

H. Matheron

B.R.N.A.

G. MATHERON

REVUE STATISTIQUE

N° 14

THEORIE LOGNORMALE  
DE L'ECHANTILLONNAGE SYSTEMATIQUE

## NOTE STATISTIQUE N° 14

---

### THEORIE LOGNORMALE DE L'ECHANTILLONNAGE SYSTEMATIQUE

Au stade actuel de son développement, la théorie de la loi lognormale permet, grâce au principe de similitude et à la formule de Wijs qui s'en déduit, de résoudre tous les problèmes posés par l'échantillonnage aléatoire des gisements. Dans la pratique, cependant, tous les modes d'échantillonnage effectivement employés, qu'il s'agisse de sondages à maille rigide ou de reconnaissance par travaux miniers, présentent au plus haut point le caractère systématique. Vis en face du problème concret posé par la pratique minière, la première réaction du statisticien est d'assimiler de façon simpliste le procédé employé à un échantillonnage aléatoire pur. Une telle assimilation entraîne vite des conclusions inacceptables et contraires à l'intuition du mineur : chaque tronçon de carotte, ou chaque volée dans un niveau étant considéré comme un échantillon aléatoire, la précision de l'évaluation du gisement paraît en effet proportionnelle à la racine carrée du nombre  $n$  de semblables échantillons. On pourrait donc s'imaginer augmenter indéfiniment la précision en découpant les carottes ou les volées en tronçons de plus en plus petits analysés séparément. En réalité, les tronçons successifs d'un même sondage ne sont pas indépendants les uns des autres et la multiplicité illusoire des données n'entraîne aucun gain de précision. La nature même du problème posé oblige à prendre en considération, outre la taille et le nombre des échantillons, leurs positions et leurs distances mutuelles. De ce point de vue, la théorie de l'échantillonnage stratifié au hasard, dans la mesure même où il se rapproche d'une maille rigide de sondage, représente un progrès considérable et, en fait, les formules de la Note Statistique n° 11 seront à peine modifiées ici. Cependant des procédés aussi usuels que l'échantillonnage périphérique des panneaux ou la reconnaissance d'un gisement par traçages restent en dehors de la portée d'une telle théorie. Tout ce que le statisticien peut nous dire, c'est la précision avec laquelle est connue la teneur de la péri-

phérie ou de la galerie elle-même : le passage de la périphérie au panneau comporte un saut dans l'inconnu dont des auteurs comme Krige sont parfaitement conscients, et que la statistique pure ne permet pas de chiffrer.

A la racine de ce problème, se trouve l'ambiguïté de la nature de la loi de distribution des tenseurs, loi physique dont les propriétés s'énoncent en langage statistique. La teneur n'est pas, en réalité, une variable aléatoire. Une portion  $\sigma$  du gisement, une fois sa forme et sa position fixées, a une teneur unique, physiquement déterminée et nullement aléatoire. Cependant si l'on considère le gisement comme constitué par la juxtaposition d'un nombre  $N$ , grand, mais non infini de volumes  $\sigma$  et si l'on classe sous forme d'histogrammes les  $N$  tenseurs ainsi obtenus, on obtient quelque chose qui ressemble beaucoup à une loi statistique continue. En effet, si  $x_1, \dots, x_N$  sont les tenseurs de chacun des volumes  $\sigma_i$ , et si on tire au hasard un volume  $\sigma_i$  on a la probabilité  $\frac{1}{N}$  de tomber par exemple sur le volume n° 1, c'est à dire sur la teneur

$x_1$  -  $N$  étant grand, une telle loi de probabilité, loi discontinue, diffère très peu d'une loi continue, que l'expérience montre être lognormale. Cependant, outre les  $N$  volumes  $\sigma_i$ , il existe virtuellement dans le gisement, chevauchant sur plusieurs  $\sigma_i$ , une infinité de volumes  $\sigma$  de même forme. On se rend compte que le tirage au sort d'un volume  $\sigma$  fait de la teneur  $x$  une variable aléatoire obéissant à une loi réellement continue, très peu différente de la loi discontinue précédente.

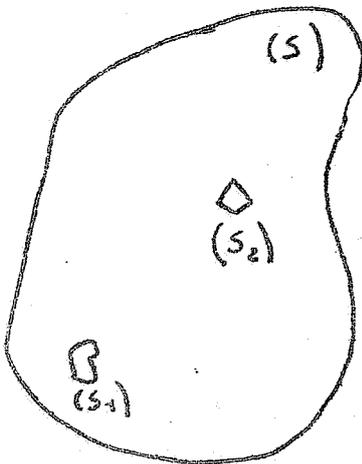
Seul donc le tirage au sort permet de considérer la teneur, grandeur physique à répartition spatiale, comme une variable aléatoire. Un tel point de vue implique la possibilité de voir amener par deux tirages successifs le même volume  $\sigma$ , ou du moins deux volumes  $\sigma$  largement chevauchant.

Ce n'est qu'à ce prix que l'on dispose d'une population infinie. Ceci étant, les teneurs  $x_1$  et  $x_2$  amenées par deux tirages au sort successifs sont deux variables aléatoires indépendantes. Cela signifie que la valeur moyenne du coefficient de corrélation de deux volumes  $v$  du gisement est nulle. Si ces deux volumes coïncident, ce coefficient est égal à  $+1$  - il doit donc prendre des valeurs négatives lorsque les deux volumes sont très éloignés. Dans une maille rigide de sondage, où l'on exclut toute possibilité de chevauchement ou de grande proximité, on doit s'attendre à une corrélation moyenne négative, donc à une meilleure précision que par simple tirage au sort. Au contraire, les différentes volées d'une galerie ou les différents tronçons d'un sondage, plus rapprochés que la moyenne, ont une corrélation positive et conduisent à une moins bonne précision que le tirage au sort.

Le but ultime d'un échantillonnage n'est pas la connaissance de la loi de distribution statistique d'une variable aléatoire, mais la représentation approchée de la répartition géographique d'une grandeur physique (teneur, puissance ou accumulation). Il est commode de résumer la répartition géographique des teneurs dans une zone donnée (panneau, quartiers, etc...) sous forme d'histogrammes des teneurs, documents où l'on fait <sup>abstraction</sup> de la position des volumes  $v$  constitutifs de la zone choisie. Seul le mode de présentation est statistique, la signification d'un tel histogramme étant celle d'une loi physique. Ce n'est que par le biais du tirage au sort d'un volume  $v$  que cet histogramme peut prendre le sens d'une loi de probabilité. Telle est la raison de la tendance invincible qui pousse le statisticien à assimiler tout mode d'échantillonnage à un processus aléatoire. Certains statisticiens, érigeant naïvement en règle générale leur impuissance à saisir la réalité physique, soutiennent la supériorité des échantillonnages aléatoires (stratifiés ou non) sur les mailles rigides - supériorité affirmée mais non démontrée. Les vieux mineurs, cependant, refusent de prendre au sérieux ces considérations et persistent à utiliser les mailles rigides. La théorie développée ci-dessous donne, en fait, raison aux vieux mineurs.

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'établir des formules simples permettant de déterminer l'efficacité de n'importe quel mode d'échantillonnage, systématique ou non, en tenant compte de la forme et de la position dans le gisement des échantillons prélevés.

I - Formule de Wijs généralisée



Considérons un gisement S d'aire et de forme donnée et, dans ce gisement, deux échantillons  $S_1$  et  $S_2$  dont la taille, la forme, la distance et la disposition mutuelles sont également données.

Soient  $x_1$  et  $x_2$  les tenseurs (ou les puissances, ou les accumulations) de  $S_1$  et  $S_2$ . On se propose de calculer la covariance  $\frac{\sigma_{x_1, x_2}}{\sigma_1 \sigma_2}$ , c'est à dire la valeur moyenne de l'expression  $\frac{x_1}{\sigma_1} \times \frac{x_2}{\sigma_2}$  lorsque

la figure constituée par  $(S_1)$  et  $(S_2)$  se déplace sans se déformer dans S, de façon à occuper toutes les positions possibles, ou, si l'on préfère, lorsque cette même figure indéformable est implantée au hasard dans S. En particulier, si  $S_2$  est choisi identique à  $S_1$ , cette covarianace ne sera autre que la variance  $\sigma_{x_1}^2$ .

Considérons dans  $S_1$  une aire élémentaire  $dS_1$  de teneur  $U_1$ , et dans  $S_2$  une aire élémentaire  $dS_2$  de teneur  $U_2$ , et supposons connue la covarianace  $\sigma_{U_1, U_2}$  définie dans S.

1°/ La covarianace  $\sigma_{x_1, x_2}$  de  $dS_1$  et de  $dS_2$  est égale à la valeur moyenne de  $\sigma_{U_1, U_2}$  lorsque  $dS_2$  occupe toutes les positions possibles dans  $S_2$ . En effet, la loi lognormale nous montre que  $Lx_2$  est égale, à un facteur constant près indépendant de la position de  $S_2$ , à la valeur moyenne dans  $S_2$  de  $Lu_2$  = on a donc

$$(1) \quad \sigma_{x_1, x_2} = \frac{1}{S_2} \iint_{S_2} \sigma_{U_1, U_2} dS_2$$

2°/ La covariance  $\sigma_{x_1 x_2}$  est, de la même façon, égale à la valeur moyenne dans  $S_1$  de  $\sigma_{u_1 u_2}$ , de sorte que l'on a finalement :

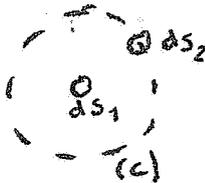
$$\sigma_{x_1 x_2} = \frac{1}{S_1 S_2} \iint_{S_1} dS_1 \iint_{S_2} \sigma_{u_1 u_2} dS_2$$

$\sigma_{x_1 x_2}$  est ainsi égale à la valeur moyenne de  $\sigma_{u_1 u_2}$  attendue à toutes les positions possibles dans  $S_1$  et  $S_2$  de  $dS_1$  et  $dS_2$  = une intégration quadruple sur les domaines  $S_1$  et  $S_2$  permet de calculer  $\sigma_{x_1 x_2}$  si compliquées que soient les formes de ces domaines. La connaissance de la covariance élémentaire  $\sigma_{u_1 u_2}$  permet donc, en principe, la résolution du problème.

Formule de la covariance élémentaire

Soient dans le gisement  $S$ , les deux aires élémentaires  $dS_1$  et  $dS_2$ , de tenseurs  $u_1$  et  $u_2$ , et soit  $r_{12}$  leur distance mutuelle. S'agissant d'aires infiniment petites, la forme géométrique de  $dS_1$  et  $dS_2$  perd toute influence, et la covariance  $\sigma_{u_1 u_2}$  ne dépend que de la distance  $r_{12}$ .

$$\sigma_{u_1 u_2} = f(r_{12})$$



Considérons le cercle  $C$  de centre  $O_1$  et de rayon  $r_{12}$ , soient  $\lambda$  sa teneur et  $\sigma_\lambda^2$  la variance de  $\lambda$ . Posons

$$(3) \quad \sigma_{u_1 u_2} = \sigma_\lambda^2 + K$$

Il résulte du principe de similitude que  $K$  doit être une constante. En effet, une similitude de module  $\lambda$  appliquée à la fois à  $S$  et à la figure  $dS_1 + dS_2$  ne modifie ni  $\sigma_\lambda^2$  ni  $\sigma_{u_1 u_2}$ .

La similitude  $\frac{1}{\lambda}$  appliquée à S seul, pour lui restituer sa forme originale modifie de la même quantité les variances  $\sigma_j^2$ ,  $\sigma_{u_1}^2$  et  $\sigma_{u_2}^2$ .  
Cependant, l'expression

$$\sigma_{u_1}^2 + \sigma_{u_2}^2 - 2\sigma_{u_1, u_2}$$

variance du rapport  $U_1/U_2$  est indépendante de la forme et de la taille de S, d'où il résulte que  $\sigma_{u_1, u_2}$  est modifié de la même quantité que  $\sigma_j^2$ .  
K a donc la même valeur pour les distances  $r_{12}$  et  $\lambda r_{12}$  —  
done est indépendant de  $r_{12}$ .

Si la formule de de Wijs est applicable, pour le cercle on a

$$\sigma_j^2 = \alpha L \frac{S}{\pi r_{12}^2}$$

Cependant, si S n'est pas un cercle, la formule de de Wijs n'est peut être plus valable. Admettons que l'on ait simplement, pour la variance du cercle :

$$\sigma_j^2 = K' - 2\alpha L r_{12} \quad (3)$$

K' dépendant de la taille et de la forme de S. L'équation (3) s'écrit alors :

(4)

$$\sigma_{u_1, u_2} = A - 2\alpha L r_{12}$$

Dans cette formule fondamentale, dite de la covariance élémentaire, A est indépendant de  $r_{12}$ , mais dépend de la taille et de la forme du gisement S. Il va de soi que les considérations qui précèdent ne constituent pas une démonstration de la formule (4) et n'ont d'autre but que d'en expliquer la signification. La formule de la covariance est en réalité un postulat plus général que le principe de similitude, qui peut au contraire en être déduit de façon rigoureuse.

### Covariance d'échantillons macroscopiques $S_1$ et $S_2$

Connaissant la taille, la forme et la disposition relative de  $S_1$  et  $S_2$ , on calcule leur covariance par la formule :

$$(5) \quad \sigma_{x_1, x_2} = A - \frac{2\alpha}{S_1 S_2} \iint_{S_1} ds_1 \iint_{S_2} L r_{12} ds_2$$

### Variance d'un échantillon macroscopique $S_1$

Elle est de même donnée par la formule :

$$(6) \quad \sigma_{x_1}^2 = A - \frac{2\alpha}{S_1^2} \iint_{S_1} ds_1 \iint_{S_1} L r ds_1'$$

où  $r$  représente la distance des éléments  $ds_1$  et  $ds_1'$ ,

### Valeur de la constante $A$

La covariance  $\sigma_{u_1, u_2}$  a, dans  $S$ , une valeur moyenne nulle, puisque deux échantillons élémentaires tirés au sort ont une corrélation nulle. On a donc

$$(7) \quad A = \frac{2\alpha}{S^2} \iint_S ds \iint_S L r ds'$$

La formule 6 nous montre que, prélevé dans  $S$ , un échantillon identique à  $S$  a une <sup>variance</sup> variance nulle.

### Formule de de Wijs généralisée

Les formules (6) et (7) montrent qu'un échantillon de taille et de forme données a, dans un gisement, ou une portion de gisement  $S$ , de taille et de forme également données, la variance :

$$(8) \quad \sigma_x^2 = \frac{2\alpha}{S^2} \iint_S ds \iint_S L r ds' - \frac{2\alpha}{S^2} \iint_S ds \iint_S L r ds'$$

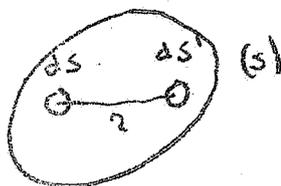
Comme la formule de de Wijs, cette formule est de la forme :

$$G^2 = F(S) - F(D)$$

Mais la fonction  $F(S)$  ne dépend plus seulement de la valeur numérique de l'aire  $S$ , mais également de la forme géométrique du domaine  $S$  d'intégration. Montrons que la formule de de Wijs est un cas particulier de la formule (8)

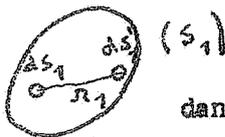
Cas particuliers

Considérons la fonction :



$$(9) \quad G(S) = \frac{1}{S^2} \iint_S ds \iint_S L r ds'$$

et deux aires  $S$  et  $S_1$  géométriquement semblables, le rapport de similitude étant  $\lambda$  :



A tout couple  $ds \ ds'$  distant de  $r$  dans  $S$ , correspond dans  $S_1$ , par similitude le couple  $ds_1 \ ds'_1$  distant de  $r_1$ , tel que l'on ait

$$ds_1 = \lambda^2 ds \quad ds'_1 = \lambda^2 ds' \quad r_1 = \lambda r$$

On a donc

$$G(S_1) = \frac{1}{S_1^2} \iint_{S_1} \lambda^2 ds \iint_{S_1} \lambda^2 ds' L \lambda r$$

Comme  $S_1 = \lambda^2 S$ , on a finalement :

$$(10) \quad G(S_1) = G(S) + L\lambda$$

Ceci étant, envisageons les cas particuliers suivants :

1°/ L'échantillon  $A$  est géométriquement semblable au gisement  $S$  dont il est prélevé. La formule (10) montre que la variance de dans  $S$  est :

$$\sigma_x^2 = \alpha L \lambda^2$$

ce que l'on peut écrire aussi bien sous la forme de de Wijs

$$(II) \quad \left( \sigma_x^2 = \alpha L \frac{S}{J} \right)$$

2°/ L'échantillon  $A$  n'est plus géométriquement semblable au gisement  $S$ . On cherche comment se modifie sa variance lorsque l'on fait varier la taille de  $A$  sans altérer sa forme - Soient donc deux échantillons  $J_1$  et  $J_2$  semblables prélevés dans un gisement  $S$  de forme quelconque. On a :

$$\sigma_{x_1}^2 = 2\alpha G(S) - 2\alpha G(J_1)$$

$$\sigma_{x_2}^2 = 2\alpha G(S) - 2\alpha G(J_2)$$

D'après la formule (10) on peut écrire :

$$\sigma_{x_2}^2 = 2\alpha G(S) - 2\alpha G(J_1) - 2\alpha L \lambda$$

c est à dire :

$$\sigma_{x_2}^2 = \sigma_{x_1}^2 - \alpha L \frac{J_2}{J_1}$$

On peut donc écrire

(12)

$$\left( \sigma_x^2 = \alpha L \frac{S}{J} + C \right)$$

(12)

$$\sigma_x^2 = \alpha L \frac{S}{J} + C$$

C étant une constante pour un gisement S, pourvu que l'échantillon  $J$  reste géométriquement semblable à lui-même. La signification de la constante C est évidente : les figures  $J$  et  $S$  n'étant pas semblables, l'échantillon  $J$  ne peut coïncider avec  $S$  lorsque son aire est égale à celle de  $S$ , et par suite sa variance n'a aucune raison de s'annuler.

En résumé, la formule ordinaire de de Wijs reste valable si l'échantillon prélevé est géométriquement semblable au gisement. Si cette condition de similitude n'est pas remplie, la formule de de Wijs est modifiée par l'addition d'une constante, dont la valeur numérique ne dépend que de la forme géométrique du gisement et de l'échantillon.

La formule de de Wijs ainsi généralisée nous permet théoriquement d'étudier n'importe quel mode d'échantillonnage. Il va de soi, qu'en pratique, on se heurtera à certaines difficultés d'intégration. La suite de cette étude sera consacrée à un certain nombre de cas particuliers de grande importance pratique :

- Echantillonnage périphérique des panneaux
- Sondages à maille rigide
- Reconnaissance d'un gisement par traçages et montages

Pour terminer, nous étudierons l'influence d'une anisotropie toujours possible, c'est à dire de l'existence de runs, La théorie du facteur  $F$  de run, qui sera proposée ici, permettra, si l'expérience la vérifie, de déterminer en particulier la meilleure maille possible en prospection alluvionnaire.

## II - L'échantillonnage périphérique des panneaux



ca

Un panneau de forme rectangulaire ou carrée, est considéré comme "reconnu" lorsqu'il a été

Vérification de déplacements et montages à Pot enroulé du panneau...

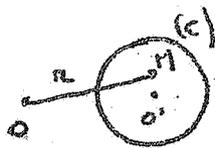
ceinturé par deux tracages et deux montages. L'extrapolation de la teneur  $y$  du panneau ainsi défini comporte un véritable saut dans l'inconnu, qu'aucune théorie, jusqu'ici, n'avait réussi à chiffrer.



Pour simplifier les intégrations, nous assimilerons ici le panneau et sa périphérie à un cercle et une couronne circulaire. Nous verrons plus tard que l'erreur ainsi introduite est très faible pourvu que le panneau soit à peu près carré.

Le choix de contours circulaires est motivé par le théorème classique suivant : "Si une fonction est harmonique dans un cercle et sur son contour, la valeur moyenne de cette fonction sur le contour est égale à sa valeur au centre" Il en résulte immédiatement que sa valeur moyenne dans le cercle est, elle aussi, égale à la valeur au centre.

En particulier, soit un cercle (C) et un point O extérieur à (C).

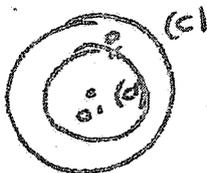


Si l'on pose  $r = OM$ , la fonction  $Lr$  est harmonique dans (C) et sur son contour. La valeur moyenne de  $Lr$  dans le cercle est donc égale à  $Lr_0$ ,  $r_0$  désignant la distance  $OO'$  du point O et du centre du cercle.

Il en résulte immédiatement que la covariance de deux cercles extérieurs l'un à l'autre est égale à la covariance élémentaire  $\int \int u_1 u_2$  des aires infiniment petites  $ds_1$  et  $ds_2$  placées aux centres de chacun des cercles :

$$(13) \int \int u_1 u_2 = \int \int u_1 u_2 = A - 2 \pi L r_0$$

La covariance de deux cercles ne dépend que de la distance de leurs centres, et reste indépendante de leurs rayons tant que ces cercles n'ont pas de point commun.



Cas intérieur - Si au contraire le point O est intérieur à (C), la fonction  $Lr$  n'est plus définie lorsque M vient en O et le théorème ne s'applique plus. On considère alors le cercle (C') de même centre O' et de rayon  $O'O = r_0$

La valeur moyenne de  $Lr$  dans le cercle  $(C^0)$  est  $Lr_0$ . Dans la couronne circulaire comprise entre  $C$  et  $C^0$ ,  $Lr$  a la même valeur moyenne que si le point  $O$  était en  $O^0$ . En effet, cette valeur moyenne est la même quelle que soit la position de  $O$  sur le contour de  $(C^0)$  et peut-être considérée comme une fonction harmonique du point  $O$  = elle est donc égale à sa valeur au centre, c'est à dire,  $R$  désignant le rayon de  $(C)$ , à =

$$\frac{1}{\pi(R^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^R 2\pi r L r dr = \frac{R^2 L R - r_0^2 L r_0}{R^2 - r_0^2} = \frac{1}{2}$$

La valeur moyenne de  $Lr$  dans  $(C)$  entier s'en déduit facilement :

$$(14) \quad E(Lr) = LR - \frac{R^2 - r_0^2}{2R^2}$$

Il en résulte que la covariance  $\overline{u_3}$  de l'aire élémentaire  $dS$  et du cercle  $(C)$  de rayon  $R$  est égale, en fonction de la distance  $r$  du centre de  $(C)$  et de  $dS$ , à =

$$(15) \quad \begin{cases} \overline{u_3} = A - 2rLr & \text{pour } r > R \\ \overline{u_3} = A - 2rLR + \pi \frac{R^2 - r_0^2}{R^2} & \text{pour } r < R \end{cases}$$

La teneur  $\overline{u_3}$  du cercle  $(C)$ , de son côté, a une variance égale à :

$$\overline{u_3^2} = A - \frac{2r}{\pi^2 R^4} \iint_C ds \iint_C Lr ds'$$

ou, plus simplement :

$$\sigma_j^2 = \int_0^R \frac{2\pi r \sigma_{rj}}{\pi R^2} dr$$

La valeur de  $\sigma_{rj}$  étant celle du cas intérieur.

Il vient :

$$(16) \quad \sigma_j^2 = A - 2\alpha L^2 + \frac{\alpha}{2}$$

Compte tenu de cette relation, les formules (15) peuvent s'écrire :

$$(17) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_{rj} = \sigma_j^2 - 2\alpha L \frac{r}{R} - \frac{\alpha}{2} \quad \text{pour } r > R \\ \sigma_{rj} = \sigma_j^2 + \frac{\alpha}{2} - \alpha \frac{r^2}{R^2} \quad \text{pour } r < R \end{array} \right\}$$

Cercle critique - Le lieu des centres des cercles dont les tenseurs sont indépendantes de la teneur  $\sigma_j$  de (C) est un cercle concentrique à (C), appelé cercle critique, de rayon  $R_c$  tel que l'on ait :

$$2\alpha L \frac{R_c}{R} = \sigma_j^2 - \frac{\alpha}{2}$$

En particulier, si le gisement S est lui-même un cercle de rayon  $R_0$ , on a

$$\sigma_j^2 = \alpha L \frac{R_0^2}{R^2}$$

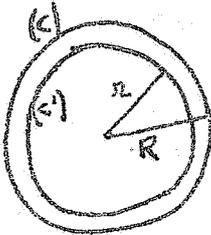
et le rayon du cercle critique est

$$R_c = R_0 e^{-\frac{1}{2}} = 0.707 R_0$$

Les éléments intérieurs au cercle critique sont en corrélation positive avec  $\sigma_j$ , et les éléments extérieurs en corrélation négative.

Les fonctions  $\xi, \eta, \omega$  et  $\xi$

Concentriques



Soit un cercle  $C$  de rayon  $R$ , et un cercle  $C'$  de rayon  $r$  plus petit. Dans ce qui suit  $\lambda$  désigne la teneur de  $C$ ,  $\eta$  celle de  $C'$ , et  $\xi$  la teneur de la couronne comprise entre  $C$  et  $C'$ , c'est à dire la teneur périphérique.

Posons :

$$(18) \quad \begin{cases} \sigma_x^2 = \sigma_3^2 - \xi \\ \sigma_{xy} = \sigma_3^2 - \eta \\ \sigma_{xz} = \sigma_3^2 - \eta \\ \sigma_{yz} = \sigma_3^2 + \omega \end{cases}$$

Prenons comme paramètre le rapport  $\lambda$  de l'aire de la couronne périphérique à l'aire du cercle  $(C)$

$$(19) \quad \lambda = \frac{R^2 - r^2}{R^2}$$

On trouve, par des intégrations élémentaires analogues à celles du paragraphe précédent :

$$(20) \quad \begin{cases} \xi = \alpha \frac{1-\lambda}{\lambda^2} \left[ (1-\lambda) L(1-\lambda) + \lambda \right] \\ \eta = \frac{\alpha}{2} (1-\lambda) \\ \xi = -\frac{\alpha}{2} - \alpha \frac{(1-\lambda)}{\lambda} L(1-\lambda) \\ \omega = \frac{\alpha}{2} \lambda \end{cases}$$

Ces formules résolvent le problème de l'échantillonnage périphérique. On remarque que  $\sigma_y^2$  est toujours positif. La variance de la périphérie est toujours inférieure à la variance du grand cercle, bien que son aire soit plus petite. La raison en est que les éléments constitutifs de la couronne sont plus éloignés, en moyenne, les uns des autres que ceux du grand cercle.

Théorie de la périphérie évanescence

La périphérie évanescence correspond au cas où  $\lambda$  est infiniment petit : le panneau est échantillonné par un grattage infiniment mince effectué de façon continue sur la totalité de la périphérie. On trouve alors, en faisant  $\lambda = 0$  dans les formules (20).

$$(21) \quad \boxed{\begin{matrix} \frac{p}{2} = \frac{h}{2} = \gamma = \frac{a}{2} \\ \omega = 0 \end{matrix}}$$

La dernière relation résulte du fait que  $y$  et  $z$  sont égaux. Des relations (21) découlent les conséquences suivantes :

1<sup>er</sup> / Théorème de l'écran périphérique - Lorsque la teneur  $x$  de la périphérie évanescence est fixée, la teneur  $x$  du panneau est stochastiquement indépendante de la teneur de tout échantillon prélevé à l'extérieur du panneau. Autrement dit le panneau circulaire n'est en corrélation avec le reste du gisement que par l'intermédiaire de sa périphérie évanescence.

Il suffit de démontrer qu'il en est bien ainsi pour toute aire élémentaire  $dS$  de teneur  $u$  extérieur au panneau.

Pour un tel élément, extérieur à (C), le théorème sur les fonctions harmoniques montre que l'on a

$$(22) \quad \sigma_{ux} = \sigma_{uz}$$

Considérons alors l'expression :

$$H = \sigma_x^2 \sigma_{xz} - \sigma_{xz} \sigma_{zx}$$

D'après (22), on a

$$H = \sigma_{xz} [\sigma_x^2 - \sigma_{xz}]$$

L'égalité de  $h$  et de  $\eta$  nous montre que  $\sigma_x^2$  et  $\sigma_{xz}$  sont égaux, donc  $H$  est nul. En divisant  $H$  par  $\sigma_x^2 \sigma_z$  et en introduisant les coefficients de corrélation, il vient :

$$(23) \quad \rho_{xz} = \rho_{zx} \rho_{xz}$$

Cette relation démontre le théorème .

Du point de vue pratique, ce théorème signifie qu'une fois connu la teneur périphérique le prélèvement d'échantillons nouveaux extérieurs au panneau n'apporte aucune information supplémentaire quant à la teneur du panneau.

## 2° / Estimation du panneau par la périphérie évanescente

Supposons connue la teneur  $x$  de la périphérie. Quelle est la valeur de  $x$  comme estimateur de la teneur du panneau ? Il suffit pour répondre à cette question, de connaître la loi de probabilité de  $z$  à  $x$  fixé (c'est à dire la loi de probabilité de la teneur  $z$  d'un panneau (C) tiré au sort parmi l'infinité de panneaux ayant une teneur périphérique égale à  $x$ ). Désignons par  $\gamma_x$  et  $\gamma_z$  les médianes dans le gisement  $S$  de  $x$  et de  $z$ . A  $x$  fixé,  $z$  est une variable lognormale de médiane .

$$\gamma_{z \cdot x} = \gamma_z \left[ \frac{x}{\gamma_x} \right]^{\rho_{xz} \frac{\sigma_z}{\sigma_x}}$$

et de variance

$$\sigma_{z \cdot x}^2 = \sigma_z^2 (1 - \rho_{xz}^2)$$

Compte tenu des relations (21), ceci peut s'écrire :

$$(24) \quad \begin{cases} \gamma_{z \cdot x} = \gamma_z \frac{x}{\gamma_x} \\ \sigma_{z \cdot x}^2 = \frac{\sigma_z^2}{2} \end{cases}$$

Il en résulte que la valeur moyenne de  $z$  à  $x$  fixé est :

$$z' = \frac{\gamma_z}{\gamma_x} e^{-x/4}$$

Soit  $m$  la teneur moyenne du gisement ( $S$ ), on a

$$m = \gamma_z e^{S/2} = \gamma_x e^{S/2}$$

d'où l'on déduit

$$\gamma_z/\gamma_x = e^{-x/4}$$

et par suite

(25)

$$z' = \rho c$$

On voit ainsi que la teneur  $z$  de la périphérie évanescente est un estimateur sans biais de la teneur  $z$  du panneau circulaire. La précision de cette estimation est mesurée par la variance de  $z$  à  $x$  fixée, variance égale à la moitié de la dispersion absolue

Il est remarquable que cette précision soit indépendante non seulement de la taille et de la forme du gisement  $S$ , mais également des dimensions du panneau circulaire.

Au seuil habituel de 95/100, cette précision se traduit par les coefficients suivants, en fonction de la dispersion absolue

Gisement d'or	( $\sigma = \frac{14}{100}$ )	0.61 - 1.7
	( $\sigma = \frac{10}{100}$ )	0.64 - 1.56
	( $\sigma = \frac{9}{100}$ )	0.65 - 1.53
Uranium filonien	( $\sigma = \frac{7}{100}$ )	0.69 - 1.45

Pb filonien	$\alpha = \frac{5}{100}$	0.73 - 1.37
	$\left( \frac{= 3}{100} \right)$	0.78 - 1.28
Pb de substitution	$\left( \frac{= 1}{100} \right)$	0.87 - 1.152
	$\left( \frac{= 1}{1000} \right)$	0.94 - 1.06
Fer ou Mn sédimentaire	$\left( \frac{= 1}{10000} \right)$	0.98 - 1.02

L'échantillonnage purement périphérique d'un panneau donne des résultats acceptables dans le cas de gisements de substitution excellents pour les gisements sédimentaires, mais nettement moins bons pour les gisements d'or et d'uranium.

Dans la pratique, le panneau n'est pas circulaire et la périphérie n'est pas évanescence. Toutefois, pourvu que le panneau soit à peu près carré, les résultats précédents constituent une première approximation. En particulier il est pratiquement inutile de tenir compte pour l'évaluation d'un panneau, des données extérieures à sa périphérie. Les données intérieures, par contre, apportent un supplément appréciable d'information. De même, la teneur  $x$  de la périphérie, en tant qu'estimateur de la teneur  $x$  du panneau n'est que très faiblement biaisée, et sa précision est donnée par une variance d'échantillonnage dont l'ordre de grandeur est toujours celui de la moitié de la dispersion absolue.

Périphérie non évanescence

Le paramètre  $\lambda$  n'est plus égal à 0. En pratique, sa valeur est de l'ordre de 1/5 à 1/20, suivant la taille des panneaux  $X$ .

Déterminons la loi de distribution de la teneur  $y$  de

résiduel lorsque la teneur  $x$  de la périphérie est connue. A  $x$  fixé,  $y$  est une variable lognormale de paramètre.

$$(26) \begin{cases} \delta_{y,x} = \gamma \left( \frac{x}{\bar{x}} \right)^{\rho_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}} \\ \sigma_{y,x}^2 = \sigma_y^2 (1 - \rho_{xy}^2) \end{cases}$$

La formule (12) nous permet de calculer en fonction de

$$(27) \quad \sigma_y^2 = \sigma_z^2 - a L(1-\lambda) = \sigma_z^2 + b$$

A l'aide de cette équation et des formules (20), les formules (26) permettent de calculer la valeur probable  $y'$  et la variance de  $y$  à  $x$  fixé. Tous calculs faits, on trouve =

$$(28) \quad \begin{cases} y' = Kx \\ \sigma_{y,x}^2 = b + 2h - \frac{(b-2h)^2}{\sigma_z^2 - b} \end{cases}$$

Le facteur de biais,  $K$  est égal à :

$$(29) \quad K = e^{\frac{h-b}{2} - \frac{(b-b)^2}{2(\sigma_z^2 - b)}} \left[ \frac{x}{\bar{x}} \right]^{\frac{b-h}{\sigma_z^2 - b}}$$

L'expression  $(b-h)$  est positive et petite =

$$b-h = a \left[ \frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda^2}{12} + \dots \right]$$

Pour une dispersion de 10/100 et un  $\lambda$  de 1, cette expression est de l'ordre de 1. La correction introduite 10 par 600

le facteur de biais  $K$  n'excèdera donc jamais quelques millièmes. Il n'y a donc pratiquement pas lieu d'en tenir compte. Il est intéressant de remarquer que ce biais très léger joue en sens inverse de la correction de Krige, une périphérie très riche encadrant, en moyenne, un panneau

plus riche encore, et réciproquement. De même la variance dépend en principe de  $\sigma_z^2$ ; c'est à dire de la taille du panneau, mais en pratique, l'expression  $(\frac{\alpha}{2} - 2\lambda)^2$ , qui est de l'ordre de  $\frac{\alpha^2}{4}$  est négligeable, de sorte que la variance d'échantillonnage peut être considérée comme indépendante de la taille du panneau et égale à :

$$(30) \quad \sigma_{y,x}^2 = \mu + 2\lambda - \frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{\lambda^2} [2(1-\lambda) + \lambda]$$

Cette expression se développe en série :

$$(31) \quad \sigma_{y,x}^2 = \alpha \left[ \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda^2}{4} + \dots \right]$$

C'est une fonction croissante de  $\lambda$ . Plus épaisse est la périphérie enlevée, moins bonne est la précision sur le panneau résiduel. Etant donné que les dimensions d'une galerie ou d'un montage sont à peu près toujours les mêmes, le rapport  $\lambda$  est d'autant plus grand que le panneau est plus petit. D'où cette conclusion un peu paradoxale : la précision d'un échantillonnage périphérique est d'autant meilleure que le panneau échantillonné est plus grand. Il s'agit là, trois fois, d'un effet différentiel, et la variance d'échantillonnage ne diffère que très peu de  $\alpha/2$ . D'ailleurs, si l'on avait considéré  $x$  comme estimateur, non du panneau résiduel, mais du panneau entier, périphérie comprise, dont la teneur est  $z$ , on aurait trouvé :

$$(32) \quad \sigma_{z,x}^2 = 2\eta - \frac{\alpha}{2}$$

Egale à  $\frac{\alpha}{2}$  pour  $\lambda = 0$ , cette expression est une fonction de croissante de  $\lambda$  et la conclusion est inversée. On voit que la théorie de la périphérie évanescence est utilisable dans la mesure même où l'on estime qu'il n'y a pas lieu de distinguer le panneau intact et le panneau résiduel.

#### Possibilités d'amélioration de l'échantillonnage périphérique

Il s'agit ici de la possibilité d'améliorer la précision fixée par l'inexorable  $\frac{\alpha}{2}$  - sans effectuer d'importants travaux supplémentaires.

Première possibilité : Prélèvement d'échantillons extra périphérique .  
Le théorème de l'écran nous a montré que cette possibilité n'existe pas.

Deuxième possibilité : Au lieu de ne faire intervenir que la teneur moyenne  $x$  de la périphérie, tenons compte des teneurs  $x_1 \dots x_k$  des volées individuelles. Cette possibilité n'existe pas non plus, comme il résulte du théorème très général suivant :

Théorème du Statisticien déçu : Soit un échantillon  $S$ , de forme quelconque et dont la teneur  $X$  doit servir à l'estimation de la teneur  $z$  d'un panneau  $S'$ , dont la forme et la disposition relativement à  $S$  sont arbitraires . Soit également un élément  $dS$  de teneur  $u$  supposé choisi au hasard à l'intérieur de  $S$ . Lorsque  $x$  est fixé, les variables  $u$  et  $z$  sont indépendantes.

En effet,  $dS$  étant choisi au hasard, on a

$$(32) \quad \sigma_{uz} = \sigma_{xz} \quad \text{et} \quad \sigma_{ux} = \sigma_x^2$$

Et l'expression

$$H = \sigma_x^2 \sigma_{uz} - \sigma_{ux} \sigma_{xz}$$

est nulle, d'où résulte :

$$(33) \quad \rho_{uz} = \rho_{xz}$$

égalité qui démontre le théorème .

Il va de soi que s'il était possible de choisir un certain nombre de  $dS$  occupant des positions privilégiées telles que les égalités (32) ne soient pas vérifiées, il subsisterait une possibilité d'amélioration. Toutefois, le long d'une périphérie, les différentes volées occupent des positions équivalentes et les équations (32) sont vérifiées.

La signification pratique de ce théorème est évidente il est impossible à partir des  $n$  volées successives d'une galerie, ou des  $n$  tronçons de carottes d'un sondage analysés séparément, de former un estimateur dont l'efficacité soit supérieure à celle de la teneur moyenne de la galerie ou du sondage.

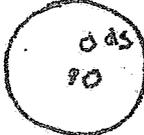
Il en résulte qu'il est absolument inutile, si l'échantillonnage périphérique est du type continu (prélèvement sur tout venant volée par volée par exemple, en opposition aux types discontinus comme les prélèvements par saignées équidistantes) de calculer la teneur périphérique moyenne  $\bar{x}$  par les estimateurs lognormaux. En effet, si l'on néglige les erreurs d'analyses et de quartage, la moyenne arithmétique pondérée, calculée par les procédés usuels, représente la véritable teneur périphérique  $\bar{x}$  et, une fois  $\bar{x}$  connu, il n'existe aucune méthode permettant d'améliorer l'évaluation à partir des teneurs individuelles des volées.

Par contre, si l'échantillonnage de la périphérie est discontinu (saignées), les procédés lognormaux sont préférables, car ils conduisent à une meilleure approximation de  $\bar{x}$ .

Il est évident que l'étude lognormale, à l'échelle du gisement, reste nécessaire à la fois pour évaluer la teneur moyenne du gisement et pour calculer sa dispersion absolue.

Troisième possibilité

Il s'agit cette fois de prélever des échantillons supplémentaires à l'intérieur du panneau (par exemple, sondages intérieurs obliques exécutés à partir de l'extrémité de petites recoupes). Cette possibilité existe, mais son efficacité reste assez faible si on ne veut pas multiplier exagérément le nombre de tels sondages.



Soit donc un échantillon  $ds$  intérieur, de teneur  $u$ . Limitons nous au cas de la périphérie évanescence. On a tout d'abord, en vertu des propriétés de la fonction  $L_r$ , quelle que soit la position de  $ds$

$$\sigma_{u x} = \sigma_{u y} = \sigma_x^2$$

Par contre la covariance  $\sigma_{u z}$  dépend de la position de  $ds$ . Ceci étant, déterminons la loi de  $s$ , teneur du panneau, lorsque  $u$  et  $x$  sont connus. On trouve facilement, pour la valeur probable de  $s$  à  $u$  et  $x$  fixés.

$$(34) \quad z' = x^{1-a} u^a e^b$$

Avec

$$(35) \quad \begin{cases} a = \frac{\sigma_{uz} - \sigma_x^2}{\sigma_u^2 - \sigma_x^2} \\ b = \frac{\sigma_{uz} - \sigma_x^2}{2} \left[ 1 - \frac{\sigma_{uz} - \sigma_x^2}{\sigma_u^2 - \sigma_x^2} \right] \end{cases}$$

Et pour la variance de  $z$  à  $x$  et  $u$  fixés =

$$(36) \quad \sigma_{z=ux}^2 = \frac{d}{2} - \frac{(\sigma_{uz} - \sigma_x^2)^2}{\sigma_u^2 - \sigma_x^2}$$

Choix de l'implantation du sondage supplémentaire : L'implantation la plus favorable est celle qui rend maximale l'expression  $\sigma_{uz} - \sigma_x^2$  c'est à dire le centre du cercle. On a alors, d'après la formule (17)

$$\sigma_{uz} - \sigma_x^2 = d$$

Posons, pour simplifier,

$$\sigma_i^2 = \sigma_u^2 - \sigma_x^2$$

$\sigma_i^2$  est la variance dans le panneau d'un échantillon de la taille du sondage  $dS$ . On trouve :

$$a = \frac{d}{\sigma_i^2 + \frac{d}{2}}$$

$$(37) \quad b = \frac{d}{2} \left[ 1 - \frac{d}{\sigma_i^2 + \frac{d}{2}} \right]$$

$$\sigma_{z=ux}^2 = \frac{d}{2} - \frac{d^2}{\sigma_i^2 + \frac{d}{2}}$$

Le gain de précision apporté par le sondage supplémentaire, effectué au centre est représenté par le terme  $\frac{d^2}{\sigma_i^2 + \frac{d}{2}}$  : il est donc très faible.

Exemple Numérique : Soit un panneau de 1600 m<sup>2</sup> dans un gisement de dispersion absolue  $\sigma = \frac{1}{100}$  (gisement d'uranium, par exemple) .

L'échantillonnage périphérique conduit à une variance d'échantillonnage de  $\frac{4.5}{100}$  et à un intervalle de confiance = 0.67 = 1.53 .

100

On effectue un sondage supplémentaire au centre (diamètre 56 mm)

On a :

$$\sigma_c^2 = \frac{1600 \times 4 \times 10^4}{\pi \times 3.6^2} = 1,2$$

Le gain de précision est :  $\frac{0.71}{100}$

La variance d'échantillonnage passe de  $\frac{4.5}{100}$  à  $\frac{3.8}{100}$  et l'intervalle de confiance à : 0.67 = 1.48 (Le gain est très faible) .

La valeur probable de la teneur du panneau est :

$$z = 1.04 \mu \quad \begin{matrix} 0,073 & 0,927 \\ \mu & \mu \end{matrix}$$

donc très peu différente de  $\mu$  - Pour  $\mu = 1$  et  $\mu = 10$ , par exemple, on prendra pour  $\mu$  la valeur 1.23 .

### III - Sondages à maille rigide

Nous étudierons ici deux problèmes posés par la pratique usuelle des sondages à maille rigide (carrée ou hexagonale) : en premier lieu la précision de l'estimation globale d'un gisement ; en deuxième lieu la valeur probable et la précision de l'estimation de la teneur d'un polygone d'influence.

#### 1°/ Précision sur l'estimation d'un gisement

Soit un gisement  $S_0$  de forme et de taille données, reconnu par  $n$  sondages implantés à une maille rigide régulière (carrée ou hexagonale). Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les teneurs de ces  $n$  sondages,  $\gamma$  et  $\sigma^2$  la moyenne géométrique et la variance des  $x_i$ . L'estimateur lognormal de la teneur moyenne est :

$$(38) \quad m^* = \gamma^* e^{\sigma^2/2}$$

avec

$$(39) \quad L\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Lx_i$$

On se propose ici de déterminer l'efficacité de l'estimateur (38). On distingue deux cas bien différents suivant que la valeur réelle de  $\sigma^2$  est, ou non, supposée a priori connue.

a/ La variance  $\sigma^2$  des sondages est supposée connue a priori

Le seul problème est ici de déterminer l'efficacité de l'estimateur (39) de la moyenne géométrique. Si  $\sigma^2$  désigne la variance d'un sondage dans S, et  $\sigma_{x_i, x_j}$  la covariance des deux sondages d'ordre i et j, la variance de l'estimateur (39) est égale à :  $\sigma_E^2 = \frac{1}{n} \sigma^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \sigma_{x_i, x_j}$

Il suffit donc de déterminer la valeur moyenne de la covariance  $\sigma_{x_i, x_j}$  de deux sondages d'ordre i et j. Etant donné un sondage  $S_i$  de teneur  $x_i$ , son polygone d'influence peut être assimilé, avec une erreur faible, comme nous le verrons, s'il s'agit d'une maille carrée et, a fortiori, plus faible encore s'il s'agit d'une maille hexagonale, à un cercle de même aire  $S/n$  et de teneur  $Z_i$ . Dès lors, on peut écrire :

$$\sigma_{x_i, x_j} = \sigma_{z_i, z_j}$$

et par suite la covariance  $\sigma_{x_i, R}$  de  $x_i$  et de la teneur du reste du gisement est la même que celle de  $Z_i$  et du reste du gisement. Mais les  $S_i$  ont, avec l'ensemble du gisement, une covariance moyenne nulle. On a donc, en désignant par  $S_z$  l'aire du "polygone d'influence" de chaque sondage :

$$S_z \sigma_{x_i, z_i} + (S - S_z) \sigma_{x_i, R} = 0$$

Cette relation étant entendue en valeur moyenne, on en déduit :

$$(41) \quad \sigma_{x_i, x_j} = -\frac{S_z}{S - S_z} \sigma_{x_i, z_j} = -\frac{1}{n-1} \sigma_{x_i, z_j}$$

Si l'on désigne par  $\sigma_z^2$  la variance de la teneur  $z$  d'un polygone d'influence, on a, le sondage étant implanté au centre de chaque panneau

$$C_{x_i, z_i} = \sigma_z^2 + \frac{a}{2}$$

La sommation, dans l'équation (40), est étendue sur  $n(n-1)$  couples  $x_i, x_j$ . Il en résulte que l'on a :

$$(42) \quad \sigma_E^2 = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{1}{n} C_{x_i, z_i} = \frac{\sigma^2 - \sigma_z^2 - \frac{a}{2}}{n}$$

La variance d'échantillonnage est donc :

$$(43) \quad \sigma_E^2 = \frac{\sigma^2 - \sigma_z^2 - \frac{a}{2}}{n}$$

#### Comparaison avec divers modes d'échantillonnages aléatoires

Dans l'échantillonnage stratifié au hasard, on suppose le gisement divisé en polygones d'influence, comme dans une maille rigide, mais chaque sondage est implanté au hasard dans son polygone, au lieu d'être implanté au centre. Dans ces conditions, la covariance des teneurs  $x_i$  et  $z_i$  du sondage et de son polygone est égale à  $\sigma_z^2$ , et la formule (43) est remplacée par :

$$(44) \quad \sigma_E^2 = \frac{\sigma^2 - \sigma_z^2}{n}$$

Un échantillonnage stratifié au hasard est toujours un peu moins précis qu'un échantillonnage à maille rigide. Sa perte de précision est représentée par le terme  $a/2$  : sa valeur est assez faible, mais le prix de revient des deux méthodes étant exactement le même, la maille rigide doit toujours être employée de préférence à l'échantillonnage stratifié au hasard.

Dans l'échantillonnage aléatoire pur, chacun des  $n$  sondages est supposé implanté au hasard dans  $S$ . La variance d'échantillonnage est alors :

$$(45) \quad \sigma_E^2 = \frac{S^2}{n}$$

Elle est nettement plus élevée que dans les deux cas précédents : l'échantillonnage aléatoire pur apparaît ainsi comme un véritable gaspillage.

#### Ordre de grandeur numérique

Soit un gisement de 100.000 m<sup>2</sup> reconnu par 40 sondages, de diamètre 86 mm, implantés à maille rigide de 50 m. La dispersion absolue est de 9/100. On suppose la forme du gisement assez ramassée pour que la formule de de Wijs ordinaire soit valable. La variance d'un sondage est :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{9}{100} \cdot L \frac{10^5 \times 4 \times 10^4}{\pi \cdot 2.6^2} = 1.50$$

La variance dans le gisement d'un panneau de 2.500 m<sup>2</sup> est

$$\hat{\sigma}_j = \frac{9}{100} \cdot L \cdot 40 = 0.33$$

La variance d'échantillonnage est donc :

$$\hat{\sigma}_E^2 = \frac{1.50 - 0.33 - 0.045}{40} = 0.028$$

L'intervalle de confiance pour la moyenne est :

$$0.715 - 1.398$$

Dans le schéma stratifié au hasard, on aurait eu :

$$\hat{\sigma}_E^2 = \frac{1.50 - 0.33}{40} = 0.0293$$

et, comme intervalle de confiance

$$0.71 - 1.41$$

Pratiquement, les deux modes d'échantillonnages sont équivalents. La très légère supériorité de la maille rigide sur le type stratifié au hasard à prix de revient identique justifie cependant son adoption et donne raison à l'intuition du vieux mineur.

Dans le schéma aléatoire pur, on aurait :

$$\hat{\sigma}_E^2 = \frac{1.50}{40} = 0.376$$

avec un intervalle de confiance de : 0,68 - 1,475.

Le type aléatoire pur est donc nettement moins bon que les deux précédents, et parfaitement indéfendable.

b/ La variance  $\hat{\sigma}^2$  du sondage n'est pas connue à priori

La variance d'échantillonnage à maille rigide est alors approximativement :

$$(26) \quad \hat{\sigma}_E^2 = \frac{\hat{\sigma}^2 \hat{\sigma}_j^2 - \frac{d}{2}}{n} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2n}$$

Dans l'exemple numérique précédent :

$$\sigma_E^2 = 0.056$$

et, pour intervalle de confiance  $0.62 - 1.60 = c$  est la meilleure précision que l'on puisse obtenir avec 40 sondages (maille de 50 m.) pour un tel gisement.

2°/ Evaluation de la teneur Z d'un polygone d'influence

Il s'agit ici, en somme, de refaire, pour le cas d'une maille rigide, ce qui a été fait dans la Note Statistique n° 11 pour le cas de l'échantillonnage stratifié au hasard.

a/ Estimation à partir de la seule teneur x du sondage central

Soient Z la teneur du panneau et x celle du sondage central.

De l'équation :

$$G_{z,x} = G_z^2 + \frac{a}{2}$$

On déduit les paramètres de la loi de z à x fixé :

$$(47) \quad \begin{cases} f_{z,x} = m^{1-a} x^a e^{-x/4} \\ a = \frac{G_{z,x}^2 + a/2}{G_z^2} \\ G_{z,x}^2 = G_z^2 - \frac{(G_z^2 + \frac{a}{2})^2}{G_z^2} \end{cases}$$

z représente ici la teneur moyenne du gisement (supposée connue). La valeur probable de z à x fixé est :

$$(48) \quad z' = m^{1-a} x^a e^{-x/4} + \frac{G_{z,x}}{2}$$

la variance d'échantillonnage étant  $G_{z,x}^2$ . Dans l'exemple numérique précédent, on trouverait

$$z' = 1.15 \text{ m} \quad \begin{matrix} 0.75 \\ x \end{matrix} \quad 0.25$$

avec une variance d'échantillonnage  $G_{z,x}^2 = 0.236$

Intervalle de confiance : 0.98 - 2.62

Remarque : si le sondage était implanté au hasard dans le panneau, on aurait  $\sigma_{xz} = \sigma_z^2$ , et on retomberait sur la formule de Krige, formule que l'on obtient en faisant disparaître des formules 47 le terme en  $\frac{1}{2}$

$$(49) \begin{cases} z' = m \frac{\sigma^2 - \sigma_z^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma_z^2}{\sigma^2} \frac{\sigma^2 - \sigma_z^2}{2} \\ \sigma_{z,x} = \frac{\sigma_z^2 (\sigma^2 - \sigma_z^2)}{\sigma^2} \end{cases}$$

Soit numériquement, dans le cas du même exemple :

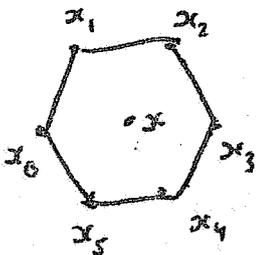
$$\begin{cases} z' = 1.138 \quad m = 0.37 \quad x = 0.27 \\ \sigma_{z,x} = 0.258 \end{cases}$$

Soit un intervalle de confiance : 0.37 - 2.73, nettement moins bon que dans le cas où le sondage est implanté au centre .

b/ Estimation à partir du sondage central et des six sondages les plus proches

Si la maille est hexagonale, les six sondages les plus proches, de teneur  $x_1, x_2 \dots x_6$  sont équidistants du sondage central et interviennent symétriquement . Il suffit donc de poser :

$$(50) \quad u = \sqrt{\frac{6}{6} x_1 x_2 \dots x_6}$$



et de déterminer la loi de Z lorsque x et u sont fixés. On voit immédiatement que la variance à priori de u est :

$$(51) \quad \sigma_u^2 = \frac{1}{6} [\sigma^2 + 2 \sigma_{x_1 x_2} + 2 \sigma_{x_1 x_3} + \sigma_{x_1 x_4}]$$

et que la covariance de x et de u est :

$$(52) \quad \sigma_{ux} = \sigma_{zx_1} = \sigma_{x_1 x_2} = \sigma_{ux}$$

Il est commode d'introduire la variance  $\sigma_e^2$  du cercle circonscrit à l'hexagone  $x_1 x_2 \dots x_6$  c'est à dire :

$$(53) \quad \sigma_e^2 = \sigma_z^2 - d \frac{1T}{\sqrt{3}}$$

On a en effet, d'après les formules (17)

$$(54) \begin{cases} \sigma_{ux} = \sigma_{uz} = \sigma_{x_1, x_2} = \sigma_e^2 - \frac{\alpha}{2} \\ \sigma_{x_1, x_3} = \sigma_e^2 - \frac{\alpha}{2} - dL_3 \\ \sigma_{x_1, x_4} = \sigma_e^2 - \frac{\alpha}{2} - dL_4 \end{cases}$$

De sorte que l'on a :

$$(55) \quad \sigma_u^2 = \frac{\sigma_e^2}{6} + \frac{\sigma}{6} \sigma_e^2 - \frac{5d}{12} - \frac{d}{3} L_6$$

Ceci étant, il est facile de calculer les paramètres de la loi de  $z$  lorsque  $u$  et  $x$  sont fixés. La variance liée de  $z$  est :

$$(56) \quad \sigma_{z, ux}^2 = \frac{[\sigma_u^2 \sigma_z^2 - \bar{\sigma}_{uz}^2] [\sigma^2 - \sigma_z^2 - \alpha] - d^2 L_4 \sigma_z^2}{\sigma^2 \sigma_u^2 - \bar{\sigma}_{ux}^2}$$

Et la valeur probable de  $z$  à  $x$  et  $u$  fixés :

$$(57) \quad \begin{cases} z' = m & \begin{matrix} 1-a-b & a & b & c \\ & x & u & e \end{matrix} \\ a = \frac{\sigma_u^2 \sigma_{xz} - \bar{\sigma}_{uz}^2}{\sigma^2 \sigma_u^2 - \bar{\sigma}_{ux}^2} \\ b = \frac{\sigma^2 \sigma_{ux} - \sigma_{xz} \bar{\sigma}_{uz}}{\sigma^2 \sigma_u^2 - \bar{\sigma}_{ux}^2} \\ c = \frac{(\sigma^2 - \sigma_{xz}) [\sigma_u^2 \sigma_{xz} + \sigma^2 \bar{\sigma}_{uz} - 2 \bar{\sigma}_{ux}^2]}{2 [\sigma^2 \sigma_u^2 - \bar{\sigma}_{ux}^2]} \end{cases}$$

Dans l'exemple numérique traité plus haut :

$$\begin{cases} \sigma_{ux} = \sigma_{uz} = \sigma_{x_1, x_2} = 0,169 \\ \sigma_{x_1, x_3} = 0,070 \\ \sigma_{x_1, x_4} = 0,044 \\ \sigma_u^2 = 0,337 \\ \sigma_{xz} = 0,375 \end{cases}$$

d'où

$$a = 0,20 \quad b = 0,40 \quad c = 0,38$$

$$z' = 1,46 \quad \begin{matrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ m & x & u \end{matrix}$$

$$\sigma_{z, ux}^2 = 0,187$$

Avec

L'intervalle de confiance est :  $0,42 - 2,37$  : ce n'est pas brillant, mais nettement meilleur que dans le cas précédent . On peut penser améliorer encore un peu cette précision en tenant compte d'une deuxième auréole de sondages. Cependant les 6 sondages de la première auréole représentés par le terme u constituent une périphérie évanescente, un peu trouée, mais suffisante, par suite d'un effet analogue à la cage de Faraday, pour permettre au théorème de l'écran de jouer en partie : il est en fait inutile de tenir compte d'une deuxième auréole . Cette remarque avait du reste été faite empiriquement, dans la note statistique n° 11. Les formules de la note n° 11 fondées sur l'hypothèse d'un échantillonnage stratifié au hasard, auraient conduit ici à une variance de  $0,218$ , et un intervalle de confiance :  $0,4 - 2,5$ . légèrement moins bon que le précédent.

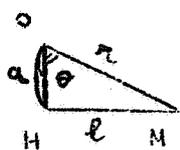
#### IV - Reconnaissance d'un gisement par tracages et montages

Dans ce chapitre, nous établirons d'abord des formules générales relatives au rectangle : ces formules seront ensuite appliquées aux problèmes pratiques posés par l'évaluation d'un gisement entre deux cotés (à partir d'un seul tracage) et par l'évaluation globale d'un gisement entier (à partir de plusieurs niveaux).

##### A/ Les formules du Rectangle

###### 1°/ Covariance d'une droite et d'un point O

La valeur moyenne de  $Lr$ ,  $r$  étant la distance de O à un point du segment HM) lorsque ce point décrit le segment HM est :



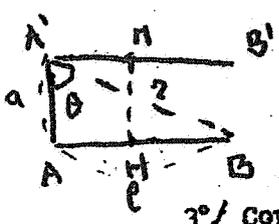
$$I_1 = \frac{1}{l} \int_0^l Lr \, dx$$

Si l'angle en H est droit, on trouve ( $r = OM$ )

$$(58) \quad I_1 = Lz - 1 + \frac{\theta}{\text{tg } \theta}$$

###### 2°/ Covariance de deux cotés AB et A'B' parallèles d'un rectangle

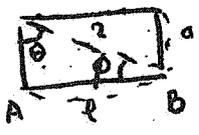
La valeur moyenne  $I_2$  de  $L r$  ( $r$ , distance de deux points arbitraires pris sur  $AB$  et  $A'B'$ ) apparaît comme le double de la valeur moyenne de la fonction  $I_1$  prise pour le point  $M$  et le segment  $MB$ . On trouve facilement :



$$(59) \quad I_2 = L^2 - \frac{3}{2} + \frac{2\theta}{\tan \theta} + \frac{L \cos \theta}{\tan^2 \theta}$$

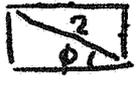
3°/ Covariance d'un rectangle et d'un de ses cotés A-B -

La valeur moyenne  $I_3$  de  $L r$  ( $r$  distance de deux points pris arbitrairement l'un sur  $A B$ , l'autre dans le rectangle) se calcule en prenant la valeur moyenne de  $I_2$  lorsque  $a$  varie entre 0 et  $a$ . Il est commode d'introduire l'angle  $\phi = \text{Arctg } \frac{a}{\ell}$ . On trouve :



$$(60) \quad I_3 = L^2 - \frac{11}{6} + \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \tan \phi + \frac{\tan^2 \phi}{3} L \sin \phi + \frac{\phi}{3 \tan \phi}$$

4°/ Variance du rectangle - La valeur moyenne de  $Lr$  dans le rectangle se déduit de  $I_3$  par une nouvelle intégration en  $a =$



$$(61) \quad I_4 = L^2 - \frac{25}{12} + \frac{1}{6} \frac{L \cos \phi}{\tan^2 \phi} + \frac{1}{6} \tan^2 \phi L \sin \phi + \frac{2}{3} \frac{\phi}{\tan \phi} + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \tan \phi$$

Comme on devait s'y attendre, cette expression ne change pas si l'on remplace  $\phi$  par  $\frac{\pi}{2} - \phi$

Lorsque l'angle  $\phi$  est petit,  $I_4$  a pour partie principale  $L^2 - \frac{3}{2}$ . Le premier terme est  $\frac{\pi}{2} \tan \phi$  pour une galerie de 200 m. de long sur 2 m. de haut, ce terme est de l'ordre de  $1/100 =$  Il est donc négligeable, et la variance de la galerie se calcule, comme si la hauteur était nulle, à partir de :

$$(62) \quad I_5 = L \ell - \frac{3}{2}$$

$\ell$  étant la longueur de la galerie, il en résulte qu'une galerie infiniment mince, donc d'aire nulle, a une variance du même ordre de grandeur qu'un panneau carré de même longueur  $\ell$  que la galerie.

5° Covariance d'un tracés et d'un montage

Il résulte de la remarque précédente qu'il suffit de calculer la covariance de deux segments H M et H N perpendiculaires. La valeur moyenne de L r s'obtient en intégrant, sur H N, la fonction I<sub>1</sub> du point M et du segment HN - On trouve



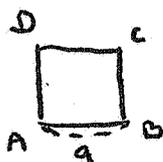
$$(63) \quad \bar{I}_2 = Lr - \frac{3}{2} + \frac{\phi}{2 \tan \phi} + \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} - \phi) \tan \phi$$

Comme I<sub>4</sub>, cette expression est invariante lorsque l'on change

$$\phi \text{ en } \frac{\pi}{2} - \phi$$

Exemples : Variance d'un panneau carré et de sa périphérie

Pour un carré, on a  $\phi = \frac{\pi}{4}$  et la formule (61) donne :



$$\bar{I}_4 = La + \frac{1}{2} Lr - \frac{2.5}{12} - \frac{1}{6} Lr + \frac{\pi}{3}$$

Soit  $\bar{I}_4 = La - 0.81$

La variance du carré est donc :

$$\sigma_R^2 = A - 2aLa + 1.62 \alpha$$

D'autre part, un cercle de rayon R a pour variance, d'après la formule (16)

$$\sigma_C^2 = A - 2aLR + \frac{\alpha}{2}$$

Prenons un cercle de même aire a<sup>2</sup> que le carré précédent.

$$(\pi R^2 = a^2) -$$

On a pour ce cercle

$$\sigma_C^2 = A - 2aLR + \alpha(L\pi + \frac{1}{2}) = A - 2aLa + 1.645 \alpha$$

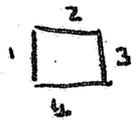
On a donc :

$$(64) \quad \sigma_R^2 = \sigma_C^2 - \frac{2.5}{100} \alpha$$

De toutes les surfaces de même aire, le cercle conduit à la variance la plus grande, puisque c'est pour le cercle que Lr a la plus petite valeur moyenne : il en résulte que le panneau circulaire est, de tous, le plus facile à échantillonner, puisque c'est dans un tel panneau qu'un échantillon de forme donnée prend le plus faible variance. Du point de vue pratique, le terme  $\frac{2.5}{100} \alpha$  étant parfaitement négligeable, il est

est tout à fait légitime d'assimiler le carré et le cercle. Si, au lieu d'un carré nous avions pris un hexagone, la différence eût été encore plus faible. Cette remarque montre que, de tous les modes possibles d'implantations de sondages, le meilleur est encore la maille rigide, hexagonale ou carrée; avec un petit avantage pour la maille hexagonale, dans la mesure même où l'hexagone se rapproche davantage du cercle que le carré. (en pratique, les deux mailles sont du reste équivalentes à un ou deux centièmes de  $\alpha$  près).

A titre d'exercice, et pour justifier la théorie de la périphérie évanescente, calculons également la variance de la périphérie du carré, c'est à dire la variance d'un échantillon constitué des quatre côtés d'un carré. En désignant par 1, 2, 3 et 4 les cotés du carré, cette variance est égale à :



$$\sigma_x^2 = \frac{1}{16} (4\sigma_1^2 + 8\sigma_{1,2} + 4\sigma_{1,3})$$

Les formules (59), (62) et (63) montrent que l'on a :

$$\sigma_x^2 = A^{-2} \left[ 1\alpha + \frac{1}{2} L_2 - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = A^{-2} \alpha L\alpha + 1.084 \alpha$$

On a donc

$$\sigma_x^2 = \sigma_p^2 - 0.536 \alpha$$

Dans le cas du cercle on a :

$$\sigma_x^2 = \sigma_p^2 - 0.5 \alpha$$

ici encore la différence est de quelques % de  $\alpha$  ; on peut conclure que la théorie de la périphérie circulaire est pratiquement applicable au carré.

B/ Evaluation d'un gisement entre deux cotés donnés



Soit un gisement reconnu à plusieurs niveaux distants de  $2\alpha$ . On considère généralement la teneur moyenne d'un niveau  $N$ , comme représentative de la teneur du panneau compris entre les cotes  $N + \alpha$  et  $N - \alpha$ . Soit  $x$  la teneur de la galerie et  $z$  celle du panneau, et  $l$  la longueur de la galerie. On a :

$$(65) \begin{cases} \sigma_x^2 = \lambda - 2\alpha L\rho + 3\alpha \\ \sigma_z^2 = \lambda - 2\alpha I_4(\phi) \\ \sigma_{xz} = \lambda - 2\alpha I_3(\phi_1) \end{cases} \quad \begin{cases} \phi = \lambda \alpha \operatorname{tg} \frac{2a}{\rho} \\ \phi_1 = \lambda \alpha \operatorname{tg} \frac{a}{\rho} \end{cases}$$

Il n'est malheureusement plus possible de reprendre le raisonnement de Krige et d'étudier la loi de  $z$  à  $x$  fixé = des formules du type de la formule (48) supposent, en effet, la teneur moyenne du gisement connu à priori. Une telle hypothèse, légitime lorsqu'il s'agit du polygone d'influence d'un sondage parmi une cinquantaine, car alors la moyenne générale est connue avec une précision bien meilleure que la teneur du polygone, cesse d'être valable lorsque la panneau occupe à lui seul le tiers ou le quart du gisement: la moyenne générale est alors, en effet, connue avec une précision du même ordre de grandeur que celle du panneau. A la limite, si le panneau était identique au gisement, le raisonnement de Krige conduirait à  $\sigma^2 = m$  et  $\sigma_{xz} = 0$  ce qui est vrai physiquement, la teneur du panneau étant alors bien déterminée et égale à  $m$ , mais n'avance à rien puisqu'en fait on ne connaît pas  $m$ . Dans ces conditions, négligeant le biais, qui, s'il existe, est nécessairement très léger, nous prendrons la teneur  $x$  de la galerie comme estimateur de la teneur  $z$  du panneau. La précision de cette estimateur sera considérée comme représentée par la variance de la variable  $\frac{z}{x}$ , soit :

$$(66) \quad \sigma_{\frac{z}{x}}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_z^2 - 2\sigma_{xz}$$

expression indépendante de  $\lambda$ , c'est à dire de la taille et de la forme du gisement, en accord avec notre volonté de ne pas tenir compte de données extérieures au panneau.

On trouve facilement :

$$(67) \quad \sigma_{\frac{z}{x}}^2 = \frac{1}{2} \alpha I_3(\phi_1) - 2\alpha I_4(\phi) - 2\alpha L\rho + 3\alpha$$

En remplaçant  $I_3$  et  $I_4$  par leurs valeurs, on s'aperçoit que les termes en  $L\rho$  disparaissent et que cette expression ne dépend que des angles  $\beta$  et  $\beta_1$ . En pratique, d'ailleurs, l'équidistance  $2a$  des niveaux est par exemple de 40 m, alors que la longueur de galeries est de plusieurs centaines de mètres.  $\operatorname{tg} \beta$  est de l'ordre de  $\frac{1}{10}$  et  $\operatorname{tg} \beta_1$  de  $\frac{1}{20}$ . Il

semble donc légitime de développer en  $\beta$  et  $\beta_1$  les fonctions  $I_3$  et  $I_4$ , en

se limitant au terme en  $\phi'$  et au terme suivant qui est en  $\phi^2 L \phi$  : on a ainsi :

$$(68) \quad I_3(\phi_1) = L\rho - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2} \phi_1 + \frac{\phi_1^2}{3} L \phi$$

$$I_4(\phi) = L\rho - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{3} \phi + \frac{\phi^2}{6} L \phi$$

De plus, et toujours en négligeant les termes en  $\phi^2$ , nous pouvons écrire :

$$\phi_1 = \frac{\phi}{2}$$

Ce qui donne pour  $I_3 =$

$$I_3\left(\frac{\phi}{2}\right) = L\rho - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4} \phi + \frac{\phi^2}{12} L \phi$$

On trouve ainsi, pour la variance d'échantillonnage :

$$\sigma_{\bar{E}}^2 = \frac{\pi}{3} \phi \alpha$$

c'est à dire, en confondant  $\phi$  et  $\rho \phi$

$$(69) \quad \boxed{\sigma_{\bar{E}}^2 = \frac{\pi}{3} \frac{2a}{\rho} \alpha}$$

Ainsi, en première approximation, la précision de l'estimation à partir d'un seul tracé de la portion de gisement comprise entre deux cotés est proportionnelle à la racine carrée de la longueur tracée et inversement proportionnelle à l'équidistance des niveaux.

Numériquement, la formule (69) s'écrit :

$$(70) \quad \boxed{\sigma_{\bar{E}}^2 = 5.25 \frac{2a}{\rho} \alpha}$$

Voici les valeurs de  $\sigma_{\bar{E}}$  et de l'intervalle de confiance pour quelques valeurs de la dispersion absolue, en supposant  $2a = \frac{1}{10}$

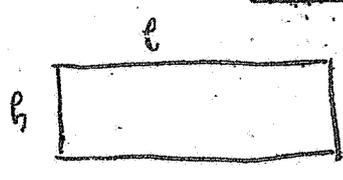
(niveau tous les 40 m, tracés de 400 m).

$d = \frac{1}{100}$	$\sigma_E^2 = \frac{5.25}{1000}$	Intervalle de confiance	0.87 - 1.13
$d = \frac{3}{100}$	$\sigma_E^2 = \frac{1.575}{100}$	"	0.78 - 1.22
$d = \frac{5}{100}$	$\sigma_E^2 = \frac{2.62}{100}$	"	0.72 - 1.28
$d = \frac{7}{100}$	$\sigma_E^2 = \frac{3.7}{100}$	"	0.68 - 1.32
$d = \frac{9}{100}$	$\sigma_E^2 = \frac{4.7}{100}$	"	0.65 - 1.35

En prenant  $\frac{2a}{l} = \frac{1}{10.5}$  en retomberait du reste sur les

même s valeurs que pour l'échantillonnage périphérique.

Conséquences - Soit un gisement rectangulaire, de longueur  $l$ , reconnu jusqu'à une profondeur  $h$  par  $n$  niveaux équidistants. L'équidistance  $2a$  est ici :



$$2a = \frac{h}{n}$$

La précision sur une tranche est d'après la formule (70)

$$\sigma_E^2 = 5.25 \frac{h}{n l} \alpha$$

Sur l'ensemble des  $n$  tranches, la variance d'échantillonnage doit être - en gros -  $n$  fois plus petite, soit :

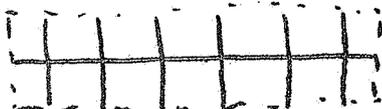
$$(71) \quad \sigma_0^2 = 5.75 \frac{b}{n^2 p} a$$

Il en résulte que la précision de l'évaluation globale d'un gisement de forme donnée est proportionnelle au nombre de niveaux tracés, et non pas à la racine carrée de ce nombre, comme l'aurait suggéré la statistique ordinaire.

En particulier, le procédé qui consiste à tracer systématiquement des sous-étages multiplie la précision par 2, et non pas par  $\sqrt{2}$

Evaluation d'une tranche à partir d'un traçage et de plusieurs montages

Le problème, ici, se complique un petit peu. Nous supposons, pour simplifier les formules, que l'équidistance des montages est égale à celle des traçages, c'est à dire à  $2a$ . On a donc un schéma en arête de poisson, représenté sur la figure ci-jointe. Le calcul rigoureux des



variances et covariances est possible, à partir des formules du rectangle. Il conduit à une formule immense et difficile à manipuler. Comme

nous n'avons d'autre but que de déterminer une précision, nous nous contenterons d'un raisonnement approximatif. Désignons par  $g$  la teneur de la galerie, par  $Y_i$  celle du montage d'ordre  $i$ , et par  $x$  celle de l'échantillon en arête de poisson constitué par la galerie et l'ensemble des montages au nombre de  $n$ . On a, en toute rigueur :

$$(72) \quad \begin{cases} \sigma_x^2 = \frac{1}{(p+2na)^2} \left[ p^2 \sigma_g^2 + 4a^2 \sum_{i=1}^n \sigma_{y_i}^2 + 4a^2 \sum_{i \neq j} \sigma_{y_i y_j} \right. \\ \left. + 4pa \sum_{i=1}^n \sigma_{g y_i} \right] \\ \sigma_{xg} = \frac{1}{p+2na} \left[ p \sigma_{gg} + 2a \sum_{i=1}^n \sigma_{y_i g} \right] \end{cases}$$

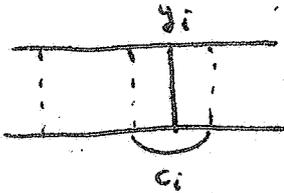
Le calcul de  $\sigma_{y_i}^2$ ,  $\sigma_{y_i g}$ , ne pose pas de problème. Pour la covariance  $\sigma_{y_i z}$  du montage  $i$  et du pannesau  $z$ , nous admettrons - étant donné qu'il y a un assez grand nombre de montages - que sa valeur moyenne en  $i$  est égale à la covariance d'un montage implanté au hasard, ce qui conduit à poser simplement, en valeur moyenne :

$$\sigma_{y_i z} = \sigma_z^2$$

De même, pour la même raison, on prendra

$$\sigma_{y_i} = \sigma_z$$

En ce qui concerne la valeur moyenne en  $i$  et  $j$  ( $i \neq j$ ) de la covariance  $\sigma_{y_i y_j}$ , nous reprendrons un raisonnement déjà fait dans l'étude de la maille rigide de sondage. Chaque  $y_i$  peut-être considéré comme placé au centre d'un rectangle  $C_i$ , l'ensemble des  $C_i$  recouvrant la tranche sans lacune ni chevauchement. On admet que la covariance moyenne de  $y_i$  avec tous les  $y_j$  est égale à la covariance de  $y_i$  avec le reste de la tranche, rectangle  $C_i$  exclu. Ceci nous conduit à poser



poser

$$\sigma_{y_i y_j} = \frac{n \sigma_{y_i z} - \sigma_{y_i} c_i}{n-1}$$

La valeur moyenne en  $i$  de cette expression est :

$$\sigma_{y_i y_j} = \frac{n \sigma_z^2 - \sigma_{y_i} c_i}{n-1}$$

Quant à  $\sigma_{y_i} c_i$ , il se calculera facilement à partir des formules du rectangle - On obtient ainsi :

$$(72) \begin{cases} \sigma_x^2 = \frac{1}{(p+2na)^2} \left[ p^2 \sigma_y^2 + 4n p a \sigma_{y z} + 4n^2 a^2 \sigma_z^2 + 4n a^2 (\sigma_{y_i} - \sigma_{y_i c_i}) \right] \\ \sigma_{x z} = \frac{1}{p+2na} \left[ p \sigma_{y z} + 2na \sigma_z \right] \end{cases}$$

Application - Supposons égales les équidistances des montages et des tranches, soit :

$$p = 2na$$

Les formules (72) s'écrivent :

$$(73) \begin{cases} \sigma_x^2 = \frac{1}{4} \left[ \sigma_g^2 + 2\sigma_{g3} + \sigma_z^2 + \frac{\sigma_{y_i}^2 - \sigma_{y_i c_i}}{n} \right] \\ \sigma_{x3} = \frac{\sigma_{g3} + \sigma_z^2}{2} \end{cases}$$

Et la variance d'échantillonnage :

$$\sigma_E^2 = \sigma_x^2 + \sigma_z^2 - 2\sigma_{x3}$$

prend la forme suivante :

$$(74) \quad \sigma_E^2 = \frac{1}{4} \left[ \sigma_g^2 + \sigma_z^2 - 2\sigma_{g3} + \frac{\sigma_{y_i}^2 - \sigma_{y_i c_i}}{n} \right]$$

Si l'on néglige le terme en  $\frac{1}{n}$ , elle est quatre fois plus petite que l'expression trouvée dans le cas de la galerie seule : l'adjonction d'une longueur totale de montage égale à la longueur de la galerie multiplie la précision par deux (et non par  $\sqrt{2}$ )

Valeur exacte . La variance  $\sigma_{y_i}^2$  est :

$$\sigma_{y_i}^2 = A - 2\alpha L \frac{p}{n} + 3\alpha$$

Celle de  $\sigma_{y_i c_i}$  est :

$$\begin{aligned} \sigma_{y_i c_i} &= A - 2\alpha I_2(\phi) & \phi &= A\alpha \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \\ &= A - 2\alpha L \frac{p}{n} + 1.846\alpha \end{aligned}$$

On a donc :  $\sigma_{y_i}^2 - \sigma_{y_i c_i} = 1.154\alpha$  et de plus  $n = \frac{p}{2\alpha}$

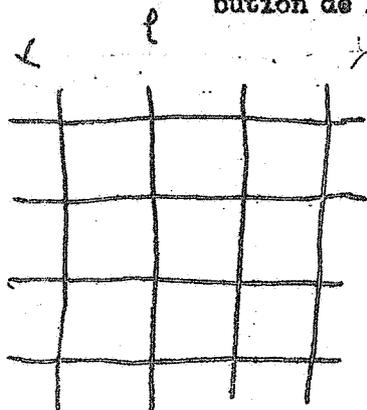
La formule (74) s'écrit

$$(75) \quad \boxed{\sigma_E^2 = 1.60 \frac{2\alpha}{p} \alpha}$$

Cette formule est valable, dans le cas où l'on a la même équidistance entre niveaux et montages, pourvu que la longueur  $l$  de la galerie soit grande par rapport à cette équidistance  $2\alpha$ .

C/ Evaluation d'un gisement à partir de n tracés et n montage

Nous abordons ici le problème le plus général de la reconnaissance d'un gisement par travaux miniers. Les paramètres de la loi de distribution de l'échantillon de teneur  $x$  constitué par une grille de  $n$  traçages



et  $m$  montages peuvent être calculés exactement à partir des formules du rectangle. Un tel calcul serait extrêmement fastidieux et nous nous contenterons ici d'un raisonnement approximatif analogue à ceux du paragraphe précédent.

Désignons par  $x_i$  la teneur du traçage d'ordre  $i$ , par  $y_j$  celle du montage d'ordre  $j$  et par  $x$  la teneur du panneau rectangulaire de côtés  $l$  et  $h$ , dans lequel s'inscrit la grille. On a, en toute rigueur :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{(nl + mh)^2} \left[ nl^2 \sigma_{x_i}^2 + mh^2 \sigma_{y_j}^2 + l^2 \sum_{i \neq j} \sigma_{x_i x_j} + h^2 \sum_{i \neq j} \sigma_{y_i y_j} + 2lh \sum_{i,j} \sigma_{x_i y_j} \right]$$

$$\sigma_{xj} = \frac{1}{nl + mh} \left[ l \sum_i \sigma_{x_i j} + h \sum_j \sigma_{y_j j} \right]$$

Considérons, pour chaque montage  $y_j$  le rectangle d'influence  $\gamma_j$  de longueur  $h$  et de largeur  $\frac{l}{m}$  dans l'axe duquel se trouve le montage d'ordre  $j$ , et de même le rectangle  $\xi_i$  de longueur  $l$  et de largeur  $\frac{h}{n}$  dans l'axe duquel s'allonge le niveau  $x_i$ . Avec les mêmes approximations que plus haut, nous trouvons :

$$(77) \quad \begin{cases} \sigma_{x_i j} = \sigma_{y_j j} = \sigma_{x_i y_j} = \sigma_j^2 \\ \sigma_{y_i y_j} = \frac{n \sigma_j^2 - \sigma_{y_i y_j}}{n-1} \\ \sigma_{x_i x_j} = \frac{n \sigma_j^2 - \sigma_{x_i x_j}}{n-1} \end{cases}$$

Les formules (76) s'écrivent alors :

$$(78) \quad \begin{cases} \sigma_x^2 = \sigma_j^2 + \frac{1}{(nl + mh)^2} \left[ nl^2 (\sigma_{x_i}^2 - \sigma_{x_i \xi_i}) + mh^2 (\sigma_{y_j}^2 - \sigma_{y_j \eta_j}) \right] \\ \sigma_{xj} = \sigma_j^2 \end{cases}$$

La variance d'échantillonnage - que l'on peut à volonté définir comme variance de  $x$  pour  $\sigma_j^2 = 0$  ou comme variance de la variable

$\frac{x}{s}$  - est ainsi égale à =

$$(79) \sigma_{\epsilon}^2 = \frac{n p^2 (\sigma_{x_i}^2 - \sigma_{x_i} \bar{x}_i) + m h^2 (\sigma_{y_i}^2 - \sigma_{y_i} \bar{y}_i)}{(n p + m h)^2}$$

Les covariances et les variances se calculent directement par les formules du rectangle - En ce qui concerne  $\sigma_{x_i} \bar{x}_i$ , comme l'angle  $\phi$  est toujours grand vis à vis de l'équidistance  $\frac{h}{n}$  des niveaux, on peut utiliser un développement limité en

$$(80) \phi_x = \text{Arc tg } \frac{h}{2 n \ell}$$

Il n'en est pas toujours de même pour  $\sigma_{y_i} \bar{y}_i$ , l'angle

$$(81) \phi_y = \text{Arc tg } \frac{\ell}{2 m h}$$

n'étant pas toujours petit. Les angles  $\phi_x$  et  $\phi_y$  étant définis par les relations (80) et (81), on a toujours :

$$(82) \sigma_{x_i}^2 - \sigma_{\bar{x}_i}^2 = 2 \alpha \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \phi_x \right) \text{tg } \phi_x - L \cos \phi_x + \frac{\text{tg}^2 \phi_x}{3} L \sin \phi_x + \frac{\phi_x}{3 \text{tg } \phi_x} - \frac{1}{3} \right]$$

et l'équation analogue en  $\phi_y$ . Le développement limité s'écrit :

$$\sigma_{x_i}^2 - \sigma_{\bar{x}_i}^2 = \alpha \pi \phi_x + \frac{2}{3} \alpha \phi_x^2 L \phi_x$$

En ce qui concerne  $\phi_y$ , le même développement est pratiquement utilisable si  $\frac{\ell}{2 m h}$  est inférieur à  $\frac{1}{4}$ . Ce sera toujours le cas si

la grille est carrée, c'est à dire si l'on prend la même équidistance entre traçages et montages =  $\frac{1}{m} = \frac{h}{n}$ , on a alors en effet

$$\phi_y = \text{Arc tg } \frac{1}{2n}$$

Ce développement étant supposé valable, la formule (79) s'écrit :

$$(83) \quad \sigma_E^2 = \frac{1}{(n p + m q)^2} \left[ 4\pi q p + \frac{\alpha}{6} L \frac{p}{q} \left( \frac{q^2}{n} - \frac{p^2}{m} \right) - \frac{\alpha}{6} \left[ \frac{q^2}{n} L 2n + \frac{p^2}{m} L 2m \right] \right]$$

En toute première approximation, en désignant par S la surface hl du gisement et par  $L = n l + m h$  la longueur tracée totale, on a

$$(84) \quad \sigma_E^2 = \alpha \pi \frac{S}{L^2}$$

Ainsi, en première approximation, la précision obtenue par travaux miniers ne dépend que de la surface du gisement et de la longueur tracée totale. La formule (84) montre, de plus, que la précision est proportionnelle à cette longueur, et non à sa racine carrée.

Si l'on suppose la grille carrée ( $\frac{l}{h} = \frac{h}{l} = 2 a$ ) la formule

(83) prend la forme, un peu plus exacte que (84).

$$(85) \quad \sigma_E^2 = \alpha \pi \frac{S}{L^2} - \frac{\alpha a}{3 L^2} \left[ p L \frac{q}{a} + q L \frac{p}{a} \right]$$

Exemple Numérique - Gisement rectangulaire de  $400 \times 150 \text{ m}^2$  reconnu par trois traçages et 8 montages (grille carrée de maille  $2a = 50 \text{ m}$ ).

La formule (84) donne :

$$\sigma_E^2 = \alpha \pi \frac{S}{L^2} = \frac{3,27}{100} \alpha$$

Le terme correctif de la formule (85) a pour valeur :

$$\frac{0,16}{100} \alpha$$

On ne commettrait pas une grosse erreur en le négligeant (et ce serait une erreur dans le sens de la sécurité) - Si on en tient compte, on a

$$\sigma_E^2 = \frac{3,11}{100} \alpha$$

Pour  $\alpha = \frac{9}{100}$  l'intervalle de confiance correspondant est =  
0.90 - 1.11

Pour  $\alpha = \frac{5}{100}$  0.92 - 1.08

Pour  $\alpha = \frac{3}{100}$  0.94 - 1.06

Pour  $\alpha = \frac{1}{100}$  0.964 - 1.036

On voit que trois traçages et 8 montages donnent une excellente évaluation du gisement : l'erreur n'est que de 10% pour un gisement aussi dispersé qu'un gisement d'uranium .

D/ Comparaison des formules du rectangle avec l'expérience

Les formules du rectangle, exposées au paragraphe A, permettent de calculer la variance du rapport  $\frac{x}{z}$  de la teneur  $x$  d'une volée à la teneur  $z$  d'un tronçon de galerie contenant  $n$  volées, compte tenu de la position de la volée dans le tronçon . Dans mon étude géostatistique de Bou-Kiana, j'ai justement calculé de semblables variances pour les valeurs 2, 4 et 8 de  $n$  . Je m'expliquais mal, à l'époque, que cette variance apparaisse comme une fonction de la position de la volée. Les formules du rectangle montrent qu'il doit nécessairement en être ainsi. Je passe ici sur les calculs faciles mais fastidieux, et je donne directement la comparaison des valeurs expérimentales et des valeurs calculées en prenant, pour la dispersion absolue, la valeur  $\frac{5,2}{100}$  qui résulte de l'application de la formule de de Wijs à l'ensemble du gisement .

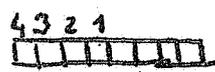
1°/ $n = 2$	Valeur calculée	valeur expérimentale
	$6^2 = 0.634 \alpha = 0.033$	0.0338

2°/ n = 4



	Calculée	Expérimentale
Position 1	0.96% = 0.05	0.0614
Position 2	2 % = 0.104	0.091

n = 8



Position 1	1.87% = 0.097	0.14
Position 2	2.064% = 0.107	0.15
Position 3	2.71% = 0.141	0.17
Position 4	3.652% = 0.19	0.20

n = 16

Valeur moyenne	38 % = 0.197	0.195
----------------	--------------	-------

L'accord est loin d'être parfait, mais le sens et l'ordre de grandeur des variations est bien le même.

V - Théorie du Facteur de Run

La théorie précédente suppose isotrope l'espace du gisement : dans la formule (4), en effet,  $L_r$  est indépendant de la direction du Vecteur joignant les éléments  $dS_1$  et  $dS_2$  - L'expérience de la prospection alluvionnaire, par exemple, montre qu'il existe souvent une très grande anisotropie, qui se manifeste par l'existence de runs. Nous allons essayer de modifier la théorie pour l'adopter au cas où il existe une direction privilégiée.



L'hypothèse la plus simple est celle d'une anisotropie elliptique = étant donnée une ellipse centrée sur  $dS_1$ , et dont le grand axe est parallèle à la direction de run, nous admettons que la covariance  $\sigma_{x_1 x_2}$  a même valeur pour tous les éléments

$dS_2$  situés sur le pourtour de cette ellipse. Si nous effectuons une affinité d'axe  $x^0 x$  parallèle au run, et de rapport  $\frac{a}{b}$  cette ellipse se transforme en un cercle de centre  $dS_1$  et de rayon  $a$  : on est tenté de penser, par conséquent, que la formule (4) reste valable, à condition de prendre pour  $r$ , non pas la distance des deux éléments, mais la distance  $r$  de leur homologues dans l'espace isotrope que cette affinité nous restitue.

Le module  $\frac{a}{b}$  de cette affinité porte le nom de facteur de run. Son importance pratique est évidente = le meilleur mode d'échantillonnage est, en effet, celui où le rapport de la distance des lignes de puits à la distance des puits sur une ligne est égale à  $\frac{a}{b}$ . Ce mode d'échantillonnage a, en effet, pour homologue dans l'espace  $b$  une maille rigide carrée. De façon générale, toutes les théories précédentes restent applicables à l'espace affine, et se transposent dans l'espace réel anisotrope par l'affinité inverse.

Détermination du facteur de run

Soient  $x_1, x_2 \dots x_k$  les teneurs des  $k$  puits d'une même ligne. Nous désignerons dans ce qui suit par  $u$  la moyenne géométrique

$$(86) \quad u = \sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k}$$

Il s'agit ici, au vu de données expérimentales qui seront des  $x$  et les  $u$  qui s'en déduisent, de déterminer à la fois la dispersion absolue et le facteur de run.

1°/ Détermination expérimentale de  $\alpha$ . Considérons la variable  $y = \frac{x_i}{u}$  qui se représente le rapport de la teneur d'un puits, à la moyenne géométrique des teneurs de la ligne à laquelle il appartient. Calculons sa variance :

$$\sigma_y^2 = \sigma_u^2 + \sigma_{x_i}^2 - 2\sigma_{ux_i}$$

Le facteur de run étant élevé, un puits carré a pour homologue un puits rectangulaire très allongé = soit  $e$  sa grande longueur dans l'espace affine (que l'on ne connaît pas) - On a :

$$\sigma_{x_i}^2 = A - 2\alpha \left( L e - \frac{3}{2} \right)$$

De plus, on a en toute rigueur :

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_{x_i}^2}{k} + \frac{1}{k^2} \sum_{i \neq j} \sigma_{x_i x_j}$$

$$\sigma_{ux_i} = \frac{1}{k} \sum_{i \neq j} \sigma_{x_i x_j}$$

Le même raisonnement approximatif qu'au chapitre précédent,

montre que l'on a, en désignant par  $\xi_i$  la teneur du segment  $\frac{\rho}{\xi}$  au centre duquel se trouve  $x_i =$

$$\sigma_{x_i x_j} = \frac{\xi \sigma_p^2 - \sigma_{x_i \xi_i}}{\xi - 1}$$

$\sigma_p^2$  étant la variance de la ligne, dont la longueur est  $\ell$  dans l'espace affine. On a par suite :

$$\sigma_u^2 = \sigma_p^2 + \frac{\sigma_{x_i} - \sigma_{x_i \xi_i}}{\xi}$$

$$\sigma_{u x_i} = \sigma_p^2 + \frac{\sigma_{x_i} - \sigma_{x_i \xi_i}}{\xi} = \sigma_u^2$$

par suite :

$$\sigma_y^2 = \sigma_{x_i} - \sigma_u^2 = \sigma_{x_i} - \sigma_p^2 - \frac{\sigma_{x_i} - \sigma_{x_i \xi_i}}{\xi}$$

Or :

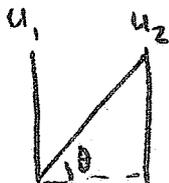
$$\begin{cases} \sigma_p^2 = A - 2\alpha(L\rho - 3/2) \\ \sigma_{x_i} - \sigma_{x_i \xi_i} = 2\alpha \left[ L \frac{\rho}{2\xi e} + \frac{1}{2} \right] \end{cases}$$

On trouve ainsi

$$(87) \quad \sigma_y^2 = 2\alpha L \frac{\rho}{e} - 2\alpha \left[ L \frac{\rho}{2\xi e} + \frac{1}{2} \right]$$

expression où  $\ell$  et  $e$  n'interviennent que par leur rapport : or le rapport longueur de ligne sur diamètre du puits a même valeur dans l'espace réel et dans l'espace affine, et le deuxième membre peut se calculer en donnant à  $\rho$  et  $e$  leurs valeurs réelles. Le calcul direct de la variance de  $y$  permet donc d'obtenir la valeur de la dispersion absolue  $x$ .

2°/ Détermination expérimentale du facteur de run.



$\alpha$  étant maintenant connu, étudions la covariance  $\sigma_{u_1 u_2}$  des moyennes géométriques  $u_1$  et  $u_2$  de deux lignes voisines. Il est raisonnable d'admettre que cette covariance est égale à la covariance des lignes elles-mêmes. Les formules du rectangle, appliquées à l'espace isotrope affine donnent :

$$\sigma_{u_1 u_2} = A - 2\alpha \left[ L\rho - \frac{3}{2} - L \sin \theta + \frac{2\theta}{\tan \theta} + \frac{L \cos \theta}{\tan^2 \theta} \right]$$

Afin d'éliminer  $A$ , introduisons la variable

$$y = \frac{u_1}{u_2}$$

dont la covariance est :

$$\sigma_y^2 = 2\sigma_u^2 - 2\sigma_{u_1 u_2}$$

On trouve facilement

$$(88) \quad \sigma_y^2 = 4\alpha \left[ -L \sin \theta + \frac{2\theta}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{1}{2} L \frac{\rho}{2\operatorname{tg} \theta} + \frac{1}{2} L + \frac{L \cos \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta} \right]$$

La variance  $\sigma_y^2$  étant calculée à partir des données expérimentales, ainsi que  $\alpha$ , cette équation ne contient d'autre inconnue que l'angle  $\theta$  défini dans l'espace affine et peut donc servir à le calculer ; le calcul peut se faire soit par voie graphique, soit par approximations successives à partir de la valeur  $\theta = \frac{\pi}{4}$

La comparaison de l'angle  $\theta$  et de l'angle  $\theta_0$  réel, dont la tangente est égale au rapport de la longueur de ligne à l'équidistance des lignes donne immédiatement le facteur de run.

$$(89) \quad \boxed{\frac{\rho}{a} = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\operatorname{tg} \theta}}$$

Je me propose d'appliquer cette théorie au prochain placer découvert au Hoggar : la connaissance du facteur de run permettra de déterminer la meilleure maille de prospection alluvionnaire.

#### Conclusion

Au terme de cette longue étude théorique, je voudrais surtout insister sur la très grande simplicité des conclusions pratiques qui s'en dégagent : l'échantillon périphérique, estimateur sans biais de la teneur d'un panneau et de variance égale à la moitié de la dispersion absolue - ~~supériorité~~ - supériorité des mailles rigides de sondage sur tous les procédés aléatoires - précision d'une évaluation à partir de travaux miniers proportionnelle à la longueur tracée totale, ~~inversement~~ - inversement proportionnelle à la racine carrée de la surface du gisement et ne dépendant que de ces deux facteurs.

En ce qui concerne le facteur de run, il s'agit là aussi d'une notion simple et intuitive, mais qui n'a pas encore reçu la sanction de l'expérience.

ALGER, OCTOBRE 1956



G. MATHERON