NOTE STATISTIQUE N° 22 G. Matheron 1959

LE RAYON EQUIVALENT DE RADIOCAROTTAGE

La teneur y obtenue par radiocarottage n'est pas la teneur du sondage radiocarotté, mais une moyenne de toutes les teneurs du gisement pondérées par l'éloignement.

$$(1) \qquad y = \beta \int_0^{\infty} e^{-\beta r} \, x(r) \, dr$$

β coefficient d'absorption

$x(r)$ teneur moyenne de la périphérie du cylindre de rayon r axé sur le sondage

La variance de cette variable aléatoire est :

$$(2) \qquad \sigma^2 = \beta^2 \int_0^{\infty} {}^{-\beta r_1} \, dr_1 \int_0^{\infty} {}^{-\beta r_2} \, f(r_1 \, r_2) \, dr_2$$

$f(r_1 \, r_2)$: covariance des deux périphéries cylindriques coaxiales de rayon r_1 et r_2. On peut aussi écrire :

$$\sigma^2 = 2 \beta^2 \int_0^{\infty} e^{-\beta r_1} \, dr_1 \int_0^{r_1} e^{-\beta r_2} \, f(r_1 \, r_2) \, dr_2$$

Nous appellerons <u>rayon équivalent R le rayon du cylindre de même axe dont la teneur à même variance que la radioactivité du sondage axial</u>.

la fonction $f(r_1 \, r_2)$ s'écrit :

$$f(r_1 \, r_2) = A - \frac{3\alpha}{S_1 S_2} \int_{C_1} dS_1 \int_{C_2} dS_2 \, L_r = A - 3 \alpha \, g(r_1 \, r_2)$$

../....

$g(r_1\ r_2)$ est la valeur moyenne de Lr entre les deux périphéries. On a

$$\sigma^2 = A - 3\alpha \times 2\beta^2 \int_0^{\infty} e^{-\beta r_1}\, dr_1 \int_0^{r_2} e^{-\beta r_2} g\,(r_1\ r_2)\, dr_2$$

Le rayon équivalent R est donc celui du cylindre dans lequel la valeur moyenne de Lr est égale à :

$$(3) \quad E\,(Lr) = 2\beta^r \int_0^{\infty} e^{-\beta r_1}\, dr_1 \int_0^{r^2} e^{-\beta r_2}\, g\,(r_1\ r_2)\, dr_2$$

I - PROBLEME PLAN :

Raisonnons d'abord à 2 dimensions, avec des cercles au lieu de cylindres. Cette approximation sera valable si le coefficient d'absorption est assez faible pour que la majeure partie du rayonnement reçu vienne de périphéries à grands rayons, assimilables à des cercles.

on a alors, r_1 étant plus grand que r_2

$$g\,(r_1\ r_2) = L\, r_1$$

soit donc à intégrer l'expression (3)

$$(4) \quad I = 2\beta^2 \int_0^{\infty} e^{-\beta r_1}\, dr_1 \int_0^{r_1} Lr_1\, e^{-\beta r_2}\, dr_2$$

$$= 2\beta^2 \int_0^{\infty} e^{-\beta r_1}\, Lr_1\, \frac{1 - e^{-\beta r_1}}{\beta}\, dr_1$$

Rappelons l'intégrale classique

$$\int_0^{\infty} L\, x\, e^{-x}\, dx = -C = -0.5772 \qquad (C = \text{constante d'Euler})$$

$$\int_0^{\infty} L\, x\, e^{-\beta x}\, dx = -\frac{C + L\beta}{\beta}$$

D'où :

$$(5) \quad I = L2 - C - L\beta = L\frac{1}{\beta} + 0{,}1162$$

La valeur moyenne de Lr dans le cercle de rayon R étant LR - 0,25 on obtient en comparant avec (5) la valeur du rayon équivalent :

$$L\,\xi R = 0{,}3662 \quad \text{ou} \quad \xi R = 1{,}443$$

On en déduit $e^{-\xi R} = 0{,}236$. Le cercle équivalent renferme la source de 76,4 %, soit environ les trois quarts du rayonnement reçu

II PROBLEME A TROIS DIMENSIONS

En réalité nous ne pouvons pas faire abstraction de la troisième dimension. Le coefficient d'absorption est sans doute trop fort pour que le cylindre émettant les trois quarts du rayonnement reçu soit assimilable à un cercle.

Faisons l'hypothèse inverse, que tous les cylindres intervenant pratiquement ont un rayon petit vis-à-vis de la puissance h du gisement - c'est-à-dire qu'il s'agit de cylindres longs.

a) calcul de la fonction $g(r_1\ r_2)$

La valeur moyenne de Lr entre deux génératrices situées l'une sur la périphérie r_1, l'autre sur la périphérie r_2 et distantes de l, la hauteur h étant grande vis à vis de r_1 et r_2 et l, s'écrit, au premier ordre

$$Lh - \frac{3}{2} + \pi \frac{l}{h}$$

On a donc :

$$(6) \quad g(r_1\ r_2) = Lh - \frac{3}{2} + \frac{1}{2h} \int_0^{2\pi} \ell \, d\theta$$

Considérons l'intégrale :

$$\frac{1}{2h} \int_0^{2\pi} l \, d\theta = \frac{r_1}{2h} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \lambda^r + 2\lambda \cos\theta} \, d\theta \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)\ \lambda = \frac{r_2}{r_1}$$

On ne sait pas calculer l'intégrale :

$$f(\lambda) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \lambda^r + 2\lambda \cos\theta} \; d\theta$$

../....

Prenons ces deux premières dérivées :

$$\frac{df}{d\lambda} = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda + \cos 0}{\sqrt{1 + \lambda^2 + r\lambda}\ \cos\theta}\ d\theta$$

$$\frac{d^2 f}{d\lambda^2} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{}} - \frac{(\lambda + \cos\theta)^2\ d\theta}{\sqrt{}^{\,3}}$$

pour $\lambda = 0$ on a :

$f\ (o) = 2$

$f'\ (o) = 0$

$f''\ (o) = \pi$

pour $\lambda = 1$ on a :

$f\ (1) = 8$

$f'(1) = 4$

$f''\ (1)$ est infinie. Nous assimilons cependant $f\ (\lambda)$ à un polynome, dont la valeur et celles de ces dérivées première et seconde au point 0, et première seulement au point 1 coincident avec les précédentes. Cette assimilation ne doit pas entraîner de très gros écarts dans la valeur numérique.

Soit donc :

$$f\ (\lambda) = A + B\ \lambda^2 + C\ \lambda^3 + D\ \lambda^4$$

$f\ (10) = A = 2\ \pi$ $\qquad$ $f\ (1) = A + B + C + D = 8$

$f''\ (0) = 2B = \pi$ $\qquad$ $f'(1) = A + 2B + 3C + 4D = 4$

D'où :

$A = 2\ \pi$ $\qquad$ $C = 28 - 7\ \pi = 6{,}0088$

$B = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $D = - 20 + \dfrac{9\pi}{2} = - 5{,}8628$

b) Intégration de $g\ (r_1\ r_2)$

Soit à calculer :

$$I = 2\ \beta^2 \int_0^{\infty} e^{-\beta r_1} dr_1 \int_0^{r_1} e^{-\ r_2} g(r_1\ r_2)\ dr_2$$

d'après (6) nous avons :

$$I = Lh - \frac{3}{2} + \frac{\mathfrak{z}^2}{h} \int_0^\infty e^{-\mathfrak{z} r_1} dr_1 \int_0^{r_1} f\left(\frac{r_2}{r_1}\right) r_1 e^{-\mathfrak{z} r_2} dr_2$$

considérons l'intégrale du deuxième membre :

$$\frac{\mathfrak{z}^2}{h} \int_0^\infty e^{-\mathfrak{z} r_1} dr_1 \int_0^{r_1} \left(A r_1 + \frac{B r_2^2}{r_1} + \frac{C r_2^3}{r_1^2} + \frac{D r_2^4}{r_1^3}\right) e^{-r_2} dr_2$$

posons :

$$r_1 = x^2 \qquad \frac{D(r_1 r_2)}{D(xy)} = 4xy$$
$$r_2 = y^2$$

il vient :

$$\frac{\mathfrak{z}^2}{h} \iint e^{-\mathfrak{z}(x^2+y^2)} \, 4xy \left(Ax^2 + \frac{By^4}{x^2} + \frac{C y^6}{x^4} + \frac{D y^8}{x^6}\right) dx\, dy$$

l'aire d'intégration étant le demi angle compris entre l'axe des x et la première bissectrice du 1er quadrant. En coordonnées polaires, il vient :

$$\frac{\mathfrak{z}^2}{h} \int_0^\infty 4 r^5 e^{-\mathfrak{z} r^2} dr \int_0^{\pi/4} \left(A \cos^2\theta + \frac{B \sin^4\theta}{\cos^2\theta} + \frac{C \sin^6\theta}{\cos^4\theta} + \frac{D \sin^8\theta}{\cos^6\theta}\right) \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{4}{\mathfrak{z} h} \left[\frac{3}{16} A + \left(\frac{1}{2} L\, 2 - \frac{5}{16}\right) B + \left(\frac{17}{16} - \frac{3}{2} L2\right) C + \left(3\, L\, 2 - \frac{33}{16}\right) D\right]$$

$$= \frac{5{,}0777}{\mathfrak{z} h}$$

D'où :

$$(7) \quad I = L\, h - \frac{3}{2} + \frac{5{,}0777}{\mathfrak{z} h}$$

c - Rayon équivalent

La valeur moyenne de Lr dans le cylindre de rayon R - cylindre que nous supposons long, en accord avec les hypothèses du paragraphe - a pour valeur :

$$E\,(Lr) = Lh - \frac{3}{2} + \frac{128}{45}\;\frac{R}{h}$$

En identifiant avec (7) on obtient la valeur suivante du rayon équivalent :

$$\mathfrak{z}R = 5.0777 \times \frac{45}{128} = 1.785 \quad \text{et} \quad e^{-\mathfrak{z}R} = 0{,}168$$

Le rayon équivalent est celui du cylindre contenant la source de 83% du rayonnement reçu.

III - CONCLUSION

Faute de pouvoir traiter le problème dans le cas général, nous l'avons fait dans deux hypothèses, simplificatrices opposées. Dans le premier cas - absorption suffisamment faible pour que la majeure partie du rayonnement reçu provienne de cylindres très plats, assimilables à des cercles, - le cylindre équivalent contient les sources de 76% du rayonnement utile.

Dans l'autre cas - absorption, au contraire, assez forte pour que les cylindres utiles soient tous très longs, - le cylindre équivalent contient les sources de 83% du rayonnement reçu.

Ces deux chiffres sont assez rapprochés pour que l'on puisse admettre, dans le cas général, que le cylindre équivalent est celui qui renferme les sources de 80% du rayonnement reçu, soit :

$$\boxed{\mathfrak{z}R = 1{,}61}$$