

LE PROBLEME DE LA RECONNAISSANCE DES AMAS.

La Note Statistique N°14, a permis, grâce à la formule de la covariance élémentaire, de résoudre le problème de la reconnaissance par sondages ou travaux miniers des gisements stratiformes, c'est-à-dire des gisements à deux dimensions. On peut légitimement espérer tirer de cette même formule appliquée au cas tridimensionnel la solution du difficile problème des amas. Cette formule s'écrit :

$$(1) \quad \sigma_{u_1 u_2} = A - 3\alpha L^2$$

$\sigma_{u_1 u_2}$ étant la covariance des échantillons élémentaires $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ distants de L , et conduit à la valeur suivante de la variance d'un échantillon σ de forme quelconque dans un gisement V

$$(2) \quad \sigma^2 = \frac{3\alpha}{V^2} \iiint_V dV_1 \iiint_V dV_2 L^2 - \frac{3\alpha}{\sigma^2} \iiint_V d\sigma_1 \iiint_V L^2 d\sigma_2$$

Malheureusement, si les intégrations complètes sont possibles, quoique fastidieuses, dans l'espace à deux dimensions, elles deviennent franchement inextricables voire même impossibles dans le cas des amas. M. MATHIEU, qui a réussi à intégrer la formule (2) dans le cas particulier très simple des volumes sphériques, fait remarquer que cette difficulté résulte du fait que L^2 n'est plus une fonction harmonique. En particulier, il n'est pas possible de traiter la reconnaissance par travaux miniers par déduction rigoureuse de formules du parallélépipède analogues aux formules du rectangle. Cependant, dans le cas du plan, les formules du rectangle conduisent, à l'approximation du premier ordre, à des formules très simples en S/L^2 . On peut se demander s'il n'est pas possible d'obtenir directement des formules approchées analogues, valables pour les amas, sans passer par l'intermédiaire d'intégrations rigoureuses. Tel est le but de la présente Note.

1°) Les données de l'analyse dimensionnelle

Les "échantillons" prélevés en vue de la reconnaissance de l'amas V peuvent être des sondages ou des tracages. En ce qui concerne ces derniers nous pouvons admettre, par analogie avec le cas à deux dimensions, qu'ils n'interviennent que par leur allongement, pourvu que celui-ci soit grand vis-à-vis du diamètre de la galerie. A plus forte raison les sondages n'interviennent que par leur longueur minéralisée. Un sondage et un tracage de longueur 1 sont considérés comme équivalents et assimilés à une droite de même longueur.

On pourrait ensuite admettre, de façon sommaire, que la variance d'échantillonnage ne dépend que de la longueur tracée totale L comme dans le cas des gisements stratiformes reconnus par tracages. L'analyse dimensionnelle conduirait à écrire :

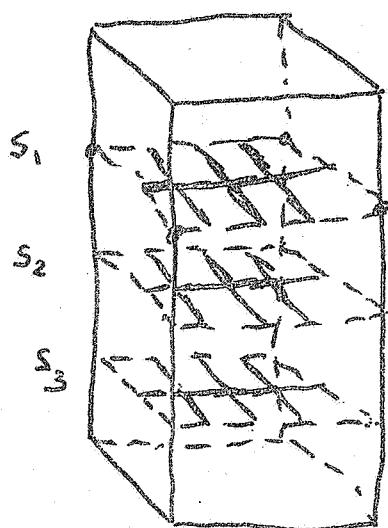
$$(3) \quad \sigma_E^2 = f\left(\frac{V}{L^3}\right)$$

pour le cas à trois dimensions et =

$$(4) \quad \sigma_E^2 = f\left(\frac{S}{L^2}\right)$$

pour le cas à deux dimensions.

La formule (4) est correcte parce que les niveaux sont à peu près équidistants dans le plan du filon. La formule (3) ne doit être valable que si les différentes recoupes, sondages etc..., sont répartis de façon homogène dans la masse de l'amas. Ce sera bien le cas si l'amas est reconnu par sondages extérieurs à maille rigide, mais pas nécessairement dans le cas des travaux miniers.



En pratique, un amas est généralement reconnu à partir de plusieurs niveaux, ou sections, équidistants, pris horizontaux ou perpendiculaires à la plus grande dimension de l'amas, chaque section étant reconnue par un tracage axial et plusieurs recoupes ou sondages perpendiculaires à cet axe.

Il arrive souvent, mais ce n'est pas toujours le cas, que ce tracage axial suit une zone préférentielle de l'amas et ne puisse être retenu pour l'évaluation finale (cas de Cavallo) = dans ce cas, on a finalement une série de recoupes ou de sondages tous parallèles et groupés par sections. L'équidistance des sondages d'une même section est généralement plus faible que l'équidistance des sections elles-mêmes, de sorte que la formule (3) ne peut être appliquée sans précautions. Cependant, et dans la mesure même où les sondages ou recoupes d'une même section sont plus serrés que les sections elles-mêmes, on peut admettre que les erreurs commises dans l'évaluation de chaque section individuelle sont des variables indépendantes.

Dans ces conditions la variance d'échantillonnage σ_E^2 fixant l'erreur sur l'estimation de l'amas est la somme de deux termes :

$$(5) \quad \sigma_E^2 = \frac{\sigma_1^2}{n} + \sigma_2^2$$

σ_1^2 = variance fixant l'erreur sur l'estimation d'une section

n = nombre des sections

σ_2^2 = variance fixant l'erreur sur l'estimation de l'amas à partir des teneurs des sections supposées réellement connues.

Dans ces conditions, s représentant la surface d'une section et l la longueur tracée dans cette section, l'analyse dimensionnelle permet d'écrire la formule (5) sous la forme

$$(6) \quad \sigma_E^2 = \frac{1}{2} f_1\left(\frac{1}{\rho^2}\right) + f_2\left(\frac{V^2}{S^2}\right)$$

où S représente la surface "reconnue" totale ($S = n s$)

L'analyse dimensionnelle ne permet pas d'aller plus loin. Il est nécessaire maintenant de faire appel à d'autres hypothèses d'approximation.

2°) L'approximation du premier ordre

Il s'agit ici de formules, pour le cas des amas, une hypothèse d'approximation analogue à celle qui a permis à la Note N°14 de déduire des formules du rectangle les formules en S/L^2

Nous proposons l'énoncé suivant : // étant données deux portions de gisements, V_1 et V_2 , égales, adjacentes et reconnues par des travaux miniers géométriquement identiques, travaux conduisant pour chacune d'elles prise isolément à la variance d'échantillonnage σ_E^2 , l'erreur commise sur l'évaluation du panneau $V_1 + V_2$, constitué par la juxtaposition des précédents, à partir des mêmes travaux miniers, est fixée par une variance d'échantillonnage égale à la moitié de σ_E^2 . Un tel énoncé, qui risque de paraître trivial, n'en constitue pas moins une hypothèse d'approximation, car il suppose que les erreurs commises sur les évaluations de V_1 et de V_2 sont des variables indépendantes.

Voyons d'abord les conséquences d'une telle hypothèse sur les formules (3) (4) et (6). L'analogie avec le cas à deux dimensions nous permettra ensuite de déterminer les conditions de sa validité.

a) reconnaissance d'un amas V à partir d'une longueur tracée totale L répartie uniformément de manière que la formule (3) soit applicable. L'hypothèse s'écrit =

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{V}{L^3}\right) = f\left(\frac{2V}{8L^3}\right)$$

et conduit à poser :

$$(7) \quad \sigma_E^2 = f\left(\frac{V}{L^3}\right) = K \sqrt{\frac{V}{L^3}}$$

$K = \text{constante}$

b) reconnaissance d'une section s à partir d'une longueur tracée l . La formule (4) et notre hypothèse conduisent à écrire :

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = f\left(\frac{21}{4 \rho^2}\right)$$

et par suite

$$(8) \quad \sigma_E^2 = f\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = \beta \frac{1}{\rho^2} \quad \beta = \text{constante}$$

c) reconnaissance d'un azas V à partir de plusieurs sections de surface totale S et de teneurs supposées connues. La formule

$$\sigma_E^2 = f_2\left(\frac{V^2}{S^3}\right)$$

permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} f_2\left(\frac{V^2}{S^3}\right) = f_2\left(\frac{4V^2}{8S^3}\right)$$

et par suite de poser :

$$(9) \quad \sigma_E^2 = f_2\left(\frac{V^2}{S^3}\right) = \gamma \frac{V^2}{S^3}$$

La formule (8) est identique à celle obtenue dans le cas à deux dimensions par la Note N°14. Les conditions de validité sont donc les mêmes dans les deux cas = avant toutes choses, la variable argument $1/\rho^2$, V/L^3 ou $\frac{V^2}{S^3}$ doit pouvoir être considérée comme petite. En deuxième lieu,

la juxtaposition de V_1 et V_2 ne doit pas modifier l'aspect statistique de la géométrie des travaux miniers; par exemple, il est indifférent de juxtaposer deux panneaux reconnus par quatre traçages chacun de façon à obtenir un panneau reconnu par 8 traçages de même longueur, ou 4 traçages de longueur double. Mais il n'est pas indifférent de mettre en série ou en parallèle deux panneaux reconnus par un seul traçage = notre hypothèse n'est valable que si la juxtaposition met les deux traçages dans le prolongement l'un de l'autre. Dans le cas contraire, une corrélation non négligeable s'établit entre les deux traçages (cas de la figure)



Supposons remplies ces conditions de validité. La formule (6) de l'analyse dimensionnelle se précise de la façon suivante :

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{n} \beta \frac{1}{\rho^2} + \gamma \frac{V^2}{S^3}$$

En introduisant la longueur tracée totale $L = n \ell$ et la surface reconnue totale $S = n s$ on s'écrit :

$$(10) \quad \sigma_E^2 = \beta \frac{S}{L^2} + \gamma \frac{V^2}{S^3}$$

Il reste cependant entendu que, dans le cas où la répartition des tracages est suffisamment homogène, cette formule doit être équivalente à la suivante

$$(11) \quad \sigma_E^2 = K \sqrt{\frac{V}{S^3}}$$

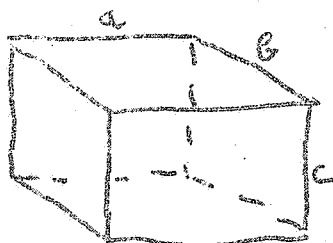
Le plus gros du travail est fait, puisque nous connaissons maintenant la forme de la relation qui donne la variance d'échantillonnage en fonction des données V , S et L . Il reste, en vérité, à déterminer les valeurs numériques des coefficients β et γ de la formule (10) et du coefficient K de la formule (11). En fait, nous connaissons la valeur du coefficient β . En effet, le problème de l'estimation d'une section s à partir d'une longueur tracée ℓ est identique au problème de la reconnaissance d'un filon par tracages et montages. Suivant que le tracage axial de la section est, ou non, considéré comme une donnée valable et retenu, on se référera aux calculs de la Note N°II, relatifs à l'estimation d'un panneau à partir d'un tracage et de plusieurs montages, ou à l'estimation d'un giacement stratiforme à partir de plusieurs tracages. Il reste donc, en fait, à déterminer le rapport γ/β . Nous verrons que le coefficient K se déduit des deux autres.

3°) Evaluation du rapport γ/β

Nous ne savons rien, a priori, du coefficient γ . Cependant, comparons le cas déjà évoqué où le tracage axial de la section ne peut pas être retenu, et où par suite l'amas est reconnu par sondages ou recoupes

parallèles entre eux et groupés par section, avec le cas d'une reconnaissance par sondages extérieurs verticaux : du point de vue géométrique, les deux schémas sont identiques. Or l'intuition nous suggère, et le calcul effectué dans le cas à deux dimensions nous a du reste confirmé, que la meilleure implantation des sondages extérieurs, c'est-à-dire celle qui conduit à la plus petite variance d'échantillonnage à longueur forcée égale, correspond à une maille rigide, hexagonale ou carrée. Par suite, les coefficients β et γ de la formule (10) doivent être tels que la variance d'échantillonnage soit minimum lorsque l'équidistance des sondages ou des recoupes d'une même section est égale à l'équidistance des sections elles-mêmes - c'est-à-dire lorsque ces sondages ou recoupes parallèles se répartissent aux nœuds d'une maille carrée.

Or il est facile, à partir de la formule (10), de calculer, en fonction de β et de γ , la relation que doivent vérifier ces deux équidistances pour réaliser le minimum de la variance d'échantillonnage. En écrivant que cette relation est en fait l'égalité des deux équidistances, nous obtiendrons une relation entre β et γ qui va nous permettre de calculer le rapport de ces deux coefficients.



Soit donc un gisement en forme de parallélépipède de côtés a , b et c , recoupé par n sections b c , chaque section étant recoupée par p sondages parallèles au côté c . On a :

$$(12) \quad \begin{cases} V = abc \\ S = nbc \\ L = npc \end{cases}$$

La formule (10) s'écrit donc ici :

$$(13) \quad \sigma_F^2 = \beta \frac{b}{np^2c} + \gamma \frac{a^2}{n^3bc}$$

Exprimons que, pour une longueur L donnée, cette variance est minimum - c'est un problème de minimum lié, n et p devant rendre l'expression (13) minimum compte tenu de la condition imposée

$$np = c^{1/2}$$

En désignant par λ le multiplicateur de Lagrange, on trouve :

$$\begin{cases} -\beta \frac{b}{n^2 r^2 c} - \frac{3\gamma a^2}{n^4 b c} + \lambda r = 0 \\ -2\beta \frac{b}{n r^2 c} + \lambda r = 0 \end{cases}$$

Après avoir éliminé λ , il reste la condition suivante en n et r et :

$$(14) \quad \beta n^2 b^2 = 3\gamma r^2 a^2$$

Or, nous savons que cette condition doit exprimer que la maille est carrée = la relation (14) doit être identique à la suivante :

$$(15) \quad a r = b n$$

La comparaison de (14) et de (15) donne immédiatement la relation cherchée entre β et γ

$$(16) \quad \boxed{\beta = 3\gamma}$$

4°) Calcul du Coefficient K

Lorsque la maille est carrée, les deux équations (10) et (11) doivent être identiques, soit donc e l'équidistance des sondages. On a =

$$n = \frac{a}{e} \quad r = \frac{b}{e}$$

Les relations (12) s'écrivent donc

$$(17) \quad \begin{cases} V = a b c \\ S = \frac{a b c}{e} \\ L = \frac{a b c}{e^2} \end{cases}$$

et la formule (10) s'écrit =

$$\sigma_F^2 = (\beta + \gamma) \frac{e^3}{a b c}$$

Mais, compte tenu de (17) on a =

$$e = \sqrt{\frac{a b c}{L}} = \sqrt{\frac{V}{L}}$$

Donc la relation (10) s'écrit =

$$(18) \quad \sigma_F^2 = (\beta + \gamma) \sqrt{\frac{V}{L^3}}$$

Cette relation est bien de la forme (11) = lorsque la maille est carrée, les relations (10) et (11) sont identiques, et le coefficient K est égal à $(\beta + \gamma)$.
Compte tenu de (16), on a simplement =

$$(19) \quad \boxed{K = 4 \gamma}$$

5°) Résumé des formules générales

La valeur du coefficient β est donnée par la Note II, : elle est égale à $\frac{\pi}{4} \alpha$ (α dispersion absolue) dans le cas de la reconnaissance d'un filon à partir de plusieurs tracages. Le passage à l'espace à trois dimensions entraîne une multiplication par $\frac{3}{2}$, de sorte que l'on a numériquement =

$$\beta = \frac{3\pi}{4} \alpha \quad \gamma = \frac{\pi}{4} \alpha \quad K = \pi \alpha$$

Ainsi, dans le cas où l'on ne tient compte que des sondages ou recoupes perpendiculaires à l'axe des sections, la variance d'échantillonnage est =

$$(20) \quad \sigma_E^2 = \frac{3\pi}{4} \alpha \frac{S}{L^2} + \frac{\pi}{4} \alpha \frac{V^2}{S^3}$$

Dans le cas de sondages à maille carrée, cette formule se simplifie en :

$$(21) \quad \sigma_E^2 = \pi \alpha \sqrt{\frac{V}{L^3}}$$

Si l'on tient compte également des traçages axiaux des sections, on aura :

$$(22) \quad \sigma_E^2 = \beta \alpha \frac{S}{L^2} + \frac{\pi}{4} \alpha \frac{V^2}{S^3}$$

Le coefficient β se déduisant de l'étude du problème plan correspondant (un traçage et plusieurs montages) - en première approximation, d'ailleurs, cette formule (22) est identique à la formule (20), à condition de remplacer L^2 par la somme $L_1^2 + L_2^2$ des carrés des longueurs cumulée des traçages axiaux et des recoupes ou sondages :

$$(22bis) \quad \sigma_E^2 = \frac{3\pi}{4} \alpha \frac{S}{L_1^2 + L_2^2} + \frac{\pi}{4} \alpha \frac{V^2}{S^3}$$

6°) Vérification sur un cas particulier

Avant d'aller plus loin, assurons nous, dans le cas particulier des sondages extérieurs à maille carrée, de la validité de la formule (21). En reprenant le raisonnement de la Note II, on voit que la variance d'échantillonnage est :

$$(23) \quad \sigma_E^2 = \frac{n \sigma_x^2 + n(n-1) G_{x_j, j}}{n^2}$$

σ_x^2 = variance d'un sondage

n : nombre des sondages

σ_{x_i, x_j} : valeur moyenne de la covariance de deux sondages.

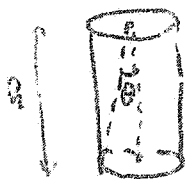
Assimilons maintenant, ce qui est légitime, l'aire carrée "d'influence" d'un sondage à un cercle, ou plutôt le prisme droit de base carrée d'influence à un cylindre de révolution, admettons, ce qui est beaucoup plus approximatif, que la covariance de deux sondages est égale à celle de leurs cylindres d'influence (une telle hypothèse, rigoureuse dans le cas de cercle et d'espace à 2 dimensions, est approchée dans le cas de cylindres et d'espace à 3 dimensions). Dans ces conditions, désignons par σ_{x_2} la covariance d'un sondage et de son cylindre et écrivons que la covariance d'un sondage et de l'ensemble du gisement est nulle =

$$(24) \quad \sigma_{x_2} + (n-1) \sigma_{x_i, x_j} = 0$$

Reportons dans (23) la valeur de σ_{x_i, x_j} tirée de (24) :

$$(25) \quad \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_{x_2}}{n}$$

Or la covariance σ_{x_2} d'un cylindre et de son axe peut se calculer rigoureusement. On trouve pour valeur moyenne de L^2 entre ℓ cylindre et son axe



$$(26) \quad (L^2)_m = L^2 - \frac{L^2}{12} - L \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{L \cos \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{L^2 \theta}{2} \cos \theta + \frac{L}{3} \cos \theta \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

A l'approximation du premier ordre, c'est-à-dire en supposant θ petit et en négligeant θ^2 ceci se réduit à :

$$(27) \quad (L^2)_m = L^2 - \frac{L^2}{12} + \frac{2}{3} \pi \theta$$

Par suite on a :

$$G_{sc} = A - 3\alpha L h + \frac{9}{2} \alpha - 2\pi \alpha \theta$$

D'autre part :

$$G_{sc}^2 = A - 3\alpha L h + \frac{9}{2} \alpha$$

Il vient donc :

$$(28) \quad G_E^2 = 2\pi \frac{\theta}{n} \alpha$$

En désignant par R le rayon d'un cylindre d'influence, on a :

$$\theta = \frac{R}{h} \quad \pi R^2 = \frac{S}{n} \quad , \quad \text{soit} \quad R = \sqrt{\frac{S}{n\pi}}$$

Par suite

$$G_E^2 = 2\pi \alpha \sqrt{\frac{S}{n^3 \pi h^2}} = 2\alpha \sqrt{\pi \frac{S h}{n^3 h^3}}$$

Comme on a : $V = S h$ et $L = n h$, il vient :

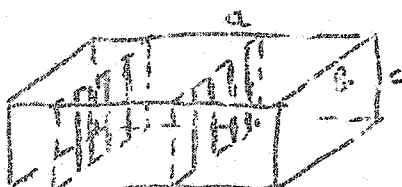
$$(29) \quad \frac{G_E^2}{L^3} = 2\sqrt{\pi} \alpha \sqrt{\frac{V}{L^3}} = 3.55 \alpha \sqrt{\frac{V}{L^3}}$$

Compte tenu des approximations faites, cette formule confirme la formule (21) - le coefficient 3.55, en particulier, ne diffère que très peu du coefficient π de la formule (21)

7°) Exemples d'application

De deux modes de reconnaissance conduisant à la même variance d'échantillonnage, le meilleur est celui qui conduit au prix de revient le plus faible. Inversement, parmi deux modes de reconnaissance de même prix de revient, on choisira celui qui conduit à la plus petite variance. Autrement dit, on recherche le mode de reconnaissance qui procure la plus faible variance pour un prix donné.

ou qui coûte le moins cher pour une variance donnée et les deux points de vue sont du reste équivalents et correspondent à un problème de minimum lié. Raisonnons sur un exemple. Soit un gisement en forme de parallélépipède



rectangle de côté a , b et c . On le reconnaît à partir d'un certain nombre de sections parallèles à $b c$, chaque section étant reconnue par un tracé axial parallèle à b et un nombre fixe de sondages ou recoupes parallèles au côté c .

Supposons d'abord que les données axiales ne puissent pas être retenues pour l'évaluation de l'amas. La variance est donnée par la formule (20). Mais ces galeries axiales interviennent évidemment dans le prix de revient. Désignons par e_2 l'espacement des recoupes ou sondages d'une section, et par e_3 l'équidistance des sections. Soit d'autre part k le rapport du prix du mètre de galerie au mètre de sondage. S'il n'y a que des recoupes, et pas de sondages, k est égal à 1. Il sera égal à zéro dans le cas de sondages extérieurs (pas de galerie axiale). Dans le cas de galeries axiales et de sondages perpendiculaires, k est plus grand que l'unité : ce coefficient traduit l'intervention dans notre calcul des facteurs économiques. Dans ces conditions, le prix est proportionnel à :

$$(30) \quad P = L + k \frac{a b}{e_3}$$

$\frac{a b}{e_3}$ représentant la longueur totale des galeries axiales et L celle des sondages. La variance de son côté, est :

$$(31) \quad G_F^2 = \alpha \pi \left[\frac{V^2}{S^3} + \frac{3 S}{L^2} \right]$$

On a par ailleurs les relations évidentes

$$(32) \quad \begin{cases} V = a b c \\ S = \frac{a b c}{e_2} \\ L = \frac{a b c}{e_2 e_3} \end{cases}$$

Compte tenu de (32) on trouve facilement :

$$(33) \quad \begin{cases} \sigma_s^2 = \pi \frac{e_s^2}{4} \left[e_s^2 + 3 e_2^2 \right] \frac{e_s}{V} \\ P = \frac{V}{e_s} \left[\frac{1}{e_2} + \frac{b}{c} \right] \end{cases}$$

Reprenons que les équidistances e_2 et e_s des recoupes et des sections minimisent la variance à P constant =

$$\begin{cases} 3 e_s^2 + 3 e_2^2 - \lambda \left[\frac{1}{e_s^2 e_2} + \frac{b}{c e_s^2} \right] = 0 \\ 6 e_2 e_s - \frac{\lambda}{e_s e_2^2} = 0 \end{cases}$$

Éliminons le multiplicateur de Lagrange λ = il vient

$$(34) \quad \boxed{e_s = e_2 \sqrt{1 + 2 \frac{b}{c} \frac{e_2}{c}}}$$

En dehors du cas banal des sondages extérieurs ($b = 0$) où ils sont égaux, l'espacement des sections, à l'optimum, est toujours supérieur à l'espacement des recoupes ou des sondages, et cela d'autant plus que b est plus grand, c'est-à-dire que le mètre de sondage intérieur est meilleur marché, et que c est plus petit, c'est-à-dire que l'amas est plus plat.

La relation (34) étant supposée vérifiée, la variance se met sous la forme =

$$(35) \quad \sigma_s^2 = \pi \frac{e_2^3}{V} \left(1 + \frac{b e_2}{2c} \right) \sqrt{1 + 2 \frac{b}{c} \frac{e_2}{c}}$$

Introduisons les variables homogènes suivantes :

$$x = \frac{e_2}{\sqrt[3]{V}} \quad \text{ou espacement réduit des recoupes en sondages}$$

$$\mu = \frac{c}{\sqrt[3]{V}} \quad \text{ou épaisseur réduite de l'amas}$$

On a :

$$G_E^3 = 4 \pi \alpha^3 \left(1 + \frac{e_2 \alpha}{2 \mu} \right) \sqrt{1 + 2 \frac{e_2}{\mu} x}$$

Poseons enfin

$$(36) \quad \lambda = \frac{e_2}{\mu}$$

Cette variable réduite λ est le produit de l'aplatissement $\frac{1}{\mu}$ de l'amas et de la variable économique, e_2 , rapport du prix du mètre de galerie au prix du mètre de sondage. Il vient :

$$(37) \quad \begin{cases} G_E^3 = 4 \pi \alpha^3 \left(1 + \frac{\lambda x}{2} \right) \sqrt{1 + 2 \lambda x} \\ \frac{e_2}{e_2} = \sqrt{1 + 2 \lambda x} \\ P = \sqrt[1/3]{\frac{1 + 2 \lambda x}{\alpha^3}} \end{cases}$$

Les formules (37) permettent de résoudre pratiquement le problème de la reconnaissance des amas.

Exemple : Soit un amas très allongé (saucisson de Bon-leker) de côtés :

$$\begin{cases} a = 600 \text{ m} \\ b = 60 \text{ m} \\ c = 6 \text{ m} \end{cases}$$

On veut reconnaître cet amas, à la précision de $\frac{5}{100}$, avec des sondages parallèles à a exécutés à partir de recoupe¹⁰⁰ parallèles à b . Le prix du mètre de galerie est 4 fois celui du mètre de sondage ($k_2 = 4$) et la dispersion absolue est $\frac{2,5}{100}$.

L'épaisseur réduite μ est de $\frac{1}{10}$ et par suite

$$\lambda = \frac{k_2}{\mu} = 40$$

Pour avoir une précision de $\frac{5}{100}$, il faut un écart type de $\frac{25}{100}$

c'est-à-dire une variance de $\frac{6,25}{10.000}$. On doit avoir :

$$\frac{\sigma^2}{d} = \frac{6,25}{10.000} \cdot \frac{100}{2,5} = \frac{2,5}{100}$$

L'espacement réduit x est donné par l'équation :

$$\frac{2,5}{100} = \pi x^3 \sqrt{1+2\lambda x} \left(1 + \frac{\lambda x}{2}\right) = F(x, \lambda)$$

dans laquelle λ est égale à 40. Nous ne savons pas résoudre cette équation; mais il est facile de tabuler la fonction $F(x, \lambda)$ ou, mieux, de tracer des abaqes. On trouvera en annexe une table sommaire de la fonction $F(x, \lambda)$. On voit que, pour $\lambda = 39,7$, $F(x, \lambda)$ prend la valeur $\frac{2,5}{100}$ lorsque x est égal à $\frac{1}{10}$.

Nous prenons donc

$$x = \frac{1}{10}$$

La racine cubique de V étant égale à 6 m, l'espacement des sondages est ainsi fixé à 6 m, soit dix sondages par recoupe. L'espacement des recoupes, c'est-à-dire des sections, est :

$$e_s = e_r \sqrt{1+2\lambda x} = 6 \sqrt{1+8} = 18 \text{ mètres}$$

Si l'on se contentait d'une précision de $\frac{1}{10}$
 $(\frac{\sigma}{a} = \frac{1}{10})$, la valeur de x serait environ de $\frac{1.5}{10}$, ce qui
 correspondrait à un espacement des sondages de 9 mètres. L'espacement
 des recoupes devrait alors être de :

$$e_2 \sim e_1 \sqrt{1 + \lambda^2} = 9 \sqrt{1 + 2} = 32.5 \text{ m}$$

Il va de soi que l'on peut traiter de même, avec des formules à peine
 plus compliquées, le cas où l'on retient les données axiales. On pour-
 ra toujours procéder par approximations successives, en essayant des
 valeurs de x de l'ordre de $\frac{1}{10}$ et en examinant si la précision

obtenue est satisfaisante

G. MATHÉROT

$$\text{Function } F(x, \lambda) = \pi x^3 \left(1 + \lambda \frac{x}{2}\right) \sqrt{1 + 2\lambda x}$$

$x \backslash \lambda$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1.58}{100}$	$\frac{2.51}{100}$	$\frac{3.98}{100}$	$\frac{6.31}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1.58}{10}$	$\frac{2.51}{10}$	$\frac{3.98}{10}$	$\frac{6.31}{10}$	1
0.1	$3.14 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^{-5}$	$4.96 \cdot 10^{-5}$	$1.99 \cdot 10^{-4}$	$7.91 \cdot 10^{-4}$	$3.19 \cdot 10^{-3}$	$1.28 \cdot 10^{-2}$	$5.14 \cdot 10^{-2}$	$2.10 \cdot 10^{-1}$	$6.59 \cdot 10^{-1}$	3.61
0.158	$3.15 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^{-5}$	$4.97 \cdot 10^{-5}$	$2.00 \cdot 10^{-4}$	$7.93 \cdot 10^{-4}$	$3.22 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-2}$	$5.24 \cdot 10^{-2}$	$2.16 \cdot 10^{-1}$	$9.01 \cdot 10^{-1}$	3.90
0.251	$3.15 \cdot 10^{-6}$	$1.26 \cdot 10^{-5}$	$4.99 \cdot 10^{-5}$	$2.01 \cdot 10^{-4}$	$8.05 \cdot 10^{-4}$	$3.26 \cdot 10^{-3}$	$1.32 \cdot 10^{-2}$	$5.41 \cdot 10^{-2}$	$2.28 \cdot 10^{-1}$	$9.75 \cdot 10^{-1}$	4.33
0.398	$3.16 \cdot 10^{-6}$	$1.26 \cdot 10^{-5}$	$5.02 \cdot 10^{-5}$	$2.03 \cdot 10^{-4}$	$8.15 \cdot 10^{-4}$	$3.32 \cdot 10^{-3}$	$1.37 \cdot 10^{-2}$	$5.69 \cdot 10^{-2}$	$2.45 \cdot 10^{-1}$	1.08	5.05
0.631	$3.16 \cdot 10^{-6}$	$1.27 \cdot 10^{-5}$	$5.06 \cdot 10^{-5}$	$2.05 \cdot 10^{-4}$	$8.31 \cdot 10^{-4}$	$3.44 \cdot 10^{-3}$	$1.44 \cdot 10^{-2}$	$6.14 \cdot 10^{-2}$	$2.73 \cdot 10^{-1}$	1.26	6.21
1	$3.18 \cdot 10^{-6}$	$1.28 \cdot 10^{-5}$	$5.14 \cdot 10^{-5}$	$2.10 \cdot 10^{-4}$	$8.60 \cdot 10^{-4}$	$3.61 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$	$6.82 \cdot 10^{-2}$	$3.18 \cdot 10^{-1}$	1.56	8.15
1.58	$3.21 \cdot 10^{-6}$	$1.30 \cdot 10^{-5}$	$5.24 \cdot 10^{-5}$	$2.16 \cdot 10^{-4}$	$9.01 \cdot 10^{-4}$	$3.89 \cdot 10^{-3}$	$1.72 \cdot 10^{-2}$	$7.95 \cdot 10^{-2}$	$3.92 \cdot 10^{-1}$	2.04	11.55
2.51	$3.26 \cdot 10^{-6}$	$1.33 \cdot 10^{-5}$	$5.41 \cdot 10^{-5}$	$2.28 \cdot 10^{-4}$	$9.74 \cdot 10^{-4}$	$4.34 \cdot 10^{-3}$	$2.01 \cdot 10^{-2}$	$9.80 \cdot 10^{-2}$	$5.15 \cdot 10^{-1}$	2.89	17.60
3.98	$3.32 \cdot 10^{-6}$	$1.37 \cdot 10^{-5}$	$5.69 \cdot 10^{-5}$	$2.46 \cdot 10^{-4}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$	$5.05 \cdot 10^{-3}$	$2.48 \cdot 10^{-2}$	$1.29 \cdot 10^{-1}$	$7.19 \cdot 10^{-1}$	4.44	28.05
6.31	$3.44 \cdot 10^{-6}$	$1.44 \cdot 10^{-5}$	$6.13 \cdot 10^{-5}$	$2.73 \cdot 10^{-4}$	$1.28 \cdot 10^{-3}$	$6.21 \cdot 10^{-3}$	$3.24 \cdot 10^{-2}$	$1.82 \cdot 10^{-1}$	1.11	7.04	49.00
10	$3.61 \cdot 10^{-6}$	$1.55 \cdot 10^{-5}$	$6.83 \cdot 10^{-5}$	$3.19 \cdot 10^{-4}$	$1.55 \cdot 10^{-3}$	$8.16 \cdot 10^{-3}$	$4.60 \cdot 10^{-2}$	$2.73 \cdot 10^{-1}$	1.77	12.00	86.50
15.8	$3.89 \cdot 10^{-6}$	$1.72 \cdot 10^{-5}$	$7.95 \cdot 10^{-5}$	$3.92 \cdot 10^{-4}$	$2.04 \cdot 10^{-3}$	$1.16 \cdot 10^{-2}$	$6.90 \cdot 10^{-2}$	$4.44 \cdot 10^{-1}$	3.03	21.85	160.00
25.1	$4.14 \cdot 10^{-6}$	$2.02 \cdot 10^{-5}$	$9.80 \cdot 10^{-5}$	$5.15 \cdot 10^{-4}$	$2.98 \cdot 10^{-3}$	$1.74 \cdot 10^{-2}$	$1.12 \cdot 10^{-1}$	$7.56 \cdot 10^{-1}$	5.45	39.95	304.50
39.8	$5.05 \cdot 10^{-6}$	$2.46 \cdot 10^{-5}$	$1.29 \cdot 10^{-4}$	$7.26 \cdot 10^{-4}$	$4.94 \cdot 10^{-3}$	$2.81 \cdot 10^{-2}$	$1.91 \cdot 10^{-1}$	1.37	10.05	77.00	590.00
63.1	$6.20 \cdot 10^{-6}$	$3.25 \cdot 10^{-5}$	$1.82 \cdot 10^{-4}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$	$7.02 \cdot 10^{-3}$	$4.80 \cdot 10^{-2}$	$3.44 \cdot 10^{-1}$	2.52	19.20	147.50	1160.00
100	$8.15 \cdot 10^{-6}$	$4.60 \cdot 10^{-5}$	$2.73 \cdot 10^{-4}$	$1.77 \cdot 10^{-3}$	$1.20 \cdot 10^{-2}$	$8.65 \cdot 10^{-2}$	$6.35 \cdot 10^{-1}$	4.85	37.20	281.50	2280.00