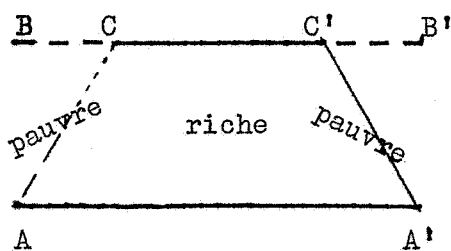


Note Géostatistique N° 31

Exemple de Krigeage d'un panneau riche.

Les formules du trapèze permettent de résoudre de nombreux problèmes de Krigeage qui se posent effectivement en pratique. Soit par exemple à estimer un panneau compris entre deux traçages AA' et BB'. Le traçage AA' est tout entier en minerai exploitable. Le traçage CC', au contraire, se décompose en trois tronçons BC, CC' et C'B', dont seul le tronçon central CC' est jugé exploitable. Au vu de ces résultats de reconnaissance on décide d'exploiter le panneau AA'CC'. Quelle teneur doit-on lui attribuer, compte tenu des teneurs de AA', CC' mais aussi de BC et B'C' ?



C'est là un problème de Krigeage à 4 auréoles, que les formules du trapèze permettent de résoudre.

On suppose essentiellement, dans tout ce qui suit, que le gisement est homogène et isotrope. Bien que CC' soit plus riche que BC ou C'B', la même loi de dispersion intrinsèque est supposée régner de B à B'. Si par hasard les coupures en C et C' étaient dues à des hétérogénéités, la théorie ne pourrait s'appliquer. Le seul problème, de nature géométrique, consisterait à déterminer les aires appartenant au domaine de BC et B'C', et il n'y aurait plus de Krigeage.

Dans le cadre de l'hypothèse homogène et isotrope, nous allons écrire les équations générales du krigeage, et les expliciter, en supposant que AA'BB' soit un rectangle et AA'CC' un trapèze isocèle ($BC = B'C'$)

I - Equations générales d'un Krigeage à 3 auréoles.

Si AA'BB' est un rectangle et AA'CC' un trapèze isocèle, nous n'avons plus, par raison de symétrie, qu'un Krigeage à 3 auréoles. Soient alors :

- x la teneur connue de AA'
- y " " de CC'
- u " " de BC + C'B'
- z " inconnue du trapèze AA'CC'.

On prendra pour estimer la teneur z inconnue du panneau AA'CC' un estimateur de la forme :

$$(1) \quad z^* = \lambda x + \mu y + (1 - \lambda - \mu) u$$

et on déterminera les deux paramètres λ et μ du Krigeage par la condition de rendre minimum la variance $D^2(z - z^*)$ de l'erreur $z - z^*$, soit :

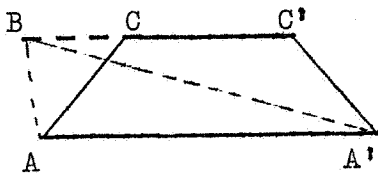
$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} D^2(z - z^*) &= \sigma_z^2 - 2 \sigma_{uz} + \sigma_u^2 - 2 \lambda (\sigma_u^2 + \sigma_{xz} - \sigma_{xu} - \sigma_{uz}) - \\ &\quad 2 \mu (\sigma_u^2 + \sigma_{yz} - \sigma_{yu} - \sigma_{uz}) + \lambda^2 (\sigma_x^2 + \sigma_u^2 - 2 \sigma_{ux}) \\ &\quad + \mu^2 (\sigma_y^2 + \sigma_u^2 - 2 \sigma_{uy}) + 2 \lambda \mu (\sigma_u^2 + \sigma_{xy} - \sigma_{ux} - \sigma_{uy}) \end{aligned} \right.$$

On exprime ce minimum en annulant les dérivées en λ et en μ , soit :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda (\sigma_x^2 + \sigma_u^2 - 2 \sigma_{ux}) + \mu (\sigma_u^2 + \sigma_{xy} - \sigma_{ux} - \sigma_{uy}) &= \\ &\quad \sigma_u^2 + \sigma_{xz} - \sigma_{xu} - \sigma_{uz} \\ \lambda (\sigma_u^2 + \sigma_{xy} - \sigma_{ux} - \sigma_{uy}) + \mu (\sigma_y^2 + \sigma_u^2 - 2 \sigma_{uy}) &= \\ &\quad \sigma_u^2 + \sigma_{yz} - \sigma_{yu} - \sigma_{uz} \end{aligned} \right.$$

Les deux paramètres λ et μ sont donnés par la résolution du système linéaire à deux inconnues écrit ci-dessus. Les formules du trapèze permettent de calculer numériquement toutes les variances et covariances intervenant dans (3), à l'exception de la covariance σ_{uz} du tronçon BC avec le trapèze AA'CC'. Etudions donc σ_{uz} .

II - Calcul de la covariance σ_{uz} .



Pour calculer la valeur moyenne de $\log r$ lorsque r représente la distance de deux points, pris l'un sur BC, l'autre dans le trapèze $T = AA'CC'$, nous appliquerons une similitude infinitésimale de centre C, qui nous donne :

$$(4) \quad 1 + 3 \text{Cov BC/T} = \frac{AA'}{L} \text{cov BC/AA'} + \frac{CC'}{L} \text{cov BC/C'A'} + \text{cov B/T}$$

On a posé $L = \frac{AA' + CC'}{2}$. Dans le deuxième membre de (4), le premier terme cov BC/AA' n'est autre que le C_{ab} relatif au trapèze AA'BC. Le deuxième se déduit des covariances de C'A' avec C'C et C'B, le troisième des covariances du point B avec les trois triangles BAA', BA'C' et BAC.

- III -

On posera :

$$AA' = a$$

$$CC' = b$$

$$BC' = \frac{AA' + CC'}{2} = L$$

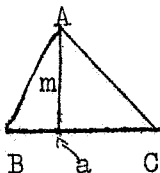
$$BC = \frac{AA' - CC'}{2} = e$$

et on écrira explicitement :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 + 3 \operatorname{cov} BC/T &= \frac{a}{L} \operatorname{cov} BC/AA' + \frac{b}{e} \operatorname{cov} BC'/C'A' - \frac{b^2}{eL} \operatorname{cov} CC'/C'A' \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{cov} B/BA'C' + \frac{a}{2L} \operatorname{cov} B/BAA' - \frac{e}{2L} \operatorname{cov} B/BAC \end{aligned} \right.$$

La covariance d'un sommet avec un triangle s'obtiendra comme un cas particulier de la covariance g_b d'un trapèze avec son petit côté b , lorsque $b = 0$. Par exemple, pour un triangle ABC, on écrira :

$$(6) \quad \operatorname{Cov} A/ABC = \frac{1}{2} \log \left(\frac{a^2}{2} + \frac{2}{3} m^2 + 2S \right) + \frac{S - \frac{a^2}{4} + \frac{7}{3} m^2}{a^2 + \frac{4}{3} m^2 + 4S}$$



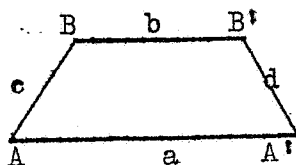
Ou encore :

$$(6)^{\text{bis}} \quad \operatorname{Cov} A/ABC = \frac{1}{2} \log \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 2S \right) + \frac{S - \frac{5}{6} a^2 + \frac{7}{6} (b^2 + c^2)}{2 \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 2S \right)}$$

Enfin, pour calculer la covariance de deux côtés d'un triangle, on raisonnera d'abord sur un trapèze quelconque AA'BB'. Soient a et b les deux côtés parallèles, c et d les deux autres côtés. On pose :

$$L = \frac{a + b}{2}$$

$$e = \frac{a - b}{2}$$



La covariance g_c ou g_d d'un côté c ou d avec le trapèze s'obtient facilement en étudiant la variation de la variance V du trapèze pour une petite translation dL , parallèle à a et b , du côté c ou d . On trouve :

$$(7) \quad g_c = g_d = V + \frac{1}{2} L \frac{\partial V}{\partial L} = V + \frac{1}{2} \frac{L^2 + I/3 \frac{e^2 m^2}{L^2} + S}{\text{Eq } 2}$$

Eq étant l'équivalent linéaire du trapèze. De même, en étudiant la variation de g_c ou g_d dans cette même translation dL , on obtient l'expression

- IV -

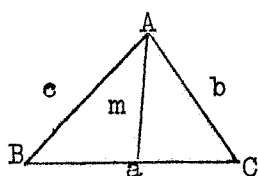
de la covariance C_{cd} des deux côtés c et d du trapèze, soit :

$$(8) \quad C_{cd} = g_c + L \frac{\partial g_c}{\partial L} = V + 2 L \frac{\partial V}{\partial L} + \frac{1}{2} L^2 \frac{\partial^2 V}{\partial L^2}$$

Si $b = 0$ (donc $e = L$), le trapèze se réduit à un triangle, et la covariance C_{cd} des deux côtés c et d du triangle s'obtient en faisant $L = e$ dans (8), soit :

$$(9) \quad C_{cd} = V + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{L^2 - m^2}{E_q^2}$$

Par exemple, la covariance des deux côtés b et c d'un triangle ABC s'écrira :



$$(10) \quad \text{Cov } b/c = \frac{1}{2} \log \left(\frac{a^2}{2} + \frac{2}{3} m^2 + 2S \right) + \frac{1}{8}$$

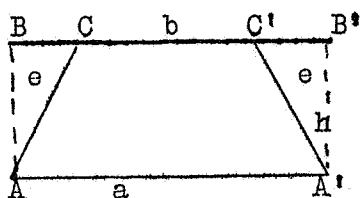
$$\frac{\frac{a^2}{2} - 4 \frac{m^2}{3}}{\frac{a^2}{2} + \frac{2}{3} m^2 + 2S} + \frac{3}{4}$$

Ou encore :

$$(10^{\text{Bis}}) \quad \text{Cov } b/c = \frac{1}{2} \log \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 2S \right) +$$

$$\frac{\frac{a^2 - b^2 - c^2}{4}}{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 2S} + \frac{3}{4}$$

Les équations (6) et (10) permettent d'expliciter les termes figurant dans le deuxième membre de (5). Soit, les notations concernant cette fois le trapèze AA'CC'.



$$\text{Cov } BC/AA' = \frac{1}{2} \log E^2 + \frac{L}{E^2} \left\{ \left(\frac{(L+2e)^2}{4} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} h^2 + \frac{3}{8} L^2 + \frac{1}{6} \frac{L^2 (h^2 + L^2/4)}{(L+2e)^2} + \right.$$

$$\left. \frac{h(L+2e)}{E^4} \right\} - \frac{1}{E^4} \left\{ \left(\frac{(L+2e)^2}{4} + \frac{1}{3} \frac{L^2}{(L+2e)^2} \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{(h^2 + L^2/4)}{4} + \frac{1}{2} h(L+2e) \right) \right\}^2$$

avec :

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & E^2 = \frac{(L+2e)^2}{4} + \frac{L^2}{2} + h^2 - \frac{1}{3} \frac{L^2(h^2+L^2/4)}{(L+2e)^2} + h(L+2e) \\
 & \text{Cov BC'/C'A'} = \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{2}{3} (L^2+e^2+eL+h^2)+Lh \right\} + \frac{1}{2} \frac{\frac{eL}{2(L^2+e^2+eL+h^2)+Lh} + 3}{4} \\
 & \text{Cov CC'/C'A'} = \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{2}{3} (L^2+e^2-eL+h^2)+(L-e)h \right\} + \frac{1}{2} \frac{\frac{e(L-e)}{2(L^2+e^2-eL+h^2)+(L-e)h} + 3}{4} \\
 & \quad \frac{1}{(L-e)h} + \frac{3}{4} \\
 & \text{Cov B/BA'C'} = \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{2}{3} (L^2+e^2+eL+h^2)+Lh \right\} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{3}Lh + \frac{1}{3}(h^2+e^2) + \frac{7}{3}L(L+e)}{\frac{2}{3}(L^2+e^2+eL+h^2) + Lh} \\
 & \text{Cov B/BAA'} = \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{2}{3} (a^2+h^2)+ah \right\} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{3}ah + \frac{1}{3}a^2 + \frac{7}{3}h^2}{\frac{2}{3}(a^2+h^2) + ah} \\
 & \text{Cov B/BAC} = \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{2}{3} (h^2+e^2)+eh \right\} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{3}eh + \frac{1}{3}(e^2+h^2)}{\frac{2}{3}(h^2+e^2) + eh}
 \end{aligned}$$

En réalité, toutes ces expressions doivent être diminuées de 3/2, puisque la variance d'une figure dont l'équivalent linéaire est E, est $\log E - \frac{3}{2}$, et non pas $\log E$. Ce terme 3/2 s'éliminant dans l'équation du Krigeage, nous le supprimons partout.

III - Calcul des autres variances et covariances.

Elles se déduisent directement des formules du trapèze. Nous donnons ci-dessous leurs expressions majorées de 3/2 : soit, pour les covariances :

$$\begin{aligned}
 (I2) \quad & \left(\text{Cov } AA'/CC' = \frac{1}{2} \log E^2 + \frac{1}{E^2} (L^2 + \frac{3}{2} h^2 + \frac{1}{6} \frac{e^2 h^2}{L^2} + 2 Lh) - \frac{1}{E^4} (\right. \\
 & \left. (L^2 + \frac{1}{3} \frac{e^2 h^2}{L^2} + Lh)^2 \right. \\
 & \left. \text{avec} \right. \\
 & \left. E^2 = L^2 + h^2 + e^2 - \frac{1}{3} \frac{e^2 h^2}{L^2} + 2 Lh \right. \\
 & \left. \text{Cov } AA'/T = \frac{1}{2} \log (L^2 + h^2 + e^2 - \frac{1}{3} \frac{e^2 h^2}{L^2} + 2 Lh) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \frac{eL + Lh + \frac{h^2}{3} (3 - 3 \frac{e}{L} + \frac{e^2}{L^2})}{L^2 + h^2 + e^2 - \frac{1}{3} \frac{e^2 h^2}{L^2} + 2 Lh} \right. \\
 & \left. \text{Cov } CC'/T = \frac{1}{2} \log (L^2 + h^2 + e^2 - \frac{1}{3} \frac{e^2 h^2}{L^2} + 2 Lh) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \frac{-eL + Lh + \frac{h^2}{3} (3 + 3 \frac{e}{L} + \frac{e^2}{L^2})}{L^2 + h^2 + e^2 - \frac{1}{3} \frac{e^2 h^2}{L^2} + 2 Lh} \right. \\
 & \left. \text{Cov } BC/CC' = \frac{L^2 \log L - e^2 \log e - b^2 \log b}{2 e b} \right)
 \end{aligned}$$

Le terme Cov BC/AA' a déjà été donné en (11). Enfin, les variances augmentées de $\frac{3}{2}$ ont pour expressions :

$$\begin{aligned}
 (I3) \quad & \left(V(AA') = \log a \quad V(CC') = \log b \right. \\
 & \left. V(BC+C'B') = \frac{1}{2} \log e + \frac{a^2}{4e^2} \log a - \frac{L^2}{2e^2} \log L + \frac{b^2}{4e^2} \log b \right. \\
 & \left. V(AA'CC') = \frac{1}{2} \log (L^2 + e^2 + h^2 - \frac{1}{3} \frac{e^2 h^2}{L^2} + 2 L h) \right)
 \end{aligned}$$

- VII -

On en déduit les valeurs des variances et covariances qui figurent dans l'équation (3) par :

$$\sigma_x^2 = A - 3 \times \left(V(AA') - \frac{3}{2} \right)$$

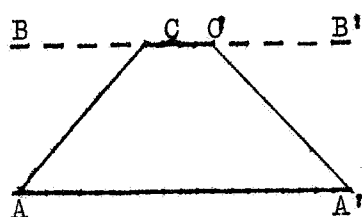
$$\sigma_y^2 = A - 3 \times \left(V(CC') - \frac{3}{2} \right)$$

En égard au caractère linéaire homogène de (3), la constante A et la dispersion absolue $3 \times$ s'éliminent, et il suffit de prendre :

(I4)	(	$\sigma_x^2 = - V(AA')$	(	$\sigma_y^2 = - V(CC')$
	)		)	
	(	$\sigma_u^2 = - V(BC + C'B')$	(	$\sigma_z^2 = - V(AA'CC')$
	)		)	
	(	$\sigma_{xy} = - \text{Cov } AA'/CC'$	(	$\sigma_{xu} = - \text{Cov } AA'/BC$
	)		)	
	(	$\sigma_{xz} = - \text{Cov } AA'/AA'CC'$	(	$\sigma_{yz} = - \text{Cov } CC'/AA'CC'$
	)		)	
	(	$\sigma_{yu} = - \text{Cov } CC'/BC$	(	$\sigma_{uz} = - \text{Cov } BC/AA'CC'$
	)		)	

IV - Exemple Numérique :

Comme exemple, nous prendrons le trapèze tel que :



$$h = BC = CC' = C'B' = 2 \quad AA' = 3 \times 2$$

et nous prendrons 2 comme unité de longueur (2 = 1). On a alors :

$$L = 2 \quad a = 3 \quad b = h = e = 1$$

On trouvera numériquement :

(	$\sigma_x^2 = - 1.0986$	(	$\sigma_y^2 = 0$
)		)	
(	$\sigma_u^2 = - 1.0856$	(	$\sigma_z^2 = - 1.1471$
)		)	
(	$\sigma_{xy} = - 1.7334$	(	$\sigma_{xu} = - 1.8911$
)		)	
(	$\sigma_{xz} = - 1.3782$	(	$\sigma_{yz} = - 1.2269$
)		)	
(	$\sigma_{uy} = - 1.3863$	(	$\sigma_{uz} = - 1.6587$
)		)	

On forme ensuite numériquement l'équation (3) du Krigeage :

$$1.5980 \lambda + 0.4584 \mu = 1.0860$$

$$0.4584 \lambda + 1.6870 \mu = 0.7325$$

D'où l'on tire :

$$\lambda = 0.6019$$

$$U = 0.2707$$

$$1 - \lambda - \mu = 0.1274$$

Le grand traçage AA' compte pour 60 %, le petit traçage CC' pour 27%, et le reste BC+C'B' pour 13%. On prendra l'estimateur :

$$z^* = \frac{60}{100} x + \frac{27}{100} y + \frac{13}{100} u$$

Si par exemple les traçages AA' et CC' ont donné tous les deux 10%, et le reste BC + C'B' seulement 1%, on prendra comme estimateur de la teneur du panneau exploitable, non pas 10% mais :

$$\frac{60}{100} \times 10 + \frac{27}{100} \times 10 + \frac{13}{100} = 8.83\%$$

C'est là un exemple extrême. Si AA' et CC' donnent 10%, et $BC + C'B'$ 5%,
on prendra :

$$\frac{60}{100} \times 10 + \frac{27}{100} \times 10 + \frac{13}{100} \times 5 = 9,35\%$$

La pratique usuelle, qui est de négliger de telles corrections, introduit une surestimation systématique des panneaux. Il y a là une cause très générale d'erreur.

V - Variance de Krigeage :

La variance de Krigeage σ_K^2 est donnée par l'équation (2) dans lesquelles λ et μ ont les valeurs numériques fournies par la résolution du système (3). En multipliant la première équation (3) par λ et la deuxième par μ , on voit que, λ et μ étant les solutions de (3), on peut écrire :

$$(I5) \quad \sigma_K^2 = \sigma_z^2 - 2 \sigma_{uz} + \sigma_u^2 - \lambda (\sigma_u^2 + \sigma_{xz} - \sigma_{xu} - \sigma_{uz}) - \mu (\sigma_u^2 + \sigma_{yz} - \sigma_{yu} - \sigma_{uz})$$

Le calcul numérique de 6_K^2 est alors aisé.