujours satisfaite par les données initiales ξ_0, η_0, σ_0 , ce qui implique $\xi_0 \geq \sigma_0$. Comme $\eta(t_0) = 0$, les relations (25) donnent bien :

$$\xi(t_0)^2 - \eta^2(t_0) - \sigma^2(t_0) = (\xi_0^2 - \sigma_0^2) e^{t_0} \geq 0.$$

Ainsi, cette valeur $t = t_0$ est effectivement réalisée par un milieu physiquement possible.

Remarquons, enfin, que les équations différentielles (24) entraînent aussi

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{\sigma^2(t) K_{ac}}{[\sigma^2(t) + \eta^2(t)]^{3/2}} \leq 0$$

de sorte que $p(t)$ est, sur la trajectoire, une fonction *décroissante* de t . Si donc, à l'instant initial $t = 0$, on a $p \geq 1/2$, il faut augmenter t pour atteindre $p = 1/2$, et donc $t_0 \geq 0$. Comme on a $K = K_{ac}$ en t_0 , il résulte de ce qui précède que l'on avait $K \leq K_{ac}$ à l'instant initial $t = 0$. De même, $p \leq 1/2$ entraîne $t_0 \leq 0$, et donc $K \geq K_{ac}$ en $t = 0$. Enonçons ce résultat :

THÉORÈME. — *Dans l'espace à deux dimensions, et pour toute mosaïque aléatoire isotrope à deux phases, on a*

$$K \geq K_{ac} \text{ pour } p \leq 1/2 \text{ et } K \leq K_{ac} \text{ pour } p \geq 1/2$$

Pour $p = 1/2$, on a de plus, évidemment, $K = K_{ac} = \sqrt{k_0 k_1}$. Rappelons que la valeur de K_{ac} est

$$K_{ac} = \left[(p - q)(k_1 - k_0) + ((p - q)^2(k_1 - k_0)^2 + 4 k_0 k_1)^{1/2} \right] / 2$$

N.B. — Le théorème reste valable si l'on suppose seulement la mosaïque invariante statistiquement pour les rotations de 90° .

Nous allons maintenant établir des bornes complémentaires, qui nous conduiront à proposer la conjecture suivante :

CONJECTURE. — *Dans l'espace à deux dimensions, et pour toute mosaïque aléatoire isotrope à deux phases, on a*

$$K \leq \sqrt{mm_H} \text{ pour } p \leq 1/2 \text{ et } K \geq \sqrt{mm_H} \text{ pour } p \geq 1/2$$

Recherche de bornes complémentaires

Pour cela, nous allons mettre la relation générale (7) sous plusieurs formes équivalentes. Partant de l'identité

$$|\bar{g}|^2 = |g|^2 + 2\bar{g} \cdot (\bar{g} - g) - |\bar{g} - g|^2$$

et multipliant par \bar{k} , nous obtenons, compte-tenu de l'orthogonalité de $\bar{k} \bar{g}$ et de $(\bar{g} - g)$:

$$\bar{K} = E \bar{k} |\bar{g}|^2 = K + E (\bar{k} - k) |g|^2 - E \bar{k} |\bar{g} - g|^2$$

et, de la même façon :

$$K = \bar{K} - E (\bar{k} - k) |g|^2 - E \bar{k} |\bar{g} - g|^2$$

ou, sous forme de différence :

$$(26) \quad \bar{K} - K = E (\bar{k} - k) |g|^2 - E \bar{k} |\bar{g} - g|^2$$

$$\bar{K} - K = E (\bar{k} - k) |\bar{g}|^2 + E k |\bar{g} - g|^2$$

et enfin, par sommation des deux relations précédentes :

$$(27) \quad \bar{K} - K = \frac{1}{2} E \left[(\bar{k} - k) (|g|^2 + |\bar{g}|^2 - |\bar{g} - g|^2) \right]$$

ce qui n'est, d'ailleurs, pas autre chose que la relation (7).

Examinons les conséquences de ces relations pour un modèle de type (17) à *croissance sans mémoire*.

Compte tenu des propriétés de ce modèle, on a

$$E 1_B |g|^2 = (\delta p/q) K'_0 \quad ; \quad E 1_B |\bar{g}|^2 = [\delta p/(p + \delta p)] K'_1$$

et donc

$$E (\bar{k} - k) |g|^2 = \frac{\delta p}{q} (k_1 - k_0) K'_0 \quad ; \quad E (\bar{k} - k) |\bar{g}|^2 = \frac{\delta p}{p + \delta p} (k_1 - k_0) K'_0$$

Nous utiliserons ensuite la minoration :

$$E(1_B |\bar{g} - g|^2) \geq \frac{1}{\delta p} |E 1_B (\bar{g} - g)|^2$$

Comme on a de plus, d'après les résultats de la première partie :

$$E 1_B \bar{g} = \frac{\delta p}{p + \delta p} \frac{\bar{K} - k_0}{k_1 - k_0} \quad ; \quad E 1_B g = \frac{\delta p}{q} \frac{k_1 - K}{k_1 - k_0}$$

il vient

$$E \mathbf{1}_B |\bar{g} - g|^2 \geq \frac{\delta p}{(k_1 - k_0)^2} E \left(\frac{1}{p + \delta p} (\bar{K} - k_0) - \frac{1}{q} (k_1 - K) \right)^2$$

Comme toujours, nous supposons $k_1 - k_0 \geq 0$. Portant cette minoration dans (27), et faisant tendre δp vers 0, nous obtenons

$$(28) \quad \frac{\partial K}{\partial p} \leq \frac{1}{2}(k_1 - k_0) \left[\frac{K'_0}{q} + \frac{K'_1}{p} - \left(\frac{K - m}{p q (k_1 - k_0)} \right)^2 \right]$$

avec $m = E k = p k_1 + q k_0$. De même, compte tenu aussi de

$$E k |\bar{g} - g|^2 \geq k_0 E \mathbf{1}_B |\bar{g} - g|^2$$

la relation (26) nous donne :

$$(29) \quad \frac{\partial K}{\partial p} \geq (k_1 - k_0) \frac{K'_1}{p} + k_0 \left(\frac{K - m}{p q (k_1 - k_0)} \right)^2$$

Posant $F = m - K$, et prenant comme nouvelles variables m, σ^2, p , l'équation (28) se met sous la forme :

$$2 \frac{\partial}{\partial p} F(m, \sigma^2, p) \geq \frac{F^2}{\sigma(p q)^{3/2}}$$

Elle exprime donc qu'à m et σ^2 fixés, la fonction

$$\frac{1}{m - K} + \frac{p - q}{\sigma \sqrt{p q}}$$

est *décroissante* en p , d'où possibilités d'obtenir de nouvelles bornes. Toutefois, comme la fonction K_{ac} vérifie l'inégalité (28), ces bornes ont peu de chances d'être meilleures que celles qui se déduisent de (18). Elles sont toutefois plus faciles à exploiter, ce qui peut être un avantage.

Toujours avec $F = m - K$, mais en variables m, k_0, p , l'inégalité (29) devient

$$- \frac{\partial}{\partial p} F(m, k_0, p) \geq \frac{k_0 F^2}{q^2(m - k_0)^2}$$

Elle exprime donc qu'à m et k_0 fixés, la fonction

$$\frac{1}{m - K} - \frac{k_0}{(m - k_0)^2} \frac{1}{q}$$

est *croissante* en p . Partant des valeurs p, k_0, k_1 , à m et k_0 fixés, on aura $p' = 1/2$ pour $k_1' = 2m - k_0$. Ainsi, dans le cas de la mosaïque aléatoire dans l'espace à deux dimensions, où la règle $K = \sqrt{k_0 k_1}$ est valable en $p' = 1/2$, on trouve

$$\frac{1}{m - K} \leq \frac{1}{m - \sqrt{k_0(2m - k_0)}} - \frac{k_0}{(m - k_0)^2} \frac{2q - 1}{q}$$

pour $p \leq 1/2$, et l'inégalité inverse pour $p \geq 1/2$. Avec les notations

$$m = p k_1 + q k_0 ; m^* = p k_0 + q k_1 ; \sigma^2 = pq(k_1 - k_0)^2$$

cela donne pour $p \leq 1/2$

$$(30) \quad K \leq m - \frac{p \sigma^2}{pm^* + q \sqrt{k_0(2m - k_0)}}$$

Par dualité, on trouve des inégalités analogues entre les résistivités, qui se transcrivent, en termes de perméabilités, sous la forme

$$(31) \quad K \leq m - \frac{p \sigma^2 \sqrt{k_0(2m^* - k_0)}}{q k_0 k_1 + pm^* \sqrt{k_0(2m^* - k_0)}}$$

pour $p \leq 1/2$, et l'inégalité inverse pour $p \geq 1/2$. Il est facile de voir que le second membre de (31) est toujours supérieur à celui de (30), avec égalité seulement dans le cas $p = 1/2$. Finalement, donc, les bornes complémentaires que nous cherchions s'écrivent :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{ll} K \leq \frac{p k_0 k_1 + q m \sqrt{k_0(2m - k_0)}}{pm^* + q \sqrt{k_0(2m - k_0)}} & (p \leq 1/2) \\ K \geq k_0 k_1 \frac{qm + p \sqrt{k_0(2m^* - k_0)}}{q k_0 k_1 + pm^* \sqrt{k_0(2m^* - k_0)}} & (p \geq 1/2) \end{array} \right.$$

En $p = 1/2$, ces inégalités entraînent, comme il se doit, $K = \sqrt{k_0 k_1}$. Noter aussi que, pour $k_0 = 0$, on trouve $K = 0$ pour $p \leq 1/2$. Autrement dit, à deux dimensions, le *seuil de percolation* p_c d'une mosaïque aléatoire isotrope à deux phases est toujours $\geq 1/2$.

Ces bornes complètent celles que nous fournit K_{ac} . Il est facile de voir que la fonction $K = \sqrt{mm_H}$ satisfait à l'inégalité (29), donc aussi aux relations (32) qui s'en déduisent. On constate, sur la figure 1, que, pour un rapport $k_1/k_0 = 10^4$, c'est-à-dire déjà très élevé, les bornes (32) restent très proches de $\sqrt{mm_H}$, ce qui suggère la conjecture avancée ci-dessus. Sur la figure 2, on peut voir, pour le même rapport $k_1/k_0 = 10^4$, le comportement de nos trois modèles (4), (5) et (6) dans le cas

de 3 dimensions. La moyenne d'ordre $\alpha = 1/3$ reste comprise entre les deux autres modèles, sauf toutefois au voisinage de $p = 1/3$. La conjecture avancée dans le cas $N = 2$ est donc, peut-être, moins plausible pour $N = 3$.

Généralisations possibles

Les résultats que nous avons obtenus, pour les modèles à croissance sans mémoire, dans le cas de deux phases seulement peuvent vraisemblablement se généraliser au cas multiphasique. Dans ce cas, pour manier librement les dérivées partielles $\partial K/\partial p_i$, sans être gênés par la condition $\sum p_i = 1$, nous prolongerons la définition de K en posant :

$$K(k_i; p_i) = \left(\sum p_j \right) K(k_i; p_i / \sum p_0)$$

pour $\sum p_i \neq 1$. C'est alors la différence $\partial K/\partial p_i - \partial K/\partial p_j$ qui représente l'accroissement de la phase i aux dépens de la phase j . Il est facile de voir que la relation (19) se généralise au cas d'un milieu multiphasique à croissance sans mémoire, sous la forme :

$$(33) \quad \frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_j} \leq (k_i - k_j) \sqrt{\frac{K'_i K'_j}{p_i p_j}}$$

si $k_i \geq k_j$, et l'inégalité inverse dans le cas contraire.

D'autre part, la fonction K_{ac} , définie par

$$\sum \frac{p_i k_i}{k_i + (N-1)K_{ac}} = \frac{\sum p_i}{N}$$

vérifie encore, pour chaque i et chaque j , la relation :

$$(34) \quad \left(\frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_j} \right)^2 = (k_i - k_j)^2 \frac{K'_i K'_j}{p_i p_j}$$

donc, pour $k_i > k_j$, réalise l'égalité dans (33). C'est cette circonstance qui suggère la possibilité de généralisation. On notera aussi l'aspect étrangement surdéterminé de la fonction K_{ac} , qui vérifie simultanément toutes les équations (34), au nombre de $n(n-1)/2$ s'il y a n phases.

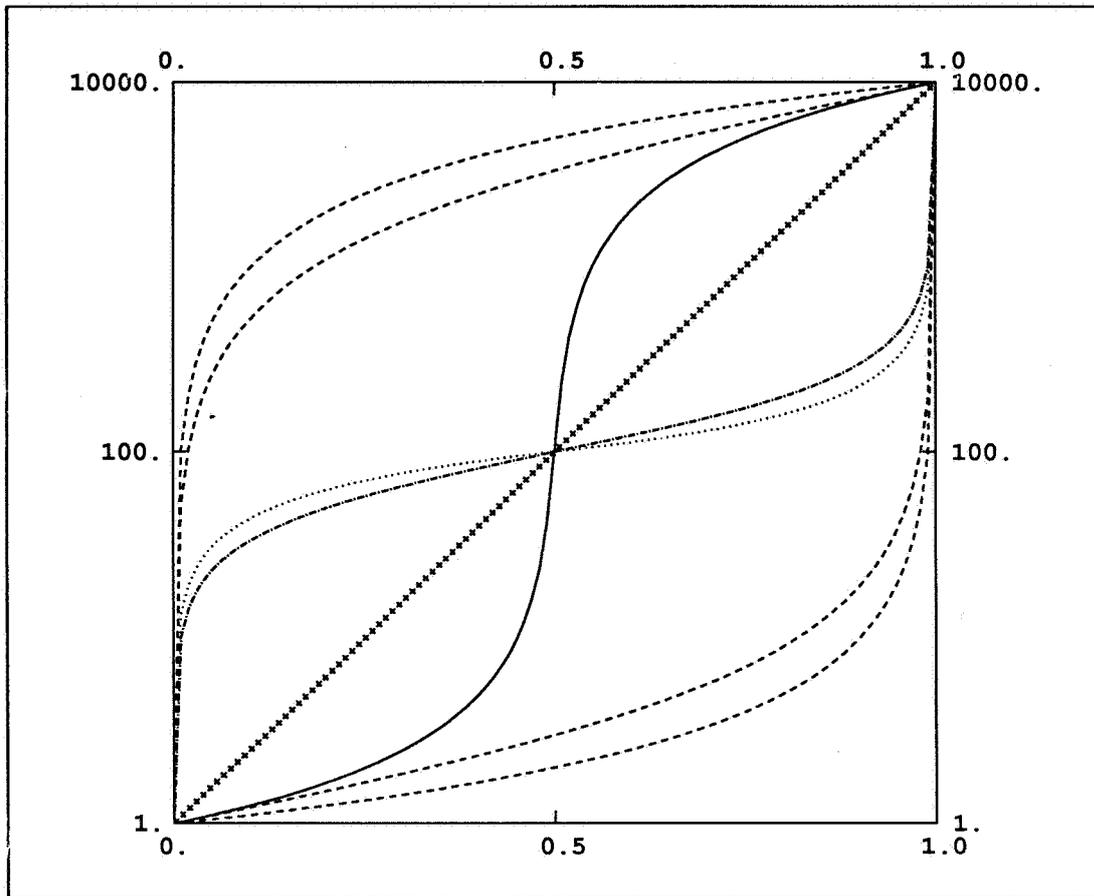


Figure 1. $N = 2$ Dimensions. En abscisse : p . En ordonnée : K
 $(k_0 = 1, k_1 = 10^4)$

- : bornes de Wiener et bornes de H. et S.
- : K_{ac}
- : bornes complémentaires (32)
- : $\sqrt{mm_H}$
- +++++++ : moyenne géométrique

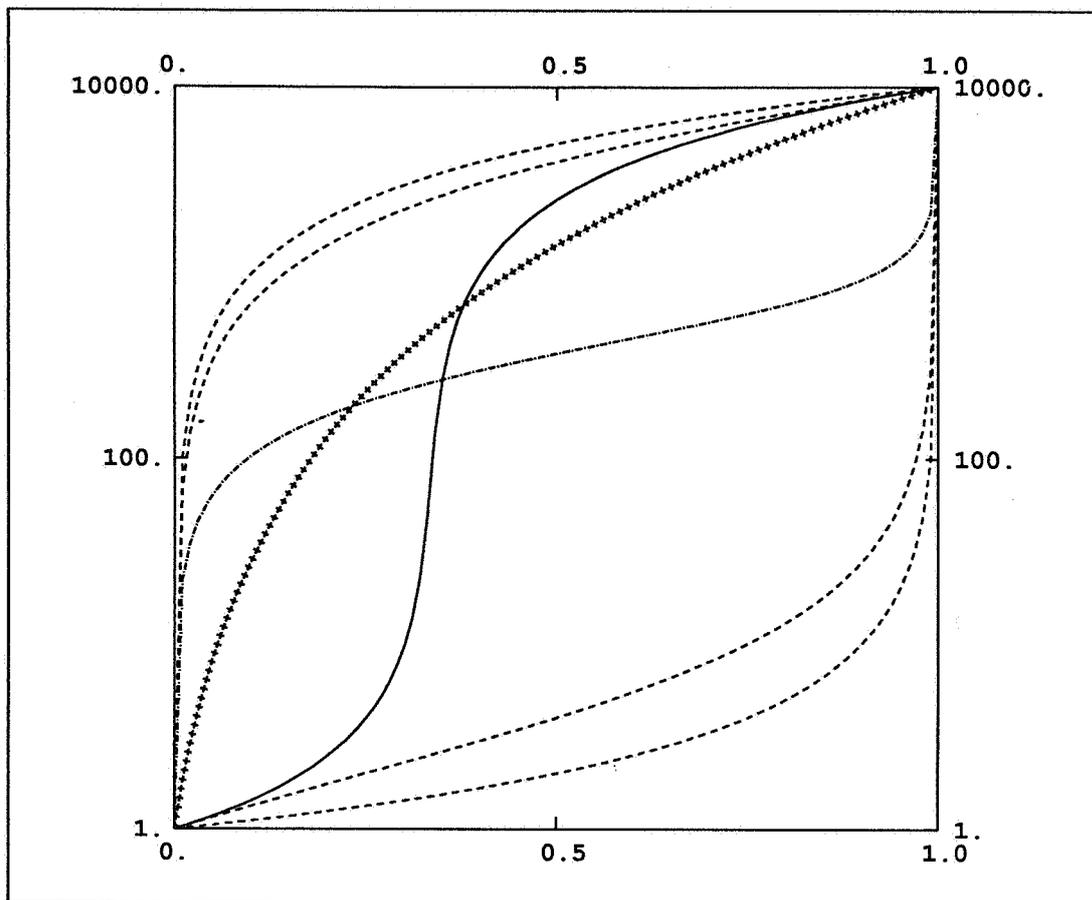


Figure 2. $N = 3$ Dimensions. En abscisse : p . En ordonnée : K
 ($k_0 = 1, k_1 = 10^4$)

- : bornes de Wiener et bornes de H. et S.
- : K_{ac}
- : $m^{2/3} m_H^{1/3}$
- ***** : moyenne d'ordre $1/3$

Références

- [1] M. Avellaneda, A.V. Cherkoiev, K.A. Lurie and G.W. Milton. On the effective conductivity of polycrystals and a three dimensional phase interchange inequality. *J. Appl. Phys.* 63, (10), 1988.
- [2] M.J. Beran. *Statistical continuum theory*. Wiley, 1968.
- [3] D.J. Bergman. *Annals of Physics*, 138, 78–114 (1982).
- [4] R.M. Christensen. A critical evaluation for a class of micromechanics models. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 38, no. 3, 339–404 (1990).
- [5] A.M. Dykhne. *J. Eksp. Teor. Fiz.*, 59, 110, 1970. English transl., *Sov. Phys. JETP*, 32, 63 (1971).
- [6] Z. Hashin and S. Shtrikman. *Phys. Rev.* 130, 129 (1963).
- [7] D. Jeulin. *Modèles morphologiques de structures aléatoires et de changement d'échelle*. Thèse de Docteur ès Sciences Physiques, Université de Caen, Avril 1991.
- [8] J.B. Keller. *J. Math. Phys.* 5, 548 (1964)
- [9] G. Matheron. *Eléments pour une théorie des milieux poreux*. Masson, Paris, 1967.
- [10] G. Matheron. *Random sets and integral geometry*. Wiley, 1975.
- [11] E. Sanchez Palencia and A. Zaoui (ed.). *Homogenisation techniques for composite media*. Lecture Notes in Physics, Vol. 272, Springer, 1987.
- [12] M.I. Schwydlar. *Statisticheskaja hydrodynamika poristykh sred*. Nedra, Moscow, 1985.
- [13] J.R. Willis. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Adv. in Appl. Mech.*, Vol. 21, ed. by C.S. Yih, Academic Press, N.Y., 1981.
- [14] J.R. Willis. Randomly in homogeneous media. *In* [11], 280–338.