G. Matheron
juin 1959

NOTE STATISTIQUE N° 20

LA RECONNAISSANCE DES AMAS.

Le problème de la reconnaissance des amas a déjà été abordé dans la Note Statistique N°16. Les hypothèses simplificatrices faites dans cette étude ont pu apparaître, un moment, comme peu inquiétantes. Cependant, nous retrouverons ci-après des formules du même type que celles établies à cette occasion, dont seuls les coefficients numériques seront modifiés : Et encore cette modification sera surtout imputable à la correction d'une erreur de raisonnement indépendante des hypothèses simplificatrices. L'objet de la présente étude n'est donc pas tant d'atteindre à une plus grande rigueur, que de donner une plus juste mesure de l'approximation consentie.

I - RETOUR SUR UN PRINCIPE DE BASE

Il a été admis une fois pour toutes, à la base de la théorie lognormale de l'échantillonnage systématique, un principe de composition "logarithmique" qui s'énonce ainsi : la variance logarithmique dans un gisement V de la teneur x d'un échantillon v est égale à la valeur moyenne dans v de la covariance logarithmique $\sigma_{u_1 u_2}$ des teneurs u_1 et u_2 des échantillons élémentaires dv_1 et dv_2, lorsque ceux-ci occupent toutes les positions possibles dans v :

$$(1) \quad \sigma^2 = \frac{1}{v^2}\int_v dv_1 \int_v \sigma_{u_1 u_2}\, dv_2$$

En toute rigueur, cette relation est vraie non de la variance du logarithme de la teneur moyenne x de l'échantillon v, mais de la variance du logarithme $L\gamma_u$ de la médiane γ_u dans v des teneurs u des échantillons élémentaires dv prélevés dans v. $L\gamma_u$ est en effet la moyenne arithmétique des Lu. Quant à x, il est égal à :

$$(2) \quad x = \gamma_u\, e^{\sigma_u^2/2}$$

σ_u^2 désignant la variance dans v des teneurs u. Si l'on admet que σ_u^2 n'est pas aléatoire, mais est déterminé rigoureusement une fois connues la forme et la dimension de v et de dv, le facteur $e^{\sigma_u^2/2}$ se réduit à une banale constante, et x et γ_u ont même variance logarithmique. Le principe de composition logarithmique est alors une conséquence inévitable. Mais si par contre σ_u^2 est une variable aléatoire, ce principe ne pourra plus s'appliquer.

D'autre part - et indépendamment de toute hypothèse sur la loi de distribution des teneurs - ce principe de composition s'applique nécessairement, sous la forme "arithmétique" aux variances de covariances brutes (et non plus logarithmiques) On doit toujours avoir :

$$(3) \quad \Sigma^2 = \frac{1}{v^2} \int_v dv_1 \int_v \Sigma_{u_1 u_2} \, dv_2$$

Or - dans l'hypothèse lognormale - on a également :

$$(4) \quad \Sigma^2 = m^2 (e^{\sigma^2} - 1) \qquad \Sigma_{u_1 u_2} = m^2 (e^{\sigma_{u_1 u_2}} - 1)$$

Il en résulte que l'on doit avoir :

$$(5) \quad e^{\sigma^2} = \frac{1}{v^2} \int_v dv_1 \int_v e^{\sigma_{u_1 u_2}} \, dv_2$$

Il est aisé de montrer qu'il n'existe aucune fonction $\sigma_{u_1 u_2}$ telle que les équations (1) et (5) soient simultanément vérifiées pour tous les contours v possibles. L'équation (3) étant nécessairement valable, on en déduit que le principe de composition ne peut s'appliquer sous la forme logarithmique - et que, par voie de conséquence σ_u^2 est en fait une variable aléatoire. Il en est de même de la variance brute Σ_u^2 correspondante.

Dans les études antérieures, pour établir que σ_u^2 ne peut prendre qu'une valeur déterminée, et nullement aléatoire, on avait considéré la correlation des variables u et x - correlation de la teneur x d'un échantillon dV tiré au sort dans V et de la teneur u d'un échantillon dv tiré au sort dans v Les variables u et x étant individuellement lognormales, il avait paru plausible, (bien que non nécessaire) d'admettre que leur distribution conjointe l'était aussi. Dans ces conditions, la variance de u à x fixé à une valeur déterminée, indépendante de x et nullement aléatoire. Mais - et là est la faille du raisonnement - cette variance $\sigma^2_{u.x}$ de u à x fixé n'est pas identique à la variance σ_u^2 des u dans un volume v particulier de teneur x. C'est la variance de tous les u contenus dans l'ensemble des v de teneur x, c'est-à-dire une sorte de moyenne de toutes les valeurs possibles des σ_u^2 correspondant. On a en fait, d'après l'équation (2)

$$\sigma^2_{u.x} = E(\sigma_u^2 \cdot x) + D^2(\chi_u \cdot x) = E(\sigma_u^2 \cdot x) + \frac{1}{4} D^2(\sigma_u^2 \cdot x)$$

Le problème de la forme mathématique de la loi de distribution de la variable aléatoire σ_u^2 s'annonce comme singulièrement complexe. Il n'est pas nécessaire, cependant, de l'élucider ici, car en fait l'équation (1) pourra toujours être considérée comme une approximation de l'équation (5) au premier ordre par rapport à la dispersion absolue α

En effet, si nous admettons que la covariance élémentaire $\sigma_{v_1 v_2}$ est de la forme :

$$(6) \quad \sigma_{v_1 v_2} = A - 3\alpha L r$$

le principe de composition arithmétique, éq. (5) donne :

$$(7) \quad \sigma^2 = L\left[\frac{1}{v^2}\int_v dv \int_v e^{A-3\alpha L r} dv\right] = A + L\left[\frac{1}{v^2}\int_v dv \int_v e^{-3\alpha L r} dv\right]$$

avec

$$(8) \quad A = -L\left[\frac{1}{V^2}\int_V dv \int_V e^{-3\alpha L r} dv\right]$$

En se limitant, pour A comme pour σ^2 , aux termes du premier ordre en α, on retrouve le principe de composition logarithmique.

Cette approximation pourra passer pour satisfaisante, chaque fois que la variance obtenue sera petite. Ce sera souvent le cas dans les problèmes d'échantillonnages, en particulier dans le cas de la reconnaissance d'un gisement par travaux miniers, où, traçages et montages épousent d'aussi près que possible la forme géométrique du gisement V et où par suite le coefficient du terme en α dans la variance d'échantillonnage est à priori très petit. Il se peut, par contre, qu'il n'en soit pas de même dans les problèmes d'échantillonnages discontinus (galerie échantillonnée par saignées équidistantes, couche reconnue par sondages à maille rigide, etc...)

Dans ce genre de problème, on sait que la disposition optimum des prélèvements est obtenue en divisant la masse à échantillonner en zones d'influence égales, au centre de chacune desquelles est prélevé un échantillon. Si x_i désigne la teneur d'un échantillon et m_i celle (inconnue) de sa zone d'influence, on peut toujours écrire

$$(9) \quad x_i = y_i m_i$$

Dans la théorie basée sur le principe de composition logarithmique, y_i n'est pas tout à fait indépendante de m_i = la corrélation préférentielle de l'échantillon central avec sa zone d'influence se manifeste par un terme résiduel toujours numériquement négligeable, et dans l'approximation actuelle nous pouvons admettre l'indépendance de y_i et m_i . Cette indépendance serait réalisée dans le cas d'une implantation aléatoire stratifiée, et notre hypothèse est toujours pessimiste.

La grandeur que l'on cherche à estimer est la teneur réelle m, moyenne arithmétique des teneurs réelles m_i des zones d'influences. Si tous les y_i étaient égaux à l'unité, c'est-à-dire si nous connaissions les valeurs réelles des m_i, le meilleur estimateur serait :

$$(10) \quad m = \frac{1}{n} \sum x_i$$

avec une variance d'échantillonnage nulle. Un estimateur lognormal de la forme

$$(11) \quad m = \gamma_{m_i} \, e^{\sigma^2_{m_i}/2}$$

serait non seulement inutile, mais dangereux, car un tel estimateur différera toujours quelque peu de la valeur réelle (10). Par continuité, on se rend compte que si les y_i sont des variables aléatoires de variance faible vis-à-vis de celle des m_i, il est encore préférable d'utiliser l'estimateur arithmétique. C'est pourquoi il est inutile d'utiliser un estimateur lognormal dans le cas d'un échantillonnage continu (estimation de la teneur d'une galerie échantillonnée volée par volée). Par contre, lorsque la variance de y_i devient supérieure à celle de m_i, comme ce sera en général le cas dans un échantillonnage discontinu, l'estimateur lognormal reprendra son intérêt. En vérité, l'expression (11) différera toujours de la moyenne m réelle, mais d'une quantité qui sera cette fois petite vis-à-vis de l'écart type de y_i, de sorte que l'on pourra admettre comme rigoureuse l'égalité.

$$m = \gamma_{m_i} \, e^{\sigma^2_{m_i}/2}$$

Les variables y_i et m_i étant indépendantes, l'estimateur lognormal est :

$$\gamma_{x_i} \, e^{\sigma^2_{x_i}} = \gamma_{y_i} \, \gamma_{m_i} \, e^{\frac{\sigma^2_{y_i} + \sigma^2_{m_i}}{2}}$$

L'égalité (11) étant admise, la seule partie aléatoire de cette expression est $\gamma_{y_i} \, e^{\sigma^2_{y_i}/2}$ et la variance d'échantillonnage est par suite :

$$(12) \quad \boxed{\sigma^2_E = \frac{\sigma^2_{y_i}}{n} + \frac{\sigma^4_{y_i}}{2n}}$$

Cette expression reste d'ailleurs vraie pour un échantillonnage continu, le terme en $\sigma^4_{y_i}$ (terme en α^2) devenant alors parfaitement négligeable. Dans le cas de l'échantillonage discontinu, et les $\sigma^2_{y_i}$ étant calculés au premier ordre en α, elle donne une idée du terme en α^2 qui doit suffire en pratique, car il n'est pas très important de savoir si la probabilité d'erreur est de 2,5 % ou de 3%

Ainsi posé, le problème de l'étude d'un mode quelconque de reconnaissance se ramène à la détermination de la variance du rapport yi de la teneur de chaque échantillon distinct à la teneur de sa zone d'influence :

$$(13) \quad \sigma^2_{y_i} = \sigma^2_{x_i} + \sigma^2_{m_i} - 2\,\sigma_{x_i m_i}$$

étant entendu que ces différents termes peuvent, en première approximation, se calculer à partir du principe de composition logarithmique.

On remarquera également, en passant, combien se trouve simplifiée l'étude des modes d'échantillonnages systématiques hétérogènes. Le gisement étant divisé en zones d'influence reconnues par autant d'échantillons distincts, l'estimateur de la moyenne s'obtient en pondérant par le volume de chaque zone la teneur elle-même, dans le cas arithmétique, ou son exposant (sa fréquence) dans le cas lognormal, et la variance d'échantillonnage en pondérant chaque $\sigma^2_{y_i}$ par le carré du volume de la zone correspondante.

Ceci dit, nous étudierons successivement la reconnaissance d'un amas par travaux miniers et par sondages = dans le premier cas l'échantillon distinct est constitué de l'ensemble des travaux effectués dans une section, et la zone d'influence par une tranche mince comprise entre deux cotes, dans le deuxième, la zone d'influence est un cylindre de révolution et l'échantillon est constitué d'un sondage axial

II - RECONNAISSANCE D'UN AMAS PAR TRAVAUX MINIERS

Un amas est usuellement décomposé en tranches, horizontales ou verticales, chaque tranche étant reconnue par un certain nombre de travaux effectués dans une même section plane (galeries et recoupes, sondages parallèles effectués à partir d'une galerie centrale etc....) La "zone d'influence" à considérer ici est donc la tranche élémentaire. Celle-ci sera assimilée à un cylindre droit de hauteur h dont la section est une ellipse de demi axes a et b. La section reconnue est la section médiane. Nous admettons, dans un premier temps, que les travaux effectués dans la section permettent de connaître la teneur réelle de celle-ci. Dans un deuxième temps nous combinerons les erreurs introduites par l'estimation de la teneur de la tranche à partir de la teneur réelle de la section, et par l'estimation de la teneur de la section à partir des travaux miniers.

1) Estimation de la teneur de l'amas à partir de sections parfaitement reconnues

a) Covariance de deux ellipses infiniment voisines

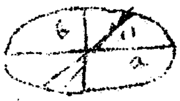
Soit h la distance des ellipses. Il faut calculer la valeur moyenne du logarithme Lr de la distance de deux points pris au hasard dans chacune des deux ellipses, ou si l'on préfère la valeur moyenne de $\frac{1}{2} L(r^2+h^2)$, r étant la distance de deux points pris au hasard dans une même ellipse, soit

$$(14) \quad F(h) = \frac{1}{S^2}\iint_S ds \iint_S \frac{1}{2} L(r^2+h^2)$$

Derivons =

$$(15) \quad \frac{1}{h}\frac{dF(h)}{dh} = \frac{1}{S^2}\iint ds \iint \frac{ds}{h^2+r^2}$$

1°) Supposons d'abord l'un des points, M, fixe, l'autre occupant toutes les positions possibles dans l'ellipse. En passant en coordonnées polaires d'origine M, on a :



$$(16) \quad \iint \frac{ds}{h^2+r^2} = \iint \frac{r\,dr\,d\theta}{h^2+r^2} = \frac{1}{2}\int_C L(h^2+r^2)\,d\theta - 2\pi L h$$

On voit apparaître le terme en L h qui différencie le problème à 3 dimensions, dans lequel L r n'est pas harmonique, du problème plan beaucoup plus simple. Sur le contour C, on peut assimiler $\frac{1}{2} L(h^2+r^2)$ à Lr, puisque h est petit et que M est à l'intérieur de l'ellipse. Celà revient à négliger h^2 devant l'unité. Nous donnerons plus loin l'expression des termes d'ordre supérieur. Pour l'instant, calculons :

$$(17) \quad I = \int_0^{2\pi} L r\, d\theta = \int_0^{\pi} L r_1 r_2\, d\theta$$

r^1 et r^2 désignant les deux rayons vecteurs de M d'angles polaires θ et $\theta+\pi$

Calcul du produit $r^1 r^2$

Coordonnées de l'origine M : $(x_0 y_0)$

Equation de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$

Equation de la droite portant r_1, r_2 : $y - y_0 = tg\,\theta(x-x_0)$

On pose $\xi = x - x_0$ Les projections ξ_1 et ξ_2 de r_1 et r_2 sur l'axe des x sont les deux racines de

.....

l'équation :

$$\frac{(\xi+x_0)^2}{a^2} + \frac{(y_0+\mathrm{tg}\,\theta\,\xi)^2}{b^2} = 1$$

Le produit de ces deux racines est :

$$\xi_1\xi_2 = \frac{f(n)}{\frac{1}{a^2}+\frac{\mathrm{tg}^2\theta}{b^2}} \qquad \left[\, f(n) = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right]$$

D'où le produit des rayons vecteurs

(18) $$r_1 r_2 = -\frac{\xi_1\xi_2}{\cos^2\theta} = -f(n)\,\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

<u>Calcul de l'intégrale I</u> de l'équation (17)

$$I = \int_0^{\pi} L\, r_1 r_2\, d\theta = \pi L[-f(n)] + 2\pi L ab - \int_0^{\pi} L(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\, d\theta$$

L'intégrale du deuxième membre se calcule comme suit :

$$\int_0^{\pi} L(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi} L\left[\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\cos 2\theta\right] d\theta$$

$$= \pi L\frac{(b^2-a^2)}{2} + \int_0^{2\pi} L\left[\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2} + \cos\phi\right]\frac{d\phi}{2}$$

Or, pour $|u|>1$ on a l'égalité suivante :

$$\int_0^{2\pi} L(u+\cos\phi)\,d\phi = 2\pi L\,\frac{u+\sqrt{u^2-1}}{2}$$

Par suite

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} L\left[\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} + \cos\phi\right] d\phi = \pi L\frac{(a+b)^2}{2(a^2-b^2)}$$

On en tire

$$\int_0^{\pi} L(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\,d\theta = 2\pi L\,\frac{a+b}{2}$$

d'où la valeur de l'intégrale I

$$I = \pi L[-f(n)] + 2\pi L\,\frac{2ab}{a+b}$$

2°/ Calculons maintenant la valeur moyenne de l'intégrale I lorsque le point origine M occupe toutes les positions possibles à l'intérieur de l'ellipse

$$\frac{1}{\pi ab}\iint I\,dS = 2\pi L\frac{2ab}{a+b} + \frac{\pi}{\pi ab}\iint L[-f(M)]\,dS$$

Considérons l'ellipse homothétique et concentrique au contour, d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda^2$$

Sur cette ellipse, $-f(M)$ est constant et égal à $1-\lambda^2$
L'aire de cette ellipse est d'autre part $\pi ab\lambda^2$
Par suite :

$$dS = 2\pi ab\,\lambda\,d\lambda$$

et :

$$\iint L[-f(M)]\,dS = \pi ab\int_0^1 L(1-\lambda^2)\,2\lambda\,d\lambda = -\pi ab$$

Donc, la valeur moyenne de I dans l'ellipse est :

(19) $$\frac{1}{\pi ab}\iint I\,dS = 2\pi L\frac{2ab}{a+b} - \pi = 2\pi L R - \pi$$

en introduisant le rayon équivalent R, moyenne harmonique des deux demi axes a et b

(20) $$R = \frac{2ab}{a+b}$$

A ce stade, notre expression de départ (15) reçoit la forme suivante:

$$\frac{1}{h}\frac{dF(h)}{dh} = \frac{1}{S}\left[2\pi L\frac{R}{h} - \pi\right]$$

3°/ Préoccupons-nous maintenant des termes d'ordre supérieur en h
Remontant à l'équation (16) nous voyons qu'il convient de développer en h l'intégrale =

(22) $$f(h) = \frac{1}{S^2}\iint_S dS\int_C \frac{1}{2}L(r^2+h^2)\,d\theta$$

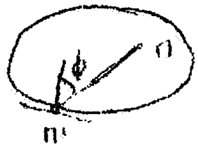
Nous écrirons très simplement :

(23) $$f(h) = f(0) + h f'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) + \dots$$

Terme f (o) = la valeur moyenne de $\int_c \iota\, d\theta$ a déjà été calculée plus haut.

Terme en h - Dérivons l'équation (22)

(24) $$f'(h) = \frac{1}{S^2}\iint dS \int_c \frac{h}{h^2+r^2}\, d\theta$$



Introduisons ϕ angle du rayon vecteur. M M' avec la normale au contour

On a $$d\theta = \cos\phi \, \frac{ds}{r}$$

ds étant l'élément d'arc en M'. L'expression (24) s'écrit donc, en prenant comme origine le point M' du contour

$$f'(h) = \frac{1}{S^2}\iint r\, dr\, d\phi \int_c \frac{h}{h^2+r^2}\cos\phi\, \frac{ds}{r}$$

$$= \frac{1}{S^2}\int_c ds \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos\phi\, d\phi \int_0^{r(\phi)} \frac{h}{h^2+r^2}\, dr = \frac{1}{S^2}\int_c ds \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos\phi \, \operatorname{Arctg}\frac{r}{h}\, d\phi$$

N.B.: il faut seulement que le contour soit convexe

<u>Pour h</u> = 0

$$\operatorname{Arctg}\frac{r}{h} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg}\frac{h}{r} = \frac{\pi}{2}$$

Par suite

(25) $$f'(0) = \frac{1}{S^2}\int_c ds \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\cos\phi\, d\phi = \frac{\pi}{S^2}\int_c ds = \pi\,\frac{2\mathcal{L}}{S^2}$$

équation dans laquelle $2\mathcal{L}$ représente le périmètre de l'ellipse On remarquera en passant que cette expression de f' (o) est vraie pour un contour quelconque, et non pas seulement pour un contour elliptique.

Terme en h^2 - La dérivée seconde de f (h) est =

(26) $$f''(h) = \frac{1}{S^2}\int ds \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} -\cos\phi\, \frac{r}{h^2+r^2}\, d\phi$$

et pour h = 0

$$f''(0) = -\frac{1}{S^2}\int_c ds \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\phi}{r}\, d\phi$$

Cette expression n'est intéressante que dans le cas particulier où l'ellipse se réduit à un cercle de rayon R. Alors, en effet =

$$r = 2R\cos\phi$$

et l'on trouve

(27) $$f''(0) = -\frac{1}{R^4}$$

Nous reviendrons ultérieurement sur le cas du contour circulaire, et nous montrerons qu'il est possible dans ce cas d'obtenir les expressions rigoureuses et non plus seulement des développements limités aux premières puissances de h. Pour l'instant, et dans le cas général du contour elliptique, nous nous limiterons au terme en f' (o) . L'équation (23) limitée au terme en h, nous donne :

(28) $$f(h) = f(0) + h f'(0) = \frac{1}{S}\left(2\pi L R - \pi\right) + \frac{\pi h}{S^2}\, 2\mathcal{L}$$

d'où

(29) $$\frac{1}{h}\frac{dF(h)}{dh} = \frac{1}{S}\left(2\pi L\frac{R}{h} - \pi\right) + \frac{\pi h}{S^2}\, 2\mathcal{L}$$

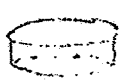
Par intégration, en on déduit l'expression de la valeur moyenne de L r devant servir au calcul de la covariance des deux ellipses distantes de h

(30) $$\boxed{F(h) = F(0) + \pi\frac{h^2}{S} L\frac{R}{h} + \pi\frac{2\mathcal{L}\, h^3}{3S^2}}$$

- F (o) = valeur moyenne de L r dans l'ellipse (problème plan)
En pratique, on ne saura pas la calculer, mais on pourra remplacer l'ellipse par un rectangle équivalent que l'on saura calculer.

- R rayon équivalent (moyenne harmonique des deux demi axes)
- $2\mathcal{L}$ périmètre de l'ellipse.

b) <u>Covariance de l'ellipse et de sa zone d'influence</u>

h 

La valeur moyenne du logarithme L r de la distance r d'un point situé dans le cylindre elliptique de hauteur h et d'un point situé dans la section de base est :

(31) $$F^{(1)}(h) = \frac{1}{h}\int_0^h F(h)\,dh = F(0) + \frac{\pi h^2}{3S}\left(L\frac{R}{h} + \frac{1}{3}\right) + \pi\frac{2\mathcal{L}\, h^3}{12\, S^2}$$

c) <u>Variance du cylindre elliptique</u>

La valeur moyenne de L r dans le cylindre s'obtient par une nouvelle intégration

(32) $$F^{(2)}(h) = \frac{2}{h^2}\int_0^h h\, F^{(1)}(h)\,dh = F(0) + \frac{\pi h^2}{6S}\left(L\frac{R}{h} + \frac{7}{12}\right) + \pi\frac{2\mathcal{L}\, h^3}{30\, S^2}$$

d) <u>Estimation d'une tranche cylindrique de hauteur h</u> dont la section médiane est supposée parfaitement reconnue.

Conformément à ce qui a été exposé dans le premier chapitre, la précision de cette estimation est donnée par la variance d'échantillon

(33) $$\sigma_E^2 = \sigma_x^2 + \sigma_z^2 - 2\,\sigma_{xz}$$

Avec :

σ_x^2 - variance de la section dans le gisement $\sigma_x^2 = A - 3\alpha\, F(o)$

σ_z^2 variance de la tranche dans le gisement $\sigma_z^2 = A - 3\alpha\, F^{(2)}(h)$

σ_{xz} covariance de la tranche et de la section médiane ... $\sigma_{xz} = A - 3\alpha\, F^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right)$

Compte tenu des expressions (31) et (32), on s'aperçoit que non seulement A et F (o) disparaissent de l'expression (33) de la variance d'échantillonnage, mais également les termes en $L\,\frac{R}{h}$

(34) $$\sigma_E^2 = 3\alpha\left(L2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\pi h^2}{6S} - 3\alpha\,\frac{\pi h^3\, 2\ell}{80\, S^2}$$

Il sera souvent suffisant de se contenter du terme en $\frac{h^2}{S}$

(35) $$\boxed{\sigma_E^2 = 0{,}2216\,\pi\alpha\,\frac{h^2}{S}}$$

Les expressions (34) et (35) ne dépendent que de la dispersion absolue, de la hauteur h et de la surface et du périmètre de la section. Nous avons remarqué en passant que le terme en h^3 était indépendant de la forme de la section. Bien que le terme en h^2 ait été calculé dans l'hypothèse d'une section elliptique, on voit facilement qu'avec un contour quelconque on serait retombé sur les mêmes expressions (31) et (32) des fonctions $F^{(1)}(h)$ et $F^{(2)}(h)$, avec simplement une autre valeur du rayon équivalent R, valeur que l'on ne saurait pas calculer dans le cas général. Mais les termes en $L\,\frac{R}{h}$ étant finalement éliminés de l'expression de la variance d'échantillonnage, il en résulte que les formules (34) et (35) restent vraies dans le cas d'un contour quelconque.

e) <u>Estimation d'un cylindre droit reconnu par n sections équidistantes</u>

soit h l'équidistance des sections. Ces sections peuvent être de forme quelconque, sous réserve simplement que h soit petit vis-à-vis de toutes leurs dimensions. En conformité avec le raisonnement du premier chapitre, nous pouvons nous contenter d'indiquer que la variance d'échantillonnage s'obtient simplement en divisant par n les expressions (34) et (35). Il est bon, cependant, de le vérifier directement.

Nous désignons x_i et z_i les teneurs de la section i et de sa zone d'influence, par x la teneur moyenne des n sections et par z celle du gisement. Variances et covariances sont prises dans un grand gisement hypothétique englobant le gisement réel. On a :

$$(36) \quad \sigma_E^2 = \sigma_x^2 + \sigma_z^2 - 2\sigma_{xz} = \frac{\sigma^2_{x_i} + \sigma^2_{z_i} - 2\sigma_{x_i z_i}}{n} + \frac{n-1}{n}\left(\overline{\sigma_{x_i x_j}} + \overline{\sigma_{z_i z_j}} - 2\,\overline{\sigma_{x_i z_j}}\right)$$

Le premier terme n'est autre que le σ_E^2 du paragraphe précédent divisé par n. Le deuxième représente la covariance des variables $\frac{xi}{zi}$ et $\frac{xj}{zj}$. On conçoit que ces covariances seront d'autant plus faibles que les zones i et j seront plus éloignées. D'autre part, quand i et j sont voisines, les formules d'approximation données ci-dessus sont utilisables = par conséquent, on pourra avoir une assez bonne approximation en utilisant ces formules comme si elles étaient valables pour toutes les valeurs de h.

Montrons d'abord que les termes en $L\frac{R}{h}$ disparaissent quel que soit n. On a d'abord en se limitant aux termes en h^2

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2_{x_i}}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{ij}\sigma_{x_i x_j} = A - 3\alpha\left\{F(0) + \frac{2}{n^2}\frac{\pi}{S}\left[(n-1)h^2 L\frac{R}{h} + (n-2)2^2h^2 L\frac{R}{2h} + \cdots + (n-1)^2h^2 L\frac{R}{(n-1)h}\right]\right\}$$

Coefficient de $L\frac{R}{h}$:

$$-3\alpha\frac{2}{n^2}\frac{\pi}{S}\left\{nh^2 L\frac{R}{h}\left[1+2^2+\cdots+(n-1)^2\right] - L\frac{R}{h}\left[1+2^3+\cdots+(n-1)^3\right]\right\} = -3\alpha(n^2-1)\frac{\pi}{S}\frac{h^2}{6}L\frac{R}{h}$$

Ensuite :

$$\sigma_z^2 = A - 3\alpha F(0) - 3\alpha\pi\frac{n^2h^2}{6S}\left(L\frac{R}{nh} + \frac{7}{12}\right)$$

Terme en $L\frac{R}{h}$: $\quad -3\alpha\,\pi\frac{n^2h^2}{6S}L\frac{R}{h}$

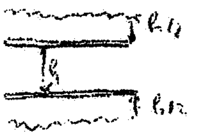
Enfin la covariance :

$$2\sigma_{xz} = \frac{2}{n}\sum_i \sigma_{x_i z} = 2A - 6\alpha F(0) - 3\alpha\frac{4\pi}{3Sn^2}\left\{\left(n-\tfrac{1}{2}\right)^3h^2\left[L\frac{R}{(n-\frac{1}{2})h} + \frac{1}{3}\right] + \left(n-\tfrac{3}{2}\right)^3h^2\left[L\frac{R}{(n-\frac{3}{2})h} + \frac{1}{3}\right] + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3h^2\left[L\frac{R}{h/2} + \frac{1}{3}\right]\right\}$$

terme en $L\,\frac{R}{h}$

$$3\alpha\,\frac{4\pi h_1^2}{3S\,n^2}\,L\frac{R}{h_1}\left[\frac{1}{2^3}+\left(n-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(n-\frac{1}{2}\right)^3\right]=3\alpha\,\frac{\pi h_1^2}{6S}\,(2n^2-1)$$

Et les termes en $L\,\frac{R}{h}$ disparaissent effectivement. Il est malheureusement difficile d'effectuer le calcul rigoureux pour les autres termes dans le cas général. Nous nous contenterons de calculer l'expression exacte dans le cas de n = 2. On a dans ce cas :



$$\begin{cases}\sigma_x^2=\dfrac{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_1x_2}}{2}=A-3\alpha\left[F(0)+\pi\dfrac{h_1^2}{2S}\,L\dfrac{R}{h_1}\right]\\[2ex]\sigma_j^2=A-3\alpha\left[F(0)+\dfrac{\pi}{S}\,\dfrac{4h_1^2}{6}\left(L\dfrac{R}{2h_1}+\dfrac{7}{12}\right)\right]\\[2ex]\sigma_{xj}=\sigma_{1j}=A-3\alpha\left[F(0)+\dfrac{1}{4}\,\dfrac{\pi}{3S}\,\dfrac{h_1^2}{4}\left(L\dfrac{2R}{h_1}+\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{3}{4}\,\dfrac{\pi}{3S}\,\dfrac{9h_1^2}{4}\left(L\dfrac{2R}{3h_1}+\dfrac{1}{3}\right)\right]\end{cases}$$

d'où

(37) $$\sigma_E^2=3\alpha\,\frac{\pi h_1^2}{24S}\left[44\,L2-27\,L3\right]=0.105\,\alpha\pi\,\frac{h_1^2}{S}$$

Cette expression diffère très peu de la moitié de l'expression (35) (0.105 au lieu de 0.1108). En vérité les $\frac{xi}{zi}$ et $\frac{xj}{zj}$ ne sont pas tout-à-fait indépendants, mais sont liés par une faible corrélation négative. En négligeant cette corrélation, c'est-à-dire en prenant simplement σ_E/n on commettra une erreur par excès - donc dans le sens de la sécurité. Il ne semble pas utile de faire le calcul pour n supérieur à 2 , car les covariances deviennent d'autant plus faibles qu'elles concernent des zones plus éloignées. Nous prendrons, dans le cas général

(38) $$\boxed{\sigma_E^2=0.21\,\alpha\,\frac{\pi h^2}{nS}}$$

Si l'on introduit la surface reconnue totale $\mathcal{S}$ = n S et le volume du gisement V = n S h , la formule (38) s'écrit :

(39) $$\boxed{\sigma_E^2=0.21\,\alpha\pi\,\frac{V^2}{\mathcal{S}^3}}$$

Il va de soi qu'en cas de besoin on peut tenir compte aussi du terme en h^3, tel qu'il apparait sur la formule (34), et même éventuellement d'un terme complémentaire en α^2 de la forme $\sigma^4_\varepsilon / 2n$; ce dernier

sera, dans la plupart des cas, parfaitement négligeable.

2) Estimation de l'amas à partir de travaux miniers

En pratique, bien sur, les teneurs réelles de chaque section ne sont pas connues exactement, mais seulement estimées à partir d'un certain nombre de travaux miniers, qui seront constitués par exemple d'une galerie centrale et de recoupes ou sondages parallèles et équidistants. L'erreur ainsi introduite dans l'estimation de la teneur de la section doit être combinée avec l'erreur étudiée au paragraphe précédent. Dans le problème élémentaire de l'estimation d'une tranche à partir d'une seule section, la variance globale d'échantillonnage σ^2_ε est la somme de la variance $\sigma^2_{\varepsilon_1}$ d'échantillonnage correspondant à l'estimation de la section à partir des travaux et de la variance $\sigma^2_{\varepsilon_2}$ correspondant à l'estimation de la tranche à partir de la section, telle qu'elle a été calculée au paragraphe précédent

$$\sigma^2_\varepsilon = \sigma^2_{\varepsilon_1} + \sigma^2_{\varepsilon_2} \tag{40}$$

En effet, ces deux estimations sont bien indépendantes = les variables $\frac{xi}{yi}$, rapport de la teneur xi des travaux miniers et de la teneur réelle yi de la section, et $\frac{yi}{zi}$, rapport de la teneur réelle yi de la section la teneur réelle zi de la tranche reconnue ne sont liées par aucune correlation.

Par contre, dans le problème plus général de l'estimation du gisement à partir de plusieurs sections reconnues par travaux miniers, nous pouvons craindre qu'il n'en soit plus de même = rien ne prouve que $\frac{xi}{yi}$ et $\frac{xj}{yj}$ soient indépendantes, et dans ces conditions il n'est pas sûr que l'on ait le droit de diviser purement et simplement par n l'expression (40).

En pratique, cependant, cette indépendance des estimations de deux sections adjacentes sera assez souvent assurée, par exemple :

- lorsque les travaux seront effectués dans les deux sections suivant des plans géométriques bien différents (direction de sondanges ou des recoupes différente aux deux niveaux, ou, même si les directions sont identiques, espacement différent.)

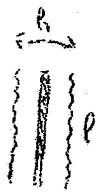
- lorsque l'espacement des sondages dans un même niveau sera petit vis-à-vis de l'équidistance des niveaux eux-mêmes.

Par contre, si l'équidistance des sondages est du même ordre que celle des niveaux, on n'aura plus le droit de composer additivement les variances d'échantillonnage. Dans la Note N°16, on avait déterminé le rapport des termes de section et de tranche en écrivant que la variance résultante devait être minimum lorsque les deux équidistances devenaient égales (maille isotrope). Ce raisonnement est en fait en défaut, puisque précisément on n'a plus le droit d'ajouter les variances lorsque l'optimum est réalisé. On verra néanmoins que le rapport des coefficients réels n'est pas très différent de celui qu'établissait la Note N°16. Mais en toute rigueur, le cas de la maille isotrope relève des formules qui seront établies dans le chapitre suivant, et le cas de la maille presque isotrope n'est pas élucidé = en pratique ce ne sera pas très gênant, car les deux catégories de formules ne différeront qu'assez peu.

a) <u>Estimation d'une Section</u>

Ce problème à deux dimensions a déjà été traité dans les études antérieures. Il convient néanmoins de redresser ici encore quelques erreurs de raisonnement. A la différence du cas à trois dimensions, les formules dites du Rectangle permettent ici d'obtenir la valeur exacte de la variance d'échantillonnage.

(41) $$\sigma_E^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_{xy}$$



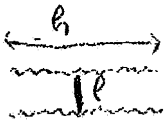
1 - dans le cas d'une section reconnue par un seul traçage central, de longueur l, la largeur h de la section étant petite vis-à-vis de l, il a été établi à l'aide de la formule (41) et en ne conservant que les termes du premier ordre en $\frac{h}{l}$ =

(42) $$\frac{\sigma_E^2}{3\alpha} = \frac{\pi}{6}\frac{h}{l}$$

Cette formule peut se compléter, le cas échéant, en tenant compte du terme du deuxième et du quatrième ordre (il n'y a pas de terme logarithmique), soit

(43) $$\frac{\sigma_E^2}{3\alpha} = \frac{\pi}{6}\frac{h}{l} - \frac{(L2 - 1/4)}{6}\frac{h^2}{l^2} + \frac{1}{288}\frac{h^4}{l^4}$$

Cette formule est encore pratiquement utilisable tant que $\frac{h}{l}$ ne dépasse pas une valeur de l'ordre de 1.5



Dans le cas qui se présentera assez souvent aussi en pratique où, au contraire, la longueur l du traçage est petite vis-à-vis de la largeur h de la section, les mêmes formules du rectangle développées en $\frac{l}{h}$, donnent :

(44) $$\frac{\sigma_E^2}{3\alpha} = 1 - 2L2 + L\frac{h}{l} + \frac{\pi}{3}\frac{l}{h} - \frac{l^2}{6h^2}\left[L\frac{l}{h} + \frac{13}{12}\right] + \frac{11}{60}\frac{l^4}{h^4}$$

Cette formule (44) relaye de façon pratiquement satisfaisante la formule (43) à partir de $\frac{h}{l}$ supérieur à 1,5 ou 2. Il va de soi que, si on désire une plus grande exactitude, on peut toujours se référer aux formules du rectangle. Il serait peut être souhaitable de tabuler, à l'aide des formules du rectangle et en fonction de la seule variable $\frac{h}{l}$, l'expression (41) de la variance d'échantillonnage.

2 - Cas d'une section reconnue par plusieurs éléments linéaires (sondages ou recoupes) parallèles, de longueur l, équidistant de h

On divisera tout simplement le σ_E^2 précédent par le nombre p de ces éléments, l'expression du σ_E^2 étant donnée par la formule (42), (43) ou (44) suivant la valeur du rapport de h/l. En particulier si ce rapport est petit, on aura

$$\frac{\sigma_E^2}{3\alpha} = \frac{\pi}{6}\,\frac{h}{p\,l}$$

Soit, en introduisant la surface de la section S = p h l et la longueur totale L = p l des traçages.

$$\frac{\sigma_E^2}{3\alpha} = \frac{\pi}{6}\,\frac{S}{L^2} \tag{45}$$

3 - Dans le cas d'une section reconnue par des éléments linéaires orthogonaux (galeries et recoupes), on sait que l'on doit considérer comme indépendantes les estimations basées sur les données des galeries seules et des recoupes seules. En particulier, si la formule (45) est applicable aussi bien aux galeries qu'aux recoupes, la variance résultante sera

$$\frac{\sigma_E^2}{3\alpha} = \frac{\pi}{6}\,\frac{S}{L_1^2 + L_2^2} \tag{46}$$

L_1 = longueur totale des galeries

L_2 = longueur totale des recoupes

b) <u>Estimation d'une tranche</u>

On ajoutera purement et simplement la variance d'échantillonnage de section, donnée par celle des formules (42), (43) ou (44) et la variance d'échantillonnage de tranche donnée par la formule (34) ou (35)

En particulier, si l'équidistance des recoupes ou sondages parallèles de la section est faible relativement à leur longueur, et si la hauteur de la tranche est petite vis-à-vis des deux dimensions de la section, on aura =

$$\sigma_E^2 = \alpha\left[0.22\,\pi\,\frac{V^2}{S^3} + 0.5\,\pi\,\frac{S}{L^2}\right] \tag{47}$$

c) Estimation d'un gisement reconnu à partir de plusieurs sections

On divisera simplement par le nombre n de sections la variance d'échantillonnage relative à la tranche élémentaire, calculée comme il a été dit plus haut, sous réserve de la légère modification du coefficient de $\frac{V^2}{S^3}$

En particulier, et avec les mêmes conditions de validité que la formule (47), on aura

$$\sigma_E^2 = \alpha \left[0.21\pi \frac{V^2}{S^3} + \frac{\pi}{2}\frac{S}{L^2} \right] \tag{48}$$

Où V, S et L représentent cette fois le volume total du gisement, la somme des surfaces des n sections et la longueur tracée totale dans l'ensemble des n sections.

3 - Cas particulier du Cylindre de Révolution

Ce cas est particulier en ce sens que les variances et covariances, dont nous n'avions pu obtenir qu'un développement limité aux premières puissances de h dans le cas plus général du cylindre elliptique, peuvent, au moins théoriquement, être ici calculées de façon rigoureuse.

Reprenons, en effet, la formule générale (26) du premier paragraphe de ce chapitre.

$$f''(h) = \frac{1}{S^2}\int_C ds \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\cos\phi \, \frac{r}{h^2+r^2}\, d\phi \tag{26}$$

La base du cylindre étant un cercle de rayon R, on a

$$r = 2\, R \cos\phi$$

expression indépendante de l'arc s, de sorte que les deux intégrales se calculent séparément. D'où =

$$f''(h) = -\frac{2}{\pi R^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{2R\cos^2\phi}{h^2+4R^2\cos^2\phi}\, d\phi = -\frac{1}{R^4} + \frac{1}{\pi R^4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\frac{h^2}{h^2+4R^2\cos^2\phi}\, d\phi$$

On calculera d'abord l'intégrale =

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\frac{h^2\, d\phi}{h^2+4R^2\cos^2\phi} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{h^2\, d\theta}{h^2+2R^2+2R^2\cos\theta} = \frac{2\pi h^2}{4R^2}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{2R^2}\right)^2-1}} = \frac{\pi h}{2R}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h^2}{4R^2}}}$$

soit

$$f''(h) = -\frac{1}{R^4} + \frac{h}{2R^5}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h^2}{4R^2}}} \tag{49}$$

Cette expression est intégrable. On obtient d'abord

$$f'(h) = -\frac{h}{R^4} + \frac{2}{R^3}\sqrt{1+\frac{h^2}{4R^2}} \tag{50}$$

On vérifiera que le f' (o) est bien égal à $\pi \frac{2\ell}{S^2}$: il n'y a pas lieu d'ajouter de constante d'intégration. Ceci dit, en posant $\frac{h}{2R} = S\,h\phi$, nous obtiendrions par integrations successives les valeurs des fonctions f (h), F (h), $F^{(1)}$ (h) et $F^{(2)}$ (h) : les expressions obtenues contiendront diverses puissances des fonctions hyperboliques de ϕ et seront trop complexes pour être manipulées en pratique. Ces formules, en effet, se présenteront comme des différences d'ordre multiples de termes dont les développements coïncident jusqu'à un ordre élevé = le calcul numérique doit alors être poussé jusqu'à une précision extraordinaire pour chaque terme individuel, si l'on désire une précision normale sur le résultat final. Il semble plus raisonnable de se limiter à des développements en puissance de $\frac{h}{R}$ = la connaissance de la formule exacte de f' (h) nous permet d'en contrôler la convergence.

Nous distinguerons deux cas, suivant que $\frac{h}{2R}$ est inférieur ou supérieur à l'unité.

Pour h < 2 R

$$\left(1+\frac{h^2}{4R^2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{4R^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{h^2}{4R^2}\right)^2 + \dots + (-1)^{p-1}\frac{1.3.5\dots(2p-3)}{2^p\,p!}\left(\frac{h^2}{4R^2}\right)^p + \dots$$

Pour h > 2 R

$$\left(1+\frac{h^2}{4R^2}\right)^{1/2} = \frac{h}{2R}\left(1+\frac{4R^2}{h^2}\right)^{1/2} = \frac{h}{2R}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{4R^2}{h^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{4R^2}{h^2}\right)^2 + \dots + (-1)^{p-1}\frac{1.3.5\dots(2p-3)}{2^p\,p!}\left(\frac{4R^2}{h^2}\right)^p + \dots\right.$$

Il est intéressant de noter que le développement en $\frac{h}{R}$ est utilisable tant que la hauteur est inférieure au diamètre. Ceci, par analogie, doit nous rassurer quant à la validité des formules établies pour le cylindre elliptique = elles restent utilisables même pour des valeurs de $\frac{h}{R}$ de l'ordre de l'unité. De plus, grâce au développement en $\frac{R}{h}$ nous avons maintenant la possibilité d'aborder l'étude du cylindre long, étude qui nous sera utile pour le chapitre suivant.

a) Cylindre de révolution court (hauteur inférieure au diamètre)

Nous donnons simplement, sans démonstration, les expressions au quatrième ordre des fonctions F, F^1, F^2 et de la variance d'échantillonnage relative à l'estimation d'une tranche par sa section médiane. Elles s'obtiennent très simplement par intégration successives.

- Covariance de deux cercles distants de h

$$F(h) = LR - \frac{1}{4} + \frac{h^2}{R^2}L\frac{R}{h} + \frac{2}{3}\frac{h^3}{R^3} - \frac{h^4}{8R^4} \tag{51}$$

- Covariance du cercle de base et du cylindre de hauteur h :

$$(52) \qquad F^{(1)}(h) = L\,R - \frac{1}{4} + \frac{h^2}{3R^2}\left[L\frac{R}{h} + \frac{1}{3}\right] + \frac{h^3}{6R^3} - \frac{h^4}{40R^4}$$

- Variance du cylindre de revolution

$$(52) \qquad F^{(2)}(h) = L\,R - \frac{1}{4} + \frac{h^2}{6R^2}\left[L\frac{R}{h} + \frac{7}{12}\right] + \frac{h^3}{15R^3} - \frac{h^4}{120R^4}$$

- Variance d'échantillonnage du cylindre à partir de sa Section médiane :

$$(53) \qquad \frac{\sigma_E^2}{3\alpha} = \frac{7.47}{100}\frac{h^2}{R^2} - \frac{2.5}{100}\frac{h^3}{R^3} + \frac{0.52}{100}\frac{h^4}{R^4}$$

On voit que, dans le cas du cylindre de revolution, la formule limitée au terme en h^3 est encore pratiquement utilisable au voisinage de h = R. Par analogie, on peut admettre que les formules en h^3 établies dans le cas d'un contour quelconque, sont encore valables tant que la hauteur h ne dépasse pas la dimension "moyenne" de la section.

b) <u>Cylindre de revolution long</u> - (hauteur supérieure au diamètre)

En utilisant le développement en $4\frac{R^2}{h^2}$, la formule (50) nous

$$f'(h) = \frac{2}{hR^2} - \frac{2}{h^3} + \frac{4R^2}{h^5} - 10\frac{R^4}{h^7} + \frac{28R^6}{h^9}$$

En intégrant :

$$f(h) = C_1 + \frac{2}{R^2}Lh + \frac{1}{h^2} - \frac{R^2}{h^4} + \frac{5}{3}\frac{R^4}{h^6} - \frac{7}{2}\frac{R^6}{h^8}$$

On se souvient d'autre part de la relation

$$\frac{1}{h}\frac{dF(h)}{dh} = f(h) - \frac{2\pi}{S}Lh = f(h) - \frac{2}{R^2}Lh$$

Le terme en Lh disparait et il vient

$$\frac{dF(h)}{dh} = C_1 h + \frac{1}{h} - \frac{R^2}{h^3} + \frac{5}{3}\frac{R^4}{h^5} - \frac{7}{2}\frac{R^6}{h^7}$$

En intégrant :

$$(54) \qquad F(h) = C_1\frac{h^2}{2} + C_2 + L\,h + \frac{1}{2}\frac{R^2}{h^2} - \frac{5}{12}\frac{R^4}{h^4} + \frac{7}{12}\frac{R^6}{h^6}$$

Les deux constantes d'intégration C_1 et C_2 sont nulles, car pour R très petit vis à vis de h, la valeur moyenne de Lr entre les deux cercles diffère infiniment peu de Lh. Donc on a

(55) $$F(h) = Lh + \frac{1}{2}\frac{R^2}{h^2} - \frac{5}{12}\frac{R^4}{h^4} + \frac{7}{12}\frac{R^6}{h^6}$$

- Covariance du cylindre et de son cercle de base :

(56) $$F^{(1)}(h) = \frac{1}{h}\int^{h} F(h)\,dh = Lh - 1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{h^2} + \frac{5}{36}\frac{R^4}{h^4} - \frac{7}{60}\frac{R^6}{h^6} + \frac{C}{h}$$

C'est à dessein que la limite inférieure de l'intégrale n'est pas spécifiée. Nous n'avons pas le droit, en éffet, d'intégrer entre 0 et h une expression qui n'a de valeur que pour h supérieur à $2\,R$. Tout ce que l'on peut dire, c'est que la fonction $hF^{(I)}(h)$ a pour dérivée la fonction F (h). Il en résulte que nous ne pouvons pas ici déterminer la valeur numérique de la constante d'intégration C. Nous savons seulement qu'elle est proportionnelle à R, puisqu'elle s'annule pour R = 0 et à la dimension d'une longueur.

De même, on trouve :

(57) $$F^{(2)}(h) = \frac{2}{h^2}\int^{h} h\,F^{(1)}(h)\,dh = Lh - \frac{3}{2} - \frac{R^2}{h^2}Lh - \frac{5}{36}\frac{R^4}{h^4} + \frac{7}{120}\frac{R^6}{h^6} + 2\frac{C}{h} + \frac{C'}{h^2}$$

Comme C, la constante C' est indéterminée. Nous trouverons, au chapitre suivant, les valeurs ci-après :

$$C = \frac{64}{45}R \qquad C' = R^2\left[LR - \frac{4}{3}\right]$$

D'où les formules :

(58) $$\begin{cases} F(h) = Lh + \frac{1}{2}\frac{R^2}{h^2} - \frac{5}{12}\frac{R^4}{h^4} + \frac{7}{12}\frac{R^6}{h^6} \\ F^{(1)}(h) = Lh - 1 + \frac{64}{45}\frac{R}{h} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{h^2} + \frac{5}{36}\frac{R^4}{h^4} - \frac{7}{60}\frac{R^6}{h^6} \\ F^{(2)}(h) = Lh - \frac{3}{2} + \frac{128}{45}\frac{R}{h} + \frac{R^2}{h^2}\left[L\frac{R}{h} - \frac{4}{3}\right] - \frac{5}{36}\frac{R^4}{h^4} + \frac{7}{120}\frac{R^6}{h^6} \end{cases}$$

Il serait facile, d'ailleurs, de prolonger ce développement au delà du sixième ordre. On en déduit l'expression de la variance d'échantillonnage du cylindre long reconnue par sa section médiane :

(59) $$\sigma_E^2 = 3a\left[L\frac{h}{R} - 2L2 - \frac{1}{4} + \frac{128}{45}\frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2}\left(L\frac{R}{h} + \frac{8}{3}\right) + \frac{55}{12}\frac{R^4}{h^4} - \frac{1799}{120}\frac{R^6}{h^6}\right.$$

4 - <u>Cas ne relevant pas de la théorie précédente</u>.

La théorie précédente suppose explicitement la hauteur h du cylindre très petite vis à vis des deux dimensions de la section reconnue.

En pratique . puisque nous avons pu établir les formules jusqu'au troisième ordre dans le cas général, cette théorie reste utilisable tant que la hauteur n'est pas supérieure au plus petit diamètre de la Section. Lorsque la hauteur devient supérieure au plus petit diamètre, la théorie cesse complétement d'être applicable. Il faut donc repartir à zero. Nous distinguerons deux cas :

- La hauteur de la tranche est intermédiaire entre les deux dimensions de la section.

- Elle est supérieure à ces deux dimensions.

Dans un cas, comme dans l'autre nous partirons à priori de l'expression de la variance de la tranche, qui ne pourra d'ailleurs être calculée qu'approximativement et nous en déduirons par dérivation l'expression de la covariance de la tranche et de la section. La variance d'échantillonnage s'en déduira.

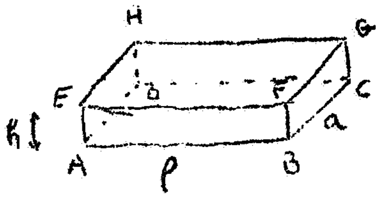
a- <u>Variance de la tranche</u>.

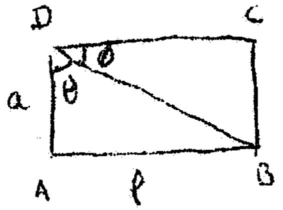
Notre tranche est un prisme droit de base rectangulaire. Les longueurs des trois arêtes sont h, a et l par ordre de grandeur croissante. Pour calculer la valeur moyenne de Lr dans la tranche, il ne nous est pas interdit de considérer celle-ci comme le cylindre de hauteur h et dont la base est le rectangle de cotés a et l. La hauteur h étant petite vis à vis des deux autres dimensions, la valeur moyenne de Lr dans la tranche est de la forme :

$$(60)\quad F^{(2)}(h, a, l) = F^{(2)}(0, a\, l) + \frac{\pi h^2}{6al}\left[L\frac{R}{h} + \frac{7}{12}\right] + \pi\frac{(a+l)\,h^3}{15\,a^2 l^2}$$

Ceci n'est pas autre chose que la formule (32). La seule différence avec le cas du cylindre elliptique est que nous ne savons pas calculer la valeur R (a l) du rayon équivalent. $F^{(2)}(0)$, valeur moyenne de L r dans le rectangle a l et le terme h^3 sont, au contraire, connus exactement. Quand à R, nous ne pouvons pas nous permettre de l'évaluer sommairement en assimilant le rectangle de base à une ellipse. Cette assimilation donnerait une approximation satisfaisante pour $F^{(2)}(h)$ elle-même. Mais nous devrons dériver en a ou en l cette fonction pour obtenir les covariances section/tranche. Si l'intégration d'une formule approximative est en général permise en pratique, sa dérivation est toujours ~~expressément~~ extrêmement dangereuse. Calculer ces covariances par dérivation de la variance du cylindre elliptique équivalent reviendrait en fait à assimiler la covariance section/tranches avec la covariance d'un cylindre elliptique et de sa périphérie. Il est donc nécessaire d'obtenir une estimation plus exacte du rayon équivalent R.

Determination du rayon équivalent R.





Considérons les deux rectangles opposés ABFE et CDHG, distants de a, et calculons leur covariance. Chacun de ces rectangles peut-être considéré comme engendré par des petits segments de hauteur h parallèle à AE. Deux tels segments situés l'un sur AB l'autre sur CD sont distants d'une longueur r toujours supérieures à h. La valeur moyenne de Lr entre ces deux segments est donc donnée par la formule (6) de l'Annexe I_1 formule dans laquelle seul nous interesse ici le terme en h^2, soit $h^2/12r^2$ calculons donc la valeur moyenne de $1/r^2$ entre les segments AB et CD.

Entre le point D et le segment AB :

$$E\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{\rho}\int_0^\rho \frac{dx}{r^2} = \frac{1}{\rho}\int_0^\theta \frac{d\theta}{a} = \frac{\theta}{a\rho}$$

Entre les deux segments

$$E\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{2}{\rho^2}\int \frac{\theta}{a}\,dx = \frac{2}{\rho^2}\int_0^\theta \theta\, d\,tg\theta = \frac{2}{\rho^2}\left[\theta\, tg\theta + L\cos\theta\right]$$

l étant + grand devant a, développons en $\frac{a}{\rho}$:

(61) $$E\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{2}{a\rho}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{a}{\rho} + \frac{a}{\rho}L\frac{a}{\rho} - \frac{a^3}{6\rho^3} + \frac{a^5}{20\rho^5} + \cdots\right]$$

De la même façon, la valeur moyenne de $1/r^2$ entre les segments AD et CB distants de l est

$$E\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{2}{a^2}\left[\phi\, tg\phi + L\cos\phi\right]$$

developpons en a/ρ :

(62) $$E\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{a^2}{6\rho^4} + \frac{a^4}{15\rho^6}$$

Les termes en h^2 correspondants sont $\frac{h^2}{12}$ $E\left(\frac{1}{r^2}\right)$. Il ne nous reste plus qu'à identifier ce terme en h^2 avec celui que l'on déduit par dérivation de l'expression donnéeci-dessus de la valeur moyenne $F^{(2)}$ (h,a,l) de Lr dans la tranche, formule (60). La valeur moyenne de Lr entre EABF et CDHG est :

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\frac{a^2}{2}F^{(2)}(h,a,\rho)$$

et entre ADHE et BCGF :

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\frac{\rho^2}{2}F^{(2)}(h,a,\rho)$$

d'où, par identification des termes en $h^{(2)}$

(63) $$\pi \frac{\partial^2}{\partial a^2} a LR = \frac{\pi}{a} - \frac{2}{\rho} + \frac{2}{\rho} L\frac{a}{\rho} - \frac{a^2}{3\rho^3} + \frac{a^4}{10\rho^5}$$

(64) $$\pi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho LR = \frac{a}{\rho^2} - \frac{a^3}{6\rho^4} + \frac{a^5}{15\rho^6}$$

L'intégration de (63) nous donne :

(65) $$\pi LR = \frac{C_2(\rho)}{a} + C_1(\rho) + \pi La - \pi - \frac{5}{2}\frac{a}{\rho} + \frac{a}{\rho} L\frac{a}{\rho} - \frac{a^3}{36\rho^3} + \frac{a^5}{300\rho^5}$$

C_2 (ρ) et C_1 (ρ) étant indépendantes de a. Par dérivation de cette expression (65) nous obtenons :

$$\pi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho LR = \frac{1}{a}\frac{d^2}{d\rho^2}\rho C_2(\rho) + \frac{d^2}{d\rho^2}\rho C_1(\rho) + \frac{a}{\rho^2} - \frac{a^3}{6\rho^4} + \frac{a^5}{15\rho^6}$$

Par identification avec (64), on voit que l'on doit avoir :

$$\frac{1}{a}\frac{d^2}{d\rho^2}\rho C_2(\rho) + \frac{d^2}{d\rho^2}\rho C_1(\rho) = 0$$

chacun des deux termes devant être nul, on a, les A désignant des constantes

$$\begin{cases} C_2(\rho) = A_1 + \dfrac{A_2}{\rho} \\ C_1(\rho) = A_3 + \dfrac{A_4}{\rho} \end{cases}$$

D'autre part, des termes en $1/a$ étant exclus, car LR doit se comporter comme La pour a très petit, A_1 et A_2 donc C_2 (ρ) sont nuls. A_4, enfin, est nul pour des raisons de dimensions : si a et l sont multipliés par une même constante, il en est de même de R et, à l'exception de La, tous les termes de (65) doivent conserver la même valeur, ce qui exclut un terme en A_4/ρ . Il nous reste donc :

(66) $$LR = C + La - \frac{5}{2\pi}\frac{a}{\rho} + \frac{a}{\pi\rho} L\frac{a}{\rho} - \frac{a^3}{36\pi\rho^3} + \frac{a^5}{300\pi\rho^5}$$

On notera combien cette expression est différente du cas elliptique, où l'on avait

$$LR = L\frac{Ka\beta}{a+\beta} = C + La - \frac{a}{\beta} + \frac{a^2}{2\beta^2} - \frac{a^3}{3\beta^3} + \frac{a^4}{4\beta^4} - \dots$$

Nous ne savons malheureusement pas calculer la valeur numérique exacte de la constante C. Nous l'évaluerons approximativement en admettant que dans le cas du carré (a = 1) le rayon équivalent est égal à celui du cercle de même aire, soit :

$$LR = La - \frac{1}{2}L\pi = C + La - \frac{5}{2\pi} - \frac{1}{36\pi} + \frac{1}{300\pi}$$

D'où

(67) $$C = \frac{5}{2\pi} + \frac{1}{36\pi} - \frac{1}{300\pi} - \frac{1}{2}L\pi = 0.230$$

b- Estimation de la tranche par une section intermédiaire.

La section reconnue est une section médiane parallèle à ABFE, de cotés l et h.

Variance de la tranche : Elle résulte de l'expression (60) où R prend sa valeur (66) et où $F^{(2)}$ (0) est : (voir annexe)

$$F^{(2)}(0) = L\ell - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{3}\frac{a}{\ell} + \frac{a^2}{6\ell^2}\left[L\frac{a}{\ell} - \frac{25}{12}\right] - \frac{1}{180}\frac{a^4}{\ell^4} \tag{68}$$

Covariance de la tranche et de la section intermédiaire.

La valeur moyenne de Lr entre EAFG et le prisme est :

$$F^{(1)}(h,a,\ell) = \frac{1}{a}\frac{d}{da}\frac{a^2}{2}F^{(2)}(h,a,\ell) = L\ell - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{a}{\ell} + \frac{a^2}{3\ell^2}\left[L\frac{a}{\ell} - \frac{11}{6}\right] - \frac{1}{10}\frac{a^4}{\ell^4} \tag{69}$$
$$+ \frac{\pi h^2}{12a\ell}\left[L\frac{a}{h} + C + \frac{19}{12}\right] + \frac{h^2}{6\ell^2}\left[L\frac{a}{\ell} - 2\right] - \frac{a^2h^2}{108\ell^4} + \frac{\pi h^3}{30a\ell^2}$$

Pour la section médiane, on remplacera a par $\frac{a}{2}$

Variance de la section elle-même.

La valeur moyenne de Lr dans la section est donnée par la formule (4) de l'Annexe I appliquée au rectangle de coté l et h.

$$F^{(2)}(h,\ell) = L\ell - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{3}\frac{h}{\ell} + \frac{h^2}{6\ell^2}\left[L\frac{h}{\ell} - \frac{25}{12}\right] - \frac{1}{180}\frac{h^4}{\ell^4} \tag{70}$$

Variance d'échantillonnage.

On en déduit au cinquième ordre.

$$\sigma_E^2 = 3a\left[\frac{\pi}{6}\frac{a}{\ell} - \frac{\pi}{3}\frac{h}{\ell} - \frac{0.4432}{6}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{288}\frac{a^4}{\ell^4} + \frac{\pi h^2}{6a\ell}\left(L\frac{a}{h} + 1.4271\right)\right. \tag{71}$$
$$\left. + \frac{h^2}{6\ell^2}\left(L\frac{a}{h} - 0.8024\right) + \frac{\pi h^3}{15a\ell^2} - \frac{\pi h^3}{15a^2\ell} + \frac{1}{180}\frac{h^4}{\ell^4}\right]$$

c- Estimation de la tranche par une section courte.

La section reconnue est la section médiane parallèle à ADHE, de cotés a et h. La variante de la tranche a même expression que ci-dessus. La covariance s'obtient en écrivant :

$$F^{(1)}(h,a,\ell) = \frac{1}{\ell}\frac{d}{d\ell}\frac{\ell^2}{2}F^{(2)}(h,a,\ell)$$

$$= L\ell - 1 + \frac{\pi}{6}\frac{a}{\ell} - \frac{a^2}{12\ell^2} + \frac{1}{180}\frac{a^4}{\ell^4} + \frac{\pi h^2}{12a\ell}\left[L\frac{a}{h} + C + \frac{7}{12}\right] - \frac{h^2}{12\ell^2} + \frac{a^2h^2}{216\ell^4} + \frac{\pi h^3}{30a^2\ell} \tag{72}$$

La variante de la section s'obtient à partir de l'expression :

$$F^{(2)}(a,h) = La - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{3}\frac{h}{a} + \frac{h^2}{6a^2}\left[L\frac{h}{a} - \frac{25}{12}\right] - \frac{1}{180}\frac{h^4}{a^4}$$

D'où l'on tire la variance d'échantillonnage

$$(73)\quad \sigma_E^2 = 3\alpha\Big[L\frac{\rho}{a} + 1 - 242 + \frac{\pi}{3}\frac{a}{\rho} - \frac{\pi}{3}\frac{h}{a} - \frac{a^2}{6\rho^2}\Big(L\frac{a}{\rho} + \frac{13}{12}\Big) - \frac{h^2}{6a^2}\Big(L\frac{h}{a} - \frac{25}{12}\Big)$$
$$+ \frac{\pi h^2}{6a\rho}\Big(L\frac{a}{h} + 0{,}814\Big) - \frac{h^2}{6\rho^2}\Big(L\frac{a}{\rho} + \frac{3}{2}\Big) + \frac{\pi}{15}\frac{h^3}{a^2\rho} - \frac{\pi}{15}\frac{h^3}{a\rho^2} + \frac{11}{72}\frac{a^2h^2}{\rho^4} + \frac{11}{60}\frac{a^4}{\rho^4} + \frac{1}{180}\frac{h^4}{a^4}\Big]$$

Comparaison de la formule (73) avec la formule (59) relative au cylindre de révolution long = pour a = h, on doit s'attendre à ce que ces deux formules donnent des expressions semblables des variances d'échantillonnage. Introduisons le rayon R tel que $\pi R^2 = a^2$ et faisons a = h, la formule (73) donne :

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\Big[L\frac{\rho}{R} - 1.622 + 3.16\frac{R}{\rho} - 1.045\frac{R^2}{\rho^2}L\frac{R}{\rho} - 2.06\frac{R^2}{\rho^2} + 3{,}32\frac{R^4}{\rho^4}\Big]$$

la formule (59), de son côté donne:

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\Big[L\frac{\rho}{R} - 1.636 + 2.84\frac{R}{\rho} - \frac{R^2}{\rho^2}L\frac{R}{\rho} - 2.66\frac{R^2}{\rho^2} + 4.58\frac{R^4}{\rho^4}\Big]$$

Les divergences ne deviennent notable qu'à partir du deuxième ordre. On s'apercevra, numériquement, que le désaccord n'est pas catastrophique.

Il va de soi que l'on composera, comme au paragraphe précédent, la variance d'estimation de la tranche à partir de la section et la variance d'estimation de la section à partir des travaux miniers, et que ces expressions devront être divisées par n dans le cas de la reconnaissance d'un gisement par n sections.

III RECONNAISSANCE D'UN AMAS PAR SONDAGES.

Nous nous limiterons au cas des sondages implantés selon une maille rigide, isotrope, ou, plus exactement, pour englober dans notre étude les échantillonnages systématiques hétérogènes, au cas où le polygone d'influence de chaque sondage peut-être assimilé à un cylindre de révolution, dont l'axe coïncide avec le sondage intéressé. Suivant le raisonnement habituel, il va nous suffire de déterminer la variance d'échantillonnage de l'estimation d'une zone d'influence par son sondage axial. La variance d'échantillonnage correspondant à l'estimation d'un gisement entier par n sondages s'obtiendra ensuite en divisant par n cette première expression, avec cette réserve qu'il sera souvent nécessaire de tenir compte du terme en $\sigma_E^4 / 2n$

1°- Cas du cylindre long.

Soit x la teneur du sondage axial de longueur h, z celle du cylindre de revolution de rayon R, h étant grand devant R on a :

(74) $$\sigma_E^2 = \sigma_x^2 + \sigma_z^2 - 2\,\sigma_{xz}$$

L'expression rigoureuse de la covariance d'un cylindre et de son axe a été donnée dans la Note 16. La variance du sondage est aisée à écrire :

(75) $$\sigma_x^2 = A - 3\alpha \left(L\,h - \frac{3}{2} \right)$$

Il reste à calculer la variance du cylindre. Elle est donnée par la formule (57). Il reste toutefois à justifier les valeurs admises pour les constantes C et C'. Autrement dit, il nous suffit de calculer directement les termes en $\frac{R}{h}$ et $\frac{R^2}{h^2}$. Les termes d'ordre supérieur sont déjà connus.

Variance du Cylindre long.

Considérons dans le cylindre deux droites distantes de r parallèles aux génératrices. La valeur moyenne du logarithme de la distance de deux points décrivant chacun l'une de ces deux droites est donnée par la première formule du rectangle :

(76) $$E(L\,r) = L\,h - \frac{3}{2} - L\cos\phi + 2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) tg\,\phi + tg^2\phi\; L\sin\phi$$

avec :

(77) $$tg\,\phi = \frac{r}{h}$$

r étant petit devant h, on peut, au troisième ordre près en r/h, assimiler l'angle ϕ à r/h et écrire :

(78) $$E(L\,r) = L\,h - \frac{3}{2} + \pi\frac{r}{h} + \frac{r^2}{h^2}\left[L\frac{r}{h} - \frac{3}{2} \right]$$

Il suffit d'intégrer cette expression pour toutes les positions possibles des deux droites dans le cylindre pour obtenir les termes du premier et du deuxième ordre qui nous manquent encore dans l'expression de la variance.

- <u>Terme constant</u> : il reste égal à Lh $-\frac{3}{2}$

- <u>Terme en r</u>. Il convient de calculer la valeur moyenne de r dans le cercle de rayon R. On calculera d'abord la valeur moyenne de la distance r de deux points, l'un intérieur au cercle, l'autre décrivant sa circonférence, soit :

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint r^2\, dr\, d\theta = \frac{1}{\pi R^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} r^3/_3\, d\theta \qquad \text{avec} \quad r = 2R\cos\theta$$

$$\frac{1}{\pi R^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\frac{r^3}{3}\, d\theta = \frac{8R}{3\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\cos^3\theta\, d\theta = \frac{32\ R}{9\pi}$$

Si maintenant E(R) est la valeur moyenne de r dans l'ensemble du cercle, la variation de E(R) pour un accroissement d R du rayon du cercle se relie facilement à l'expression précédente :

$$\pi^2(R+dR)^4 E(R+dR) = \pi^2 R^4 E(R) + 4\pi^2 R^3 dR\ \frac{32}{9\pi}\ R$$

soit

$$4E(R) + R\,E'(R) = 4 \times \frac{32}{9\pi}\ R$$

Cette équation différentielle admet une solution de la forme :

$$E(R) = \frac{C}{R^4} + \frac{128}{9\pi}\ \frac{R}{5}$$

En fait, la constante d'intégration C est nulle, puisque le terme en R doit s'annuler en même temps que le rayon :

(79) $$E(R) = \frac{128}{45\pi}\ R$$

et le terme en $\frac{R}{\rho_1}$ dans l'intégration de la formule (78) est :

$$\frac{128}{45}\ \frac{R}{\rho_1}$$

<u>Terme en r^r</u>. Il nous faut maintenant calculer la valeur moyenne dans le cercle de l'expression $\frac{r^2}{\rho_1}\left(L\frac{r}{\rho_1}-\frac{3}{2}\right)$. Comme plus haut, on prendra d'abord la valeur moyenne de cette expression entre le cercle et sa circonférence :

$$\iint r^2\left(L\frac{r}{\rho_1}-\frac{3}{2}\right) r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{r^4}{4}\left(L\frac{r}{\rho_1}-\frac{7}{4}\right) d\theta \qquad \text{avec} \quad r = 2R\cos\theta$$

Soit à calculer l'intégrale

$$I = 4R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\cos^4\theta\left(L\frac{2R}{\rho_1}-\frac{7}{4}+L\cos\theta\right) d\theta$$

Tout d'abord :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 4\theta}{8} \right) d\theta = \frac{3\pi}{8}$$

Ensuite :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta \, L\cos\theta \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 4\theta}{8} \right) L\cos\theta \, d\theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{3}{8} \, L\cos\theta \, d\theta = -\frac{3\pi}{8} L2$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{2} \, L\cos\theta \, d\theta = \left[\frac{\sin 2\theta}{4} L\cos\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin\theta\cos\theta}{2} \, \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \, d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 4\theta}{8} \, L\cos\theta \, d\theta = \left[\frac{\sin 4\theta}{32} L\cos\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin 4\theta}{32} \, \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \, d\theta = -\frac{\pi}{32}$$

D'où

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^4\theta \, L\cos\theta \, d\theta = \frac{7\pi}{32} - \frac{3\pi}{8} L2$$

et finalement

$$I = \frac{3\pi}{2} R^4 L\frac{R}{h} - \frac{14}{8} \pi R^4$$

En divisant par πR^2 , on obtient la valeur moyenne du terme d'ordre (2) entre le cercle et la circonférence

$$\frac{3}{2} R^2 L\frac{R}{h} - \frac{7}{4} R^2$$

On établira comme plus haut l'équation différentielle à laquelle doit obéir la valeur moyenne dans le cercle F (R) du terme d'ordre deux :

$$4F(R) + R\,F'(R) = 6R^2 L\frac{R}{h} - 7R^2$$

avec comme solution

$$F(R) = R^2 \left[L\frac{R}{h} - \frac{4}{3} \right]$$

D'où la valeur du terme en R^2 de la variance :

$$\frac{R^2}{h^2} \left[L\frac{R}{h} - \frac{4}{3} \right]$$

La formule (58) est ainsi entièrement établie :

$$(80) \quad \sigma_3^2 = A - 3\alpha \left[Lh - \frac{3}{2} + \frac{128}{45} \frac{R}{h} + \frac{R^2}{h^2} \left(L\frac{R}{h} - \frac{4}{3} \right) - \frac{5}{36} \frac{R^4}{h^4} + \frac{7}{120} \frac{R^6}{h^6} \right]$$

<u>Covariance du cylindre long et de son axe.</u>

On peut intégrer directement la formule (78), mais on n'obtiendra ainsi qu'un développement limité aux termes du deuxième ordre. En fait, la valeur moyenne exacte de Lr entre le cylindre et son axe a été donnée dans la Note Statistique N° 16.

$$(81) \quad E(Lr) = Lh - \frac{19}{12} - L\cos\theta - \frac{1}{6} \frac{L\cos\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} + \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{2} L\sin\theta + \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \operatorname{tg}\theta$$

~~aux~~ avec

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{R}{h}$$

On calculera aisement le développement jusqu'à l'ordre 6 :

(82) $$E(Lr) = L\,h - \frac{3}{2} + \frac{2\pi}{3}\frac{R}{h} + \frac{R^2}{2h^2}\left[L\frac{R}{h} - \frac{7}{4}\right] - \frac{1}{36}\frac{R^4}{h^4} + \frac{1}{240}\frac{R^6}{h^6}$$

D'où la covariance

(83) $$\sigma_{xy} = A - 3\alpha\left[L\,h - \frac{3}{2} + \frac{2\pi}{3}\frac{R}{h} + \frac{R^2}{2h^2}\left(L\frac{R}{h} - \frac{7}{4}\right) - \frac{1}{36}\frac{R^4}{h^4} + \frac{1}{240}\frac{R^6}{h^6}\right]$$

Variance du Sondage.

C'est tout simplement

(84) $$\sigma_x^2 = A - 3\alpha\left[L\,h - \frac{3}{2}\right]$$

Variance d'Echantillonnage du cylindre long.

Elle résulte des formules (74), (80), (83) et (84), qui donnent :

(85) $$\sigma_E^2 = 3\alpha\left[1{,}3443\frac{R}{h} - \frac{5}{12}\frac{R^2}{h^2} + \frac{1}{12}\frac{R^4}{h^4} - \frac{1}{20}\frac{R^6}{h^6}\right]$$

Cette expression n'est utilisable en théorie que pour R/h plus petit que $1/2$. En pratique, elle donne encore de très bons résultats vers $R/h = 1$

2° Cas du cylindre court

R est maintenant supposé grand relativement à h. On va déterminer les développements en h/R.

Variance du cylindre court.

Elle a déjà été établie au chapitre précédent : la formule (52) nous donne en effet :

(86) $$\sigma_y^2 = A - 3\alpha\left[L\,R - \frac{1}{4} + \frac{h^2}{6R^2}\left(L\frac{R}{h} + \frac{7}{12}\right) + \frac{h^3}{15R^3} - \frac{h^4}{120R^4}\right]$$

Covariance du cylindre court.

Nous l'obtiendrons en développant en h/R la formule (81) que nous ecrirons sous la forme.

$$E(Lr) = L\,R - L\cos\phi - \frac{19}{12} - \frac{1}{6}\,tg^2\phi\,L\sin\phi + \frac{L\cos\phi}{2\,tg^2\phi} + \frac{4\phi}{3\,tg\phi}$$

$$tg\,\phi = \frac{h}{R}$$

On obtient aisément :

$$(87) \quad \sigma_{xy} = A - 3\alpha \left[L R - \frac{1}{2} + \frac{h^2}{6R^2} \left(L \frac{R}{h} + \frac{13}{12} \right) + \frac{1}{60} \frac{h^4}{R^4} \right]$$

Variance du sondage

Elle est ici encore :

$$(88) \quad \sigma_x^2 = A - 3\alpha \left[L h - \frac{3}{2} \right]$$

Variance d'échantillonnage du cylindre court

Elle se déduit des formules (86), (87) et (88)

$$(89) \quad \sigma_E^2 = 3\alpha \left[L \frac{R}{h} + \frac{3}{4} + \frac{h^2}{6R^2} \left(L \frac{R}{h} + \frac{19}{12} \right) - \frac{h^3}{15R^3} + \frac{1}{24} \frac{h^4}{R^4} \right]$$

Cette formule pourra être utilisée sans crainte jusqu'à $h/R = 1$ la valeur au delà de laquelle le développement de la covariance cesse d'être convergent.

En pratique, la formule (85), valable pour h plus grand que R, et la formule (89) valable pour h inférieurs à R se raccordent très bien graphiquement. Pour h = R, en particulier, la formule longue donne la valeur 0,961 x 3α , et la formule courte 0,989 x 3α . Il est possible d'intrapoler entre les deux approximations. Dans le cas de la reconnaissance d'un gisement par n sondages, on divisera simplement par n celle des deux expressions qui convient au cas considéré. Il sera souvent nécessiare, en particulier dans le cas du cylindre court, d'ajouter à la variance σ_E^2/n le terme du deuxième ordre par rapport à la dispersion absolue : $\frac{\sigma_E^4}{2n}$

3°) Remarque sur le cas d'une maille presque isotrope.

Les formules précédentes ne sont utilisables que lorsque la zone d'influence de chaque sondage est assimilable à un cylindre de révolution. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, il peut arriver que les sondages soient groupés par ligne, et, si l'espacement des sondages sur une ligne est petit vis à vis de l'équidistance des lignes, on retombe sur le problème étudié au chapitre II, et la variance est la somme d'un terme de ligne (de section) et d'un terme de tranche. Le cas litigieux est celui ou l'espacement des sondages est du même ordre de grandeur que l'équidistance des lignes, ou bien, en termes de travaux miniers, le cas où l'espacement des recoupes est du même ordre de grandeur que l'équidistance des niveaux, sans lui être égal.

Désignons par :

e- la longueur des sondages (ou des recoupes)
h- l'espacement des recoupes (ou des sondages)

a - l'équidistance des niveaux ou des lignes de sondages.

h est supposé inférieur à a mais du même ordre de grandeur. Dans le cas contraire, rien ne nous empêcherait de regrouper nos éléments linéaires dans un système de plan orthogonal au premier. Il y a n niveaux et p sondages par niveaux (np sondages au total). On admet que la longueur p h d'une ligne est relativement grande vis à vis de a. On distinguera deux cas suivant que e est grand ou petit vis à vis de a et h.

- e est grand vis à vis de a et h (ou au moins du même ordre qu'eux)

Notre variance d'échantillonnage est la somme du terme de section.

$$\sigma^2_{E_1} = \frac{\alpha}{np}\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{h}{e} - 0.2216\,\frac{h^2}{e^2}\right]$$

et du terme de tranche

$$\sigma^2_{E_2} = 0.2216\,\pi\alpha\,\frac{a^2}{nphe} - \frac{3\alpha\pi\, a^3(2e+2ph)}{80\,n\,p^2h^2e^2}$$

Soit, lorsque a = h =

$$\sigma^2_E = \frac{a}{np}\left(0.7216\,\pi - \frac{6}{80p}\right) - \frac{\alpha}{np}\left(0.2216 + \frac{3\pi}{40}\right)\frac{h^2}{e^2}$$

La maille étant alors isotrope, on a aussi :

$$\sigma^2_E = \frac{3\alpha}{np}\left(1.3443\,\frac{R}{e} - \frac{5}{12}\,\frac{R^2}{e^2}\right)$$

Le rayon R est tel que $\pi R^2 = h^2$. On remarquera la quasi égalité numérique des termes du premier degré (2,26 dans les deux cas). Les termes en R^2/e^2 diffèrent d'avantage (0,456 contre 0,398), mais encore relativement peu. Dans ces conditions, il devient légitime d'utiliser les formules du chapitre II même dans le cas où la maille est presque isotrope, puisque, à la limite, elles donnent pour la maille parfaitement isotrope, un résultat qui ne s'écarte que très peu de la valeur réelle.

- e est petit vis vis de a et h.

On trouve alors, par les formules des travaux miniers, pour a = h et p grand

$$\sigma^2_E = \frac{3\alpha}{p}\left[L\frac{R}{e} + 0.708 + \frac{1.32}{6}\,\frac{e^2}{R^2}\,L\frac{R}{e} + 1.65\,\frac{e^2}{6R^2}\right]$$

Contre $$\sigma^2_E = \frac{3\alpha}{p}\left[L\frac{R}{e} + \frac{3}{4} + \frac{e^2}{6R^2}\left(L\frac{R}{e} + \frac{14}{12}\right)\right]$$

avec les formules du cylindre.

IV - RESUME ET FORMULAIRE.-

On décomposera dans tous les cas le gisement en autant de cellules élémentaires, ou zones d'influence, reconnues par un échantillon distinct, que le comporte la géométrie des travaux effectués. Les estimations de chacune de ces cellules seront considérées comme indépendantes , et la variance d'échantillonnage global s'obtiendra en divisant par le nombre de ces cellules la variance d'échantillonnage introduite dans l'estimation de chacune d'elle. On distinguera le cas des sondages et des travaux miniers.

A- Amas reconnus par sondages à maille isotrope.

Chaque sondage constitue un échantillon distinct. Soit h la longueur du sondage et R le rayon de son polygone d'influence assimilé à un cercle de même ∅ aire.

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\left[1.3443\,\frac{R}{h} - \frac{5}{12}\frac{R^2}{h^2} + \frac{1}{12}\frac{R^4}{h^4} - \frac{1}{20}\frac{R^6}{h^6}\right] \qquad \text{pour } h > R$$

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\left[L\frac{R}{h} + \frac{3}{4} + \frac{h^2}{6R^2}\left(L\frac{R}{h} + \frac{19}{12}\right) - \frac{h^3}{15R^3} + \frac{1}{24}\frac{h^4}{R^4}\right] \qquad \text{pour } h < R$$

B - Amas reconnus par travaux miniers.

Ces travaux sont localisés dans des sections planes parallèle. Une telle section sera considérée comme un échantillon distinct, et sa zone d'influence sera la tranche cylindrique limitée à mi-distance des deux sections adjacentes. La variance d'échantillonnage pour chaque tranche est la somme d'un terme de tranche, variance d'échantillonnage de l'estimation de la tranche à partir de la section supposée parfaitement connue, et d'un terme de section, variance d'échantantillonnage de l'estimation de la section à partir des travaux miniers qui y ont été effectués.

1º) Terme de section.

Ce problème plan se résoudra en divisant la section en autant de rectangles qu'il y a d'éléments linéaires échantillonnés (recoupes ou sondages parallèles). On divisera par le nombre total de ces rectangles dans la section la variance d'échantillonnage relative à chacun d'eux. Soit l la longueur de l'élément linéaire et h la largeur du rectangle. On distingue deux cas :

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\left[\frac{\pi}{6}\frac{h}{l} - \frac{0.4432}{6}\frac{h^2}{l^2} + \frac{1}{238}\frac{h^4}{l^4}\right] \qquad \text{pour } \frac{h}{l} < 1.5$$

$$\sigma_E^2 = 3\alpha\left[1.212 + L\frac{h}{l} + \frac{\pi}{3}\frac{l}{h} - \frac{l^2}{6h^2}\left(L\frac{l}{h} + \frac{13}{12}\right) + \frac{11}{60}\frac{l^4}{h^4}\right] \qquad \text{pour } \frac{h}{l} > 1.5$$

2°) Terme de tranche.

On distinguera 3 cas : grande section, section intermédiaire petite section . Les formules relatives aux deux derniers cas ne sont qu'approchées.

a - Grande Section.-

La section, de forme quelconque, a une surface S et un périmètre 2L. L'équidistance h des sections successives est petite vis à vis des deux dimensions de S

$$\boxed{\sigma_E^2 = 3\alpha\left[0.2216\,\frac{\pi h^2}{3S} - \frac{2L\pi h^3}{80S^2}\right]}$$

Le coefficient 0,22 16 s'entend pour une seule tranche. Il est remplacé par 0,21 s'il y a plusieurs tranches.

b - Section intermédiaire.

Soient h, a et l, par grandeurs croissantes, les 3 dimensions de la tranche. Une section intermédiaire est une section h l :

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_E^2 = 3\alpha\Big[&\frac{\pi}{6}\frac{a}{l} - \frac{\pi}{3}\frac{h}{l} - \frac{0.4432}{6}\frac{a^2}{l^2} + \frac{1}{288}\frac{a^4}{l^4} + \frac{\pi h^2}{6al}\left(L\frac{a}{h} + 1.4271\right)\\ &+ \frac{h^2}{6l^2}\left(L\frac{a}{h} - 0.8029\right) + \frac{\pi h^3}{15al^2} - \frac{\pi h^3}{15a^2l} + \frac{1}{180}\frac{h^4}{l^4}\Big]\end{aligned}}$$

c - Petite Section.

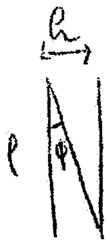
Une petite section est une section h a :

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_E^2 = 3\alpha\Big[&L\frac{l}{a} + 1.222 + \frac{\pi}{3}\frac{a}{l} - \frac{\pi}{3}\frac{h}{a} - \frac{a^2}{6l^2}\left(L\frac{a}{l} + \frac{3}{12}\right) - \frac{h^2}{6a^2}\left(L\frac{h}{a} - \frac{25}{12}\right)\\ &+ \frac{\pi h^2}{6al}\left(L\frac{a}{h} + 0.814\right) - \frac{h^2}{6l^2}\left(L\frac{a}{l} + \frac{3}{2}\right) + \frac{\pi h^3}{15a^2l} - \frac{\pi h^3}{15al^2} + \frac{11}{72}\frac{a^2h^2}{l^4} + \frac{11}{60}\frac{a^4}{l^4} + \frac{1}{180}\frac{h^4}{a^4}\Big]\end{aligned}}$$

A N N E X E I

Développement des formules du Rectangle

Les formules du rectangle ont été établies de façon rigoureuse, mais il est commode, en pratique, de disposer de leurs développements limités : car les formules exactes sont pénibles à manipuler en pratique.



1 - Covariance de deux éléments linéaires de longueur l distants de h, l supérieur à h.

La valeur moyenne de Lr entre ces deux éléments est :

(1) $$F(l,h) = L\,l - \frac{3}{2} - L\cos\phi + (\pi - 2\phi)\,tg\,\phi + tg^{-1}\phi\; L\sin\phi \qquad \left(tg\,\phi = \frac{h}{l}\right)$$

D'où le développement en $\frac{h}{l}$ =

(2) $$F(l,h) = L\,l - \frac{3}{2} + \pi\frac{h}{l} + \frac{h^2}{l^2}\left(L\frac{h}{l} - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{12}\frac{h^4}{l^4} + \frac{1}{60}\frac{h^6}{l^6}$$

2 - Covariance du rectangle et de son grand coté.

On obtient immédiatement par intégration en h de la formule (2) la valeur moyenne de Lr entre le rectangle et l'un de ses grands cotés :

(3) $$F^{(1)}(l,h) = L\,l - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{h}{l} + \frac{h^2}{3l^2}\left(L\frac{h}{l} - \frac{11}{6}\right) - \frac{1}{60}\frac{h^4}{l^4} + \frac{1}{420}\frac{h^6}{l^6}$$

3 - Variance du Rectangle

Par intégration de (3) on obtient la valeur moyenne de Lr dans le rectangle de grand coté l et de petit coté h :

(4) $$F^{(2)}(l,h) = L\,l - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{3}\frac{h}{l} + \frac{h^2}{6l^2}\left(L\frac{h}{l} - \frac{25}{12}\right) - \frac{1}{180}\frac{h^4}{l^4} + \frac{1}{1680}\frac{h^6}{l^6}$$

4 - Covariance du rectangle et de son petit coté.

La valeur moyenne de Lr entre le rectangle et l'un de ses petits cotés de longueur h s'obtient à partir de (4) par l'équation :

$$G^{(1)}(h,l) = \frac{1}{l}\frac{d}{dl}\frac{l^2}{2}F^{(2)}(l,h)$$

Soit

(5) $$G^{(1)}(h,l) = L\,l - 1 + \frac{\pi}{6}\frac{h}{l} - \frac{h^2}{12l^2} + \frac{1}{180}\frac{h^4}{l^4} - \frac{1}{840}\frac{h^6}{l^6}$$

5 - Covariance des deux petits cotés du rectangle

On obtient la valeur moyenne de L r entre les deux petits cotés par l'équation

$$G(h,l) = \frac{d}{dl}\,l\,G^{(1)}(h,l)$$

Soit

(6) $$G(h,l) = L\,l + \frac{h^2}{12l^2} - \frac{1}{60}\frac{h^4}{l^4} + \frac{1}{168}\frac{h^6}{l^6}$$

Ces formules ont été utilisées pour établir les expressions (43) et (44) du texte.

ANNEXE II

- L'estimation de la dispersion absolue -

1) Si ce sont vraiment les covariances logarithmiques, qui sont de la forme A-3 α L r, les théories précédentes ne constituent qu'une approximation du premier ordre en α. Ceci n'est pas forcement redhibitoire, d'autant plus que nous avons indiqué comment l'on pouvait pratiquement introduire un terme du deuxième ordre en α. Par contre l'estimation de la dispersion α elle même va poser un problème difficile. On évalue α en calculant la variance d'échantillons en aussi grand nombre que possible, (volées individuelles, tronçons de carotte etc...) donc d'échantillons dont la variance ne peut absolument pas être exprimée à l'approximation du premier ordre.

Une façon élégante de trancher la difficulté serait d'admettre pour les covariances arithmétiques relatives $\Sigma_{u_1 u_2}/m^2$, et non pour les covariances logarithmiques, une expression de la forme A - 3 α.Lr. Les théories précédentes prennent alors une valeur absolue, à condition d'y remplacer les variances logarithmiques par les variances arithmétiques relatives ($e^{\sigma^2}-1$). Le calcul de α ne poserait alors plus de problème particulier. Il est bien clair que seule une étude expérimentale pourra nous indiquer la véritable expression de la covariance élémentaire.

La théorie de l'estimation a besoin d'être faite non seulement pour les variances et la dispersion absolue, mais également pour l les valeurs moyennes. L'estimateur de Sichel, en effet, n'a de valeur que lɔrsque l'on dispose de n échantillons indépendants. Le fait que, dans tout échantillonnage systématique, des corrélations non négligeables existent entre les échantillon distincts doit compliquer singulièrement l'estimateur déjà rebarbatif de Sichel.

2) Puissances et accumulations sont des variables définies dans un espace à deux dimensions. On ne peut cependant pas faire abstraction de la troisième dimension. Il est absurde d'attribuer à la puissance une variance en $L\,S/s$ (S surface du gîte, s section de la carotte)- car la puissance h a pratiquement la même variance pour un s nul (droite géométriquc) ou de quelques centimètres carrés. La longueur h étant de lɔin la dimension prédominante, la variance de la puissance doit être prise de la forme

$$\sigma_h^2 = A - 3\alpha_h\left(L h - \frac{3}{2}\right)$$

α_h étant la dispersion absolue des puissances, et A la valeur moyenne de Lr dans le gisement multipliée par $3\alpha_h$.

Alger juin 1959