G. Matheron
(1960)

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 28

Krigeage d'un panneau rectangulaire par sa périphérie.

1/ Supposons que l'on ait à procéder à l'estimation d'un panneau rectangulaire, par exemple le panneau A A' B B' représenté figure 1, à partir des deux tronçons de traçages A A', B B' et des deux tronçons de montages AB, A' B' qui constituent sa périphérie.

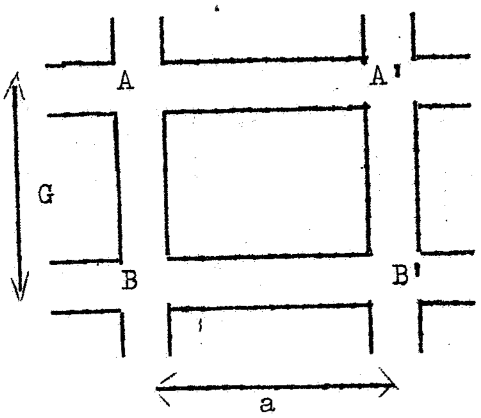


Figure 1

On désigne par :

- U la teneur moyenne des deux traçages AA' et BB'
- v " " " " " montages AB, A' B'
- z " " réelle, inconnue du panneau AA' BB'.

Nous nous proposons de former l'estimation z^*, linéaire en u et v, soit :

$$(I) \quad z^* = \lambda u + (1 - \lambda) v$$

qui réalise la meilleure estimation possible de la teneur réelle inconnue z du panneau. C'est là un problème de krigeage ordinaire, que l'on résout en déterminant la valeur numérique du paramètre λ par la condition de rendre minimum la variance de l'erreur ($z^* - z$). Toutefois, une telle méthode conduisant à des conclusions assez contraires aux usages généralement en vigueur, il ne nous paraît pas inutile de donner quelques indications qualitatives sur la nature profonde du problème évoqué ici :

2/ Digression sur l'estimation globale d'un gisement reconnu par plusieurs traçages et plusieurs montages.

L'usage habituel, concernant l'estimation d'un panneau rectangulaire, consiste, en effet, à pondérer traçages et montages par leurs

---

I. Si le problème concerne une formation horizontale, AA' et BB' seront des galeries et AB et A' B' des recoupes. Nous adoptons ici la terminologie relative à un filon vertical : il va de soi que les résultats s'étendent d'eux-mêmes à une formation stratiforme.

longueurs, c'est-à-dire à prendre un estimateur :

$$(2) \qquad z^* = \frac{a\,u + b\,v}{a + b}$$

soit $\lambda = \frac{a}{a+b}$ dans l'équation (I). De même, pour estimer la teneur moyenne globale m d'un gisement reconnu par plusieurs traçages et montages, constituant une grille rectangulaire régulière, l'usage ordinaire est de pondérer les teneurs moyennes x_t et x_m des traçages et des montages par les longueurs totales L_t et L_m tracées et montées. Cela revient à utiliser un estimateur du type :

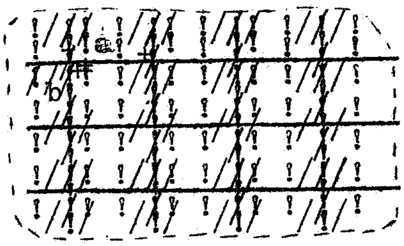


Figure 2

$$(3) \qquad m^* = \frac{L_t\, x_t + L_m\, x_m}{L_t + L_m}$$

Il est clair que les estimateurs (2) et (3) sont compatibles entre eux. L'estimation globale (3) est bien celle que l'on retrouve en faisant la somme des estimations du type (2) de chacun des panneaux constitutifs du gisement. La comptabilité minerai métal est cohérente. Mais cet argument comptable ne signifie en aucune façon que l'estimateur (3) soit le meilleur estimateur possible de la teneur moyenne m du gisement.

En fait, on sait que le meilleur estimateur de m s'obtient par une pondération assez différente. Si l'on ne disposait que des traçages seuls, on prendrait x_t comme estimateur, et on aurait une variance d'extension σ_t^2. De même, si l'on ne disposait que des montages, on prendrait x_m avec une variance d'estension σ_m^2. Connaissant à la fois x_t et x_m, on prend un estimateur de la forme :

$$(4) \qquad m_o^* = u\, x_t + (1 - u)\, x_m$$

et on détermine u de manière à rendre minimum la variance d'extension résultante - c'est-à-dire la variance de l'erreur résultante $(m_o^* - m)$, lorsque le gisement et son réseau de traçages et montages sont supposés se déplacer dans un grand gisement fictif. Cette erreur a pour expression:

$$(5) \qquad m_o^* - m = u\,(x_t - m) + (1 - u)\,(x_m - m)$$

Or, les erreurs $(x_t - m)$ et $(x_m - m)$, de variance σ_t^2 et σ_m^2, que l'on commettrait si l'on estimait m à partir des seuls traçages ou des seuls montages, peuvent eu égard à la géométrie du problème, être considérées comme indépendantes [1].

Par suite la variance d'extension d'un estimateur tel que (5) est :

$$\sigma_E^2 = u^2\,\sigma_t^2 + (1-u)^2\,\sigma_m^2$$

Elle est minimum pour

$$(6) \qquad u = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_t^2 + \sigma_m^2}$$

et a alors pour valeur

$$(7) \qquad \sigma_E^2 = \frac{\sigma_t^2\,\sigma_m^2}{\sigma_t^2 + \sigma_m^2}$$

Il en résulte de (6) que l'on doit pondérer traçages et montages par les inverses de leurs variances d'extension respective - et non pas par leurs longueurs.

En particulier, examinons le cas, assez fréquemment réalisé en pratique, où la longueur de chacun des traçages est supérieure à la relevée entre niveaux, et où la longueur de chacun des montages est plus grande que la distance comprise entre deux montages consécutifs. Si les teneurs sont réparties selon un schéma de Wijsien isotrope de dispersion absolue α - ce que nous supposerons dans toute la suite - les variances d'extension des traçages et des montages ont pour valeurs :

$$(8) \qquad \sigma_t^2 = \alpha\,\frac{1}{2}\,\frac{S}{L_t^2} \qquad\qquad \sigma_m^2 = \alpha\,\frac{1}{2}\,\frac{S}{L_m^2}$$

(S = surface minéralisée totale)

---

1. Il serait assez pénible de démontrer par le calcul cette indépendance, que l'intuition géométrique suggère fortement. On peut aussi raisonner de la façon suivante : supposons que les traçages aient une teneur x_t supérieure à la teneur moyenne réelle m. On ne peut absolument pas dire si les montages auront tendance, en moyenne, à avoir une teneur x_m supérieure ou inférieure à m. Le fait que les traçages surestiment m n'entraîne aucune tendance préférentielle pour les montages à surestimer m, ou à la sous-estimer : donc les deux erreurs doivent être considérées comme indépendantes.

L'estimateur (5) et la variance (7) résultante ont alors les expressions :

$$
(9) \qquad \left\{
\begin{aligned}
m^{*} &= \frac{L_t^{2}\; x_t + L_m^{2}\; x_m}{L_t^{2} + L_m^{2}} \\[2ex]
\sigma_t^{2} &= \alpha \frac{\pi}{2}\; \frac{S}{L_m^{2} + L_t^{2}}
\end{aligned}
\right.
$$

Autrement dit, il convient de pondérer traçages et montages par le carré de leurs longueurs totales - et non par ces longueurs elles-mêmes.

L'estimateur ainsi obtenu est toujours meilleur que l'estimateur (3). Cela se voit directement. La variance de (3) a, en effet, pour valeur :

$$
\sigma_{t_1}^{2} = \frac{L_t^{2}\; \sigma_t^{2} + L_m^{2}\; \sigma_m^{2}}{(L_t + L_m)^{2}}
$$

Dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, les formules (8) sont vérifiées, et l'on a :

$$
(10) \qquad \sigma_{t_1}^{2} = \alpha \pi \frac{S}{(L_t + L_m)^{2}} \geqslant \alpha \frac{\pi}{2} \frac{S}{L_m^{2} + L_t^{2}}
$$

Dans cette inégalité, le signe = ne concerne que le cas où $L_t = L_m$ - cas où il est naturellement équivalent de pondérer par les longueurs ou par leurs carrés.

Mais il y a plus grave. En pondérant traçages et montages par leurs longueurs, on obtient un estimateur, qui est toujours inférieur à (9), mais qui peut, dans certains cas, être inférieur à x_t lui-même, c'est-à-dire à l'estimation déduite des traçages seuls : il vaut mieux alors ne pas tenir compte du tout des montages que de leur attribuer un poids égal à leur longueur. Pour qu'il en soit ainsi, d'après (10) et (8), il faut et il suffit que l'on ait :

$$
\frac{2}{(L_t + L_m)^{2}} > \frac{1}{L_t^{2}} \quad \text{soit} \quad L_t > (1 + \sqrt{2}\,)\, L_m = 2.41\, L_m
$$

Par exemple, si $L_m = 1$ et $L_t = 5$, on aurait, en pondérant par les longueurs une variance de :

$$
\sigma_{t1}^{2} = \alpha \frac{\pi}{1} \frac{S}{36} = \alpha \pi S \frac{2.78}{100}
$$

Si l'on renonçait à tenir compte des montages, on aurait une variance de :

$$\sigma_t^2 = K\frac{\pi}{2}\,\frac{S}{25} = K\pi\,S\,\frac{2.00}{100}$$

inférieure de 30 % à la précédente. Si on pondérait par les carrés des longueurs, enfin, on aurait une variance de :

$$\sigma_t^2 = K\frac{\pi}{2}\,\frac{S}{26} = K\pi\,S\,\frac{1.92}{100}$$

à peine meilleure que la précédente.

On peut rendre compte de cette anomalie apparente par le raisonnement très grossier suivant : la teneur x_t des traçages seuls permet d'estimer m avec une variance σ_t^2. Si la relevée b entre niveaux est inférieure à l'équidistance a entre montages, la teneur x_m des montages seuls permet d'estimer avec <u>la même</u> variance σ_t^2, non pas le gisement entier, mais les colonnes discontinues, hachurées sur la figure 2, obtenue en accordant à chaque montage une zône d'influence de largeur $\frac{b^2}{a}$. En effet, on a :

$$\frac{L_m}{b^2/a} = \frac{L_t}{b}$$

de sorte que les deux problèmes de l'estimation du gisement entier par les traçages, et de l'estimation des colonnes par les montages sont géométriquement équivalents.

Ainsi, x_t et x_m reconnaissent avec la même précision, le premier l'aire minéralisée totale :

$$L_t\, b = S$$

le deuxième l'aire partielle :

$$L_m\,\frac{b^2}{a} = S\,\frac{b^2}{a^2}$$

Si l'on accorde à x_t et x_m un poids proportionnel à l'aire qu'ils reconnaissent avec la même précision, on retrouve bien une pondération par le carré des longueurs -(on a évidemment $\frac{Lm}{Lt} = \frac{b}{a}$)

3/ Le même raisonnement approximatif pourrait être fait à propos de l'estimation d'un seul panneau par sa périphérie. Mais ce raisonnement a moins de chance d'être exact, que dans le cas d'une estimation globale. En effet, si la longueur a des traçages est grande vis à vis de la relevée b, la condition analogue relative aux montages, qui serait ici $a < b$, ne peut pas être remplie : les variances ne peuvent plus être prises en S/L^2, et seul le calcul exact peut nous donner la valeur du coefficient de pondération λ. On peut penser que λ se situera à un niveau intermédiaire entre les pondérations par les longueurs ou par leurs carrés.

Effectuons donc ce calcul. Pour déterminer le paramètre λ de l'estimateur (1), nous devons écrire que la variance de $(z^* - z)$ est minimum. Cette variance étant égale à :

$$(11) \quad \sigma_k^2 = \sigma_z^2 + \sigma_v^2 - 2\sigma_{vz} - 2\lambda\,(\sigma_v^2 + \sigma_{uz} - \sigma_{vz} - \sigma_{uv}) + \lambda^2\,(\sigma_u^2 + \sigma_v^2 - 2\sigma_{uv})$$

on trouve l'expression habituelle du paramètre de Krigeage:

$$(12) \quad \lambda = \frac{\sigma_v^2 + \sigma_{uz} - \sigma_{vz} - \sigma_{uv}}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2 - 2\,\sigma_{uv}} = \frac{N}{D}$$

Toutes ces variances et covariances sont calculables à partir des formules du rectangle [1], à l'exception de la covariance σ_{uv}. Cette dernière peut se calculer à partir de la fonction J (a,b) représentant la valeur moyenne de $\log_e r$, lorsque r est la distance de deux points quelconques pris sur deux segments perpendiculaires de longueurs a et b et de même origine :

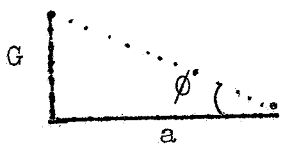


Fig. 3

$$(13) \quad J(a,b) = \log_e a - \log_e \cos \phi + \frac{\phi}{2\,\mathrm{tg}\,\phi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\mathrm{tg}\,\phi$$

$$= \log a - 1 + \frac{\pi}{4}\,t - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{60} - \frac{t^6}{210} + \frac{t^8}{504} + \ldots.$$

avec $t = \mathrm{tg}\,\phi = \frac{b}{a}$. Pour des raisons de commodité, nous utiliserons le développement limité en t plutôt que la formule exacte en ϕ.

On établira facilement, à l'aide des développements limités aux termes en t^6 des diverses variances et covariances, les formules donnant le numérateur N et le dénominateur D de l'expression (12) du paramètre λ, soient :

---

1. Formules (V, 30) et (V,31) du Traité de Géostatistique appliquée.

$$(14)\quad \left(\begin{array}{l} N = -\frac{1}{2}\log_e t + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\,t + \frac{23}{72}\,t^2 - \frac{1}{3}\,t^2\log t + \frac{17}{360}\,t^4 - \frac{19}{1680}\,t^6 \ldots \\ D = -\frac{1}{2}\log t + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\,t^2 - \frac{1}{2}\,t^2\log t + \frac{1}{12}\,t^4 - \frac{1}{48}\,t^6 \end{array}\right.$$

D'où la valeur de λ :

$$(15)\quad \lambda \neq \frac{-\frac{1}{12}\log t + \frac{1}{4} - 0.2618\,t + 0.3194\,t^2 - \frac{1}{3}\,t^2\log t + 0.0472\,t^4 - 0.0113\,t^6}{-\frac{1}{2}\log t + \frac{1}{4} + 0.375\,t^2 - \frac{1}{2}\,t^2\log t + 0.0833\,t^4 - 0.0208\,t^6}$$

Voici quelques valeurs numériques du paramètre λ :

t	λ	$\frac{1}{1+t}$	$\frac{1}{1+t^2}$
0	1	1	1
0.1	0.9785	0.910	0.990
0.25	0.9175	0.800	0.941
0.5	0.776	0.667	0.800
0.75	0.626	0.571	0.640
1.0	0.5000	0.500	0.500

A titre de comparaison, nous avons également calculé les valeurs correspondantes de $\frac{1}{1+t}$ et de $\frac{1}{1+t^2}$, c'est-à-dire les valeurs du coefficient lorsque l'on pondère par les longueurs $\left(\frac{1}{1+t}\right)$ ou leurs carrés $\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$. Comme nous l'avions prévu, les valeurs de λ sont intermédiaires entre $\frac{1}{1+t}$ et $\frac{1}{1+t^2}$, mais elles sont beaucoup plus voisines de $\frac{1}{1+t^2}$ que de $\frac{1}{1+t}$: ce qui signifie qu'il est toujours meilleur de pondérer par les carrés des longueurs que par les longueurs elles-mêmes. On peut voir, sur la figure 4, que λ est effectivement très voisin de $1/1+t^2$.

4/ Il reste à établir l'expression de la variance de Krigeage (11). Les coefficients de -2λ et λ^2 ne sont autres que les expressions N et D données en (14). Le terme indépendant de λ $- \sigma_z^2 + \sigma_v^2 - 2\,\sigma_{vz}$ - n'est autre que la variance d'extension des deux montages au panneau (par montage, on entend les petits côtés $b < a$ du rectangle ab)

On établira facilement son expression :

$$\sigma_z^2 + \sigma_v^2 - 2\,\sigma_{vz} = -\frac{1}{2}\log t + \frac{1}{4} + \frac{10}{72}t^2 - \frac{1}{6}t^2\log t + \frac{1}{40}t^4 - \frac{1}{168}t^6 \dots$$

Le tableau I présente, en fonction du rapport $t = \frac{b}{a}$, quelques valeurs numériques du paramètre de Krigeage λ et de la variance de Krigeage correspondante σ_K^2. A titre de comparaison, on a indiqué aussi les valeurs

$$\lambda_1 = \frac{1}{1+t} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1}{1+t^2},$$

correspondant à une pondération par les longueurs ou par le carré des longueurs, ainsi que les variances d'estimation σ_1^2, et σ_2^2 correspondantes.

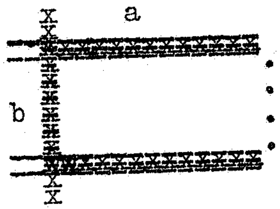
TABLEAU I

Krigeage d'un panneau rectangulaire b X a

b/a	λ	σ_K^2	λ_1	σ_1^2	λ_2	σ_2^2
0.1	0.978	0.047	0.910	0.054	0.990	0.047
0.2	0.941	0.096	0.833	0.108	0.961	0.097
0.3	0.892	0.135	0.770	0.149	0.917	0.135
0.4	0.835	0.167	0.714	0.179	0.861	0.167
0.5	0.775	0.192	0.666	0.205	0.800	0.192
0.6	0.714	0.210	0.615	0.216	0.735	0.211
0.7	0.655	0.223	0.589	0.226	0.672	0.223
0.8	0.599	0.231	0.555	0.233	0.610	0.231
0.9	0.548	0.235	0.526	0.235	0.552	0.235
1.0	0.500	0.236	0.500	0.236	0.500	0.236

Au niveau de la troisième décimale, la variance σ_2^2, correspondant à une pondération par le carré des longueurs, ne diffère pas de la variance de krigeage σ_K^2.

5/ Il est également intéressant d'établir les formules relatives à un panneau rectangulaire reconnu par trois côtés ou deux côtés seulement. Considérons tout d'abord le cas du panneau reconnu par deux traçages a et un seul montage b. En désignant par λ le poids du montage unique, on trouve, en posant :



$$\left\{\begin{array}{l} N = -\log t + 1 - \dfrac{\pi}{12}\, t + \dfrac{13}{36}\, t^2 - \dfrac{1}{3}\, t^2 \log t + \dfrac{7}{180}\, t^4 - \dfrac{1}{120}\, t^6 \\[2ex] D = -\log t + 1 + \dfrac{5}{12}\, t^2 - \dfrac{1}{2}\, t^2 \log t + \dfrac{3}{40}\, t^4 - \dfrac{1}{56}\, t^6 \\[2ex] \sigma^2 = \dfrac{\pi}{6}\, t - \dfrac{1}{8}\, t^2 + \dfrac{1}{72}\, t^4 - \dfrac{1}{240}\, t^6 \end{array}\right.$$

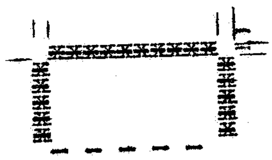
$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 - \dfrac{N}{D} \\[2ex] \sigma_K^2 = \sigma^2 - \lambda (D - N) \end{array}\right.$$

La variance σ^2 introduite ici n'est autre que la variance d'estimation du panneau à partir des deux traçages a seulement. Le tableau II donne quelques valeurs numériques de λ, σ_K^2 et (à titre de comparaison) de σ^2

TABLEAU II

Krigeage d'un panneau rectangulaire b X a reconnu par 2 côtés a et 1 côté b

$\frac{b}{a}$	λ	σ_K^2	σ^2
0.1	0.0092	0.0507	0.0510
0.2	0.0268	0.0980	0.0997
0.3	0.0444	0.1414	0.1459
0.4	0.0675	0.1804	0.1898
0.5	0.0923	0.2151	0.2313
0.6	0.1203	0.2453	0.2708
0.7	0.1485	0.2714	0.3081
0.8	0.1771	0.2937	0.3435
0.9	0.2057	0.3124	0.3770
1.0	0.2361	0.3271	0.4083



6/ Dans le cas du panneau reconnu par un seul traçage a et deux montages b, en désignant par λ le poids du traçage unique, on trouve :

$$N = -\frac{1}{2}\log t + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}t + \frac{23}{72}t^2 - \frac{1}{3}t^2\log t + \frac{17}{360}t^4 - \frac{19}{1680}t^6$$

$$D = -\frac{1}{2}\log t + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{2}t - \frac{3}{8}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{80}t^6$$

$$\lambda = \frac{N}{D}$$

$$\sigma_K^2 = \sigma_z^2 + \sigma_v^2 - 2\sigma_{vz} - \lambda N$$

(la somme $\sigma_z^2 + \sigma_v^2 - 2\,\sigma_{vz}$ ayant même expression qu'au 41)

Voici quelques valeurs numériques :

TABLEAU III

Krigeage d'un panneau rectangulaire par 2 montages et 1 traçage

b/a	λ	σ_K^2
0.1	0.8915	0.1674
0.2	0.7657	0.2772
0.3	0.6503	0.3374
0.4	0.5516	0.3668
0.5	0.4697	0.3770
0.6	0.4025	0.3757
0.7	0.3474	0.3676
0.8	0.3020	0.3561
0.9	0.2648	0.3425
1.0	0.2329	0.3278

7/ Enfin, dans le cas d'un panneau reconnu par un seul traçage et un seul montage, en désignant par λ le poids du montage ($b < a$), on trouve :

$$\begin{cases} N = -\log t + 1 - \frac{\pi}{12}t + \frac{13}{36}t^2 - \frac{1}{3}t^2\log t + \frac{7}{180}t^4 - \frac{1}{120}t^6 \\ D = -\log t + 1 + \frac{\pi}{2}t - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{40}t^4 - \frac{1}{105}t^6 \\ \lambda = 1 - \frac{N}{D} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma^2 = \dfrac{2\pi}{3}\, t + \dfrac{1}{2}\, t^2 \log t - \dfrac{7}{8}\, t^2 - \dfrac{1}{36}\, t^4 + \dfrac{1}{240}\, t^6 \\[2ex] \sigma_K^2 = \sigma^2 - \lambda(D - N) \end{cases}$$

Le paramètre auxiliaire n'est autre que la variance d'estimation du panneau rectangulaire reconnu par un seul traçage latéral (grand côté du rectangle).

Voici quelques valeurs numériques de λ σ_K^2 et, à titre de comparaison, σ^2.

TABLEAU IV

Krigeage d'un panneau rectangulaire reconnu par deux orthogonaux

b/a	λ	σ_K^2	σ^2
0.1	0.0488	0.1805	0.1887
0.2	0.1090	0.3170	0.3516
0.3	0.1705	0.4183	0.4951
0.4	0.2298	0.4911	0.6237
0.5	0.2813	0.5477	0.7401
0.6	0.3384	0.5778	0.8462
0.7	0.3833	0.6061	0.9037
0.8	0.4258	0.6211	1.0337
0.9	0.4638	0.6321	1.1183
1.0	0.5000	0.6359	1.1958

—:—:—:—:—:—:—:—:—:—