

JUIN 1958.

- NOTE STATISTIQUE N° 17 -

-1-3-2-1-3-1-2-1-3-2-1-3-

PROBLEMES DE ZERO ET D'INFINI

De solides raisons, tant expérimentales que théoriques, indiquent que la répartition dans l'espace de certaines grandeurs se conforme à un schéma lognormal. Que l'on divise le volume V d'un gisement en volume v de teneurs x , ou la surface S d'un pays en surfaces élémentaires dont la production minière annuelle représente une valeur y , le classement sous forme d'histogramme des logarithmes des quantités x ou y fait apparaître généralement l'habituelle courbe en cloche.

Cependant, des difficultés sérieuses surgissent aux valeurs extrêmes :

1°/ - Une teneur x (que nous compterons en minerai pur, et non en métal) est toujours comprise entre 0 et 100 %, soit entre 0 et 1. Or la loi lognormale implique la possibilité de teneurs supérieures à 100 %, physiquement impossibles. Ces teneurs sont affectées de probabilités extraordinairement faibles lorsque la teneur moyenne du gisement est faible (or, uranium), et leur effet n'est pas perceptible. Il n'en est plus ainsi dans le cas de gisements à haute teneur (fer, pyrite etc ...). L'histogramme de Fort Gouraud (symposium du fer, Alger 1952) montre une courbe tassée à droite contre l'abscisse 100 % et largement étalée à gauche vers les faibles teneurs ; alors qu'une loi lognormale présente toujours la dissymétrie inverse. D'ailleurs, il serait satisfaisant que les teneurs complémentaires, x en minerai et $1-x$ en stérile obéissent à des lois de même type, et cela est exclu si x est lognormale, $1-x$ présentant alors la dissymétrie négative du

fer de Fort Gouraud. L'effet de saturation volumétrique, jouant sur x et sur $1-x$, empêche qu'aucune de ces variables soit parfaitement lognormales. Si les grains de minéral étaient des points immatériels, pesant mais de volume nul, les teneurs volumétriques, ou poids métal au mètre cube, échapperaient à cette limitation.

2°/- Si le volume de l'échantillon cesse d'être grand vis à vis de la granulométrie, des teneurs 0 apparaissent. Or de telles teneurs, rejetées à moins l'infini en échelle logarithmique, sont exclues par la loi lognormale. Dans un gisement à teneur basse et où la granulométrie du minéral n'est pas très petite, par exemple un gisement de diamant, les teneurs 0 deviennent cependant la règle pour des prélèvements de volume encore notable (quelques litres, par exemple, dans le cas du diamant).

De même, dans l'étude des "densités de minéralisation" si la surface de référence est de quelques km², la grande majorité des surfaces élémentaires ne contiennent aucun gisement et ont par suite une densité nulle. M. BLONDEL indique que, si l'on fait alors abstraction des surfaces à densités nulles, les densités non nulles des surfaces restantes sont distribuées lognormalement. Cependant, si nous choisissons une surface de référence plus grande, on est conduit à regrouper des surfaces élémentaires voisines stériles et minéralisées. La distribution spatiale des densités 0 définies pour une surface élémentaire influence donc la répartition des densités non nulles définies pour une surface plus grande : il est bien nécessaire de décrire par une loi unique, la distribution de toutes les densités, nulles ou non.

En résumé, la loi lognormale est en contradiction avec :

- un effet de saturation volumétrique, sensible aux teneurs élevées qui interdit les valeurs supérieures à l'unité, et, plus généralement, une exigence de complémentarité entre minéral et stérile.

- un effet de teneur 0, qui se manifeste lorsque la teneur est faible et que la granulométrie du minéral n'est pas

petite.

Ces deux limitations, en théorie, jouent simultanément et dans tous les cas. En pratique, elles sont exclusives l'une de l'autre. Pour des échantillons pris à la mesure de l'homme, on peut négliger la possibilité de teneur 0 dans un gisement de fer et de teneur 100 % dans un gisement de diamant.

Dans les pages qui suivent, nous proposons un schéma purement théorique pour lever ces deux contradictions. L'idée conductrice est d'appliquer le principe de similitude à l'échelle "microscopique", c'est-à-dire à l'échelle des grains. Des études expérimentales nombreuses seraient nécessaires pour étayer ce schéma.

étayer

I - ETUDE DE L'EFFET ZERO

Dans un champ spatial, de volume V , ou de surface S , sont répartis un nombre K de points minéralisés (grains de minerai dans un gisement, ou gisements sur la surface d'un pays). Pour simplifier, ces points sont supposés identiques (c'est-à-dire : grains de même poids ou gisements de même valeur). Enfin, ces points n'ont pas d'extension spatiale, c'est-à-dire que dans une portion quelconque du champ total, il est matériellement possible de faire tenir un nombre k de points minéralisés aussi grand que l'on veut ; le nombre k est cependant inférieur ou égal au nombre total K .

Nous cherchons une expression satisfaisante de la probabilité P_k^V pour qu'une portion v du champ total V contienne k points, sachant que V en contient K .

Pour une opération de l'esprit, nous pouvons individualiser les K points en les numérotant de 1 à K et imaginer que nous les mettons en place l'un après l'autre dans V . Au grain d'ordre i , nous affectons la variable aléatoire x_i , qui prendra la valeur 1 si le grain i tombe dans v et la valeur 0 si le grain i tombe en dehors de v . La variable aléatoire k

est égale à la somme :

$$(1) \quad b = x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

Nous introduisons aussi la variable :

$$(2) \quad y_k = \frac{b}{k} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}$$

y_k représente le pourcentage de grains tombés dans v et reste compris entre 0 et 1.

Chaque variable x_i a la probabilité $\omega = \frac{v}{V}$ de prendre la valeur 1 et la probabilité $1 - \omega$ de prendre la valeur 0. Si nous supposons que les x_i sont indépendants, c'est-à-dire si nous admettons que le grain d'ordre i a toujours la probabilité ω de tomber dans v , quel qu'ait été le sort des $i-1$ grains précédents, k obéit à une loi binominale pure : la probabilité d'avoir k grains dans v est :

$$(3) \quad P_k = C_k^b \omega^k (1-\omega)^{k-b}$$

La variance de y_k est alors $\frac{\omega(1-\omega)}{k}$ et tend vers 0 lorsque k augmente indéfiniment. Ce cas banal correspond en fait à une "teneur" uniforme.

Admettons maintenant que les x_i ne soient pas des variables indépendantes. Supposons, par exemple, que le grain n° 2 ait davantage de chances de tomber dans v si le grain n° 1 y est tombé lui-même.

Une telle hypothèse rend compte aussi bien de la tendance des grains de minerais à s'agglomérer en amas (voir par exemple un front de taille dans un gisement de scheelite éclairé aux UV) que de la tendance des gisements à se cantonner dans quelques districts bien localisés.

Nous sommes alors obligés de considérer la loi de probabilité simultanée des K variables x_i prises ensemble. Cependant, l'ordre dans lequel ces K variables sont prises est arbitraire. L'événement $(x_i=0, x_j=1)$, par exemple, a la même probabilité que l'événement $(x_i=1, x_j=0)$. Autrement dit notre loi est invariante par toute permutation d'indices. En particulier chaque x_i a la même moyenne \bar{x} et la même variance σ^2 , et chaque couple $x_i x_j$ a la même covariance que nous désignerons par h . h n'est pas nul, puisque les x_i ne sont pas indépendants, mais doit être positif.

La variance de y_k est, dans ces conditions :

$$(4) \quad \frac{K \sigma^2 + K(K-1)h}{K^2}$$

Lorsque K augmente indéfiniment, elle tend vers la valeur h , différente de 0. La covariance h , qui représente la tendance des grains à s'agglomérer, permet une répartition non uniforme des teneurs.

Il faut cependant pousser plus loin l'analyse. Une valeur donnée de h peut-être obtenue de C_K^h façons différentes, puisque l'on peut choisir de C_K^h façons les h grains tombent dans v . A chacune de ces façons, correspond une suite de valeurs $x_1 \dots x_K$ où h variables sont égales à 1. Chacune de ces suites, par symétrie, a la même probabilité p_K^h de se réaliser, et l'on a :

$$(5) \quad p_K^h = C_K^h p_K^1$$

Cette relation généralise l'équation (3) de l'alternative répétée.

Relations de récurrence

Imaginons à nouveau que les grains soient mis en place les uns après les autres. Supposons que sur les R premiers grains, h soient tombés dans v . Le $(R+1)$ tombera soit dans

v, soit en dehors, et par suite on a :

$$(6) \quad t_R^{\beta} = \uparrow_{R+1}^{\beta} + t_{R+1}^{\beta+1}$$

On en déduit :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_k^{k-1} = t_{k-1}^{k-1} - t_k^k = -\Delta_1 t_k^k \\ t_k^{k-2} = t_{k-1}^{k-2} - t_k^{k-1} = -\Delta_1 t_k^{k-1} = +\Delta_2 t_k^k \\ \hline t_k^{k-\beta} = (-1)^\beta \Delta_\beta t_k^k \end{array} \right.$$

Relation dans laquelle le symbole Δ_β représente la différence d'ordre β . Il résulte des relations (5) et (7) que les P_k^0 , c'est-à-dire la loi de k pour un nombre total K de grain donné, ne dépendent que des $(K+1)$ nombres :

$$t_0^0, t_1^1, \dots, t_K^K$$

On a d'ailleurs $t_0^0 = 1$ et $t_1^1 = 0 = \frac{\sigma}{V}$

Expression générale de P_k^k

Nous supposons explicitement que, si K augmente indéfiniment, la loi de probabilité de la variable y_k tend vers une loi limite dont la fonction de distribution sera désignée par $F(y)$.

Cherchons l'expression de t_k^k , c'est-à-dire la probabilité pour que les K grains tombent tous dans v. Nous pouvons toujours supposer qu'ayant mis en place les K grains nous continuons à en mettre d'autres jusqu'à concurrence d'un nombre N extrêmement grand. La variable y_N obéit à la loi $F(y)$, c'est-à-dire que la probabilité pour que y_N soit compris entre y et $y + dy$ est $dF(y)$. Supposons que l'expérience ayant été effectivement réalisée, y_N ait pris la valeur y .

Dans ce très grand nombre N de grains mis en place, rien ne distingue spécialement les K premiers. Par conséquent la probabilité t_k^k que les K premiers grains tombent dans v est égale à la probabilité pour que K grains tirés au sort dans la suite des N grains successifs soient justement des grains tombés en v. Si nous savons d'avance que la variable y_N prend la valeur y , cette probabilité est tout simplement y^k . Par suite, y_N ayant la probabilité $dF(y)$ d'être compris entre y et $y+dy$, nous pouvons écrire.

$$(8) \quad t_k^k = \int_0^1 y^k dF(y)$$

t_k^k est égal au moment d'ordre K de la loi limite $F(y)$. Les équations (7) permettent d'écrire :

$$(9) \quad t_k^b = \int_0^1 y^b (r(y))^{k-b} dF(y)$$

et, d'après (5) :

$$(10) \quad P_k^b = \int_0^1 C_k^b y^b (r(y))^{k-b} dF(y)$$

La loi de k apparaît ainsi comme la superposition de lois binomiales pures, et l'équation (10) représente un principe de "décomposition spectrale". Tout se passe comme si les K variables x_i étaient indépendantes comme dans l'alternative répétée et avaient chacune la même probabilité p de prendre la valeur 1, cette probabilité p ayant été fixée au préalable par un tirage au sort selon la loi $F(p)$.

On voit facilement d'ailleurs que la loi définie par l'équation (10) pour y_k a effectivement pour limite $F(y)$. En effet, pour chaque état binomial pur défini par p , la loi de y_k tend vers une distribution où la probabilité 1 est concentrée au point $y = p$, et la résultante est bien la loi $F(y)$.

Par la suite, seul nous intéresse le cas où la loi limite $F(y)$ est continue. Soit $f(y)$ la densité de probabilité de cette loi, définie entre $y = 0$ et $y = 1$. Nous aurons :

$$(11) \quad \begin{cases} t_k = \int_0^1 t^k f(t) dt \\ t_k^{\beta} = \int_0^1 t^{\beta} (1-t)^{k-\beta} f(t) dt \\ p_k^{\beta} = \int_0^1 C_k^{\beta} t^{\beta} (1-t)^{k-\beta} f(t) dt \end{cases}$$

En particulier, la probabilité de la teneur 0, c'est-à-dire la probabilité pour qu'aucun grain ne tombe dans v_0 est :

$$p_k^0 = \int_0^1 (1-t)^k f(t) dt$$

Choix de la fonction f (p) -

A priori, toute fonction f (p) nulle en dehors de l'intervalle 0-1 peut convenir, pourvu que l'on ait :

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \quad \int_0^1 x f(x) dx = \frac{\sigma}{V} = \bar{\omega}$$

Cependant l'indétermination sera partiellement levée si nous imposons à la loi définie par les équations (11) de vérifier le principe de similitude et d'avoir la même signification que la loi lognormale = f (p) ne peut être identique à la fonction lognormale, puisque p doit rester compris entre 0 et 1, mais nous pouvons imposer à f (p) la condition de différer d'autant moins d'une loi lognormale que $\bar{\omega}$ est plus petit.

a - Principe de similitude -

Nous exprimons ce principe en disant que P_K^S ne dépend que de K, k et du rapport $\bar{\omega} = \frac{\sigma}{V}$. En particulier, si nous prélevons un échantillon v dans une portion V_i du champ total V, tels que :

$$\bar{\omega}_i = \frac{\sigma}{V_i} \quad \bar{\omega}_e = \frac{V_i}{V} \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_i \bar{\omega}_e = \frac{\sigma}{V}$$

la probabilité pour que les K grains tombent dans v est égal au produit de la probabilité pour qu'ils tombent dans V_i multipliés par la probabilité pour que, jetant K grains dans V_i , il en tombe K dans v :

$$(12) \quad h_K^k(\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_e) = h_K^k(\bar{\omega}_i) h_K^k(\bar{\omega}_e)$$

on doit avoir :

$$(13) \quad h_K^k(\bar{\omega}) = \bar{\omega}^{g(k)}$$

Le cas banal où $g(K) = K$ correspond à l'alternative répétée et conduit à une loi binominale pure (indépendance des grains, aucune tendance à l'agglomération). L'autre cas extrême est $g(K) = 1$: tous les grains, quel que soit leur nombre, tombent exactement là où est tombé le premier d'entre eux : la tendance à l'agglomération est poussée à son extrême limite. Correspondant à une tendance plus modérée, la fonction $g(K)$ réelle doit être prise croissante, mais croissant moins rapidement que K lui-même : par exemple comme la fonction $\log K$.

b - La loi "log-gamma" -

Les moments de la fonction $f(p)$ doivent être de la forme (13). Une autre condition que nous devons impérativement satisfaire est que la loi définie par $f(p)$ diffère d'autant moins d'une loi lognormale que la valeur moyenne \bar{x} de p est plus petite. Cependant cette loi ne peut-être rigoureusement lognormale, puisque p reste compris entre 0 et 1. Le logarithme népérien de p , Lp , reste compris, lui, entre 0 et moins l'infini. Posons :

$$(14) \quad z = -Lp$$

La nouvelle variable z varie entre 0 et l'infini, et, plus \bar{x} sera petit, plus la valeur moyenne de z sera élevée. Or nous connaissons une loi simple définie entre 0 et l'infini et différant d'autant moins d'une loi normale que la valeur moyenne de la variable est plus élevée. C'est la loi définie par la fonction gamma incomplète :

$$(15) \quad g(z) = \frac{e^a}{\Gamma(a)} z^{a-1} e^{-bz}$$

On rappelle la définition de la fonction gamma :

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

En particulier $\Gamma(n+1) = n!$

La loi définie par la densité $g(z)dz$ a pour moment d'ordre $k =$

$$(16) \quad \int_0^{\infty} z^k g(z) dz = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \frac{b^a}{b^{a+k}} = \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{b^k}$$

En particulier, la valeur moyenne de z (qui sera, changé de signe, le logarithme de la moyenne géométrique de p) est :

$$(17) \quad -L\bar{z} = \frac{a}{b}$$

La variance de z (qui sera la variance logarithmique de p) est :

$$(18) \quad \sigma^2 = \frac{a(a+1)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b^2}$$

La loi de p est, dans ces conditions :

$$(19) \quad f(t) dt = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left[L \frac{1}{t} \right]^{a-1} t^{b-1} dt$$

Les moments de p ont pour valeur :

$$m_k = \int_0^1 t^k f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-bz} z^k g(z) dz = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a)}{(b+b)^a} = \frac{b^a}{(b+b)^a}$$

Nous posons, pour simplifier l'écriture :

$$(20) \quad \frac{1}{b} = \varepsilon$$

Alors :

$$(21) \quad m_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1+\varepsilon \frac{1}{2})^a}$$

En particulier, la moyenne $\bar{\omega}$ est :

$$(22) \quad m_1 \bar{\omega} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^a}$$

La comparaison des équations (18) et (22) fait apparaître la formule de Wijs : ces équations s'écrivent :

$$(23) \quad \begin{aligned} \sigma^2 &= a \varepsilon^2 \\ L \bar{\omega} &= -a L (1+\varepsilon) \end{aligned}$$

d'où

$$(24) \quad \sigma^2 = -\frac{\varepsilon^2}{L(1+\varepsilon)} L \bar{\omega}$$

s'écrit : Or, si on se souvient que $\bar{\omega}$ est égal à $\frac{V}{V}$, ceci

$$\sigma^2 = a L \frac{V}{V}$$

avec

$$(25) \quad a = \frac{\varepsilon^2}{L(1+\varepsilon)}$$

ε est un paramètre intrinsèque, puisqu'il ne dépend que de la dispersion absolue λ , dont il ne diffère que par un terme du second ordre. Au contraire, a est proportionnel à $-\frac{1}{L \bar{\omega}}$

$$a = - \frac{L\omega}{L(1+\varepsilon)}$$

Plus ω est petit, plus a est grand et moins, par suite, la loi log gamma diffère d'une loi lognormale. Pour avoir un ordre de grandeur, prenons pour ω la valeur 10^{-6} , correspondant à un échantillon égal au millionième du gisement, et pour ε la valeur 10/100. On trouve $a = 145$. Or on admet qu'à partir de $a = 15$, la loi gamma ne se distingue pratiquement plus d'une loi normale.

Remarquons enfin que la condition (13) est remplie d'elle-même : on a en effet :

$$(26) \quad m_B = f_B(\omega) = \frac{1}{(1+\varepsilon B)^a} = \omega^{\frac{L(1+\varepsilon B)}{L(1+\varepsilon)}}$$

Lorsque ε s'annule, on retombe sur l'expression $\omega^B =$ les grains sont indépendants, la loi limite est l'uniformité et, d'ailleurs, la dispersion absolue est nulle.

Interpretation de la loi log gamma, lorsque a est un entier : n

Si a est égal à un entier n , le prélèvement de la fraction $\omega = \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}$ s'interprète comme le résultat de n réductions successives de V par la fraction $\frac{1}{1+\varepsilon}$ voisine de l'unité, soit n prélèvements successifs de la quasi totalité du champ. Dans un tel prélèvement élémentaire, la fraction x de minerai prélevé en représentera également la quasi totalité. La loi de probabilité de x s'obtient en portant $a = 1$ dans l'expression (19) :

$$(27) \quad f(x) dx = b x^{b-1} dx$$

où $b = \frac{1}{\varepsilon}$ est grand, et où x est pris entre 0 et 1. Répéter n fois ce prélèvement élémentaire revient à faire le produit de n variables x_1, x_2, \dots, x_n obéissant chacune à la loi (27) et

indépendantes les unes des autres :

$$(28) \quad p = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$$

On vérifiera facilement que la loi qui en résulte est bien donnée par (19).

Remarques générales sur ce chapitre -

1° - En fait, le choix de la loi log-gamma est arbitraire. N'importe quelle loi convergeant vers la loi lognormale et dont les paramètres vérifient les conditions de Wijs ferait aussi bien l'affaire. Cela n'a pas d'importance, puisque le domaine d'utilisation pratique d'une telle loi, celui des petites valeurs de $\bar{w} = \sigma/\mu$, est justement celui où cette loi diffère très peu de la lognormalité.

En particulier, tout schéma où p est engendré par voie multiplicative à partir de variables x indépendants, selon l'équation (28), conduit à une formulation acceptable, pourvu que n soit grand et que les x ne prennent que des valeurs comprises entre 0 et 1, avec une moyenne voisine de l'unité et une variance faible.

2° - La solution du problème du 0 a été obtenue en établissant une correspondance par similitude entre le gisement réel, où le nombre total K de grains minéralisés est assez faible pour que puissent apparaître des teneurs 0 dans les échantillons de volume relatif \bar{w} , et un gisement fictif, beaucoup plus grand mais de même caractéristique, comportant un nombre de grains assez grand pour que les teneurs 0 ne puissent plus apparaître dans les échantillons de même volume relatif \bar{w} .

Une fois connu le pourcentage p du minerai total contenu dans l'échantillon fictif, le nombre de grains tombant dans l'échantillon réel s'obtient par K tirages au sort indépendants de même probabilité p . Mais p étant en fait aléatoire, la loi réelle s'obtient par la superposition d'états binomiaux purs pondérés par leur probabilité de réalisation, c'est-à-dire par la loi de p .

3° - Ce schéma n'est valable, en toute rigueur, que si les grains sont dépourvus de volume, de telle façon que chaque échantillon, si petit soit-il, puisse matériellement en recevoir un nombre arbitrairement grand. Il est pratiquement applicable aux gisements à faible teneur (or, platine, diamant, uranium) dans lesquels le volume du minéral pur contenu est toujours négligeable vis à vis du volume de l'échantillon; il doit s'appliquer également à la répartition du nombre de gisements d'une même substance contenu dans des surfaces élémentaires données.

Il y aurait lieu tout d'abord de développer la théorie pour tenir compte de la granulométrie des grains minéralisés (les grains d'or ne sont pas tous de même poids, les gisements n'ont pas tous la même valeur économique).

Sans effet sur la probabilité de la teneur O , ce perfectionnement remplacerait par une loi continue la loi discontinue relative aux valeurs $k = 1, 2 \dots$ et permettrait de justifier la remarque de M. BLONDEL, que les valeurs non nulles sont lognormalement distribuées. Cette extension ne sera pas abordée ici.

Par contre, nous allons maintenant aborder la perturbation apportée au schéma précédent par l'effet de saturation volumétrique qui apparaît lorsque le volume occupé par les grains de minéral se cesse d'être négligeable, et se manifeste par une inversion de la dissymétrie de la courbe des fréquences.

II - ETUDE DE L'EFFET DE SATURATION

VOLUMÉTRIQUE

Nous nous représentons maintenant le gisement comme divisé en un nombre N très grand de cases élémentaires, dont chacune ne peut recevoir qu'un seul grain minéralisé. Nous mettons en place dans ce gisement K grains minéralisés, et nous cherchons la probabilité P_n pour qu'un échantillon

constitué de n cases reçoive k grains, k étant inférieur ou au plus égal à n . A la limitation $k \leq K$ que nous avons seule envisagée au chapitre précédent, nous superposons maintenant la condition, pratiquement beaucoup plus sévère, $k \leq n$ - le volume d'un échantillon usuel, dans le cas d'un gisement de fer ou même de Pb, Zn ou Cu, est en effet beaucoup plus petit que le volume du métal contenu dans la totalité du gisement.

Examinons d'abord le cas où les grains n'ont aucune tendance à s'agglomérer : chaque grain a la même probabilité de tomber dans toute case restée vide, quel qu'ait été le comportement des grains précédents. Il y a au total C_N^K manières également probables de places K grains dans N cases, parmi lesquelles $C_n^k C_{N-n}^{K-k}$ comportent la chute de k grains exactement dans l'échantillon de taille n .

$$(29) \quad P_n^k = \frac{C_n^k C_{N-n}^{K-k}}{C_N^K} = \frac{n! (N-n)! k! (N-k)!}{k! (n-k)! (N-k)! (N-n-k+k)! N!}$$

Si, comme ce sera pratiquement le cas, N , K et $N-K$ sont très grands vis à vis de n , cette formule se réduit à :

$$(30) \quad P_n^k = C_n^k m^k (1-m)^{n-k} \quad \text{avec} \quad m = \frac{k}{N}$$

On tombe sur une loi binominale, comme on pouvait le prévoir, mais dont la signification est bien différente de celle de la formule (3) - en effet, le nombre de répétitions de l'alternative n'est plus le nombre total K de grains de minerai, mais le nombre n que peut au plus recevoir l'échantillon, et corrélativement la probabilité ω qu'un grain déterminé tombe dans l'échantillon est remplacée par la probabilité m qu'une case déterminée de l'échantillon reçoive un grain - m est d'ailleurs, exprimée en volume, la teneur moyenne du gisement.

Essayons, maintenant, de tenir compte de la tendance des grains à s'agglomérer. Lorsque nous jetons les premiers grains de minerai, l'effet de saturation ne se fait pas encore sentir, et la répartition s'organise suivant les lois décrites au chapitre précédent. En particulier, nous pouvons attribuer à chaque échantillon de volume relatif $\omega = \frac{n}{N}$ une proba-

bilité p de recevoir le premier grain, cette probabilité p étant une variable aléatoire obéissant à une loi log gamma de moyenne \bar{w} .

Supposons p connu, c'est-à-dire plaçons nous dans un des états binomiaux purs possibles que doit prendre l'échantillon w . Nous pouvons considérer que le premier grain a la probabilité $t_i = \frac{k}{N}$ de tomber dans une case déterminée intérieure à l'échantillon, et la probabilité $t_e = \frac{N-k}{N}$ de tomber dans une case déterminée extérieure à l'échantillon. Nous réitérons ensuite l'opération en faisant abstraction des coups où le grain tombe dans une case occupée, jusqu'à ce que K grains soient placés dans K cases distinctes. La probabilité pour que k cases déterminées dans l'échantillon et $K-k$ cases également déterminées à l'extérieur de l'échantillon soient occupées est proportionnelle à $t_i^k t_e^{K-k}$. Nous disons proportionnelle, et non égale, car nous avons éliminé du champ des cas possibles les cas où plusieurs grains tombent dans la même case. Par suite, la probabilité pour que k cases quelconques de l'échantillon soient occupées est de la forme :

$$(31) \quad P_n^k = A C_n^k t_i^k t_e^{K-k} C_{N-n}^{K-k}$$

Dans cette relation, qui généralise la formule (29), la constante A se détermine par la condition ;

$$(32) \quad \sum_{k=0}^n P_n^k = 1$$

Détaillons l'expression (31) :

$$P_n^k = A C_n^k \frac{(N-n)!}{(k-k)! (N-n-k+k)!} \left(\frac{n}{N}\right)^k \left(\frac{N-n}{N}\right)^{K-k}$$

N , K et $N-K$ étant grands vis à vis de η et k , nous pouvons écrire :

$$P_n^b = A C_r^b C_N^k m^b (1-m)^{n-b} \frac{h^b (1-h)^{k-b}}{N^k \omega^b (1-\omega)^{k-b}}$$

avec

$$m = \frac{k}{N} \quad \omega = \frac{n}{N}$$

Regroupons dans une nouvelle constante A' tous les termes indépendants de k :

$$P_n^b = A' C_n^b \left[\frac{m}{(1-m)} \frac{h}{(1-h)} \frac{(1-\omega)}{\omega} \right]^b$$

La condition (32) permet d'évaluer $A' =$

$$A' \left[1 + \frac{m h (1-\omega)}{(1-m)(1-h)\omega} \right]^n = 1$$

On calcule ensuite aisément la valeur moyenne de k

$$(33) \quad E(k) = \sum_b k P_n^b = n \frac{m h (1-\omega)}{\omega(1-m) + h(m-\omega)}$$

En fait, p n'est pas connue, mais à la probabilité $f(p)$ de p d'être compris entre p et $p+dp$. Le P_n^b final sera la moyenne, prise sur $f(p)$ du P_n^b de l'équation (31). Son expression n'a que peu d'importance car, du fait même que l'effet de saturation se fait sentir, l'effet 0 est négligeable. Seule nous intéresse la loi de la variable $x = \frac{k}{N}$, qui n'est autre que la teneur. Pour un état binomial pur, x a une variance en $1/n$ et, comme n est tout de même grand, x peut-être considéré comme égal à sa valeur moyenne, qui est donnée par l'équation (33) après division par n .

$$(34) \quad x = \frac{m \cdot b \cdot (1 - \bar{w})}{\bar{w}(1-m) + b(m-\bar{w})}$$

Autrement dit, la loi de x se déduit de la loi de p par une transformation homographique. On lit sur (34) que $m = 1$ (teneur moyenne du gisement égale à 100 %) entraîne $x = 1$. De même $p = 1$ entraîne $x = 1$ par saturation. Enfin pour $\bar{w} = 1$, la loi $f(p)$ entraîne $p = 1$ et par suite $x = 1$ (échantillon identique au gisement entier).

Si nous posons :

$$t = \frac{n}{K} = \frac{\bar{w}}{m}$$

(t est petit) l'équation (34) s'écrit :

$$(35) \quad x = \frac{b(1-tm)}{t(1-m) + b(1-t)}$$

On entre :

$$(36) \quad b = \frac{t(1-m)x}{(1-tm) - x(1-t)}$$

En pratique, la loi de p est lognormale lorsque \bar{w} est très petit, donc lorsque t est négligeable devant l'unité. L'équation (36) se simplifie en =

$$(37) \quad b = t(1-m) \frac{x}{1-x}$$

Cette équation signifie que, pratiquement, la variable lognormale n'est pas la teneur x de l'échantillon, mais le rapport $\frac{x}{1-x}$ des teneurs en minerais et stériles.

Cette conception a le mérite de rétablir la symétrie entre minéral et stérile tout en conservant la simplification thermodynamique de la lognormalité, mais l'inconvénient de conduire à des calculs inextricables en pratique.



G. LATHERON.