M. Matheron

B.R.M.A.
Cinq Maisons
MAISON-CARREE

/GM/CC/

MAISON-CARREE, le 15 Février 1955

Note statistique n°8

Equation du Correlogramme $\rho = G\,(d;\ v;\ V)$

1°) Notations soient:

ρ_i $\cancel{R_i}$ le coefficient de corrélation entre 2 volumes v distants de d dans Vi
ρ $\cancel{R}$ " v " d " V
ρ_i' $\cancel{R_i'}$ " 2v " d " Vi
ρ' $\cancel{R'}$ " 2v " d " V
ρ_{oi} $\cancel{R_{oi}}$ " entre 2 volumes v voisins dans Vi
ρ_o Po " " " V

2°) Variation de ρ à d et v constant - La formule (5) de la note statistique n°4 nous donne immédiatement

$$\sigma^2\,(1 - p) = \sigma_i^2\,(1 - \rho_i) = A = C^{te}$$

d'où

$$(1) \qquad \boxed{\rho = 1 - \frac{A}{\sigma^2}}$$

où A ne dépend que de v et de d

2°) Variation de P à d et V constants - Ici le volume v de l'échantillon est pris comme variable. Nous supposons fixé le mode de variation de v (cf Note St. n°4, p.3 infine), et soit 1 et 2 d'une part, de l'autre 3 et 4, 2 couples de volumes v tels que la réunion de 1 et 2 ou de 3 et 4 donne un volume 2v conformément au mode de variation adopté. Soient P et p les coefficients de corrélation entre les teneurs et les log teneurs de 1 et 3. Admettons qu'ils sont égaux aux coëfficients de corrélation entre 1 et 4, entre 2 et 3 et entre 2 et 4.

Cette hypothèse sera justifiée, quelque soit le mode d'accroissement choisi, pourvu que d soit assez grand par rapport au diamètre de v, les distances entre 1 et 3 et 1 et 4 étant à peu près égales.

Considérons alors les termes du second ordre du développement de la fonction caractéris--tique de la loi de probabilité à 4 variables x_1 x_2 x_3 et x_4, teneurs de 1, 2, 3 et 4:

$$\frac{\Sigma}{2}^2\left[u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + 2\,P_o\,(u_1\,u_2 + u_3\,u_4) + 2P\,(u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4)\right]$$

Le développement pour la loi à 2 variables $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{x_3 + x_4}{2}$ est =

$$\frac{\Sigma}{2}^2\left[(u^2 + V^2)\left(\frac{1 + P_o}{2}\right) + 2\,PuV\right]$$

Le coefficient P' de correlation entre les teneurs des volumes $(v_1 + v_2)$ et $(v_3 + v_4)$ est:

$$P' = \frac{2P}{1 + P_o}$$

On passe des P aux p (coefficient de correlation des log teneurs) par

$$\rho = \frac{e^{\rho\sigma^2} - 1}{e^{\sigma^2} - 1}. \qquad \cancel{P = \frac{e^{\sigma^2} - 1}{e^{\ } - 1}} \quad \text{(Note St. n°4, page 4)}$$

Il vient:

$$\frac{e^{\rho'\sigma'^2} - 1}{e^{\sigma'^2} - 1} = 2\,\frac{e^{P\sigma^2} - 1}{e^{\sigma^2} - 1} \times \frac{e^{\sigma^2} - 1}{e^{P_o\sigma^2} + e^{\sigma^2} - 2}$$

Mais la formule (6) de la note St. 4 nous apprend que,

$$e^{\rho_o\sigma^2} = 2\,e^{\sigma'^2} - e^{\sigma^2}$$

De sorte que l'équation se réduit à :

$$(2) \quad \boxed{p'\,\sigma'^2 = p\,\sigma^2}$$

Lorsque v varie seul, et pourvu que d soit assez grand, on a

$$(2)' \quad \boxed{p = \frac{B}{\sigma^2}}$$

où B ne dépend que de V et d

.../...

3°) <u>Variation de p à d constant</u> Rapprochons les formules (1) et (2) et tenons compte de la formule (4) de la Note 4:

$$\sigma^2 (v, V) = f(V) - f(v)$$

Il vient

$$p = 1 - \frac{A(v,d)}{f(V) - f(v)} = \frac{B(V,d)}{f(V) - f(v)}$$

D'où

$$f(V) - f(v) = B(V,d) + A(v,d)$$

Il en résulte que A et B sont de la forme

$$\begin{cases} A = - f(v) + g(d) \\ B = + f(v) - g(d) \end{cases}$$

où la fonction g ne dépend que de la distance d. On a donc:

$$(3) \qquad \boxed{p = \frac{+ f(V) - g(d)}{f(V) - f(v)} = 1 - \frac{g(d) - f(v)}{f(V) - f(v)}}$$

Cette formule théorique n'est valable que si <u>d est grand vis à vis du diamètre de v</u>.

4°) <u>Application du Principe de Similitude de de Wijs</u> - Les équations (1) (2) et (3) sont les conséquences directes de la log normalité, et ne font appel à aucune hypothèse. L'équation (1), qui montre que <u>$\sigma^2 (1 - p)$ est un invariant</u> par rapport à V est de portée absolument générale. Les équations (2) et (3) supposent par contre que d est grand. Même dans ce cas il n'est pas possible de préciser la forme de la fonction g (d).

Pour aller plus loin, une hypothèse supplémentaire est nécessaire, et c'est la théorie de de WIJS qui va la fournir.

L'idée fondamentale des travaux de de WIJS (cf. Note St. n°7), c'est que la dispersion ne dépend que du rapport V/v du volume échantillonné au volume de l'échantillon:

.../...

toutes choses égales d'ailleurs, la loi de répartition de blocs de 1kilo dans un panneau de 1000 tonnes est la même que celle de blocs d'une tonne dans un gisement d'un million de tonnes. Une conséquence de ce principe est la formule de de WIJS.

$$(4) \qquad \boxed{\sigma^2 = \alpha \, L \frac{V}{v}}$$

que l'on trouve immédiatement en remarquant que la variance doit être à la fois de la forme $g\,(V/v)$ selon de WIJS, et $f(V) - f\,(v)$ selon KRIGE.

En vérité la variance dépend également de la forme de l'échantillon v, de la forme de la portion V du gisement que l'on échantillonne, de l'orientation relative de v et de V. Il peut aussi arriver (cas d'un gisement sédimentaire) que les directions de l'espace ne soient pas équivalentes (répartition anisotrope).

C'est pourquoi il convient d'appliquer un principe de similitude géométrique, que l'on peut énoncer ainsi:

Si les figures formées par l'échantillon vi et le panneau Vi d'une part, l'échantillon v et le panneau V du même gisement d'autre part sont géométriquement semblables, à une translation près de l'échantillon vi, les lois de répartition de vi dans Vi et de v dans V ont la même variance logarithmique.

Dans ces conditions on voit aisément que, si l'on modifie les volumes v et V sans altérer leurs formes ni leurs positions relatives, c'est à dire en les transformant par des similitudes de même angle de rotation, mais de modules d'homothétie différents, la variance est bien donnée par la formule (4) et les conclusions que l'on peut tirer du principe de de WIJS sont valables.

L'expression $(1 - P)\,\sigma^2$ est un invariant par rapport à V. Elle représente au facteur 2 près – la variance du logarithme du rapport des teneurs des deux échantillons distants de d – elle n'est pas modifiée par une similitude affectant l'ensemble de la figure. Il en résulte qu'elle ne dépend que du rapport $\frac{d}{do}$, do désignant le diamètre de l'échantillon v mesuré selon l'axe joignant les deux échantillons en corrélation.

De plus, s'il existe un volume Vi semblable au volume V, à l'intérieur duquel les 2 volumes v distants de d aient un coefficient de corrélation égal à zéro, l'invariant $(1 - p)\,\sigma^2$ est égal à la variance σ_i^2 de v dans Vi, donc on a:

$$p = 1 - \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma_{Vi}^2}{\sigma^2}$$

a) Si $\frac{d}{do}$ est assez grand, on conçoit intuitivement que le volume Vi soit un volume semblable au volume V mais de diamètre d au lieu de D (c'est à dire que les 2 échantil-lons sont sur la surface de Vi). On a donc:

$$Vi = V \left(\frac{d}{D}\right)^3$$

$$\sigma_i^2 = \alpha L \; V \frac{d^3}{D^3}/v = \sigma^2 + 3 \alpha \; L \frac{d}{D}$$

(5) $$\boxed{p = 1 - \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} = \frac{3 \; L \; D/d}{L \; V/v}}$$

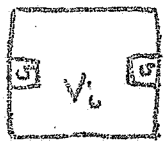
On remarque que α à disparu de la formule: pour d assez grand, les corrélations sont les mêmes pour tous les gisements. On remarque que la formule (5) vérifie l'é-quation (3).

Si le gisement V est de la forme d'un filon à épontes caractérisées, c'est à dire si une des dimensions est nettement plus petite que les deux autres, les volumes v, Vi etc... sont remplacés par des surfaces s, Si prises dans le plan du filon, la troisièm dimension étant toujours prise égale à la puissance, de sorte que les volumes v, Vi sont des cylindres de sections droites s, Si - La formule (5) s'écrit alors

(5)' $$\boxed{p = \frac{2 \; L \; D/d}{L \; S/s}}$$

b) Si $\frac{d}{do}$ n'est pas assez grand pour que la forme du volume v n'ait plus d'influence, il est nécessaire de prendre un volume Vi semblable à v, et d'appliquer la formule sous la forme

$$p = \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2}$$



Admettons provisoirement que le volume Vi ait pour diamètre d + do; celà revient à dire que, dans un volume Vi semblable à v, tel que les 2 volumes v adhèrent intèrieurement à sa paroi, le coefficient p est nul. En fait, si $\frac{d}{do}$ est de l'ordre de l'unité, p est négatif. Lorsque $\frac{d}{do}$ augmente, on conçoit qu'il tend vers 0.

On a ~~donc~~ dans cette hypothèse:

$$Vi = \left\{ \frac{d + do}{do} \right\}^3 v$$

$$\Sigma_{\mu}^2 = L\, V/v \left\{ \frac{d + do}{do} \right\}^3 = \Sigma^2 - \alpha L \left\{ \frac{d + do}{do} \right\}^3$$

D'où:

$$(6) \qquad \boxed{p = 1 - \frac{3 L \dfrac{d + do}{do}}{L \quad V/v}}$$

La condition (3) est bien vérifiée. Dans le cas d'un filon, le coefficient 3 est à remplacer par le coefficient 2 comme ci-dessus.

Si les volumes V et v sont eux mêmes semblables, (5) et (6) sont identiques. Si non il y a divergence d'autant plus faible que Σ^2 est plus grand. La différence de ces deux expressions est en effet

$$\frac{L \dfrac{D^3}{d^3} \dfrac{(d + do)^3}{Do^3} \dfrac{v}{V}}{L \quad V/v}$$

On a

$$\begin{cases} v = \gamma \; do^3 \\ V = \Gamma \; D^3 \end{cases}$$

.../...

La différence est : $$L \frac{\gamma}{\Gamma} \left(\frac{d + do}{d}\right)^3$$

Si d est grand devant do et si $\gamma = \Gamma$, elle est nulle.

5°) <u>Confrontation avec des résultats expérimentaux</u> - Des résultats de l'expérience de BOUKIAMA, ne sont ici utilisables que ceux relatifs aux correlations entre carrés de 0,20 x 0,20, ou entre lignes et colonnes. Pour les autres, les facteurs de forme introduiraient des perturbations importantes -

a) <u>Carrés de 0,20 x 0,20</u> -

Pour $\frac{d + do}{d} = 1$ $\quad p = 1$

$\frac{d + do}{d} = 2$ $\quad p = 0,57$

$\frac{d + do}{d} = 3$ $\quad p = 0,35$

$\frac{d + do}{d} = 4$ $\quad p = 0,19$

En diagramme logarithmique, ces 4 points s'alignent suivant la droite d'équation:

$$(7) \qquad p = 1 - \frac{\log \frac{d + do}{d}}{0,73}$$

La formule(6) aurait laissé prévoir

$$p = 1 - \frac{2 L \frac{d + do}{d}}{L V/v} = 1 - \frac{\log \frac{d + do}{do}}{0,90}$$

Le désaccord important signifie que dans le volume Vi du 4°) p n'est pas nul, mais négatif.

Il y aurait accord si, au lieu de prendre V = 64, on prenait V = 29 ou si l'on remplaçait l'exposant 2 par 2,45

b) <u>Lignes et colonnes</u> -.

Pour $\frac{d + do}{do} = 1$ $\quad p = 1$

.../...

$$\frac{d+do}{do}=2 \qquad p = 0{,}62$$

$$\frac{d+do}{do}=3 \qquad p = 0{,}25$$

$$\frac{d+do}{do}=4 \qquad p = 0$$

Ces trois points s'alignent grossièrement suivant la droite

$$p=1-\frac{1}{0,62} \quad \log\frac{d+do}{do}$$

On aurait attendu :

$$p=1-\frac{L\dfrac{d+do}{do}}{L6418}=1-\frac{\log\dfrac{d+do}{do}}{0,9}$$

Il y aurait accord en prenant V = 35 au lieu de 64, ou en remplaçant le coefficient 1 par 1,45. (On a pris le coefficient 1, car il n'y a qu'un degré de liberté dans le déplacement d'une ligne ou d'une colonne, contre 2 dans celui d'un carré).

Ce désaccord indique que l'hypoyhèse des corrélations nulles dans le volume Vi semblable à V et de diamètre $(d+do)$ est trop simpliste : les corrélations dans Vi sont en générales négatives, parce que le volume V ne peut pas être considéré comme très grand vis-à-vis de petit v.
On est tenté, compte tenu du fait que $(1-p)\sigma^2$ ne dépend que de $\frac{d+do}{do}$, d'écrire :

$$(8) \qquad \boxed{p=1-\frac{a}{\sigma^2} \quad L\frac{d+do}{do}}$$

où *a* est une constante, dont la valeur dépend de la forme et de la disposition relative de l'échantillon du volume échantillonné. *a* n'est d'ailleurs pas indépendante du paramètre de de Wijs. En effet, pour $\frac{d+do}{do}=2$, l'équation 8 représente le corrélogramme de volume (cf Note Statistique no. 4, p. 4), dont l'équation s'écrit également :

$$p = \frac{1}{\sigma^2} L \quad (2 e^{\sigma^2/2} - e^{\sigma^2}),$$ c'est à dire,

compte tenu de la formule de de WIJS:

$$p = 1 + \frac{L (2^{1-\alpha} - 1)}{\sigma^2}$$

ce qui montre que l'on doit théoriquement avoir:

$$(9) \qquad \boxed{\alpha = \frac{- L (2^{1-\alpha} - 1)}{L 2}}$$

La valeur numérique du paramètre α de BOU-KIAMA est 0,31. Cette valeur est un peu forte, mais les intervalles de confiance des variance étant très ouverts, elle est connue avec une précision assez médiocre.

Si l'on écrit la formule (7) sous la forme équivalente

$$p = 1 - \frac{L \frac{d + do}{do}}{L 32}$$

On est conduit par analogie à adopter pour σ^2 une formule du type

$$(10) \qquad \sigma^2 = \alpha L 32/v$$

ce qui conduit à la valeur

$$= 0,275$$

Il est remarquable que cette formule (10) donne une droite entièrement comprise dans le polygone de confiance de σ^2, donc aussi légitime à priori que la droite de la Note 4 : en effet la droite de la note 4 a été construite en évaluant la dérivée de la variance par l'intermédiaire des teneurs trous forés aux coins des carrés élémentaires. Mais la formule théorique donnant la valeur de cette dérivée suppose naturellement que les échantillons du volume des trous suivent la loi log normale, ce qui n'est pas le cas. En prenant donc:

$$\sigma^2 = 0,95 - 0,275 \ L v$$

.../...

On trouve

$$a = \frac{-L(2^{1-\alpha}-1)}{L\,2} = +0,625$$

La valeur expérimentale est 0,57. Les formules 8 et (9) doivent représenter une approximation acceptable de la réalité.

6°) Equation théorique du Correlogramme – Le volume v de l'échantillon est supposé être un cube, ou un cylindre peu allongé. A partir de v, nous formons les volumes 2v, 3v ... nv en accolant à la suite les uns des autres 2,3 ..n échantillon v. Admettons que les variances de ces échantillons sont données par la formule de de WIJS. Cherchons la corrélation entre deux volumes v distants de n-1 fois le diamètre de v, c'est à dire séparés par $n-2$ volumes v accolés. Σ_n^2 désigne la variance de l'échantillon nv, σ_n^2 sa variance logarithmique, P_a^{n-1} et p_a^{n-1} les corrélations entre teneurs et log teneurs d'échantillons distants (n-1) diamètres. Ecrivons la forme quadratique associée à la loi de distribution des teneurs des n volumes v successifs, c'est à dire des 2 volumes v distants de (n-1) diamètres et des (n-2) volumes intermédiaires

$$\frac{\Sigma^2}{2}\Big[(u_1^2+\dots+u_n^2)+2P_1(u_1u_2+u_2u_3+\dots+u_{n-1}u_n)$$
$$+2P_2(u_1u_3+u_2u_4+\dots+u_{n-2}u_n)+\dots+2P_{n-1}u_1u_n\Big]$$

D'où l'on déduit

$$\Sigma_n^2 = \Sigma^2\left\{\frac{n}{n^2}+\frac{2(n-1)}{n^2}P_1+\frac{2(n-2)}{n^2}P_2+\dots+\frac{2P_{n-1}}{n^2}\right\}$$

Si l'on tient compte de la note St n°4 (eq. (6), p.4),

on peut écrire

$$\frac{\Sigma_n^2}{\Sigma^2} = \frac{e^{\sigma_n^2}-1}{e^{\sigma^2}-1} \qquad P_i = \frac{e^{p_i\sigma^2}-1}{e^{\sigma^2}-1}$$

et il vient

$$n^2\left(e^{\sigma_n^2}-1\right) = n\left(e^{\sigma^2}-1\right)+2(n-1)\left(e^{p_1\sigma^2}-1\right)+\dots+2\left(e^{p_{n-1}\sigma^2}-1\right)$$

.../...

Cette équation se simplifie en:

$$n^2 e^{\sigma_n^2} = n e^{\sigma^2} + 2(n-1) e^{P_1 \sigma^2} + \dots + 2 e^{P_{n-1} \sigma^2}$$

en retranchant cette équation de l'équation obtenue en remplaçant n par n+1, on trouve:

$$(n+1)^2 e^{\sigma_{n+1}^2} - n^2 e^{\sigma_n^2} = e^{\sigma^2} + 2 \left(e^{P_1 \sigma^2} + e^{P_2 \sigma^2} + \dots + e^{P_{n-1} \sigma^2} + e^{P_n \sigma^2} \right.$$

D'où l'on tire, par une soustraction analogue:

$$\boxed{(n+1)^2 e^{\sigma_{n+1}^2} - 2 n^2 e^{\sigma_n^2} + (n-1)^2 e^{\sigma_{n-1}^2} = 2 e^{P_n \sigma^2}} \qquad (11)$$

L'équation (11) ne fait intervenir aucune hypothèse autre que la log normalité. Elle est indépendante de la formule de de WIJS.

Si maintenant nous adoptons pour σ^2 une expression de la forme

$$\sigma^2 = \alpha L \frac{k V}{v} \qquad (12)$$

qui contient la formule de de WIJS comme cas particulier, et qui représente mieux la réalité lorsquele volume v ne reste pas semblable à lui même (cf. la formule empiri--que trouvée dans la note St. n°4 à propos de BOU-KIAMA) la relation (11) nous donne:

$$\left(\frac{k V}{v} \right)^{\alpha} \left\{ (n+1)^{2-\alpha} - 2n^{2-\alpha} + (n-1)^{2-\alpha} \right\} = 2 e^{P_n \sigma^2}$$

.../...

D'où

$$(13) \qquad \boxed{P_n = 1 + \frac{1}{\sigma^2} L \left\{ \frac{(n+1)^{2-\alpha} - 2n^{2-\alpha} + (n-1)^{2-\alpha}}{2} \right\}}$$

Or n n'est pas autre chose que $\frac{d}{d_o}$. La formule (13), légèrement différente de la formule (8), converge vers celle-ci lorsque n augmente. On trouve alors:

$$P_n = 1 - \frac{\alpha}{\sigma^2} \quad L \frac{n+1}{(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

A BOU-KIAM, pour $\alpha = 0,28$ on obtient pour $\sigma^2 = 0,95$

$P_1 = 0,55$	valeur expérimentale	0,56
$P_2 = 0,30$	" "	0,35
$P_3 = 0,18$	" "	0,20
$P_4 = 0,09$		
$P_5 = 0$		
$P_6 = -0,02$		
$P_7 = -0,08$		

Signé: G. MATHERON