

- MAI 1956 -

NOTE STATISTIQUE N° 13

ETUDE DE LA VARIATION DE LA DENSITE D'UN MINERAI
EN FONCTION DE SA TENEUR

Les minéraux utiles étant généralement plus denses que leur gangue, un minerai est d'autant plus lourd qu'il est plus riche. Cette variation de la densité en fonction de la teneur est négligeable dans le cas où la teneur est très basse (gisement d'or), ou lorsque la dispersion est faible (gisement de Fer, de Manganèse etc..). Lorsque la teneur et la dispersion sont toutes deux élevées, au contraire, cette variation est importante. Il est alors nécessaire, dans un calcul de tonnage, de pondérer chaque teneur individuelle par la densité correspondante : en l'absence de cette précaution, la surestimation du tonnage des faibles teneurs, et la sous-estimation des teneurs fortes conduit à sous-évaluer, systématiquement, la teneur moyenne.

Cette erreur est sensible dans le cas d'un gisement sulfuré riche (plomb-zinc, pyrite etc...). Les pages qui suivent se proposent d'étudier, théoriquement et expérimentalement, la loi de variation de la densité en fonction des teneurs.

I - FORME THEORIQUE DE LA LOI

Considérons un morceau de minerai en place de poids égal à l'unité, soit x_1 et x_2 les teneurs, divisées par 100, en minéraux A et B (teneurs en blende et en galène par exemple), et

U_1 et $D_1 = 1/U_1$	les volumes et poids spécifiques du minéral A
U_2 et $D_2 = 1/U_2$	" " " " " B
U_0 et $D_0 = 1/U_0$	" " " " de la gangue
U et $D = 1/U$	" " " " de l'échantillon

Le volume $U = 1/d$ de l'échantillon est égal à la somme des volumes des minéraux A et B et de la gangue :

$$U = 1/d = U_1 x_1 + U_2 x_2 + U_0 (1 - x_1 - x_2)$$

$$(1) \quad 1/d = U = x_1 (U_1 - U_0) + x_2 (U_2 - U_0) + U_0$$

L'inverse de la densité est donc, théoriquement, fonction linéaire des teneurs en A et B.

Cependant, si les poids spécifiques des minéraux A et B sont des constantes physiques exactement connues, il n'en est pas de même de celui de la gangue, dont la composition peut varier. De plus, les geodes introduisent un pourcentage de vide également variable. La densité réelle peut donc s'écarter de sa valeur théorique, et la formule (1) ne peut en fait représenter qu'une loi approchée. Quel est le degré d'approximation de cette formule, et fournit-elle la meilleure représentation de la réalité, tels sont les deux points que cette étude se propose d'étudier sur un exemple concret. Un certain nombre de carottes de sondage, provenant du gisement de pyrite de BENI-SAID, ont été analysées pour fer et soufre, et ont également fait l'objet de détermination de densité par immersion : nous nous proposons d'analyser ces données numériques.

II - DETERMINATION DES PARAMETRES DE LA LOI

Chaque échantillon fournit une valeur U_i du volume spécifique et deux teneurs x_i^2 et y_i^2 en soufre et en fer. U n'est pas rigoureusement fonction de x et y , mais est liée à ces deux variables par des corrélations très fortes. Admettons, comme hypothèse de travail, que U est toujours voisine d'une valeur de la forme

$$(2) \quad U = ax + by + c$$

On déterminera les paramètres a , b et c par la méthode des moindres carrés, et l'on calculera la variance résiduelle de U . Le même calcul sera fait ensuite pour des lois de formes différentes, et la comparaison des variances résiduelles permettra de voir si la formule (2) constitue ou non la meilleure approximation.

METHODE DES MOINDRES CARRÉS

On convient de prendre, pour a , b et c , les valeurs qui minimisent l'expression :

$$\sum_{i=1}^n (U_i - a x_i - b y_i - c)^2$$

Un calcul classique montre qu'en désignant par \bar{U} , \bar{x} et \bar{y} les valeurs moyennes de U_i , x_i et y_i

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i$$

- par S_u^2 , S_x^2 et S_y^2 leurs variances

$$S_u^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2$$

- 3 -

- par S_{ux} , S_{uy} et S_{xy} les moments rectangulaires :

$$S_{ux} = \frac{1}{n} \sum (u_i - \bar{u})(x_i - \bar{x})$$

et par R_{ux} , R_{uy} et R_{xy} les coefficients de corrélation.

$$R_{ux} = \frac{S_{ux}}{S_u S_x}$$

les trois coefficients a, b et c ont les valeurs suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} a = \frac{R_{ux} - R_{uy} R_{xy}}{1 - R_{xy}^2} \frac{S_u}{S_x} \\ b = \frac{R_{uy} - R_{ux} R_{xy}}{1 - R_{xy}^2} \frac{S_u}{S_y} \\ c = \bar{u} - a\bar{x} - b\bar{y} \end{cases}$$

La variance résiduelle de u, c'est à dire la variance de l'expression $(u - ax - by - c)$ est alors égale à :

$$(4) \quad S^2 = \frac{1 + 2R_{ux}R_{xy}R_{uy} - R_{ux}^2 - R_{uy}^2 - R_{xy}^2}{1 - R_{xy}^2} S_u^2$$

Elle serait nulle si la formule (2) était rigoureuse. L'écart type correspondant S donne une mesure des fluctuations possibles. On admettra par exemple que la loi est vérifiée à $\pm 2S$ près. Le rapport S/ S_u mesure le gain de précision en valeur relative, et permet la comparaison de lois de formes différentes.

Exemples numériques

1°) Dix neuf données, provenant des sondages 13, 15, 10 et 8, ont fourni les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \bar{u} = 0,297 \\ \bar{S} = 21,30\% \\ \bar{F}_0 = 24,10\% \end{cases} \quad \begin{cases} S_u^2 = 0,001259 \\ S_S^2 = 111,5 \\ S_{F_0}^2 = 65,14 \end{cases}$$

- 4 -

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{us} = -0,3462 \\ S_{uF} = -0,2594 \\ S_{SF} = +76,19 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{us} = -0,9241 \\ R_{uF} = -0,9060 \\ R_{FS} = +0,8991 \end{array} \right.$$

On notera les valeurs élevées des coefficients de corrélation. La méthode des moindres carrés conduit à la formule :

$$(5) \quad \frac{1}{d} = u = 0,3731 - 0,1865 \frac{S}{100} - 0,1722 \frac{Fe}{100}$$

Le rapport de la variance résiduelle S^2 à la variance initiale S_u^2 est :

$$(6) \quad \frac{S^2}{S_u^2} = 0,1315$$

L'écart type S est égal à 0,0128. Il en résulte que la formule (5) donne le volume spécifique à $\pm 0,0256$ près, c'est à dire avec une erreur relative de 8,7/100 au plus.

2°) Quatorze données provenant d'un même sondage (S. 12) ont fourni les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = 0,32793 \\ \bar{S} = 18,79\% \\ \bar{Fe} = 22,31\% \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{us} = -0,94295 \\ R_{uF} = -0,92138 \\ R_{SF} = +0,99212 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{us} = -0,31015 \\ S_{uF} = -0,2156 \\ S_{FS} = +64,787 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} S_u^2 = 0,001178 \\ S_S^2 = 91,79 \\ S_F^2 = 46,46 \end{array} \right.$$

Les corrélations sont plus élevées que dans le premier exemple. Les données étant relatives à un même sondage, en effet, la densité de la gangue varie moins et par suite la densité résultante est liée davantage aux teneurs. La corrélation entre S et Fe, presque égale à 1, correspond au fait que le degré d'oxydation de la pyrite est pratiquement le même tout le long du sondage, tandis que, dans l'exemple précédent, il pouvait varier au moins d'un sondage à l'autre.

La méthode des moindres carrés conduit à la formule :

$$(7) \quad \frac{1}{d} = u = 0,3499 - 0,6583 \frac{S}{100} + 0,4542 \frac{Fe}{100}$$

Le rapport des variances résiduelles et initiales est :

$$(8) \quad \frac{S^2}{S_0^2} = 0,0956$$

Il est plus faible que dans le premier exemple. L'approximation est meilleure, comme on pouvait s'y attendre.

L'écart type S est égale à 0,0106. La formule (7) est donc approchée à $\pm 0,21$, ce qui correspond à une erreur relative de 6,4/100 au plus.

3°) COMPARAISON DES DEUX EXEMPLES

Les formules (5) et (7) ont des coefficients complètement différents. Le sens même de la variation est différent en ce qui concerne le fer. La formule (5) indique une augmentation de la densité avec la teneur en fer, la formule (7) une diminution.

Dans une formule du type

$$u = a \frac{S}{100} + b \frac{Fe}{100} + c$$

c représente le volume spécifique de la gangue elle-même. La densité de la gangue, égale à l'inverse de c, est de 2,64 dans le premier exemple, et de 2,86 dans le deuxième, donc nettement plus lourde : il n'est donc pas étonnant de trouver deux lois nettement différentes.

Les coefficients a et b sont un peu plus délicats à interpréter. En effet, la teneur en fer correspond d'une part au fer sulfuré, qui est proportionnel à la teneur en S, et au fer oxydé :

$$\begin{aligned} Fe \% &= Fe \text{ sulfuré} + Fe \text{ oxydé} \\ &= \frac{56}{64} S + Fe \text{ oxydé} \end{aligned}$$

Le Fer oxydé doit être pris comme variable, et non pas le fer total. On a ainsi :

$$u = \frac{S}{100} \left[a + \frac{56}{64} b \right] + b \frac{Fe_{oxyd}}{100} + c$$

Introduisons la teneur P en pyrite

$$P = \frac{120}{64} S$$

Il vient :

$$u = \frac{P}{100} \left[\frac{64}{120} a + \frac{56}{120} b \right] + \frac{b}{100} Fe_{ox.} + c$$

Sous cette forme, la relation peut se comparer avec la formule (1) : le coefficient de P/100 doit être égal à la différence $u_p - u_g$ des volumes spécifiques de la pyrite et de la gangue. Dans le cas du premier exemple, on trouve :

$$u_g - u_p = 0,1798 \quad \text{avec} \quad u_g = 0,3781$$

d'où :

$$u_p = 0,1983 \quad d_p = 5,05$$

Cette densité de 5,05 est très proche de la densité théorique de la pyrite (5,1). Dans le cas du deuxième exemple, on trouve :

$$u_g - u_p = 0,1391 \quad \text{avec} \quad u_g = 0,3499$$

$$u_p = 0,2108 \quad d_p = 4,95$$

Cette dernière densité est nettement plus faible que la densité théorique.

Il n'est pas possible de calculer la densité de la limonite, puisqu'on ignore son degré d'hydratation. On peut dire, cependant, qu'elle est comprise entre les densités 2,64 et 2,86 des deux gangues, ce qui explique le comportement vis à vis du fer : Dans le premier cas, la gangue est plus légère que la limonite, et la densité augmente avec la teneur en Fe, dans le deuxième cas, la gangue est plus lourde, et la densité diminue.

4°) Si l'on groupe ensemble les données des deux exemples précédents (33 données numériques), on obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \bar{u} = 0,31013 \\ \bar{S} = 20,2419\% \\ \bar{Fe} = 23,279\% \end{cases} \quad \begin{cases} S_u^2 = 0,001458 \\ S_S^2 = 103,76 \\ S_{Fe}^2 = 57,891 \end{cases}$$
$$\begin{cases} S_{uS} = -0,34992 \\ S_{uFe} = -0,25676 \\ S_{FS} = +72,401 \end{cases} \quad \begin{cases} R_{uS} = -0,8995 \\ R_{uFe} = -0,8838 \\ R_{FS} = +0,9342 \end{cases}$$

Les corrélations sont moins fortes que dans les deux premiers exemples. On arrive à la formule :

$$(8) \quad u = 0,29427 - 0,21736 \frac{S}{100} - 0,17172 \frac{Fe}{100}$$

avec

$$(9) \quad \frac{s^2}{s_u^2} = 0,1759$$

Cette valeur est plus élevée que les précédentes. La précision doit donc être moins bonne. On a $S = 0,016$ = la formule (8) est approchée à $\pm 0,32$ et l'erreur relative est d'environ 10/100.

La densité de la gangue, déduite de la formule (8), est égale à 2,53, et celle de la pyrite à 5,05.

III - COMPARAISON AVEC DES LOIS DE FORMES DIFFÉRENTES

Afin d'établir la supériorité de formules du type (2) sur les autres types possibles, nous avons ajusté les données du sondage 12 à une loi linéaire et à une loi logarithmique. Bien que la précision de la formule (2) ne soit pas excellente (erreur de l'ordre de 6 à 10/100) elle est cependant meilleure que sur les autres lois étudiées.

1°) Loi linéaire

On fait ici l'hypothèse la plus simple possible : la densité (et non plus son inverse) est supposée fonction linéaire des teneurs :

$$(10) \quad d = a x + b y + c$$

Dans le cas du sondage 12, on a trouvé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{d} = 3,0256 \\ \bar{S} = 18,79\% \\ \bar{Fe} = 22,39\% \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} s_d^2 = 0,12714 \\ s_S^2 = 91,79 \\ s_{Fe}^2 = 46,46 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{dS} = +3,078 \\ S_{dFe} = +2,144 \\ S_{FS} = +72,401 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{dS} = +0,90388 \\ R_{dFe} = +0,88238 \\ R_{FS} = +0,99212 \end{array} \right.$$

Les correlations entre d et S et Fe sont plus faibles qu'entre U et les mêmes variables. La formule (10) qui s'écrit ici

$$(11) \quad d = 2,8946 + 6,7763 \frac{S}{100} - 4,8326 \frac{Fe}{100}$$

est donc, a priori, moins bonne que la formule (7). On trouve, en effet :

$$\frac{S^2}{S^2 d} = 0,169 \quad \text{au lieu de } 0,0956$$

L'erreur relative est de 10/100, au lieu de 6,4/100 dans le cas de la formule (7)

Il va de soi que cette précision pourrait être améliorée en introduisant des termes du second degré. Mais une formule du type

$$d = ax + by + cx^2 + 2exy + fy^2 + g$$

exige le calcul de tous les moments du troisième ordre et ne permet pas la construction d'abaques rectilignes.

2°) Loi logarithmique

On suppose ici une sorte de loi d'Action de Marse, de la forme

$$d = K [x]^a [y]^b$$

c'est à dire une relation linéaire entre les logarithmes :

$$(12) \quad \log d = a \log x + b \log y + c$$

Dans le cas du sondage (12), avec les notations log. normales (mais en prenant les log. décimaux), les paramètres sont :

$$\begin{cases} \log \gamma_d = 0,48736 \\ \log \gamma_S = 1,22029 \\ \log \gamma_F = 1,33084 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_d^2 = 0,002268 \\ \sigma_S^2 = 0,04600 \\ \sigma_F^2 = 0,01607 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{dS} = +0,008925 \\ \sigma_{dF} = +0,005257 \\ \sigma_{FS} = +0,02698 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_{dS} = +0,87368 \\ \rho_{dF} = +0,86968 \\ \rho_{FS} = +0,9922 \end{cases}$$

Les corrélations sont encore plus faibles, et le rapport

$$\frac{\sigma^2 d}{\sigma^2 x} = 0,2374$$

de la variance résiduelle à la variance initiale est encore plus élevé. La formule du type (12) est donc encore moins bonne que la formule linéaire.

REMARQUES

1/ La loi (12), moins naturelle que la loi linéaire, n'a pas été choisie au hasard. En effet, on sait que, dans un gisement, se répartissent suivant la loi log normale les variables suivantes :

- les teneurs x
- les puissances h
- les poids métal/m² d et $h x$

Le produit et le quotient de variables log normales étant lui-même une variable log normale, on devrait en conclure que la lognormalité vaut aussi pour la densité d . S'il en est ainsi, les corrélations entre les variables d , x , y , toutes log normales, conduisent à la loi l'Action de Masse, c'est à dire à la formule (12) qui, dans cette hypothèse, est la meilleure représentation possible.

En fait, la formule (2) est meilleure que la loi d'Action de Masse. On doit en conclure que les densités ne sont pas des variables lognormales : leur échelle de variation est linéaire et non logarithmique, et le raisonnement mécanique de la première partie reste valable.

Il est contradictoire, mathématiquement parlant, d'admettre la lognormalité simultanée de x , h et d et $h x$ si d n'est pas lognormale. Cependant, la variance de d est très faible vis à vis de celles des autres variables et $h x$ étant lognormal, il en est pratiquement de même de d et $h x$. Il n'en reste pas moins que la théorie recèle ici une contradiction interne.

2/ La formule (2) donne la valeur probable du volume spécifique en fonction des teneurs. On sait que l'inverse de la valeur probable d'une variable est différent de la valeur probable de la variable inverse. La valeur probable de la densité est donc différente de $1/\bar{u}$. Il n'est pas possible de faire une correction rigoureuse sans connaître la loi de d , loi non lognormale. Cependant, la variance étant faible, le calcul effectué dans l'hypothèse

se lognormale donne une approximation suffisante, puisqu'il s'agit d'une correction. On montre facilement que la valeur probable de d , étant connue, est :

$$E(d) = \frac{1}{u} e^{-\frac{1}{2} \sigma^2}$$

Or, dans l'exemple précédent, la variance logarithmique de la densité est de $1,2/100$. Il faudrait donc théoriquement, prendre pour d la valeur $0,988 \times 1/u$. Cette correction ne concerne que la deuxième décimale et a été négligée. Il serait facile d'en tenir compte.

On trouvera en annexe, dans le cas du sondage 12, les valeurs mesurées et calculées par la formule (7). La valeur moyenne réelle de d est 3,078, la ~~maxim~~ moyenne des valeurs calculées est 3,101 : l'erreur est faible, son sens et son ordre de grandeur sont conformes à ce qui vient d'être dit.

IV - PRESENTATION PRATIQUE

En pratique, les coefficients de la formule (2) ayant été calculés comme ci-dessus, par la méthode des moindres carrés, la formule :

$$\frac{1}{d} = ax + by + c$$

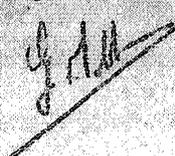
est présentée sous forme d'abaques rectilignes très faciles à construire. Prenons par exemple la formule (8)

$$\frac{1}{d} = 0,394 - 0,217 \frac{S}{100} - 0,172 \frac{Fe}{100}$$

abscisse

Portant sur un graphique Fe % et S % en abscisse et ordonnées, on trace les droites $d = 3$, $d = 3,1$ etc.. et la densité d'un échantillon de teneurs données s'obtient par interpolation entre les droites voisines. Un échantillon à 28 % de Fer et 26 % de Soufre, par exemple, donne un point compris entre les droites $d = 3,4$ et $d = 3,5$ et a une densité de 3,46.

Signé E. MATHIE ROU



A N N E X E

Nous donnons, dans le tableau ci-joint et pour le sondage 12, les densités mesurées, les teneurs en soufre et fer et les densités calculées par la formule (7)

Densité mesurée	S %	Fe %	Densité calculée
2,9	22,5	25,9	3,14
3,8	41,1	37,9	4,14
3,5	29,1	29,1	3,54
2,9	11,4	19,0	2,78
3,8	32,0	31,8	3,52
2,7	7,45	13,4	2,76
2,8	8,15	14,5	2,76
2,9	15,8	20,7	2,94
2,8	10,5	16,9	2,80
3,3	17,3	21,2	3,02
2,9	14,2	18,9	2,90
3,0	14,85	18,4	2,98
2,8	13,25	17,9	2,90
3,1	25,45	27,8	3,24

Moyenne

3,078

3,101

