M. Matheron

B.R.M.A.
Cinq Maisons
MAISON CARREE

ALGER, le 1° JUIN 1955

GM/CC

# NOTE STATISTIQUE N°9

## Démonstration de la loi log-normale

Dans cette note, je me propose de démontrer que la log-normalité se déduit du seul principe de similitude. Le principe de similitude a été introduit dans les notes 7 et 8, mais son énoncé supposait déjà soit la loi log-normale, soit la loi log-binomiale. Le but de cette note est de définir le principe indépendamment de toute hypothèse relative à la loi théorique, et de montrer que le principe, ainsi défini, entraine comme conséquence la log-normalité.

1°) Définition de la teneur relative - Soit x la teneur d'un volume v prélevé dans un volume Vi de teneur $m_i$. J'appelle teneur relative y de v par rapport à Vi le quotient

$$(1) \qquad \boxed{y = \frac{x}{m_i}}$$

Remarque - Dans l'hypothèse de la permanence de la lognormalité, y est une variable log-normale de moyenne 1 et de variance $\sigma_i^2$. En effet:

$$(2) \qquad Ly = Lx - L\,m_i$$

Or x et $m_i$ sont deux variables log-normales de même moyenne m dans l'ensemble du gisement V, de variances respectives $\sigma^2$ et $\sigma_\mu^2$, et sont liées par un coefficient de corrélation

$$\rho = \sigma_\mu / \sigma$$

.../...

Leurs médianes respectives sont:

$$\mu = m e^{-\sigma^2/2} \qquad \mu' = m e^{-\sigma_{\mu}^2/2}$$

y est donc une variable log-normale de médiane:

$$\mu_y = \frac{\mu}{\mu'} = e^{-\sigma^2/2 + \sigma_{\mu}^2/2} = e^{\sigma_i^2/2}$$

et de variance

$$\sigma_y^2 = \sigma^2 + \sigma_{\mu}^2 - 2\rho\sigma\sigma_{\mu} = \sigma^2 - \sigma_{\mu}^2 = \sigma_i^2$$

donc de moyenne

$$m_y = \mu_y e^{\sigma_y^2/2} = 1$$

Cette remarque justifie l'énoncé suivant:

<u>2°) Principe de similitude -</u> "La teneur relative y du volume v par rapport au volume V, et la teneur relative y' du volume v' par rapport au volume V' obéissent à la même loi de probabilité pourvu que $\frac{V}{v} = \frac{V'}{v'}$. De plus, la valeur moyenne de y est toujours égale à 1, quels que soient V et v".

Aucune hypothèse n'est avancée en ce qui concerne la loi de y. On pose simplement:

$$(2) \quad \begin{cases} m_y = 1 \\ \sigma_y^2 = g(V/v) \quad \ldots \text{(variance liée)} \end{cases}$$

**3°) Démonstration de la log-normalité** - Considérons un volume $v_1$ intérieur à un volume $v_2$, lui même intérieur à un volume $v_3$ etc..., tous intérieurs à un volume $v_n$. Les valeurs de ces volumes sont telles que l'on ait

$$(3) \qquad \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_2} = \dots = \frac{v_p}{v_{p-1}} = \dots = \frac{v_n}{v_{n-1}} = C$$

C étant une constante; on en déduit:

$$(4) \qquad v_p = C^{p-1} v_1$$

Soient $y_1$ la teneur relative de $v_1$ dans $v_2$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_2$ | " | " | $v_2$ | " | $v_3$ |
| $y_p$ | " | " | $v_p$ | " | $v_{p+1}$ |
| $y_{n-1}$ | " | " | $v_{n-1}$ | " | $v_n$ |

et $x_1, x_2 \dots x_p \dots x_n$, les teneurs absolues des volumes $v_1, v_2 \dots v_p \dots v_n$ -

Du principe de similitude et des relations (3), on déduit que les yi peuvent être considérés comme autant de valeurs d'une même variable aléatoire Y de valeur moyenne égale à l'unité.

Considérons maintenant la teneur relative de $v_1$ par rapport à $v_n$

$$(5) \qquad y'_1 = \frac{x_1}{x_n} = \frac{x_1}{x_2} \; \frac{x_2}{x_3} \; \frac{x_3}{x_4} \dots \frac{x_{n-1}}{x_n} = y_1 \; y_2 \; y_3 \dots y_{n-1}$$

Prenons son logarithme

$$(6) \qquad L\, y'_1 = \sum_{1}^{n-1} L\, y_i$$

. . . / . . .

Le volume $v_n$ restant constant, faisons tendre n vers l'infini et c vers 1 .

Le rapport $\frac{v_1}{v_2}$ étant très voisin de l'unité, la teneur relative $y_1$ a une variance très faible, d'autant plus faible que $v_1/v_2$ est plus voisin de 1 ; en effet, cette variance s'annule pour $\frac{v_1}{v_2} = 1$

Il en résulte que l'expression (6) est la somme d'un très grand nombre de varia--bles aléatoires de variances très petites. C'est donc une variable normale (loi des grands nombres). Par suite $y'_1$ est une variable log-normale.

Soit $h^2$ la variance (très petite) de $Ly_1$. Celle de $Ly'_1$ est, à condition d'admettre que les $y_i$ soient des variables indépendantes:

$$(7) \qquad \sigma^2 = (n-1)\,h^2$$

Or on a :

$$(4) \qquad \sigma_n = c^{n-1}\,\sigma_1$$

d'où :

$$(8) \qquad n-1 = \frac{L\, v_n/v_1}{L c}$$

On retrouve la formule de de WIJS:

$$(9) \qquad \sigma^2 = \alpha\, L \frac{v_n}{v_1}$$

avec

$$(10) \qquad \alpha = \frac{h^2}{L c}$$

Aucune hypothèse n'ayant été formulée sur les volumes $v_i$, ni sur la loi des $y_i$, on voit que le principe de similitude entraine:

1°) – que la teneur relative $y$ de n'importe quel volume $v$ dans n'importe quel volume $V$ est une variable log-normale quels que soient $v$ et $V$. Il en est de même de la teneur réelle $x = my$, puisqu'ici $m$ est une constante. La permanence de la log-normalité est donc démontrée.

2°) Que la variance logarithmique de $y$, donc aussi celle de $x$, est donnée par la formule de de WIJS.

Signé: G. MATHERON