

MODELISATION ET COKRIGEAGE DE LA CHARGE ET DE LA
TRANSMISSIVITE AVEC CONDITIONS AUX LIMITES A DISTANCE FINIE.

Georges MATHERON*, Chris ROTH**, Chantal de FOUQUET*

* CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE,
Ecole des Mines de Paris
35 rue Saint-Honoré,
77305 FONTAINEBLEAU France

** BRGM
BP 6009, 45060 ORLEANS Cedex France

RÉSUMÉ. Le co-krigeage de variables liées par l'équation aux dérivées partielles $\Delta\phi - \omega \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ intervient par exemple dans l'estimation des perturbations f et ϕ de la transmissivité et de la charge ("problème inverse" en hydrologie).

Dans la modélisation du couple de Fonctions Aléatoires (f, ϕ) mise en oeuvre par A. Dong (1990), les conditions aux limites sont rejetées à l'infini ; pour l'estimation ces conditions aux limites sont assimilées à des points de données.

Un procédé de périodisation permet ici d'intégrer les conditions aux limites à la modélisation du couple de FA (f, ϕ) , dans le cas élémentaire d'un champ rectangulaire avec des limites à flux nul ou à charge imposée. Le co-krigeage, effectué pour chacun des deux modèles, est ensuite comparé au résultat d'un calcul d'écoulement considéré comme la réalité.

Table des Matières

INTRODUCTION	62
Rappel : Ecoulement moyen - cas d'une transmissivité constante T_0	62
Rappel : linéarisation de l'équation de la diffusivité	63
Modélisation des termes de perturbation : prise en compte des conditions aux limites	64
MODÈLE STRUCTURAL DES PERTURBATIONS DE LA TRANSMISSIVITÉ ET DE LA CHARGE	62
VALIDATION ET LIMITES DU MODÈLE : ÉTUDE VARIOGRAPHIQUE	68
Comparaison des modèles avec et sans conditions aux limites à la solution de référence	69
Cas d'une recharge constante	69
Variance du terme de perturbation	70
COKRIGEAGE DES TERMES DE PERTURBATION	70
CONCLUSION	72

INTRODUCTION

L'application de la géostatistique en hydrogéologie a pris un second essor avec les travaux de A. Dong (1990). L'équation de l'écoulement linéarisée fixe la relation structurale entre la covariance généralisée des perturbations ϕ de la charge et celle des perturbations f de la transmissivité : si f est une FAI- k , ϕ est une FAI- $(k+1)$ dont la covariance généralisée se déduit de celle de f . Ce modèle de covariances simples et croisées permet le cokrigage de la charge ou de la transmissivité à partir des données ponctuelles des deux variables.

En l'état, ce modèle s'applique dans le cas particulier d'une nappe modélisable en deux dimensions, dans le cas d'un écoulement moyen parallèle, en régime permanent et en l'absence de recharge ; les conditions aux limites sont supposées rejetées à l'infini, ce qui revient à considérer que la zone d'étude est éloignée des limites de la nappe et des exutoires. La méthode de modélisation présentée ici va permettre de lever ces deux dernières hypothèses dans les cas simplifiés suivants :

- recharge supposée constante sur le champ
- conditions aux limites pour un champ rectangulaire avec des conditions de flux nul sur deux côtés opposés et de charge imposée sur les deux autres côtés.

Les autres hypothèses restent inchangées.

I - MODÈLE STRUCTURAL DES PERTURBATIONS DE LA TRANSMISSIVITE ET DE LA CHARGE

En vue d'établir le modèle structural des perturbations de la charge et de la transmissivité, l'équation de la diffusivité est linéarisée par la méthode classique des perturbations. La transmissivité T et la charge H sont décomposées comme la somme d'une moyenne supposée connue et d'un terme de perturbation, modélisé par une Fonction Aléatoire d'espérance nulle. La partie déterministe correspond à l'écoulement moyen, pour lequel la transmissivité est constante et égale à T_0 .

Soit C la recharge par unité de surface, comptée positivement. Avec les hypothèses classiques suivantes :

- nappe libre, modélisable en deux dimensions en l'absence de gradient de charge vertical (hypothèses de Dupuit)
- Axes O_x et O_y choisis selon les directions principales du tenseur des transmissivités
- Faible variation de la transmissivité T en fonction de la charge H

l'équation de la diffusivité s'écrit en régime permanent :

$$\text{div}(TVH) + C = 0 \tag{I.1}$$

a - Rappel : Ecoulement moyen - cas d'une transmissivité constante T_0

Soit un écoulement parallèle selon O_x . Supposons d'abord la transmissivité isotrope et constante sur le champ

$$T_{xx} = T_{yy} = T_0$$

la relation (I.1) se simplifie et la charge h vérifie l'équation suivante:

$$\nabla^2 h + \frac{C}{T_0} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{C}{T_0} = 0 \quad (I.2)$$

Conditions aux limites : cas d'un champ rectangulaire (Figure I.1)

Dans toute la suite, la nappe est délimitée par les conditions aux limites schématiques suivantes, désignées par la suite par (C.L.1) :

- En $x = 0$ et $x = a$, la charge est constante et imposée par le gradient giascopique $-\omega$. On pose :

$$0 \leq y \leq b, \quad h(0, y) = 0 \text{ et } h(a, y) = -\omega a$$

- En $y = 0$ et $y = b$ la limite est imperméable ; sur ces côtés $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$.

Cette dernière condition est sans influence sur l'écoulement moyen.

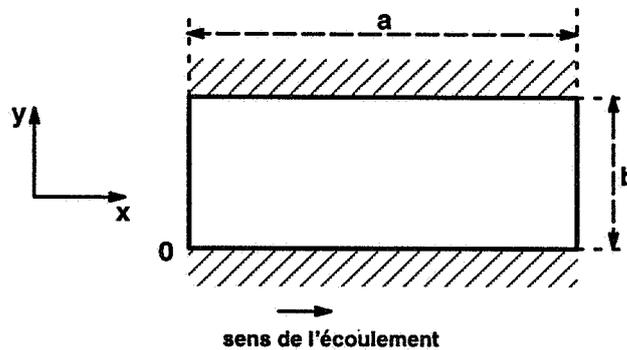


Figure I.1 : Conditions aux limites

Avec ces conditions aux limites, l'intégration de la relation (I.2) est immédiate :

- si la recharge est nulle, $C = 0$ et la charge est linéaire en x sur $[0, a]$

$$h(x, y) = h(x) = -\omega x \quad (I.3)$$

- si la recharge est constante sur le champ, la charge h est quadratique en x sur $[0, a]$

$$h(x, y) = h(x) = -\omega x + (a - x) \frac{Cx}{2T_0} \quad (I.4)$$

b - Rappel : linéarisation de l'équation de la diffusivité

Afin de tenir compte de la variabilité spatiale, la transmissivité T est maintenant modélisée par une Fonction Aléatoire dont l'espérance T_0 est supposée connue :

$$T(x, y) = T_0(1 + f(x, y)) \text{ avec } E(f) = 0 \quad (I.5)$$

La Fonction Aléatoire f représente le terme de perturbation, dont la variance non nécessairement stationnaire, est supposée petite devant l'unité. Par linéarisation de l'équation (I.2), cette perturbation f induit une perturbation ϕ de la charge par rapport à l'écoulement moyen h ; la charge H est une FA admettant la décomposition :

$$H(x, y) = h(x) + \phi(x, y) \text{ avec } E(\phi) = 0 \quad (I.6)$$

dans laquelle la moyenne h est reliée à T_0 par la relation (I.3) ou (I.4) selon le cas.

Avec les expressions (I.5) et (I.6) l'équation de la diffusivité (I.1) s'écrit

$$\operatorname{div}((1 + f)\nabla(h + \phi)) + \frac{C}{T_0} = 0 \quad (I.7)$$

Soit, compte tenu de (I.4), et les termes d'ordre supérieur à 2 étant supposés négligeables :

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial x}(fh'(x)) = 0 \quad (I.8)$$

Pour $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$ l'équation précédente s'écrit:

– en l'absence de recharge :

$$\Delta\phi - \omega \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (I.9)$$

– avec une recharge constante et égale à C sur le champ :

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial x}((\alpha + \beta x) f) = 0 \quad (I.10)$$

avec $\alpha = -\omega + \frac{Ca}{2T_0}$ et $\beta = -\frac{C}{T_0}$

c – Modélisation des termes de perturbation : prise en compte des conditions aux limites

Après soustraction des termes moyens, les conditions aux limites (C.L.1) induisent pour les termes de perturbation les conditions aux limites suivantes (C.L.2):

$$\begin{aligned} \text{– charge imposée :} & \quad \phi(0, y) = \phi(a, y) = 0 & \quad 0 \leq y \leq b \\ \text{– limite imperméable :} & \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } y = b & \quad 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

Pour intégrer les équations (I.7) et (I.8) avec les conditions aux limites (C.L.2), on considère les Fonctions Aléatoires f et ϕ comme la restriction au champ initial $[0, a] \times [0, b]$ de Fonctions Aléatoires périodiques f^* et ϕ^* pour lesquelles la solution est calculable par développement de Fourier. La période et les relations de parité sont choisies de façon à assurer la régularité des fonctions f^* et ϕ^* et à en simplifier les développements.

Soient donc f^* et ϕ^* des FA d'ordre deux, périodiques, d'espérance nulle, et coïncidant respectivement avec f et ϕ sur le pavé de référence. Par continuité en $x = 0$ et $y = 0$, f^* est supposée paire, de période $(2a, 2b)$. D'après la relation (I.10) la FA ϕ^* de période $(2a, 2b)$ est supposée paire en y et d'après (C.L.2) impaire en x . Ces conditions de parité sont compatibles avec l'écoulement gisgoscopique suivant (Figure I.2) :

– Le plan est constitué d'un pavage de rectangles de côtés $2a, 2b$ sur lesquels la transmissivité est paire et égale à $T_0(1 + f^*)$

– L'écoulement est soumis au gradient de charge gigascopique $-\omega$ suivant Ox. En $x=na$ la charge est imposée et

$$h(na, y) = -\omega na$$

– En $y = nb$, $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$: le plan est découpé en tranches de largeur b , séparées par des "feuillettes" impénétrables.

– Soit C' la recharge sur $[-a,0] \times [0,b]$. Sur ce pavé $h''(x) = -\frac{C'}{T_0}$. La valeur de la charge en $x=-a$ et $x=0$ est imposée par le gradient gigascopique ; d'après (I.4)

$$h(x) = -\frac{C'}{2T_0}x^2 - (\omega + \frac{C'a}{2T_0})x$$

Avec les conditions de parité sur f^* et ϕ^* , la relation (I.10) appliquée à ce pavé s'écrit

$$\Delta\phi(x, y) + \frac{\partial}{\partial x}((\alpha - \beta x) f(x, y)) = 0$$

soit
$$h'(x) = -\frac{C'}{T_0}x - (\omega + \frac{C'a}{2T_0}) = \alpha - \beta x$$

et par suite
$$C' = -C$$

A la recharge $+C$ sur une tranche $2ma \leq x < (2m + 1)a$ correspond de même la recharge $-C$ sur la tranche suivante $(2m + 1)a \leq x < (2m + 2)a$.

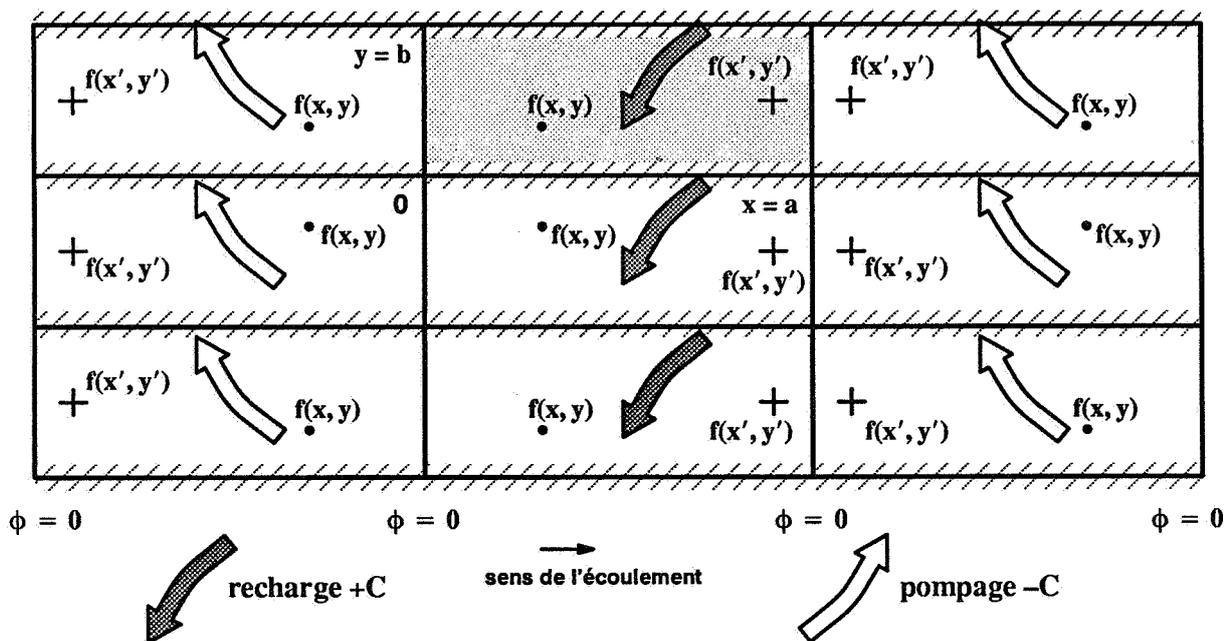


Figure I.2 : Cas d'une recharge uniforme – Périodisation des FA f^* et ϕ^*

Développement des FA f^* et ϕ^*

Les FA d'ordre 2 f^* et ϕ^* , périodiques de période $(2a, 2b)$, paires en y et respectivement paire et impaire en x , admettent un développement de la forme

$$f^*(x, y) = B_{00} + \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

et
$$\phi^*(x, y) = \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (I.11)$$

où les A_{mn} et les B_{mn} sont des Variables Aléatoires d'espérance nulle et de variance finie, avec

pour $m, n > 0$
$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b f(x, y) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dy$$

pour $n > 0$
$$B_{0n} = \frac{2}{ab} \int_0^a dx \int_0^b f(x, y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy$$

et une relation analogue pour B_{m0} ;

et
$$B_{00} = \frac{1}{ab} \int_0^a dx \int_0^b f(x, y) dy$$

Pour établir la relation entre les coefficients de f^* et ceux de ϕ^* , intégrons terme à terme la relation (I.10) :

$$\int_0^a dx \int_0^b \Delta \phi(x, y) \sin m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b} dy = - \int_0^a dx \int_0^b \frac{\partial}{\partial x} (f h'(x)) \sin m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b} dy$$

Remplaçant f^* et ϕ^* par leur développement, on obtient

$$A_{mn} = a_{mn} \left[m \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{2} \right) B_{mn} + \frac{8\beta}{\pi^2} \sum_{\substack{m' \geq 0 \\ m+m' \text{ impair}}}^{\infty} \frac{mm'^2}{(m^2 - m'^2)^2} B_{m'n} \right] \quad m \geq 1, n \geq 0$$

avec $a_{mn} = \frac{1}{\pi \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}$.

Par suite

$$A_{mn} = a_{mn} \sum_{m' \geq 0}^{\infty} c_{mm'} B_{m'n} \quad (I.12)$$

avec pour $m=m'$,

$$c_{mm'} = m \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{2} \right)$$

pour $m \neq m'$ et $m + m'$ pair,

$$c_{mm'} = 0$$

et $m \neq m'$ et $m + m'$ impair,

$$c_{mm'} = \frac{8\beta}{\pi^2} \frac{mm'^2}{(m^2 - m'^2)^2}$$

Développement des covariances C_f^* et C_ϕ^*

f^* étant une FA périodique et paire, sa covariance non stationnaire $C_f^*(x, x'; y, y') = E(f^*(x, y) f^*(x', y'))$ est également périodique et paire par rapport à chacune des variables ; par conséquent C_f^* admet le développement

$$C_{f^*}(x, x'; y, y') = \sum_{m, m', n, n'=0}^{\infty} \mathfrak{B}_{mm'nn'} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m'\pi x'}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n'\pi y'}{b}$$

Comme

$$E[f^*(x, y)f^*(x', y')] = \sum_{m, m', n, n'=0}^{\infty} E(B_{mn}B_{m'n'}) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m'\pi x'}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n'\pi y'}{b}$$

il vient par identification terme à terme

$$\mathfrak{B}_{mm'nn'} = E(B_{mn} B_{m'n'})$$

avec pour $m, m', n, n' > 0$

$$\mathfrak{B}_{mm'nn'} = \frac{16}{a^2 b^2} \int_0^a dx \int_0^a dx' \int_0^b dy \int_0^b dy' C_f(x, x'; y, y') \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m'\pi x'}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n'\pi y'}{b} dy'$$

et les relations habituelles si m, m', n ou $n' = 0$.

Sur le pavé $[0, a] \times [0, b]$, la covariance C_f de f et celle C_{f^*} de f^* coïncident.

Ce procédé de périodisation est valable pour toute FA f d'ordre 2, non nécessairement stationnaire. Lorsque f est la restriction d'une FAST le calcul des $\mathfrak{B}_{mm'nn'}$ se simplifie, car alors

$$C_{f^*}(x, x'; y, y') = C_f(x - x'; y - y') \quad \begin{array}{l} 0 \leq x, x' \leq a \\ 0 \leq y, y' \leq b \end{array}$$

La parité et la périodicité de la covariance non stationnaire $C_{\phi^*}(x, x'; y, y') = E(\phi^*(x, y)\phi^*(x', y'))$ se déduisent de celles de ϕ^* . Par suite C_{ϕ^*} admet un développement de la forme :

$$C_{\phi^*}(x, x'; y, y') = \sum_{m, m'=1}^{\infty} \sum_{n, n'=0}^{\infty} \mathcal{A}_{mm'nn'} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x'}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n'\pi y'}{b}$$

Remplaçant ϕ^* par son expression (I.11) dans le calcul de la covariance $E(\phi^*(x, y)\phi^*(x', y'))$, on obtient l'expression suivante pour les coefficients $\mathcal{A}_{mm'nn'}$

$$\mathcal{A}_{mm'nn'} = E(A_{mn} A_{m'n'})$$

En l'absence de recharge, $\beta = 0$ et $A_{mn} = \frac{\omega}{\pi a} \frac{m}{m^2 + \frac{n^2}{b^2}} B_{mn}$; par suite :

$$\mathcal{A}_{mm'nn'} = \frac{\omega^2}{\pi^2 a^2} \frac{mm'}{(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})(\frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2})} \mathfrak{B}_{mm'nn'}$$

C_{ϕ^*} est symétrique par rapport aux axes du rectangle :

$C_{\phi^*}(x, x'; y, y') = C_{\phi^*}(a - x, a - x'; y, y')$, et de même en remplaçant y et y' par $b - y$ et $b - y'$.

La covariance croisée entre f^* et ϕ^* s'obtient de façon analogue :

$$E[f^*(x, y)\phi^*(x', y')] = \sum_{\substack{m=0 \\ m'=1 \\ n, n'=0}}^{\infty} \frac{-m\omega}{a\pi(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})} \mathfrak{B}_{mm'nn'} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x'}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n'\pi y'}{b}$$

En présence d'une recharge, d'après la relation (I.12)

$$\mathcal{A}_{mm'nn'} = a_{mn} a_{m'n'} \sum_{k, k'=0}^{\infty} c_{mk} c_{m'k'} \mathfrak{B}_{knk'n'}$$

La somme double se réduit aux seuls termes avec $k=m$ ou $k+m$ impair, et $k'=m'$ ou $k'+m'$ impair.

La covariance croisée entre f^* et ϕ^* s'obtient par un calcul analogue.

II – VALIDATION ET LIMITES DU MODÈLE : ETUDE VARIOGRAPHIQUE

La relation (I.8) entre f et ϕ est fondée sur la linéarisation de l'équation d'écoulement. Afin de préciser le domaine de validité de cette approximation, nous choisissons comme référence le résultat des calculs d'écoulement par la méthode des différences finies (code MARTHE développé au BRGM), méthode qui ne nécessite pas de linéarisation. Ce dernier résultat noté (DF) diffère de la solution exacte ; cependant, pour le maillage retenu, les débits résiduels sont négligeables et l'approximation est jugée satisfaisante. La question du changement d'échelle est négligée : dans la modélisation géostatistique, la transmissivité est supposée ponctuelle alors que pour la résolution par différences finies la valeur de la transmissivité en un noeud du maillage prend le sens de la valeur équivalente sur la maille ; cette approximation est jugée admissible, le rapport maille/portée étant ici inférieur à 6%.

En pratique les valeurs (DF) de "référence" sont obtenues de la façon suivante : 200 simulations non conditionnelles de la transmissivité sont utilisées en entrée de MARTHE, qui en déduit pour chacune d'elles la charge pour les conditions aux limites (C.L.1). La covariance non stationnaire des perturbations de la charge, calculable pour tout couple de points x et $x+h$ comme la moyenne de $\phi(x).\phi(x+h)$ sur les 200 résultats des simulation d'écoulement, est alors comparée au résultat prévu par les modèles géostatistiques. Le nombre des simulations a été choisi empiriquement de façon que les résultats moyens aient une faible variabilité.

Dans la suite, (M1) désigne le modèle développé par A. Dong, pour lequel les conditions aux limites sont rejetées à l'infini. f étant ici une FAST, ϕ est une FAI-0 dont le variogramme est connu. Le modèle intégrant les conditions aux limites est noté (M2).

Pour la comparaison des modèles, la configuration retenue est la suivante :

- Le champ est carré de côté $a=b=600m$. La charge est imposée en $x=0$ et $x=a$ suivant le gradient gigascopique $\omega = + 0.01$. En $y=0$ et $y=b$ les limites sont imperméables.
- La transmissivité est supposée lognormale, de variance logarithmique $\sigma^2 = 0.5$. La covariance logarithmique est sphérique, de portée $\lambda = 300$, grande par rapport au champ. L'approximations du rejet à l'infini des conditions aux limites serait ici assez grossière. Pour comparaison, une deuxième série de simulations est effectuée avec une variance logarithmique très faible, $\sigma^2 = 0.01$.

La covariance non stationnaire de ϕ est calculée avec l'approximation au premier ordre de f utilisée par A. Dong. La transmissivité T , FA lognormale d'espérance T_0 s'écrit $T = T_0 e^{\sigma Y - \frac{\sigma^2}{2}}$ où Y est une FA gaussienne réduite de covariance ρ . La covariance du terme de perturbation $f = \frac{T}{T_0} - 1$ est alors $C_f = e^{\sigma^2 \rho} - 1$. Lorsque la variance logarithmique σ^2 est faible, on obtient au premier ordre

$$f \approx \sigma Y \text{ et } C_f \approx \sigma^2 \rho \quad (\text{II.1})$$

La comparaison des variogrammes non stationnaires de ϕ dans le modèle (M2), calculés d'après l'expression exacte de C_f ou son approximation au premier ordre montre que pour $\sigma^2 \leq 0.5$ les ajustements sont peu différents.

a – Comparaison des modèles avec et sans conditions aux limites à la solution de référence

Pour (DF) et (M2) le variogramme de ϕ dépend des points x et $x+h$ séparément. Pour la comparaison, les variogrammes expérimentaux et théoriques correspondant à une même distance h sont moyennés pour plusieurs valeurs du point d'appui x .

Variogramme simple de ϕ (Figure II.1)

Le variogramme "expérimental" de ϕ est nul suivant Ox pour $h=a$ et suivant Oy en $x=0$ ou $x=a$, pour tout h . Lorsque la variance de f est faible, le variogramme non stationnaire du modèle (M2) est très proche du variogramme expérimental, car alors la linéarisation de l'équation de l'écoulement et l'approximation sur C_f sont tout-à-fait justifiées. Pour une variance de 0.5, ce modèle donne une variabilité un peu plus forte que (DF); suivant Oy l'ajustement reste très satisfaisant à proximité des bordures, du fait de l'influence des conditions aux limites.

Dans le modèle (M1), ϕ est une FAI-0 dont le variogramme ne dépend pas du point d'appui x , mais seulement de la distance h . A proximité des bordures, ce modèle donne toujours de mauvais ajustements, puisque les conditions aux limites sont ignorées. La portée du variogramme de f étant grande vis-à-vis du champ, ce modèle diverge fortement du résultat du calcul d'écoulement, sauf selon Oy dans la bande centrale, pour laquelle les deux modèles (M1) et (M2) sont équivalents.

Covariance croisée des termes de perturbation (Figure II.2)

La covariance croisée $E(f(x,y)\phi(x',y'))$ a même parité en x' et y' que ϕ . Cette covariance prend des valeurs très faibles en module. Après normation par les écarts-types (écart-type non stationnaire pour ϕ), les corrélogrammes montrent que selon Ox la corrélation différée est maximum en valeur absolue pour une distance égale au quart du champ. Cette corrélation différée est à prendre en compte lors du choix du voisinage de co-krigeage.

b – Cas d'une recharge constante (Figure II.3)

Soit une recharge de 70 mm, valeur choisie par référence à un cas réel. Par rapport au cas sans recharge, la variabilité du terme de perturbation augmente légèrement. La

covariance de ϕ n'est ici plus symétrique par rapport à l'axe $x=a/2$, car le sens de l'écoulement intervient. L'ajustement des variogrammes expérimentaux (modèle M1) est correct, y compris lorsque la variance de f est égale à 0.5 .

c – Variance du terme de perturbation (Figure II.4)

La linéarisation de l'équation d'écoulement suppose implicitement une faible variabilité du terme de perturbation. Avec l'approximation (II.1), si l'équation aux dérivées partielles liant les termes de perturbation était effectivement linéaire, un facteur multiplicatif sur la variance de f se traduirait par le même facteur sur la variance et le variogramme non-stationnaires de ϕ . T étant supposée lognormale, nous choisissons comme référence le cas d'une variance logarithmique égale à 0.01, pour laquelle les approximations sont négligeables. Si ces approximations restaient négligeables pour $\sigma^2 = 0.50$, le rapport $\text{Var } \phi_{0.5}(x, y) / 50 \text{Var } \phi_{0.01}(x, y)$ serait constant et égal à 1. Ce rapport, calculé à partir de la variance expérimentale de 200 simulations d'écoulement pour chacun des deux cas, montre que les approximations sont acceptables, conduisant cependant à une légère sous-estimation de la variabilité aux points situés à proximité des limites à charge imposée et à une surestimation loin de ces limites.

En pratique, la variance du terme de perturbation atteint couramment 2.5 voire 5 et la covariance C_ϕ doit être calculée d'après l'expression exacte de C_f , ce qui conduit à des calculs pénibles pour le modèle (M1).

III – COKRIGEAGE DES TERMES DE PERTURBATION

Pour cette étude méthodologique, le résultat du co-krigeage est comparé à une réalité supposée connue, obtenue en effectuant une simulation d'écoulement par différences finies, sur une simulation géostatistique de la transmissivité. Dans un cas réel, la valeur moyenne T_0 de la transmissivité est inconnue et doit être estimée. Cette question n'est pas abordée ici.

Pour le cokrigeage, la configuration diffère légèrement de la précédente (Figure III.1) :

- Le champ est carré de côté $a=b=640\text{m}$. L'écoulement est parallèle et orienté suivant Ox . La charge est imposée : $H=154.8$ en $x=0$ et $H=145.2$ en $x=a$, ce qui correspond au gradient gigantesque $\omega = -0.015$. En $y=0$ et $y=b$ les limites sont imperméables.
- La transmissivité est lognormale, d'espérance et de variance logarithmique respectives $m = 5.3$ et $\sigma^2 = 0.5$ (espérance et variance de la transmissivité : $M = 257$. et $\Sigma^2 = 42927$.). La covariance logarithmique est sphérique, de portée $\lambda = 150$.

i) Forte densité d'information (Cas1 : Figure III.2 et Tableau III)

129 mesures de la charge et 30 mesures de la transmissivité ont été relevées. Pour le co-krigeage effectué avec le modèle (M1), 40 points de données fictifs (charge imposée ou flux nul) sont rajoutés (10 sur chaque bordure), pour contraindre le résultat sur les limites.

Etant donné le nombre de mesures pour chacune des variables, l'estimation de la charge est plus précise que celle de la transmissivité. Les résultats du co-krigeage sont légèrement meilleurs avec le modèle (M2), le modèle (M1) tendant à une

sous-estimation de f ; en bordure, les écarts sont localement importants. Pour présenter les résultats de façon synthétique, supposons linéaire la régression entre la valeur réelle (connue sur la simulation d'écoulement) et son estimation; expérimentalement, cette droite admet l'équation suivante :

– co-krigeage de la charge :

. (M1) modèle sans conditions aux limites : $\phi = .995\phi^* + .002$; $\rho(\phi, \phi^*) = .997$

. (M2) modèle avec conditions aux limites : $\phi = .995\phi^* + .001$; $\rho(\phi, \phi^*) = .996$

– co-krigeage de la transmissivité (problème inverse) :

. (M1) modèle sans conditions aux limites : $f = .969f^* + .118$; $\rho(f, f^*) = .835$

. (M2) modèle avec conditions aux limites : $f = .977f^* + .078$; $\rho(f, f^*) = .842$

ii) Faible densité d'information (Cas 2 : Figure III.3 et Tableau III)

La moitié des données sont conservées, soit 64 mesures de la charge et 14 mesures de la transmissivité. Comme précédemment 10 conditions de charge ou de flux nul sont rajoutées si nécessaire sur chaque bordure.

L'estimation de la charge reste assez semblable pour les deux modèles, ce qui tendrait à montrer que, pour cette configuration, l'ajout des 10 conditions en bordure contraint suffisamment le modèle (M1). Les différences sont localement plus importantes dans la partie Est, les données y étant moins nombreuses.

La régression expérimentale, supposée linéaire, entre la valeur vraie et la valeur estimée admet l'équation suivante :

– co-krigeage de la charge :

. (M1) modèle sans conditions aux limites : $\phi = .982\phi^* - .003$; $\rho(\phi, \phi^*) = .989$

. (M2) modèle avec conditions aux limites : $\phi = .980\phi^* - .003$; $\rho(\phi, \phi^*) = .989$

– co-krigeage de la transmissivité (problème inverse) :

. (M1) modèle sans conditions aux limites : $f = .977f^* + .112$; $\rho(f, f^*) = .805$

. (M2) modèle avec conditions aux limites : $f = 1.011f^* + .035$; $\rho(f, f^*) = .824$

L'influence du modèle apparaît plus clairement lorsque le nombre de points de données fictifs rajoutés pour le cokrigage dans le modèle (M1) diminue de moitié (Cas 3 : Figure III.4). En bordure, l'écart-type d'estimation augmente puisque dans ce modèle, des points de données ont été supprimés. La différence apparaît principalement pour la charge, qui peut varier sur la limite en $x=0$ ou $x=a$, comme cela se voit clairement sur le nuage de corrélation. L'équation de la droite de régression expérimentale est ici

– co-krigeage de la charge :

. (M1) modèle sans conditions aux limites : $\phi = .991\phi^* - .006$; $\rho(\phi, \phi^*) = .988$

– co-krigeage de la transmissivité (problème inverse) :

. (M1) modèle sans conditions aux limites : $f = .965f^* + .124$; $\rho(f, f^*) = .800$

D'un point de vue pratique, l'amélioration du cokrigage dans le modèle (M2) se fait au prix d'un allongement prohibitif du temps de calcul car en chaque point les covariances non stationnaires sont calculées par développement de Fourier. A proximité des bordures, des problèmes numériques peuvent apparaître du fait de la troncature des développements.

IV – CONCLUSION

Le modèle présenté ici permet d'intégrer les conditions aux limites (charge imposée, limite imperméable) lorsqu'une déformation de l'espace permet de se ramener au cas élémentaire du rectangle avec deux conditions de charge et deux bordures imperméables. Le modèle est général en ce sens que le terme de perturbation de la transmissivité peut ne pas être supposé stationnaire.

L'analyse variographique des termes de perturbation de la transmissivité et de la charge est améliorée, car la non-stationnarité induite par les conditions aux limites est prise en compte.

Pour le cokrigeage, les temps de calcul prohibitifs de la covariance de ϕ et de la covariance croisée de ϕ et f par leur développement de Fourier conduiront à rechercher des approximations pour le modèle structural, approximations permettant une restitution correcte des variables au voisinage des bordures. On peut penser tirer parti de l'analogie des résultats obtenus par les modèles (M1) et (M2) loin des bordures, au moins lorsque les données sont en nombre suffisant.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

MATHERON G., La théorie des fonctions Aléatoires Intrinsèques généralisées. Note N-252, 1971 Centre de Géostatistique, ENSMP, Fontainebleau

MATHERON G., The intrinsic random function and their applications. 1973 Adv Appl prob, n 5.

DONG A., Estimation géostatistique des phénomènes régis par des équations aux dérivées partielles. Thèse de Docteur en Géostatistique, ENSMP, Janvier 1990

de MARSILY G., Hydrogéologie quantitative. Collection Sciences de la Terre, MASSON, Paris, 1981.

LE LOC'H G., Etude de la composition des perméabilités par des méthodes variationnelles. Thèse de Docteur en Géostatistique, ENSMP, Nov. 1987, 163 p.

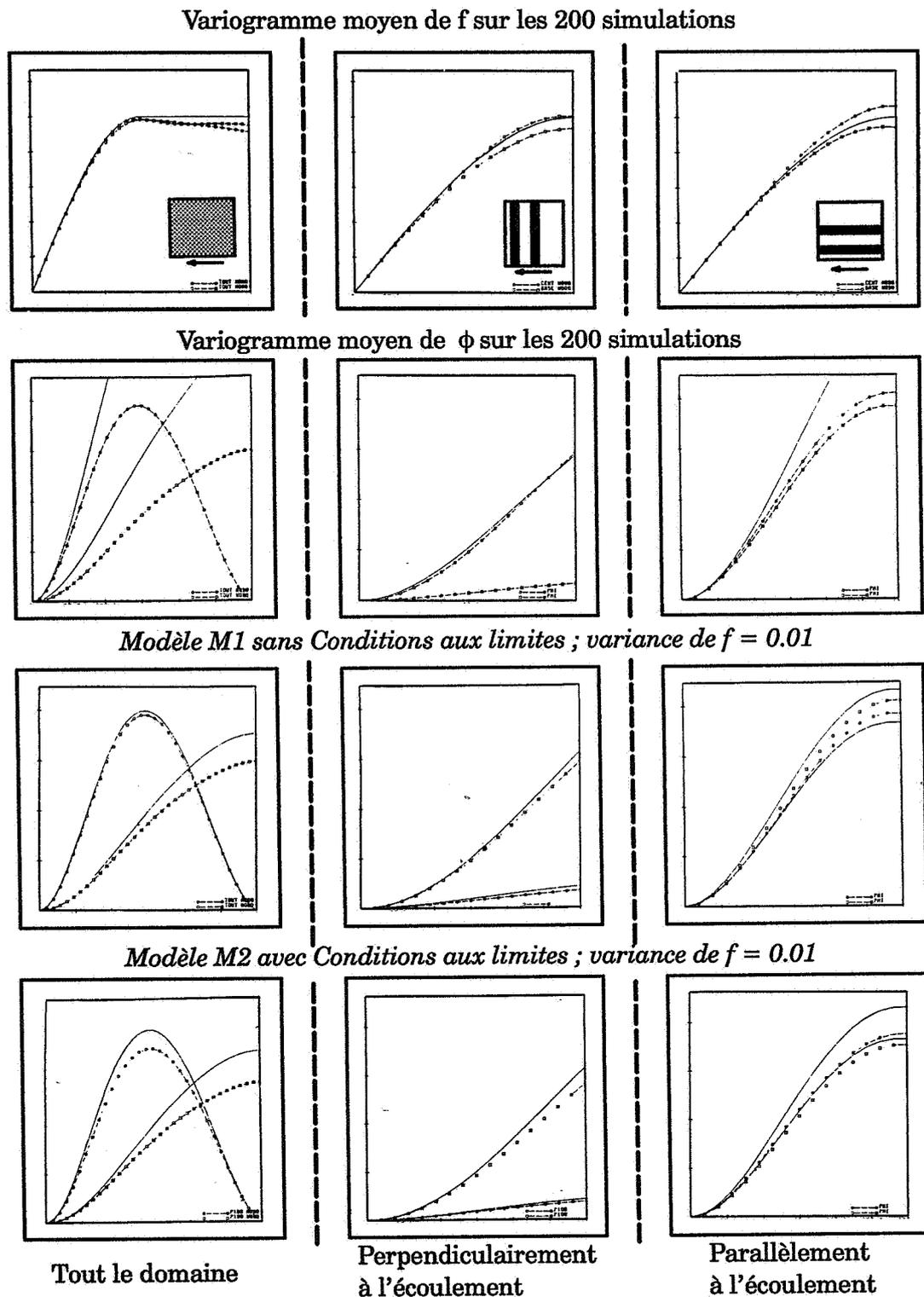


Figure II.1 – Variogramme de la perturbation ϕ de la charge
 Comparaison des modèles (M1) sans conditions aux limites et (M2) avec conditions aux limites au résultat du calcul d'écoulement par différences finies (code MARTHE du BRGM)

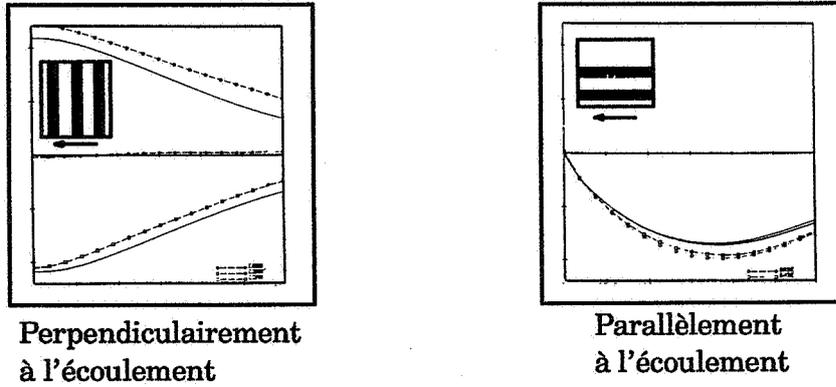


Figure II.2 - Corrélogramme de ϕ_x et ϕ_{x+h}

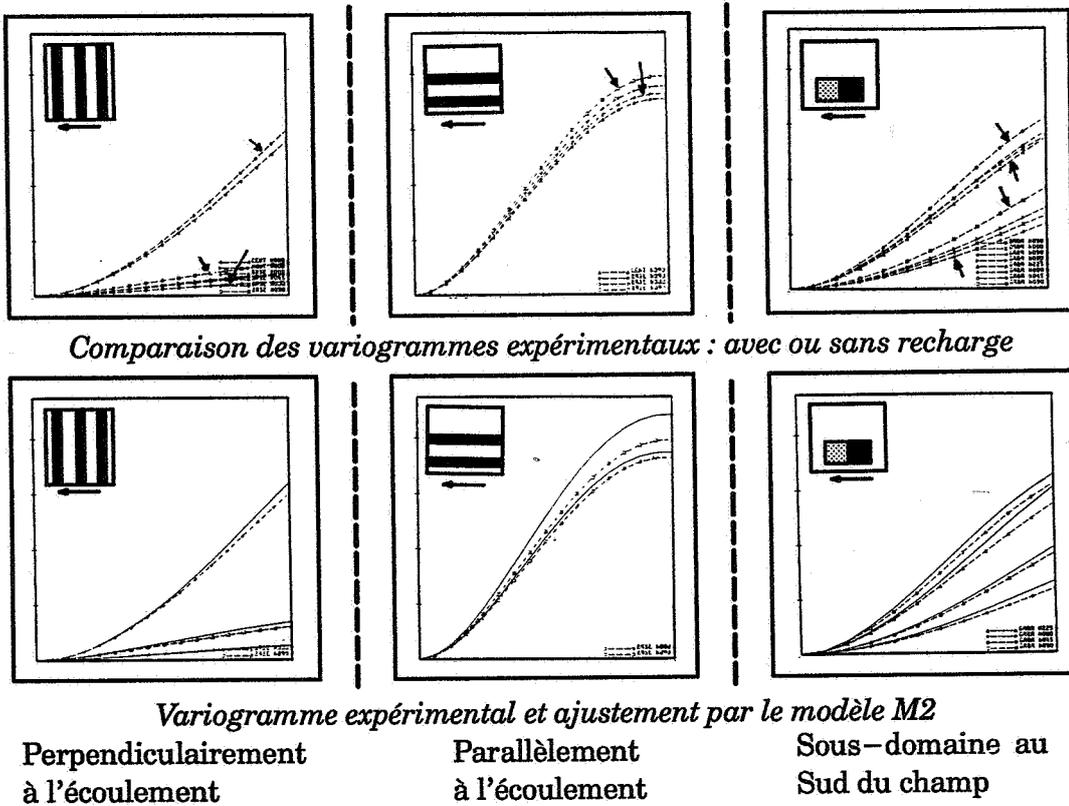


Figure II.3 - Recharge constante : Variogramme de ϕ
Variance de $f = 0.5$

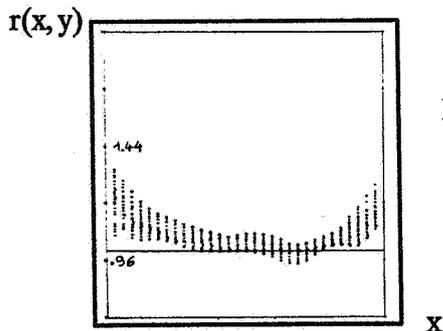


Figure II.4 - Variance non stationnaire de ϕ

Modèles par différences finies :
variance $f = 0.5$ et variance $f = 0.01$

$$\text{Calcul expérimental de } r(x, y) = \frac{\text{Var}\phi_{0.5}(x, y)}{50\text{Var}\phi_{0.01}(x, y)}$$

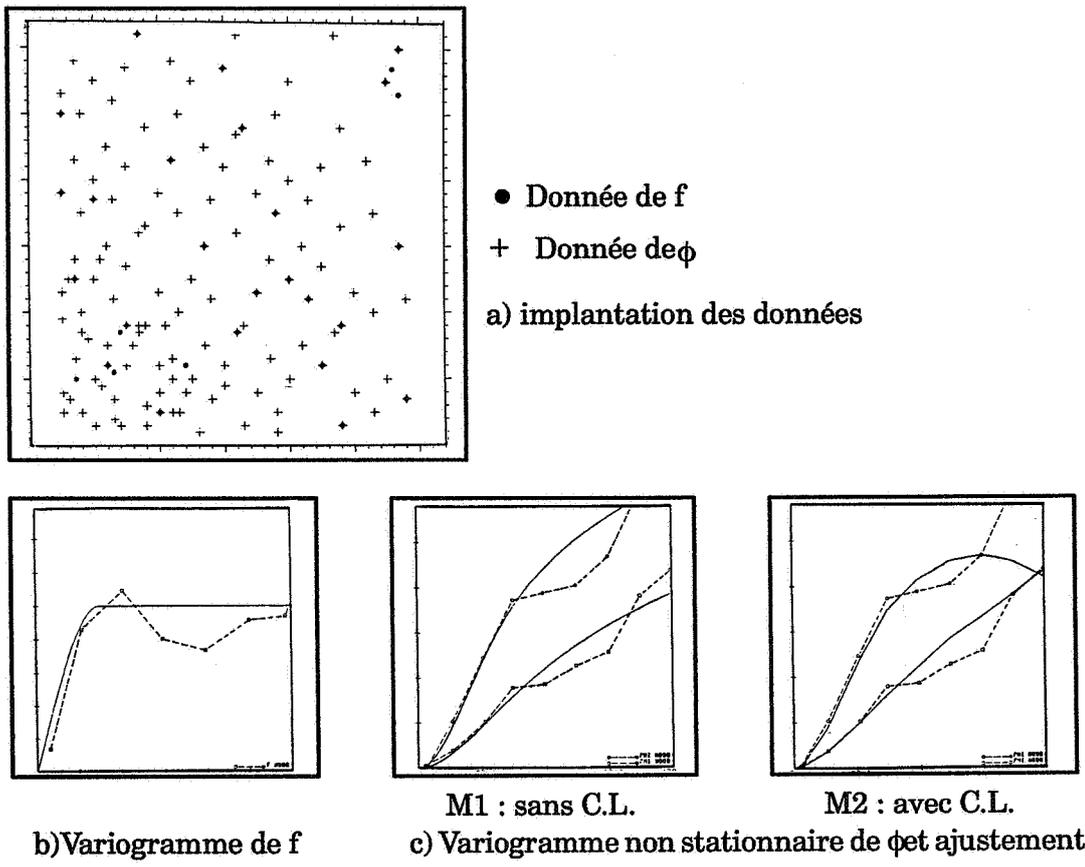


Figure III.1 : Co-krigeage de f et ϕ

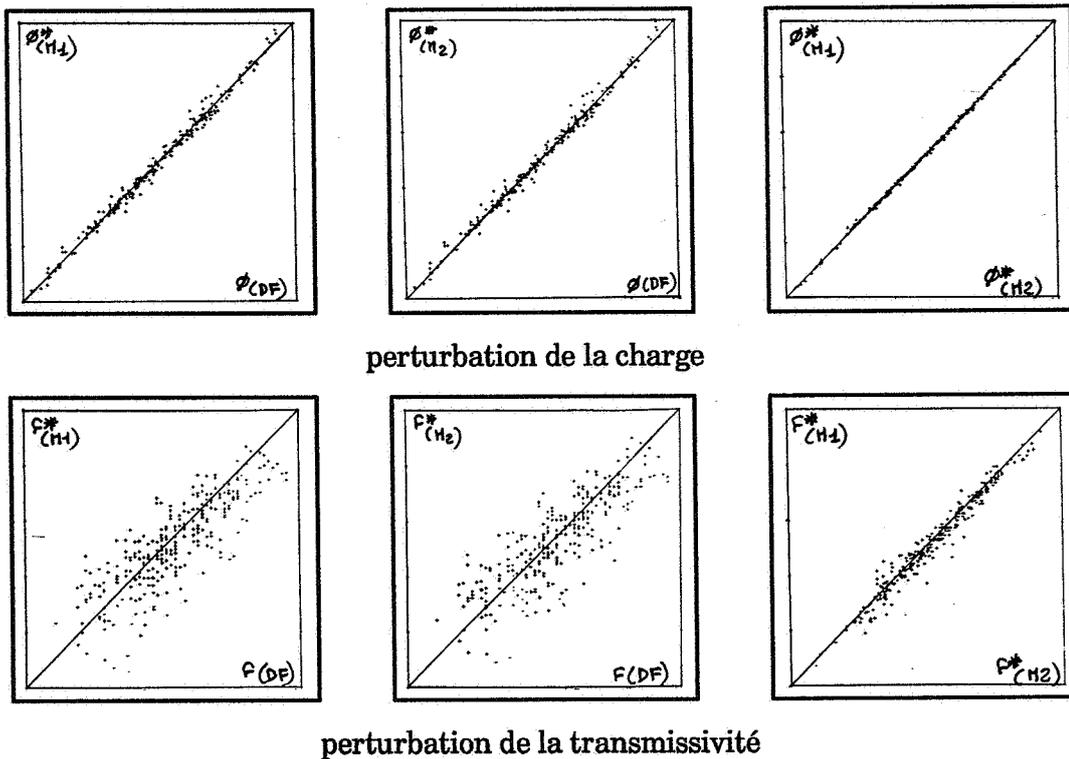


Figure III.2 : Résultat du Co-krigeage : Cas 1 toutes données

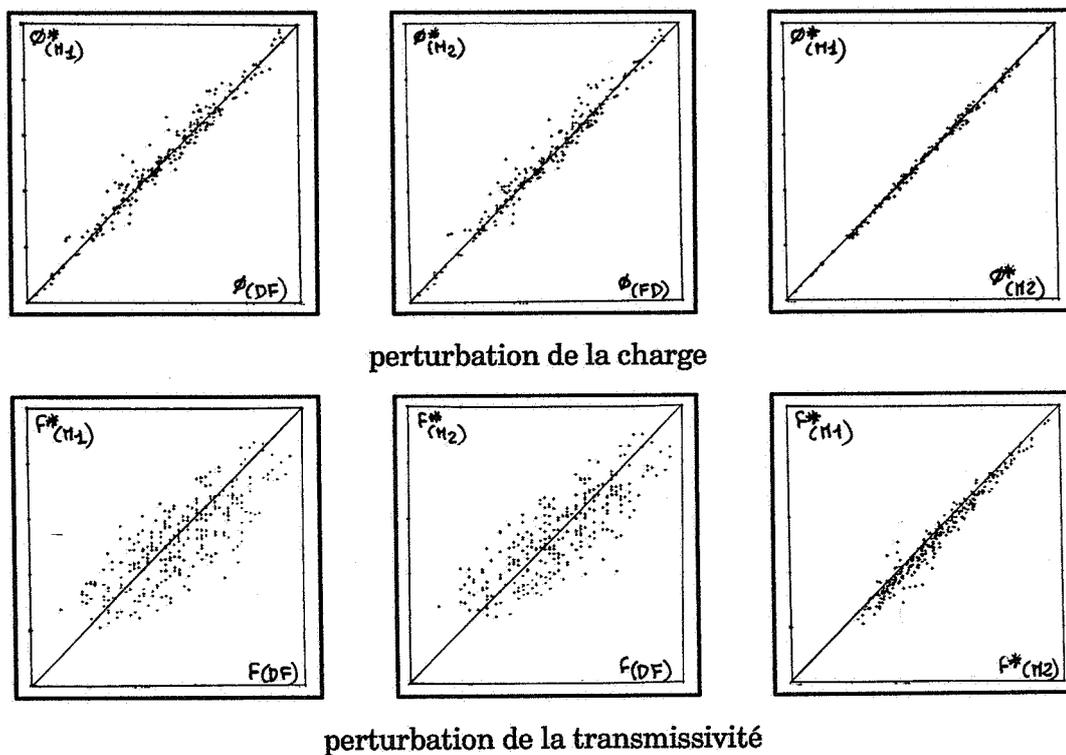
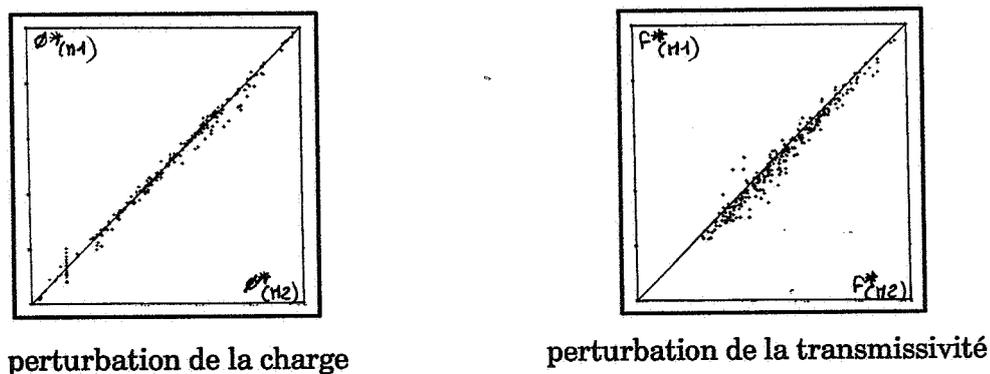


Figure III.3 : Résultat du Co-krigeage : Cas 2 la moitié des données



**Figure III.4 : Résultat du Co-krigeage : Cas 3
Réduction du nombre de points fictifs en bordure pour le modèle M1**

Tableau III – Moyenne de la valeur absolue de l'erreur d'estimation

Perturbation	Modèle Gst.	Cas 1	Cas 2	Cas 3
charge ϕ	M1 : sans C.L.	.0286	.0491	.0511
	M2 : avec C.L.	.0282	.0477	.0477
transmissivité f	M1 : sans C.L.	.3366	.3697	.3719
	M2 : avec C.L.	.3215	.3469	.3469

Cas 1 : toutes données

Cas 2 : la moitié des données

Cas 3 : la moitié des données

(M1) : 40 points fictifs en bordure

(M1) : 40 points fictifs en bordure

(M1) : 20 points fictifs en bordure