M. Matheron

Alger, le 2 Septembre 1955

B.R.M.A.
Cinq-Maisons
MAISON-CARREE

/GM/HC/

NOTE STATISTIQUE N° II

L'estimation des Panneaux

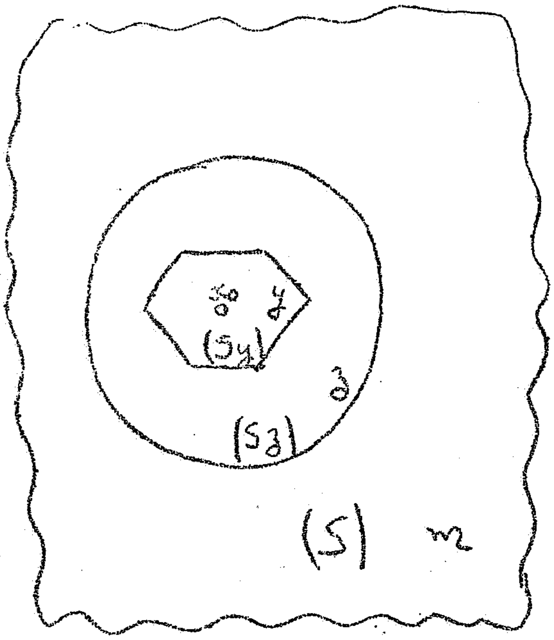
Le terme " panneau ", pris au sens large, désigne toute portion d'un gisement donné, c'est à dire, avec les notations de la N. St. N° 4, un volume Vi. Dans le cas d'une reconnaissance par sondages à maille hexagonale, l'hexagone " d'influence " d'un sondage particulier So constitue un panneau. Le problème posé est le suivant: le gisement a été reconnu par n+I sondages So, S_I...Sn, ayant donné les teneurs x_o x_I: quelle est la valeur probable de la teneur y de l'hexagone centré sur le sondage So. La Note n° 6, reproduisant une théorie de Krige, apporte une première solution à ce problème: la formule (3) de cette Note montre que la valeur probable E (y) est une moyenne géométrique pondérée de la teneur x_o et de la teneur moyenne m du gisement dans son ensemble. Cette formule est parfaitement valable, en ce sens qu'elle fournit un estimateur sans biais de y , dont l'emploi est toujours préférable à l'assimilation simpliste de y à x_o. Mais cet estimateur n'est pas le meilleur possible, car il n'utilise pas la totalité des informations disponibles. En fait, l'examen de la formule (3) montre qu'elle effectue une sorte de partage " d'influence " entre le sondage centrale So , représenté par le terme X_o , et tous les autres sondages, représentés globalement par la teneur moyenne m . So mis a part, elle attribue donc le même poids à chacun des autres sondages S_I... Sn, quelles que soient leurs positions géographiques. Il est cependant intuitif que les sondages les plus proches, et en particulier les six sondages S_I...S_6 adjacents à S_o, ont plus d'influence que les sondages éloignés. Et de fait, le coefficient de corrélation des teneurs de deux blocs est une fonction decroissante de la distance de ces blocs.

Il convient donc d'attribuer à chaque sondage son influence spécifique, fonction de sa position géographique par rapport à S_o, et non pas de se contenter d'un terme indifférencié en m. Mais alors le problème devient inextricable, bien que théoriquement soluble. Il est possible, grace au principe de similitude, de calculer les coefficients de correlation des couples de variables X_i X_j ou y X_i , et par suite d'écrire la loi de distribution simultanée des n+2 variables X_o X_I....X_n et y , d'où l'on peut théoriquement déduire la loi de

.../..

y lorsque les $(n+1)$ autres variables sont fixées, loi dont la connaissance donne la solution du problème. Du point de vue pratique, on est ainsi conduit au calcul numérique d'un déterminant d'ordre $(n+2)$, opération interminable, et pratiquement irréalisable si n est de l'ordre de 50 .

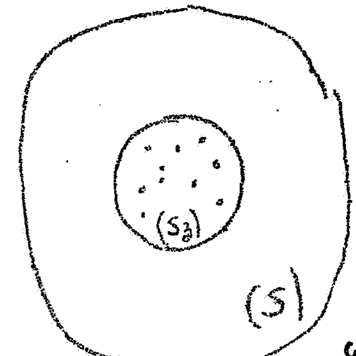
On est donc conduit à la recherche de solutions approchées. En fait, la théorie de Krige doit être considérée comme une première approximation, approximation consistant à représenter l'influence des sondages $S_1 \ldots S_n$ par un seul terme m. Une deuxième approximation consiste à représenter par un premier terme l'influence des k sondages les plus proches, et par un deuxième terme celle de tous les autres sondages.



Le deuxième terme sera m. Le premier devrait être la teneur z d'une surface S_z centrée sur So et plus grande que l'hexagone S_y d'influence de S_0. En fait, ni m, ni z ne sont connus. La teneur moyenne globale m, évaluée à partir des $(n+1)$ teneurs des sondages, avec une précision bien plus grande que celle qu' l'on peut espérer obtenir dans l'estimation de y ou de z, peut, de point de vue pratique, être considérée comme rigoureusement connue. C'est là, du reste, une hypothèse faite implicitement dans la Note n° 6. Par contre, en ce qui concerne z , l'évaluation ne portera que sur un petit nombre de sondages, et z ne pourra pas être considéré comme connu. Il est donc nécessaire d'introduire une nouvelle variable, z', estimation de z, et ce sera l'objet d'une première partie, après quoi il sera possible, dans une deuxième partie, d'étudier la loi de y liée par X_0 et z'.

I Estimation d'un grand panneau S_z

Pour le grand panneau S_z, nous nous contenterons de l'approximation de Krige, c'est à dire que nous représenterons l'influence des sondages extérieurs à S_z par un seul terme global en m .



Le problème s'énonce ainsi : dans un gisement, dont la teneur moyenne m est connue, ainsi que la dispersion absolue α, on a délimité un panneau Sz. On cherche à estimer la valeur probable de la teneur z de Sz, à partir des k teneurs $X_1 \dots X_k$ fournies par k sondages, supposés <u>implantés au hasard</u> à l'intérieur de Sz.

L'hypothèse de l'implantation aléatoire, bien que non vérifiée dans un réseau à maille rigide, simplifie énormément les calculs. Nous admettrons, ce qui est d'ailleurs plausible, que les conclusions resteront valables dans le cas d'une maille fixe.

Ce n'est plus admissible

a/ <u>Loi de distribution simultanée des variables z, X_1, X_2, .. X_k</u>.

<u>Dans le gisement S entier</u>, chaque variable Xi a une valeur moyenne égale à m et une variance

$$(1) \quad \sigma^2 = \alpha L \frac{S}{s}$$

id. s étant la section de la carotte, z a également m comme valeur moyenne, et sa variance est :

$$(2) \quad \sigma_z^2 = \alpha L \frac{S}{Sz}$$

Enfin, dans Sz (c'est à dire à z fixé), Xi a pour valeur moyenne z et pour variance

$$(3) \quad \sigma_{xz}^2 = \alpha L \frac{S_z}{s} = \sigma^2 - \sigma_z^2$$

<u>Dans Sz</u>, Xi et Xj sont deux variables indépendantes (puisque l'implantation des sondages est aléatoire). La N. St. n°4, formule (5, montre que, <u>dans S</u>, Xi et Xj sont nécessairement liés par le coefficient de corrélation

$$(4) \quad \rho_{x_i x_j} = \frac{\sigma_z^2}{\sigma^2}$$

La formule (2) de la même note montre que, <u>dans S</u>, z et Xi sont liés par le coefficient :

$$(5) \quad \rho_{z x_i} = \frac{\sigma_z}{\sigma}$$

égale à la racine carrée du précédent. Ces éléments définissent la loi simultanée des (k + 1) variables. Cherchons ce que devient cette loi lorsque l'on fixe successivement X_1, X_2 ...

b/ <u>Loi de distribution à X_1 fixé</u>

Lorsque x_1 est fixé, z (N.N°6) a pour médiane :

$$(6) \quad \Gamma_{z \cdot x_1} = m^{\frac{\sigma_{xz}^2}{\sigma^2}} \; x_1^{\frac{\sigma_z^2}{\sigma^2}}$$

.../.

et pour variance

$$(7) \qquad \sigma^2_{z \cdot x_1} = \frac{\sigma^2_{xz}\,\sigma^2_z}{\sigma^2}$$

Le coefficient de corrélation de z et x_i ($i \neq 1$) devient

$$\rho_{z x_i \cdot x_1} = \frac{\rho_{z x_i} - \rho_{z x_1}\rho_{x_i x_1}}{\sqrt{(1-\rho^2_{z x_1})(1-\rho^2_{x_i x_1})}}$$

Soit:

$$(8) \qquad \rho_{z x_i \cdot x_1} = \frac{\sigma_z}{\sqrt{\sigma^2+\sigma^2_z}}$$

De même, à x_1 fixé, x_i a pour médiane:

$$M_{x_i \cdot x_1} = M_{x_i}\left[\frac{x_1}{M_{x_1}}\right]^{\rho_{x_1 x_i}\frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_{x_1}}} = m\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}}\left(\frac{x_1}{m\, e^{-\sigma^2/2}}\right)^{\frac{\sigma^2_z}{\sigma^2}}$$

$$(9) \qquad M_{x_i \cdot x_1} = M_{z \cdot x_1}\, e^{-\frac{\sigma^2_{xz}}{2}}$$

relation qui exprime que x_i et z, à x_1 fixé, ont même valeur moyenne. La variance de x_i devient:

$$(10) \qquad \sigma^2_{x_i \cdot x_1} = \sigma^2(1-\rho^2_{x_i x_1}) = \sigma^2_{xz}\,\frac{\sigma^2+\sigma^2_z}{\sigma^2}$$

Et le coefficient de corrélation de x_i et x_j devient:

$$(11) \qquad \rho_{x_i x_j \cdot x_1} = \frac{\rho_{x_i x_j} - \rho_{x_1 x_i}\rho_{x_1 x_j}}{\sqrt{(1-\rho^2_{x_1 x_i})(1-\rho^2_{x_1 x_j})}} = \frac{\sigma^2_z}{\sigma^2+\sigma^2_z}$$

Il est toujours égal au carré du coefficient de z et x_i : ceci correspond au fait très général que $\frac{x_i}{z}$ et $\frac{x_j}{z}$ sont deux variables indépendantes dans S c/ Loi de distribution à x_1, $x_2 \dots x_p$ fixés. On obtient par recurrence les formules suivantes:

$$(I2)\quad \begin{cases} \rho_{x_i x_j . x_1 x_2 \dots x_p} = \dfrac{\sigma_z^2}{\sigma^2 + p\,\sigma_z^2} \\[2ex] \rho_{z x_i . x_1 x_2 \dots x_p} = \dfrac{\sigma_z}{\sqrt{\sigma^2 + p\,\sigma_z^2}} \end{cases}$$

$$(I3)\quad \begin{cases} \sigma^2_{z . x_1 x_2 \dots x_p} = \sigma^2 \dfrac{\sigma^2_{xz}}{\sigma^2_{xz} + p\,\sigma_z^2} \\[2ex] \sigma^2_{x_i . x_1 x_2 \dots x_p} = \sigma^2_{xz} \dfrac{\sigma^2 + p\,\sigma_z^2}{\sigma^2_{xz} + p\,\sigma_z^2} \end{cases}$$

$$(I4)\quad \begin{cases} \Gamma_{x_i . x_1 \dots x_p} = m^{\frac{\sigma^2_{xz}}{\sigma^2_{xz} + p\,\sigma^2_z}} \left(x_1 x_2 \dots x_p\right)^{\frac{\sigma^2_z}{\sigma^2_{xz} + p\,\sigma^2_z}} e^{-\frac{\sigma^2_{xz}}{2} \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{xz} + p\,\sigma^2_z}} \\[2ex] \Gamma_{z . x_1 \dots x_p} = m^{\frac{\sigma^2_{xz}}{\sigma^2_{xz} + p\,\sigma^2_z}} \left(x_1 x_2 \dots x_p\right)^{\frac{\sigma^2_z}{\sigma^2_{xz} + p\,\sigma^2_z}} e^{\frac{(p-1)\,\sigma^2_z\,\sigma^2_{xz}}{2\left(\sigma^2_{xz} + p\,\sigma^2_z\right)}} \end{cases}$$

d/ Détermination de l'estimateur z'. Ces formules résoluent le problème de l'évaluation du grand panneau S_z . Lorsque l'on connait x_1, $x_2, \dots x_k$, teneurs des k sondages, la teneur z de Sz est une variable aléatoire dont la variance et la médiane sont donnés par (I3) et (I4), avec p = k . Lavaleur probable de z est :

$$E(z) = \Gamma_{z . x_1 \dots x_k}\, e^{\frac{\sigma^2_{z . x_1 \dots x_k}}{2}}$$

On prendra, comme estimateur de z, z' = E (z), c'est à dire:

$$(I5)\quad \boxed{z' = m^{\frac{\sigma^2_{xz}}{\sigma^2_{xz} + k\,\sigma^2_z}} \left(x_1 x_2 \dots x_k\right)^{\frac{\sigma^2_z}{\sigma^2_{xz} + k\,\sigma^2_z}} e^{\frac{k\,\sigma^2_{xz}\,\sigma^2_z}{2\left(\sigma^2_{xz} + k\,\sigma^2_z\right)}}}$$

La précision de cet estimateur est donnée par la variance de z à z' fixé, c'est à dire à $x_1 . x_2 \dots x$ fixés.

$$(16) \qquad \boxed{\sigma^2_{z \cdot x_1 x_2 \dots x_k} = \frac{\sigma^2_z \, \sigma^2_{xz}}{\sigma^2_{xz} + k \, \sigma^2_z}}$$

On remarque que, pour k = 1, on retombe sur les formules de la Note 6. Lorsque k tend vers l'infini, le terme en m disparait, l'exponentielle tend vers $e^{-\sigma^2_{xz}/2}$ et le terme en $(x_1 \dots x_k)$ tend vers la moyenne géométrique des x_i dans z, de sorte que l'on a, à la limite,

$$(17) \qquad z' = \Gamma_{x(z)} \, e^{\sigma^2_{xz}/2}$$

Il est notable que l'estimateur (16) donne toujours une meilleur précision que (17). On a en effet

$$\frac{\sigma^2_{xz}\,\sigma^2_z}{\sigma^2_{xz} + k\,\sigma^2_z} < \frac{\sigma^2_{xz}}{k}$$

Cela est naturel, puisque, dans (16), on tient compte des sondages extérieurs à Sz, et non dans (17). C'est seulement si k est très grand que l'on a le droit de négliger l'influence extérieure.

e/ <u>Caractéristiques de l'estimateur z'</u>

La variance de z à z' fixé est donnée par (16). Nous aurons besoin, dans la deuxième partie, de la variance propre de z', ainsi que du coefficient de correlation entre z et z'. Ces quantités se déduisent des relations:

$$\sigma^2_{z \cdot z'} = (1-\rho^2)\,\sigma^2_z$$
$$\sigma^2_{z' \cdot z} = (1-\rho^2)\,\sigma^2_{z'}$$

Quant à $\sigma^2_{z' \cdot z}$, variance de z' à z fixé, elle se déduit immédiatement de l'expression (15), en se souvenant qui à z fixé, les x_i sont indépendants et ont pour variance σ^2_{xz}

$$\sigma^2_{z' \cdot z} = \frac{k\,\sigma^2_{xz}\,\sigma^4_z}{(\sigma^2_{xz} + k\,\sigma^2_z)^2}$$

.../..

On en déduit.

$$\text{(I8)}\quad \begin{cases} \sigma^2_{z'} = k_z \dfrac{\sigma^4_z}{\sigma^2_{xz} + k_z \sigma^2_z} \\ \rho_{zz'} = \sqrt{\dfrac{k_z \sigma^2_z}{\sigma^2_{xz} + k_z \sigma^2_z}} = \dfrac{\sigma_{z'}}{\sigma_z} \end{cases}$$

On remarque que z' a une variance inférieure à celle de z. C'est qu'en effet, remplacer z par z' revient à negliger la variance de z à z' fixé. On vérifiera aisément que l'on a bien

$$\sigma^2_z = \sigma^2_{z'} + \sigma^2_{z \cdot z'}$$

f/ Propriétés Générales des estimateurs de Krige - Par estimateur de krige relatif a un corps de renseignements donné, nous désignons l'estimateur z' de la teneur z d'un panneau tel que, connaissant ce corps de renseignement, la valeur probable de z soit égale à z'. Autrement dit, à z' fixé, on a par définition

$$\text{(I9)}\quad E(z) = z'$$

L'estimateur (I5) est l'estimateur de Krige relatif au crops de renseignement m ($x_0, x_1 \ldots x_k$). Désignons par $\sigma^2_z, \sigma^2_{z'}$, Γ_z et $\Gamma_{z'}$ les variances et médianes de z et z' dans S. L'équation (I9) s'écrit:

$$z' = \Gamma_z \left(\frac{z'}{\Gamma_{z'}}\right)^{\rho \frac{\sigma_z}{\sigma_{z'}}} e^{\frac{\sigma^2_{z \cdot z'}}{2}}$$

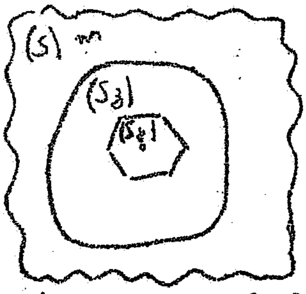
On en déduit:

$$\text{(20)}\quad \begin{cases} \rho = \dfrac{\sigma_{z'}}{\sigma_z} \\ \sigma^2_{z \cdot z'} = \sigma^2_z - \sigma^2_{z'} \\ \Gamma_z\, e^{\sigma^2_z/2} = \Gamma_{z'}\, e^{\sigma^2_{z'}/2} = m \end{cases}$$

Le coefficient de correlation de z et z' est égal au rapport de leurs écarts types. La variance de z à z' fixé (qui est une mesure de la précision de l'estimateur z') est égal à la différence des variances à priori de z et de z'. Enfin, dans S, z et z' ont même valeur probable m.

.../..

II Estimation d'un petit panneau Sy



On se donne un sondage So, ayant fourni une teneur x, entouré de l'héxagone Sy, de teneur moyenne inconnue y, lui même entouré d'une surface Sz, dont la teneur z a fait l'objet d'une estimation z'. Connaissant z', (estimateur de Krige) et m, teneur moyenne du gisement total, quel est la valeur probable de y ?

a/ Loi simultanée des trois variables x, y et z'.

x a pour médiane $m\, e^{-\sigma^2/2}$ et pour variance σ^2

y a pour médiane $m\, e^{-\sigma_y^2/2}$ et pour variance σ_y^2, avec

(21) $$\sigma^2 = \alpha L \frac{S}{s} \qquad \sigma_y^2 = \alpha L \frac{S}{S_y}$$

z' a pour valeur probable dans S, m, donc pour médiane

(22) $$\rho_{z'} = m\, e^{-\sigma_{z'}^2/2}$$

et pour variance $\sigma_{z'}^2$. En ce qui concerne les coefficients de correlation, on a d'abord

(23) $$\rho_{xy} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Si l'on remarque qu'à z fixé z' est une variable indépendante de x et de y, on trouve de plus:

$$\rho_{z'x} = \rho_{z'z}\,\rho_{xz} \qquad \rho_{z'y} = \rho_{z'z}\,\rho_{yz}$$

$$\rho_{z'x} = \rho_{z'z}\,\frac{\sigma_z}{\sigma_x} \qquad \rho_{z'y} = \rho_{z'z}\,\frac{\sigma_z}{\sigma_y}$$

D'où compte tenu de (20)

(24) $$\rho_{z'x} = \frac{\sigma_{z'}}{\sigma_x} \qquad \rho_{z'y} = \frac{\sigma_{z'}}{\sigma_y}$$

b/ Loi de y et de x à z' fixé . L'estimateur de Krige, z', étant fixé, les variances deviennent:

$$(25)\qquad \begin{aligned} \sigma^2_{x.z'} &= \sigma^2_x - \sigma^2_{z'} \\ \sigma^2_{y.z'} &= \sigma^2_y - \sigma^2_{z'} \end{aligned}$$

Elles sont égales aux variances de x et de y dans une aire Sz', un peu plus grande que Sz, telle que la variance dans S de la teneur des aires Sz' soit égale à $\sigma^2_{z'}$:

$$\alpha L \frac{S}{S_{z'}} = \sigma^2_{z'} = \alpha L \frac{S}{S_z} - \sigma^2_{z.z'}$$

Dans ces conditions, les équations (25) s'écrivent:

$$(26)\qquad \begin{cases} \sigma^2_{x.z'} = \sigma^2_{xz'} \\ \sigma^2_{y.z'} = \sigma^2_{yz'} \end{cases}$$

Le coefficient de correlation entre x et y devient de même.

$$(27)\qquad \rho_{xy.z'} = \frac{\sigma_{yz'}}{\sigma_{xz'}}$$

Et les médianes de y et de x :

$$(28)\qquad \begin{cases} m_{y.z'} = z'\, e^{-\sigma^2_{yz'}/2} \\ m_{xz'} = z'\, e^{-\sigma^2_{xz'}/2} \end{cases}$$

Autrement dit, à z' fixé, y et x ont tous deux pour valeur probable z'. Enfin, si dans l'aire Sy ont été implantés (au hasard), non plus un seul sondage, mais plusieurs, ay nt donné les téneurs x_i (i = I,2...), le coefficient de correlation de x_i x_j, à z' fixé, devient

$$(29)\qquad \rho_{x_i x_j . z'} = \frac{\sigma^2_{yz'}}{\sigma^2_{xz'}}$$

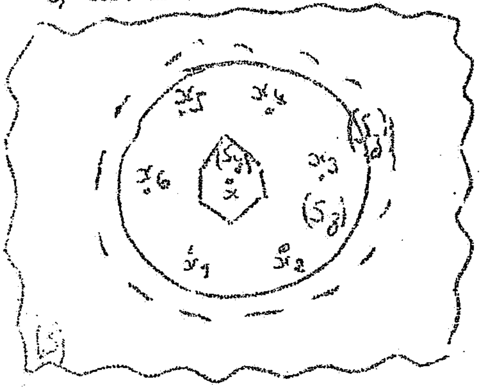
Comparons maintenant les équations (26),(27) (28) et (29) aux équations du paragraphe Ia. Elles sont formellement identiques, à condition de remplacer m par z' et l'aire S par l'aire Sz'.Tout se passe comme si l'on avait à estimer la teneur y de l'aire Sy contenue dans un gisement d'aire Sz', et de teneur moyenne z'. Autrement dit l'estimateur y' s'obtient , à partir de z' et du corps de renseignement relatif à y', de la même façon que l'estimateur z' à partir de m et du corps de renseignement relatif à z'.

.../..

Aucune hypothèse n'ayant été faite sur le corps de renseignements servant à définir z', rien n'empêche de répeter l'opération et de définir un estimateur u' de la teneur u d'une aire Su intérieure à Sy: il suffira de remplacer le gisement par la portion Sy'.

L'extrême généralité de ces résultats fournit donc un moyen théoriquement trés simple pour évaluer un panneau en tenant compte de l'influence d'un nombre aussi grand que l'on veut d'auréoles successives.

c/ Revenons à l'estimation de la teneur y de l'hexagone Sy centré sur un sondage ayant donné x, connaissant l'estimation z' d'une seule aire Sz entourant Sy.



Ax et z' fixé, y a pour variance

$$(30) \qquad \sigma^2_{y.xz'} = \frac{\sigma^2_{xy}\,\sigma^2_{yz'}}{\sigma^2_{xz'}}$$

pour médiane

$$(31) \qquad \Gamma_{y.xz'} = z'^{\frac{\sigma^2_{xy}}{\sigma^2_{xz'}}} \quad x^{\frac{\sigma^2_{yz'}}{\sigma^2_{xz'}}}$$

et pour valeur probable

$$(32) \qquad \boxed{y' = z'^{\frac{\sigma^2_{xy}}{\sigma^2_{xz'}}} \quad x^{\frac{\sigma^2_{yz'}}{\sigma^2_{xz'}}} \quad e^{\frac{\sigma^2_{xy}\,\sigma^2_{yz'}}{2\sigma^2_{xz'}}}}$$

Ces expressions sont obtenues par simple démarquage des expressions correspondantes de la Note n° 6.

Tenons compte, maintenant, des résultats de la première partie. La formule (I8) et la formule (26) conduisent à l'expression suivante de la précision de l'estimateur y':

$$(33) \qquad \sigma^2_{y.xz'} = \frac{\sigma^2_y\,\sigma^2_x + k\,\sigma^2_z\,\sigma^2_{yz}}{\sigma^2\,\sigma^2_{xz} + k\,\sigma^2_z\,\sigma^2_{xz}}\ \sigma^2_{xy}$$

C'est une fonction homographique de k. Pour k = O, c'est à dire si l'on n'a aucune estimation de z, elle se réduit à : $\frac{\sigma^2_{xy}\,\sigma^2_y}{\sigma^2}$ c'est à dire à la valeur trouvée dans la note N°6.

Pour k infini, c'est à dire si l'on connait la véritable valeur de z, elle se réduit à $\frac{\sigma^2_{xy}\,\sigma^2_{yz}}{\sigma^2_{xz}}$, c'est à dire à la même expression de Krige, à condition de remplacer S par Sz ~~et~~ S': l'on connait z lui même, en effet, y ne

.../..

lépond plus de m et doit être évalué par la théorie de Krige appliquée au panneau Sz et non plus au gisement S tout entier. Sz' et Sz coïncident.

De même, compte tenu de (I5) et de (~~38~~ 32), l'estimateur y' lui même va s'écrire:

$$\boxed{y' = m^{a} (x_1 \ldots x_k)^{b} \underline{x}^{c} e^{d}}$$

$$(34) \quad \begin{cases} a = \dfrac{\sigma^2_{xy}}{\sigma^2 + \xi \sigma^2_z} \\[2ex] b = \dfrac{\sigma^2_z \, \sigma^2_{xy}}{\sigma^2_{xz}(\sigma^2 + \xi \sigma^2_z)} \\[2ex] c = \dfrac{\sigma^2_y \, \sigma^2_{xz} + \xi \sigma^2_z \, \sigma^2_{yz}}{\sigma^2_{xz}(\sigma^2 + \xi \sigma^2_z)} \\[2ex] d = \dfrac{\sigma^2_{xy}\left[\sigma^2_y \, \sigma^2_{xz} + \xi \sigma^2_z (\sigma^2_{yz} + \sigma^2_{xz})\right]}{2 \, \sigma^2_{xz}(\sigma^2 + \xi \sigma^2_z)} \end{cases}$$

d) Choix de l'aire Sz : on doit prendre, comme aire Sz, celle qui donne la plus grande précision, c'est à dire celle qui rend minimale l'expression (33). En pratique, on prendra

$$k = \frac{S_z}{S_y} - I$$

et on exprimera les diverses variances par la formule de Wijs.

L'expression (33) est le produit de σ^2_{xy} , qui est une donnée, par facteur purement géométrique, de sorte que l'aire Sz optima n dépend que des données géométriques (s, Sx, Sy et S) : elle est indépendante de la dispersion absolue α . En annulant la dérivée de l'expression (29), on obtient une équation contenant à la fois des termes en LS_z et en $S_z L S_z$, de sorte qu'on ne sait pas la résoudre.

Du point de vue pratique, cependant, on se rend compte facilement que la valeur optima de Sz se situe aux alentours de 7 Sy, de sorte que l'on prendra pour Sz l'aire définie par les polygones d'influence de So et des 6 sondages adjacents . Deux exemples numériques permettront de le voir aisément.

Exemple I : On prend

$$s = I0^{-2} m^2 \qquad S_y = I0^{3} m^2 \qquad S = I0^{6} m^2$$

../..

Pour $S_z = S_y = 10^3$	$(k=0)$	$\sigma^2_{y.zz'}$	$= \alpha \times 1,86$
$S_z = 10^{3,85}$	$(k=6)$	"	$= \alpha \times 1,16$
$S_z = 10^4$,	$(k=9)$	"	$= \alpha \times 1,15$
$S_z = 10^{4,28}$	$(k=18)$	"	$= \alpha \times 1,19$
$S_z = 10^{4,63}$	$(k=42)$	"	$= \alpha \times 1,30$
$S_z = 10^{6,96}$	$(k=90)$	"	$= \alpha \times 1,44$
$S_z = 10^8$	$(k=999)$	"	$= \alpha \times 1,86$

Exemple 2 : On prend cent sondages au lieu de 1.000.

$$s = 10^{-2} m^2 \qquad S_y = 10^4 \qquad S_z = 10^6$$

$S_z = S_y = 10^4$	$(k=0)$	$\alpha \times 1,50$
$S_z = 10^{4,85}$	$(k=6)$	$\alpha \times 1,14$
$S_z = 10^{5,28}$	$(k=18)$	$\alpha \times 1,23$
$S_z = 10^{5,63}$	$(k=42)$	$\alpha \times 1,36$
$S_z = 10^6$	$(k=99)$	$\alpha \times 1,50$

On voit que $k = 6$ correspond sensiblement au minimum. On prendra donc toujours pour S_z l'aire définie par S_o et les 6 sondages les plus proches.

c/ Détermination plus précise d'un grand panneau

Il peut arriver que l'on ait besoin d'évaluer la teneur probable d'une portion S_y importante du gisement, par exemple une portion particulièrement riche. A l'intérieur de S_y ont été forés p sondages, ayant donné les teneurs x_1, $x_2 \ldots x_p$. Entourons S_y par une aire S_z plus grande. En plus des p sondages précédents, qui ne doivent pas servir au calcul de z', S_z contient k sondages (sondages intérieurs à S_z et extérieurs à S_y) ayant donné les teneurs $x'_1 - x'_k$. On calcule z', à partir des x', par la formule (15). On définit l'aire z', grace à la formule (16), par la condition.

$$\sigma^2_{zz'} = \sigma^2_{z.z'}$$

.../..

L'estimateur y' est alors, d'aprés la formule (I5):

$$(35) \qquad y' = z'^{\frac{\sigma^2_{xy}}{\sigma^2_{xy} + p\,\sigma^2_{yz'}}} (x_1 x_2 \ldots x_p)^{\frac{\sigma^2_{yz'}}{\sigma^2_{xy} + p\,\sigma^2_{yz'}}} \; e^{\frac{p\,\sigma^2_{xy}\,\sigma^2_{yz'}}{2(\sigma^2_{xy} + p\,\sigma^2_{yz'})}}$$

Et sa précision, d'aprés la formule (I5) :

$$(36) \qquad \sigma^2_{y.y'} = \frac{\sigma^2_{yz'}\,\sigma^2_{xy}}{\sigma^2_{xy} + p\,\sigma^2_{xz'}}$$

f/ Limites de confiance . Puisque, à y' fixé, y est une variable lognormale de moyenne y' et de variance $\sigma^2_{y.y'}$, il y a 97,5 chances sur cent pour que y soit supérieur à :

$$(37) \qquad y'\, e^{-\frac{\sigma^2_{y.y'}}{2} - 2\,\sigma_{y.y'}}$$

Le coefficient inférieur de sécurité à 97,5 % est donc

$$(38) \qquad K = e^{-\frac{\sigma^2_{y.y'}}{2} - 2\,\sigma_{y.y'}}$$

Ce qui veut dire qu'il y a 95 chances sur cent pour que l'on ait:

$$(39) \qquad y > ky'$$