G. Matheron (1961)

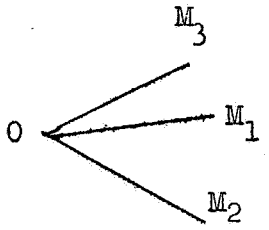
Note Géostatistique n° 30

Formules de la pyramide tronquée.

Dans la note n° 29, nous avons réussi à former des expressions approchées permettant de résoudre les problèmes posés par l'estimation de gisements à 2 dimensions reconnus par des traçages de longueurs inégales et dont les origines ne sont pas situées sur une même verticale. Ces formules du trapèze ont pu être controlées par comparaison directe avec les formules rigoureuses, dont il était encore possible de donner l'expression, bien que celle-ci fût fort complexe. L'accord s'est révélé excellent, de sorte que non seulement les formules d'approximation elles-mêmes, mais les mathodes à caractère très géométrique qui ont permis de les obtenir, se trouvent solidement fondées. Il est donc tentant d'essayer ces mêmes méthodes pour le cas des gisements à 3 dimensions, c'est-à-dire des amas. Il nous sera cependant beaucoup plus difficile, dans le cas des amas, de contrôler nos méthodes d'approximation. Nous ne disposerons, en effet, de formules exactes, pouvant servir de test, que dans le cas des parallélépipèdes rectangles et des tétraèdres : et encore la complexité des formules relatives au tétraèdre sera prohibitive, en dehors de quelques cas particuliers (tétraèdre rectangle, tétraèdre plat etc...). Contrairement donc, au cas du trapèze, les formules relatives à la pyramide tronquée ne peuvent être avancées qu'avec certaines réserves. Le caractère géométrique des méthodes qui permettent de les obtenir leur confert cependant une haute vraisemblance.

I. Equivalent linéaire d'un parallélépipède quelconque.

Généralisant à trois dimensions la méthode de la note n° 29, nous pouvons obtenir une expression approchée de l'équivalent linéaire d'un parallélépipède quelconque. On admettra que tous les parallélépipèdes construits sur trois plans diamétraux conjugués à un même ellipsoïde sont équivalents entre eux, et en particulier équivalents au parallélépipède rectangle a X b X c construit sur les trois plans conjugués principaux. Le problème consiste alors à calculer a b et c représentant les axes principaux de l'ellipsoïde inscrit dans un parallélépipède quelconque donné et admettant les trois arêtes de ce parallélépipède comme directions conjuguées.



Soit $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$ et $\overline{OM_3}$ les trois arêtes obliques passant par un sommet O, r_1 r_2 et r_3 leurs longueurs, $S_1 = (\overline{OM_2} \wedge \overline{OM_3})$, S_2 et S_3 les aires des faces OM_2M_3, OM_3M_1 et OM_1M_2. Nous prenons ces trois vecteurs comme système de référence e_i des coordonnées <u>contrevariantes</u>.

Les coefficients du ds^2 sont :

$$g_{ij} = \overline{e_i}\ \overline{e_j}, \text{ soit : } \begin{array}{l} g_{11} = r_1^{\ 2} \ldots \\ g_{12} = \overline{OM_1}\ \overline{OM_2} \ldots \end{array}$$

Dans ce système de coordonnées l'ellipsoïde cherché a pour équation :

$$t_{ij}\ x^i\ x^j = 1 \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} t_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j \\ t_{ii} = 1 \end{array}$$

Les directions principales de cet ellipsoïde sont représentées par les vecteurs $\overline{U}$ solutions de l'équation

$$t_{ij}\ u^j = s\ u_i = s\ g_{ij}\ u^j \qquad \left(s = \frac{1}{a^2} \text{ ou } \frac{1}{b^2} \text{ ou } \frac{1}{c^2}\right)$$

soit :

$$\left(\frac{1}{s}\ t_{ij} - g_{ij}\right) u^j = 0 \qquad \left(\frac{1}{s} = a^2 \text{ ou } B^2 \text{ ou } c^2\right)$$

En posant $\frac{1}{s} = p$, les carrés $a^2 b^2$ et c^2 sont les solutions de l'équation en p :

$$\begin{vmatrix} g_{11} - p & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} - t & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} - t \end{vmatrix} = 0$$

On remarque que l'on a :

$$\begin{cases} (g_{ij}) = V^2 = (\overline{OM_1}\ \overline{OM_2}\ OM_3)^2 \\ g_{11} + g_{22} + g_{33} = r_1^2 + r_2^{\ 2} + r_3^2 \\ g_{22}\ g_{33} - g_{23}^2 = S_1^2 \end{cases}$$

En posant :

$$(1)\quad \begin{cases} V = (\overline{OM_1}\ \overline{OM_2}\ OM_3) & \text{(volume du parallélépipède)} \\ R^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \\ S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^3 \end{cases}$$

l'équation en p s'écrit :

$$(2)\qquad -p^3 + R^2p^2 - S^2p + V^2 = 0$$

D'où l'on tire immédiatement les trois invariants :

$$(3)\quad \begin{cases} R^2 = a2 + b^2 + c^2 \\ S^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\ V = a\ b\ c \end{cases}$$

Le volume, la somme des carrés des arêtes et la somme des carrés des faces ont même valeur pour tous les parallélépipèdes conjugués à un même ellipsoïde, et en particulier même valeur que pour le parallélépipède rectangle principal.

La résolution numérique de l'équation en p donne les valeurs a^2b^2 et c^2, dont l'on déduit les valeurs des côtés a b c du parallélépipède rectangle équivalent et par suite - grâce aux abaques - l'équivalent linéaire du parallélépipède donné.

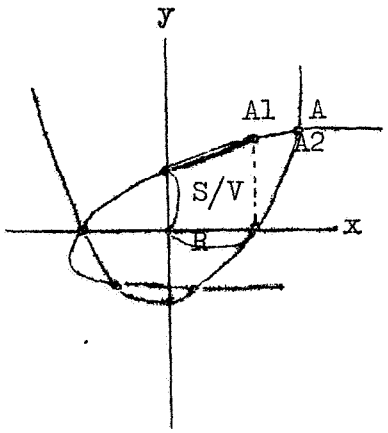
Si l'on admet que l'équivalent linéaire du parallélépipède rectangle est simplement a + b + c, il est inutile de calculer explicitement les trois racines de l'équation en p.

On posera :

$$x = a + b + c \qquad y = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

et l'équivalent linéaire x sera donné par la plus grande racine positive du système :

$$\begin{cases} x^2 = R^2 + 2\ V\ y \\ y^2 = \dfrac{S^2}{V^2} + \dfrac{2\ x}{V} \end{cases}$$



La racine utile (point A sur la figure) correspond à $x > R$, $y > \frac{S}{V}$.

On procédera par approximations successives, en partant par exemple de x :

$$x_1 = R$$

On en déduit :

$$y_1 = \sqrt{\frac{S^2}{V^2} + \frac{2x_1}{V}} \qquad \text{(point } A_1\text{)}$$

puis

$$x_2 = \sqrt{R^2 + 2\,V\,y_1} \qquad \text{(point } A_2\text{)}$$

puis

$$y_2 = \sqrt{\frac{S^2}{V^2} + \frac{2\,x^2}{V}} \qquad \text{(point } A_3\text{)}$$

On voit graphiquement que la convergence est très rapide.

Toutefois, ce n'est qu'avec une approximation assez grossière que l'équivalent linéaire du parallélépipède rectangle peut être assimilé à a + b + c. : cette expression à le tort, en particulier, d'être linéaire vis à vis de la petite dimension c - et non pas quadratique. Nous allons chercher à former directement une expression approchée qui ne contienne que les invariants R^2, S^2 et V. Il suffira de la vérifier sur le parallélépipède rectangle pour avoir la garantie qu'elle s'applique aussi aux parallélépipèdes quelconques. Soit donc :

$$L = f\,(R^2, S^2, V)$$

l'équivalent linéaire cherché. La fonction f doit vérifier certaines conditions :

- elle doit se réduire à la formule du parallélogramme pour C = 0, soit
$$f = \sqrt{R^2 + 2\,S} \qquad \text{pour } V = 0$$
- Si c'est très petit, f doit commencer par des termes quadratiques en C
- Si b et c sont tous les deux petits, f doit comporter des termes linéaires en b ou c.
- enfin, pour le calcul ($R^2 = S^2 = 3$, $V = 1$), on doit avoir $f \neq 2.7$

Compte tenu de ces conditions, nous proposons la formule :

$$(4) \qquad L = \sqrt{R^2 + 2S + \frac{V^2 R^2}{S^3}}$$

- Pour a = b = c on trouve L = 2.66 au lieu de 2.7
  a = b = 1, c = $\frac{1}{2}$ " " 2.24 " 2.28
  a = 1 b = $\frac{1}{2}$ c = $\frac{1}{4}$ " " I.64 " I.63

Enfin, pour b = c petit vis à vis de a : a + 1.5 b au lieu de a + 1.64 b

De cette formule d'approximation de l'équivalent linéaire, on peut déduire des formules d'approximation pour les variances d'extension. Toutefois, pour les établir, on est amené à dériver l'expression approchée de l'équivalent linéaire. Une telle opération risque d'amplifier considérablement les écarts. Il conviendra donc de tester les formules obtenues en les comparant aux résultats exacts connus dans le cas des parallélépipèdes rectangles.

La covariance du parallélépipède avec une de ses faces r_2 r_3 est donnée par :

$$\chi(r_1) = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \frac{r_1^2}{2} X \log L = \log L + \frac{r_1}{4L^2}\left(\frac{\partial L^2}{\partial R^2}\frac{\partial R^2}{\partial r_1} + \frac{\partial L^2}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial r_1} + \frac{\partial L^2}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial r_1}\right)$$

Avec :

$$\frac{\partial R^2}{\partial r_1} = 2\, r_1 \qquad \frac{\partial S}{\partial r_1} = \frac{S_2^2 + S_3^2}{S} \frac{1}{r_1} \qquad \frac{\partial V}{\partial r_1} = \frac{V}{r_1}$$

En fait, il est possible de contrôler ces formules dans le cas du parallélépipède rectangle, pour lequel les valeurs exactes sont connues. Il apparaît que la formule (4) donne une excellente valeur pour l'équivalent linéaire, et peut être utilisée en pratique pour son calcul. Par contre les expressions obtenues pour les variances d'extension, par dérivation de la formule (4), ne sont pas très satisfaisantes. Pour les grandes sections, en particulier, on obtient des valeurs numériques beaucoup trop faibles. De fait, la formule (4) admet un développement selon les puissances paires de la petite distance c, et comporte donc un simple

terme quadratique en c^2, tandis que la formule rigoureuse possède un terme en $c^2 \log c$. Par dérivation de (4), on obtient donc une fonction intrinsèque $\gamma(c)$ qui surestime la régularité ou la continuité de la variation régionalisée, et conduit par suite à des variances d'extension trop faible.

Compte tenu de cette remarque, nous proposons l'expression approchée ci-dessous pour la valeur F (abc) = log L du logarithme néperien de l'équivalent linéaire L du parallélépipède :

$$(5) \qquad F(abc) = \frac{1}{2} \log (R^2 + 2S) + \frac{\pi}{12} \frac{V^2}{S^3} + \frac{\pi}{12} \frac{V^2}{S^3} \log \frac{S^4}{V^2(R^2+2S)}$$

Cette expression, en effet, pour c petit prend la même forme que l'expression rigoureuse : les valeurs numériques auxquelles conduit cette formule, cette fois, sont correctes aussi bien pour les équivalents linéaires que pour les variances d'extension.

On pourra voir quelques valeurs numériques sur les tableaux ci-après et les comparer avec les valeurs exactes données par les abaques du parallélépipède rectangle.

Formules d'approximation sur le parallélépipède rectangle aXbXc (avec a=1)

Equivalent linéaire

c \ b	1	½	1/4	1/8
	F (abc)	F (abc)	F (abc)	F (abc)
1	I.000I8	0.83256	0.750973	0.7II6I0
I/2	0.83256	0.608406	0.493865	0.439892
I/4	0.750973	0.493865	0.346280	0.274800
I/8	0.7II6I0	0.439892	0.274800	0.I86853

Variance d'extension d'une section médiane

c \ b		1		½		1/4		1/8	
		χ	$\sigma^2 E$	χ	$\sigma^2 E$	χ	$\sigma^2 E$	λ	$\sigma^2 E$
1	GS	0.9I2803	0.I32546						
	SI	0.9I2803	0.I32546						
½	GS	0.790749	0.055856	0.550259	0.086645				
	SI	0.725040	0.2II955	0.550259	0.086645				
	PS			0.47367I	0.338936				

suite du tableau page précédente -

c \ b	1		1/2		1/4		1/8	
	χ	$\sigma^2 E$	χ	$\sigma^2 E$	χ	$\sigma^2 E$	χ	$\sigma^2 E$
GS	0.727842	0.0II627	0.465I54	0.030994	0.308844	0.048068		
I/4SI	0.635938	0.297563	0.42I245	0.I25285	0.308844	0.048068		
			0.350262	0.494346	0.I8222I	0.7II290		
GS								
I/8SI								
PS			0.28740I	0.6049I0	0.I02646	0.9II327	0.005376	I.2I0I95

On calculera la covariance $\gamma(r_1)$ des deux faces S_1 construites sur les arêtes r_1 et r_2, et la covariance $\chi(r_1)$ de l'une de ces faces avec le parallélépipède lui-même par les formules :

$$(5)\quad \begin{cases} \gamma(r_1) = \dfrac{\partial^2}{\partial r_1^2}\ \dfrac{r_1^2}{2}\ F\,(R^2, S, V) \\[2ex] \chi(r_1) = \dfrac{1}{r_1}\ \dfrac{\partial}{\partial r_1}\ \dfrac{r_1^2}{2}\ F\,(R^2\ S\ V) \end{cases}$$

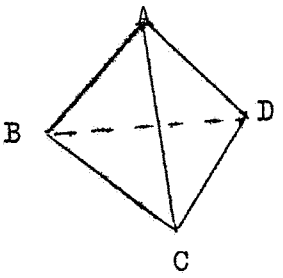
Ces formules peuvent s'expliciter de la manière suivante :

$$(6)\quad \begin{cases} \chi(r_1) = F + \dfrac{r_1^2}{2(R^2+2S)}\left[1 - \dfrac{\pi}{6}\ \dfrac{V^2}{S^3}\right] + \dfrac{S_2^2 + S_3^2}{2S}\left[\dfrac{1}{R^2+2S}\left(1 - \dfrac{\pi}{6}\ \dfrac{V^2}{S^3}\right)\right. \\[2ex] \qquad \left. + \dfrac{\pi}{12}\ \dfrac{V^2}{S4} - \dfrac{\pi}{4}\ \dfrac{V^2}{S^4}\ \log \dfrac{S^4}{V^2(R^2+2S)}\right] + \dfrac{\pi}{12}\ \dfrac{V^2}{S^3}\ \log \dfrac{S^4}{V(R^2+2S)} \end{cases}$$

et une formule analogue pour $\gamma(r_1)$, que nous n'écrirons pas ici. La variance d'extension d'une section médiane parallèle à S_1 (construite sur des vecteurs parallèles à r_2 et r_3) peut ensuite se calculer par :

$$(7)\qquad \sigma^2 E = 2\,\frac{\chi(r_1)}{2} - F\,(r_1) - \tfrac{1}{2}\log\,(r_2^{\ 2} + {}_3^{\ 2} + 2S_1)$$

Sous cette forme, cette expression doit être applicable à un parallélépipède quelconque.



II - Formules du Tétraèdre.

Nous passons maintenant à une figure géométrique différente, le tétraèdre, dont nous allons chercher l'équivalent linéaire.

Pour établir les formules exactes, on emploiera la méthode de similitude. Soit F la variance du tétraèdre T. Par des similitudes convenables, on trouve :

$$g = \text{cov } S_A/T = \text{Cov } S_B/T = \ldots\ldots\ldots F + \frac{1}{6}$$

$$1 + 5g = 3 \text{ cov } S_A/S_B + 2 \text{ Cov } CD/T$$

$$4 \text{ cov } S_A/S_B + 1 = 2 \text{ cov } S_A/AD + 2 \text{ cov } S_B/BD$$

$$4 \text{ cov } CD/T + 1 = 3 \text{ cov } S_c/CD + \text{cov } .D/T$$

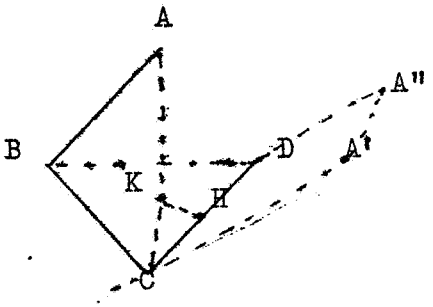
$$3 \text{ cov } S_A/AD + 1 = 2 \text{ cov } AD/BC + \text{cov } A/S_A$$

$$3 \text{ cov } D/T + 1 = 3 \text{ cov } D/S_d$$

On en tire :

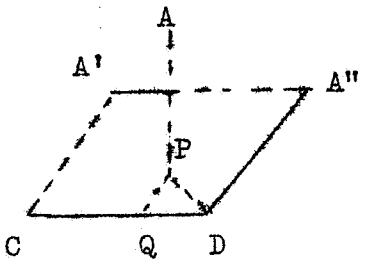
$$(8) \quad \begin{cases} \text{cov } A/T = \text{cov } A/S_A - \frac{1}{3} \\ \text{cov } S_A/AD = \frac{2}{3} \text{ cov } AD/BC + \frac{1}{3} \text{ cov } A/S_A - \frac{1}{3} \\ \text{cov } CD/T = \frac{1}{2} \text{ cov } CD/BA + \frac{1}{4} \text{ cov } C/S_c + \frac{1}{4} \text{ cov } D/S_D - \frac{7}{12} \\ \text{cov } S_A/S_B = \frac{1}{3} \text{ cov } AD/BC + \frac{1}{3} \text{ cov } AC/BD + \frac{1}{6} \text{ cov } A/S_A + \frac{1}{6} \text{ cov } B/S_B \\ \qquad - \frac{7}{12} \\ g = \text{cov } S_A/T = \frac{1}{5} (\text{cov } AD/BC + \text{cov } AC/BD + \text{cov } AB/CD) + \frac{1}{10} \\ \qquad (\text{cov } A/S_A + \text{cov } B/S_B + \text{cov } C/_{SC} + \text{cov } D/_{SD}) - \frac{47}{60} \\ F = \frac{1}{5} (\text{cov } AD/BC + \text{cov } AC/BD + \text{cov } AB/CD) + \frac{1}{10} (\text{cov } A/S_A + \\ \qquad \text{cov } B/_{SB} + \text{cov } C/_{SC} + \text{cov } D/SD) - \frac{19}{20} \end{cases}$$

Ainsi la variance du tétraèdre se déduit des 4 covariances sommet (face opposée et des 3 covariances Arête / Arête opposée.



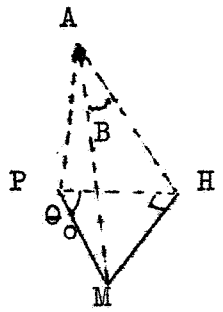
Pour avoir la covariance A/S_A, on mène AK perpendiculaire à la face S_A, et l'on doit composer les covariances de A avec les six triangles rectangles tels que KHC.

La covariance des deux arêtes AB et CD est identique à la covariance de A avec le parallélogramme CDA'A" obtenu en portant CA' équipollent à BA (le champ d'intégration et l'argument de l'intégrale sont identiques). Celle-ci s'obtient en portant AP perpendiculaire au parallélogramme et en pondérant les covariances de A avec les 8 triangles rectangles tels que PQD.



Si l'on est capable de calculer la covariance d'un triangle rectangle en H, PHM, avec un point A situé sur la perpendiculaire en P au triangle, la variance d'un tétraèdre s'obtiendra par composition de 48 covariances de ce type. Une telle covariance dépend de deux paramètres : l'angle θ_o en P du triangle rectangle et le rapport

$x = \frac{PH}{AP}$ par exemple.



Il est possible d'obtenir son expression par des développements limités. En effet, la covariance de A et de la droite MH a pour valeur :

$$\text{cov } A/MH = \log AM - 1 + \frac{\theta}{\text{tg } \theta}$$

Il suffit d'exprimer AM et θ en fonction de x et de θ_o, d'accorder un poids x à cette covariance et d'intégrer en x pour avoir l'expression cherchée.

Pour le terme log AM, on obtient facilement l'expression exacte de l'intégrale , soit :

$$\log AM + \frac{AP^2}{PM^2} \log \frac{AM}{AP} - \frac{1}{2}$$

Le terme $\frac{\theta}{tg\theta}$ est plus délicat à manipuler. On posera :

$$t = tg\,\theta = \frac{MH}{AH}$$

$$\theta = Axtg\ t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \ldots.$$

$$\frac{\theta}{tg\theta} = 1 - \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} - \frac{t^6}{7} + \frac{t^8}{9} \ldots.$$

mais ce développement ne vaut que pour $t < 1$ ou $MH < AH$. Ensuite, on écrira:

$$t^2 = \frac{MH^2}{AH^2} = tg^2\theta o \frac{PH^2}{AP^2 + PH^2} = tg^2\theta o \frac{x^2}{1+x^2} = tg^2\theta o \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)$$

et on intégrera. Il vient finalement :

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} Cov\ A/MHP = {} & \log AM + \frac{1}{2} \frac{\cos^2\theta o}{x^2} \log\left(1 + \frac{x^2}{\cos^2\theta o}\right) - \frac{3}{2} + \frac{\theta o}{tg\theta o} \\ & + \frac{1}{x} L(1 + x^2)\left[\frac{1}{3} tg^2\theta o - \frac{2}{5} tg^4\theta o + \frac{3}{7} tg^6\theta o - \frac{4}{9} tg^8\theta o\right] \\ & + \frac{1}{1+x^2}\left[\frac{1}{5} tg^4\theta o - \frac{3}{7} tg^6\theta o + \frac{2}{3} tg^8\theta o\right] \\ & + \frac{1 + x^2/2}{(1+x^2)^2}\left[\frac{1}{7} tg^6\theta o - \frac{4}{9} tg^8\theta o\right] + \frac{1 + x^2 + x^{4/3}}{(1+x^2)\ 3} \\ & \frac{tg^8\theta o}{9} \end{aligned} \right.$$

<u>Exemple : le Tétraèdre régulier.</u>

Soit a la longueur de l'arête. Les 48 termes se réduisent à 2 seulement que l'on calcule par la formule précédente. On trouve :

Cov Sommet / Face = log a - 0.I445
Cov Arête / Arête = log a - 0.20I2
F = log a - 1.1172

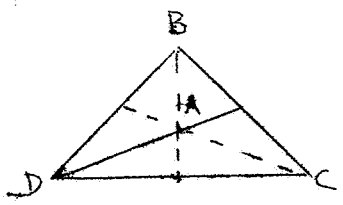
D'où l'équivalent linéaire du tétraèdre régulier :

$$Eq = 1.466\ a$$

On remarque que, le volume du tétraèdre étant $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\ \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{12}$, le cube de même volume a pour côté 0.49 a et pour équivalent linéaire 1.32a, soit un équivalent de IO% environ plus faible que celui du tétraèdre.

Tétraèdre plat équilatéral:

La base BCD est un triangle équilatéral, le sommet A vient dans le plan BCD au centre de ce triangle.



On trouve :

$$\text{Cov } AB/CD = \log a - 0.470$$

$$\text{Cov } A/S_A = \log a - I.444$$

$$\text{Cov } B/S_B = \log a - 0.595$$

$$F = \log a - I.555$$

D'où l'équivalent

$$Eq = 0.95\ a$$

Tétraèdre de surface nulle (les trois points BCD coïncident)

On trouve :

$$\text{Cov Arête/Arête} = La - 1$$

$$\text{Cov } A/S_A = La$$

$$\text{Cov } B/S_B = La - \frac{3}{2}$$

$$F = La - 2$$

D'où l'équivalent linéaire : $Eq = 0.605\ a$

Equivalent linéaire de la sphère : $V = LR + L2 - \frac{3}{4}$.

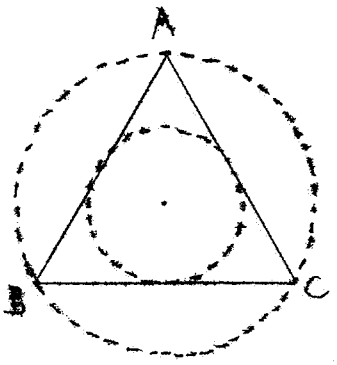
Si on pose $a^3 = \frac{4}{3}\ R^3$ (cube de même volume) $Eq = 2,64\ a$ (un peu plus petit que l'équivalent du cube 2,7 a).

III - Recherche d'une méthode générale d'approximation.

Etant donné la complexité de ces formules, on est conduit à rechercher des méthodes d'approximation.

I/ Dans le plan.

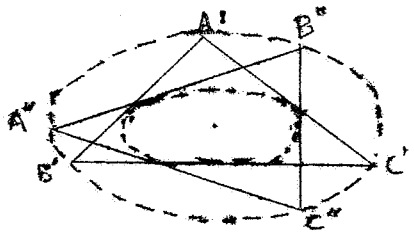
On considère les triangles équilatéraux inscrits et circonscrits à deux cercles concentriques. Egaux, ils sont équivalents. Une affinité transforme de tels triangles en triangles inscrits et circonscrits à deux ellipses homothétiques et concentriques, tels que A' B'C'. Admettons que tous les triangles A'B'C', A"B"C"...



inscrits et circonscrits à ces deux ellipses soient équivalents, de même que sont équivalents tous les triangles équilatéraux A B C.

On montre facilement que les triangles A' B' C', A" B" C" ont même aire S et même somme $R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ des carrés des trois côtés (c'est une conséquence directe des propriétés de l'affinité).

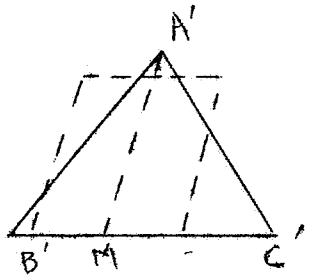
Si donc ils sont équivalents, on en déduit que l'équivalent linéaire d'un triangle ne dépend que de sa surface S et de la somme R^2. De fait, nous avons vu que cet équivalent n'était autre que $\sqrt{\frac{R^2}{3} + 2S}$.



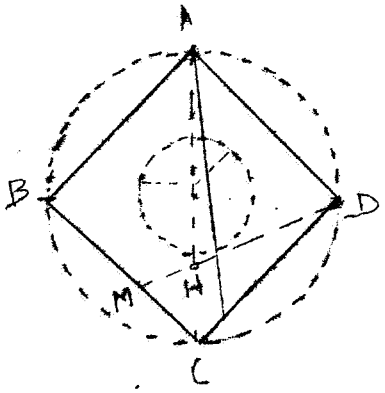
On vérifie ainsi l'hypothèse de départ. On obtiendra une approximation un peu moins bonne, mais susceptible d'être généralisée, en introduisant le carré équivalent au triangle équilatéral, c'est-à-dire le carré de côté 0.69 a = 0.796 h.

Ce carré a une aire S ≐ 0.55 ah un peu plus grande que l'aire 0.5 ah du triangle, et un $R^2 = 0.475\ a^2 + 0.632\ h^2$ un peu plus petit que le $R^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{2}{3} h^2$ du triangle (excès de 10 % pour la surface, défaut de 5 % pour le R^2). Dans l'affinité transformant A B C en A' B' C', ce carré se transforme en un parallélogramme construit sur le côté B' C' et la médiane A' M, avec des côtés de longueurs 0.69 B' C' et 0.796 A' M. Les parallélogrammes ainsi construits pour tous les triangles A' B' C', A" B" C"... sont tous équivalents, comme conjugués à une même ellipse. Et leur équivalent linéaire :

$$Eq^2 = \frac{0.475}{0.50}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{2}{3} m^2\right) + \frac{0.55}{0.50} \times 2S$$



diffère très peu de l'équivalent $\frac{a^2}{2} + \frac{2}{3} m^2 + 2S$ des triangles. En première approximation, donc, un triangle sera considéré comme équivalent au parallélogramme construit sur un côté a et la médiane m, avec des côtés 0.69 a et 0.796 m.



2/. Pour des tétraèdres, nous raisonnerons de façon similaire. On considère les tétraèdres réguliers, égaux entre eux, inscrits et circonscrits à deux sphères concentriques. Par affinité, il leur correspond les tétraèdres inscrits et circonscrits à deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques. Nous admettons que ces tétraèdres - qui n'ont plus la même forme - sont encore équivalents. Or ces différents tétraèdres admettent trois invariants : la somme $R^2 = \sum a_i^2$ des carrés des arêtes, la somme $S^2 = \sum S_i^2$ des carrés des faces, et le volume V. Donc l'équivalent d'un tétraèdre ne dépend que de ces trois invariants R^2, S^2 et V. Mais si l'on considère le cube équivalent au tétraèdre régulier d'arête a, c'est-à-dire le cube de côté $\frac{1.466}{2,7}$ a = 0.54I a, la même affinité transforme ce cube en parallélépipèdes quelconques, construits sur une arête BC, la médiane DM de la base BCD, et la droite joignant le sommet A au point de concours H des 3 médianes de BCD, ayant des côtés de longueurs :

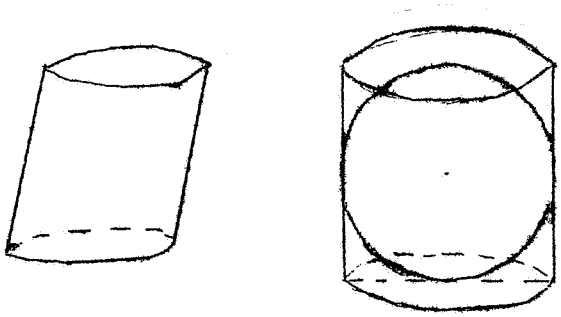
$$\begin{cases} 0.54I\ a & \text{sur BC} \\ 0.54I \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 0.625 & \text{sur DM} \\ 0.54I\sqrt{\frac{3}{2}}\ h = 0.662\ h & \text{sur AH} = h \end{cases}$$

Nous admettrons qu'un tel parallélépipède donne un équivalent approché du tétraèdre. Pour le tétraèdre régulier, par définition, cette méthode donne l'équivalent exact. Pour le tétraèdre plat équilatéral, elle donne un équivalent de 1.08 a (au lieu de 0.95). Pour le tétraèdre de surface nulle, enfin, elle donne 0.662 a (au lieu de 0.605 a). On remarque que le volume de ce parallélépipède est égal à

$$\frac{0.5I2 \times 0.59I \times 0.6I5}{1/6} = 1.12 \text{ fois celui du tétraèdre}$$

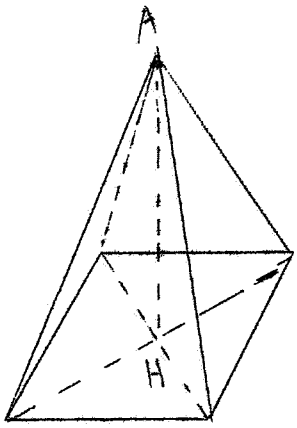
3/. Pour un prisme oblique, ayant pour base un polygone inscrit et circonscrit à deux ellipses homothétiques, on raisonnera en transformant par affinité le prisme droit ayant pour base un polygone régulier et pour hauteur le diamètre du cercle inscrit à ce polygone. A la limite, si le nombre des côtés du polygone aug-

mente indéfiniment, on trouve <u>un cylindre oblique à base elliptique</u>.



On raisonne en transformant par affinité le cylindre de révolution de hauteur h égale au diamètre de la base. Il est d'ailleurs plus simple d'assimiler un tel cylindre à un parallélépipède convenablement déterminé.

<u>4/</u> Considérons maintenant <u>une pyramide oblique</u> ayant pour base un parallélogramme quelconque. Une telle pyramide se déduit par affinité de la pyramide droite à base carrée inscrite et circonscrite à deux sphères concentriques. Une telle pyramide - qui va jouer un rôle privilégié analogue à celui du triangle équilatéral pour le plan - n'est pas quelconque. Si a est le côté de la base quadratique, et h la hauteur, on trouve que l'on doit avoir, pour qu'il existe deux sphères l'une inscrite et l'autre circonscrites à la pyramide.



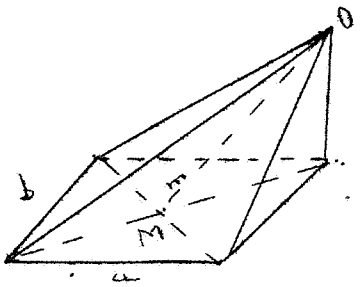
$$h = a \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} = 1.0985\ a$$

Le volume d'une telle pyramide est $\frac{1}{3} ha^2 = \frac{1.0985}{3} a^3$. Nous ne connaissons pas son équivalent linéaire rigoureux. Mais, par analogie avec le tétraèdre régulier, on peut penser qu'il excède légèrement celui du cube de même volume. On admettra par exemple que cette pyramide est équivalente au cube ayant un volume de 10 % plus grand, soit un côté de :

$$\sqrt[3]{\frac{1,10 \times 1.0985}{3}}\ a = 0.74\ a$$

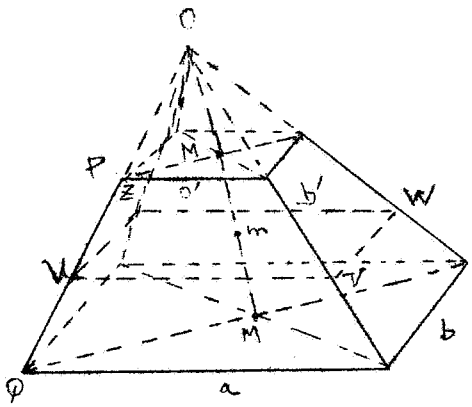
Pour plus de simplicité - et en égard à l'arbitraire du facteur 1.10 - nous prendrons 3/4 a = 0.684 h . Par affinité, on voit que l'équivalent d'une pyramide oblique ayant pour base un parallélogramme quelconque de côté a, b est donnée par le parallélépipède construit sur le parallélogramme et sur la médiane OM (droite joignant le sommet O au centre M du parallélogramme) et ayant des côtés de longueurs :

$\frac{3}{4}$ a, $\frac{3}{4}$ b et 0.684 m (m étant la longueur de la médiane OM). On trouve



0.684 a (au lieu de 0.605 a) pour la pyramide de surface nulle, et 1,50 a (au lieu de 1.53a) pour la pyramide de base carrée et de hauteur nulle.

6/ Troncs de pyramide. Soit maintenant un tronc de pyramide oblique ayant pour bases deux parallélogrammes semblables de côtés a b et a' b'. Deux cas particuliers ont été résolus : la pyramide (a' = b' = o) et le parallélépipède (a = a', b = b'). Nous allons chercher à résoudre le cas général par une formule d'approximation analogue à celle qui nous a permis de résoudre le problème du trapèze. Nous introduirons le paramètre λ :



$$\lambda = \frac{a - a'}{a + a'} = \frac{b - b'}{b + b'}$$

A $\lambda = 0$ correspond un parallélépipède, à $\lambda = 1$ correspond une pyramide.

Si l'on introduit la section médiane UVWZ , le paramètre λ est égal au rapport $\frac{UP}{OU} = \frac{UQ}{OU}$; ce paramètre λ caractérise sans ambiguïté chacun des membres de la famille des troncs de pyramides admettant une même section médiane AVWZ et une même droite médiane MM' de longueur m. Nous poserons :

$$A = UV = \frac{a + a^1}{2} \qquad B = VW = \frac{b + b^1}{2}$$

Pour $\lambda = 0$, on a un parallélépipède construit sur les trois arêtes A, B et m. Il est caractérisé par ses trois invariants :

$$\begin{cases} R_o^2 = A^2 + B^2 + m^2 \\ S_o^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \text{ avec } s_1 = \overline{A_1B} \quad s_2 = \overline{B_1m} \quad s_3 = \overline{A_1m} \\ V_o = (\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{m}) = \text{Volume} \end{cases}$$

Pour $\lambda = 1$, on a la pyramide de sommet M' ayant pour base le parallélogramme de côtés 2 A et 2 B. Cette pyramide est équivalente au parallélépipède d'invariants.

$$\begin{cases} R^2_1 = \frac{9}{4} A^2 + \frac{9}{4} B^2 + 0.467\ m^2 \\ S^2_1 = \frac{81}{16} s^2_1 + 1.05\ (s^2_2 + s^2_3) \\ V_1 = \frac{4}{3} V_\bullet \times 1{,}10 \end{cases}$$

Par analogie avec le problème du trapèze, nous attribuerons au tronc de pyramide de section médiane UVWZ, de droite médiane MM' = m et de paramètre λ un parallélépipède équivalent d'invariants :

$$\begin{cases} R^2(\lambda) = (1 - \lambda^2)\ R^2_o + \lambda^2\ R^2_1 \\ S^2(\lambda) = (1 - \lambda^2)\ S^2_o + \lambda^2\ S^2_1 \\ V(\lambda) = (1 - \lambda^2)\ V_\bullet + \lambda^2\ V_1 \end{cases}$$

Pour expliciter ces formules, nous introduirons les notations symétriques suivantes :

$$A = \frac{a + a^1}{2} \qquad B = \frac{b + b'}{2}$$

$$\lambda = \frac{eA}{A} = \frac{eB}{B}$$

$$e_A = \frac{a - a'}{2} \qquad e_B = \frac{b - b'}{2}$$

Il vient ainsi :

$$(10) \begin{cases} R^2 = A^2 + B^2 + m^2 + \frac{5}{4} (e^2_A + e^2_B) - 0.533\ \frac{e_A e_B}{AB}\ m^2 \\ S^2 = s^2_1 + s^2_2 + s^2_3 + \frac{65}{16}\ \frac{e_A e_B}{AB}\ s^2 + 0.05\ (\frac{e^2_A}{A^2}\ s^2_3 + \frac{e^2_B}{B^2}\ s^2_2) \\ V = V_o + 0.37\ \frac{e_A e_B}{AB}\ V_o \end{cases}$$

En particulier, si la section médiane est un rectangle et si

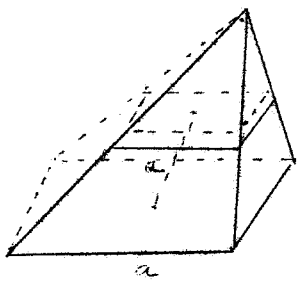
MM' est perpendiculaire à ce rectangle, on a les formules simples suivantes :

$$R^2 = A^2 + B^2 + m^2 + 1{,}25\ (e^2 A + e^2 B) - 0.533\ \frac{e_A e_B}{AB}\ m^2$$

$$(11) \qquad S^2 = A^2B^2 + m^2\ (A^2 + B^2) + 4.0625\ e_A e_B\ AB + 0.05\ m^2(e_A^2 + e_B^2)$$

$$V = ABm + 0.37\ e_A e_B m$$

Les deux parallélogrammes ab et a'b' étant semblables, les expressions ci-dessus ne dépendent en réalité que des trois longueurs A, e_A et m. Les autres paramètres sont des paramètres de forme. Ils ne changent pas si l'on effectue une similitude générale sur la pyramide tronquée, ou une translation de l'une des deux bases le long de l'axe de la même pyramide. Cette remarque permet le calcul des covariances g et g' du tronc avec les bases ab et a'b', et la covariance $C_{aa'}$ de ces deux bases.



Pour calculer g', par exemple, effectuons un déplacement dm de la base a' le long de m la médiane, la base a restant constante. Pour abréger, on écrit e au lieu de e_A.

Le volume du tronc étant v, on trouve :

$$(v + dv)^2\ (F + dF) = v^2F + 2vdvg'$$

$$g^1 = F + \tfrac{1}{2}\ v\ \frac{dF}{dV}$$

La covariance g' s'exprime simplement à partir du logarithme F = log Eq de l'équivalent linéaire du tronc. Les variations de A_1e et a' sont liées à dm par :

$$de = -\ dA = -\ \tfrac{1}{2}\ d\ a' = e\ \frac{dm}{m}$$

Pour le volume v, on trouve facilement :

$$\frac{dv}{v} = \frac{3\ a^{12}}{a^2 + a^{12} + aa^1}\ \frac{dm}{m} = \frac{3\ a^{12}}{3A^2 + e^2}\ \frac{dm}{m}$$

Pour la variation de F, il vient, en tenant compte de la relation de

similitude :

$$dF = -\frac{\partial F}{\partial A} e \frac{dm}{m} + \frac{\partial F}{\partial e} e \frac{dm}{m} + \frac{\partial F}{\partial m} dm = (1 - a\frac{\partial F}{\partial A}) \frac{dm}{m}$$

On obtient ainsi les expressions générales de g et g' (expressions indépendantes de toute hypothèse faite sur F) :

$$(12) \quad \begin{cases} g' = F + \frac{1}{6} \frac{3\ A^2+e^2}{a^{12}} \left(1 - a\frac{\partial F}{\partial A}\right) \\ g = F + \frac{1}{6} \frac{3\ A^2+e^2}{a^2} \left(1 - a' \frac{\partial F}{\partial A}\right) \end{cases}$$

Enfin, si l'on considère la variation de la covariance g pour le même déplacement d m affectant la base a^1, on obtient l'expression de la covariance Caa^1 :

$$Caa^1 = g + v \frac{dg}{dv}$$

qui s'explicite ainsi :

$$Caa^1 = g + \frac{1}{3} \frac{3\ A^2+e^2}{a^{12}} \left(1 - a\frac{\partial g}{\partial A}\right)$$

En tenant compte de l'expression déjà obtenue pour g, on trouve, après quelques manipulations algébriques :

$$(13) \quad Caa^1 = F + \frac{(3A^2+e^2)\ (A^2+3e^2)}{a^2\ a^{12}} - \frac{A}{9} \frac{(3A^2+e^2)\ (3A^2+17e^2)}{a^2\ a^{12}} \frac{\partial F}{\partial A}$$

$$+ \frac{1}{18} \frac{(3A^2+e^2)^2}{a\ a^1} \frac{\partial^2 F}{\partial A^2}$$

Les calculs pourront être effectués numériquement en prenant pour F la fonction $F(R^2, S^2, V)$ relative au parallélépipède, les invariants $R^2 S^2$ et V ayant les valeurs indiquées ci-dessus (10). On se souviendra que l'on doit poser $B = \beta A$, β étant un paramètre de forme). Mais on s'aperçoit alors qu'à la limite, pour $a^1=0$, c'est-à-dire lorsque l'on a affaire à une pyramide entière, les formules (12) ou (13) conduisent à un g' et à un C_{aa^1} infinis. On doit en conclure

que les invariants (10) permettent bien d'obtenir une expression approchée de l'équivalent lui-même, mais qu'on n'a pas le droit d'en déduire, par dérivation, des expressions approchées des covariances. Pour le calcul des covariances, il convient de partir d'une expression de l'équivalent vérifiant certaines conditions générales, que nous allons expliciter.

<u>IV - Méthode d'approximation pour les Covariances</u> et les variances d'extensions. Soit, avec les notations du paragraphe précédent, $F(x, e, m)$ le logarithme de l'équivalent du tronc de pyramide. On a posé $x = A$ au lieu de $A = \frac{a + a^1}{2}$. D'après l'équation (12) - la covariance g^1 restant finie lorsque $x = e$, c'est-à-dire lorsqu'on a affaire à une pyramide entière, on doit avoir :

$$(14) \qquad 1 - (x + e)\frac{\partial F}{\partial x} = K\,(x - e)^2$$

K étant une fonction de x, emprenant des valeurs finies pour $x = e$. Sa dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}$ est donc de la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x+e} - \frac{K}{x+e}\,(x-e)^2$$

On voit facilement que, s'il en est ainsi, le Caa^1 prend aussi une valeur finie lorsque $x = e$. Pour le montrer, il suffit de vérifier que $1 - (x+e)\frac{\partial g}{\partial x}$ est lui aussi divisible par $(x-e)^2$. Or on a, d'après (12) et (14) :

$$g = F + \frac{1}{6}\,\frac{3x^2+e^2}{(x+e)^2}\left(1 - \frac{x-e}{x+e} - \beta_1\,(x-e)^3\right)$$

où β_1, de même que $\beta_2\,\beta_3 \ldots$ représentent des fonctions de x e m restant finies pour $x = e$. Il résulte de cette expression de g que Caa^1 restera finie pour $x = e$ si la dérivée en x de $(g - F)$ est divisible par $(x-e)^2$. Or cette dérivée a pour expression :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{e\,(x-e)^2}{(x+e)^3} + \beta_2(x-e)^2 + \beta_3(x-e)^3$$

et cette expression contient $(x-e)^2$ en facteur. La condition (14) est donc la seule à laquelle nous puissions assujettir a priori notre fonction F.

Pour aller plus loin, il convient de faire une hypothèse sur la forme même de F. On connaît cette fonction pour e = o, c'est-à-dire pour le parallélépipède (x,m). Soit f (x,m) = F (x,m,e = o). D'autre part, F doit être une fonction paire de e, puisqu'en intervertissant a et a^1 on change e en - e, sans modifier F. Nous proposons une expression de la forme :

$$F = f + e^2 y + e^4 z \tag{15}$$

où y et z sont deux fonctions inconnues de x et de m que la condition (14) permet de déduire de l'expression connue de f. Cette condition, en effet, s'obtient en écrivant que l'expression :

$$1 - a\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - (x+e)\ (f' + e^2 y^1 + e^4 z^1)$$

où les accents indiquent une dérivation en x, est divisible par $(x-e)^2$. Comme f, y et z, par hypothèse, ne dépendent pas de e, on exprime cette condition en écrivant que F^1 et $\frac{\partial F^1}{\partial e}$ s'annulent pour x = e : soit :

$$\begin{cases} 1 - 2\ xf^1 - 2\ x^3 y^1 - 2\ x^5 z^1 = 0 \\ x\ f^1 + 5\ x^3 y^1 + 9\ x^5 z^1 = 0 \end{cases}$$

En résolvant en y^1 et z^1, on obtient les deux équations différentielles

$$\begin{cases} x^5 z^1 = xf^1 - \frac{5}{8} \\ x^3 y^1 = \frac{9}{8} - 2\ xf^1 \end{cases} \tag{16}$$

qui s'intégrent par quadrature, dès lors que l'équivalent f du parallélépipède est connu. Sa constante d'intégration, qui est en réalité une fonction arbitraire de m, devra ^tre déterminée par d'autres moyens. Dans certains cas, de simples considérations dimensionnelles permettent d'obtenir facilement son expression.

Si y et z sont deux solutions de (16), on peut exprimer F^1 en fonction de f^1. On trouve facilement :

$$F^1 = f^1\ (1 - \frac{e^2}{x^2})^2 + \frac{9}{8}\frac{e^2}{x^3} - \frac{5}{8}\frac{e^4}{x^5}$$

et par suite :

$$1 - (x+e)F^1 = \left(1-\frac{e}{x}\right)^2 \left(1+2\frac{e}{x}+\frac{15}{8}\frac{e^2}{x^2} + \frac{5}{8}\frac{e^3}{x^3}\right) - f^1 (x+e) \left(1-\frac{e^2}{x^2}\right)^2$$

Cette expression est bien divisible par $(x-e)^2$. Les équations (12) permettent d'écrire les expressions de g et g^1. Pour abréger l'écriture, on pose :

$$t = \frac{e}{x}$$

t = o dénote un parallélépipède et t = 1 une pyramide. On trouve alors :

$$(17) \quad \begin{cases} g^1 = F + \frac{1}{6}(3+t^2)\left(1+2t+\frac{15}{8}t^2 + \frac{5}{8}t^3 - (1+t)^3 xf^1\right) \\ g = F + \frac{1}{6}(3+t^2)\left(1-2t + \frac{15}{8}t^2 - \frac{5}{8}t^3 - (1-t)^3 xf^1\right) \end{cases}$$

Enfin, pour avoir l'expression de Caa^1, on écrira :

$$C_{aa}{}^1 = g + \frac{1}{3}\frac{3+t^2}{(1-t)^2}\left[1 - (1+t)x\frac{\partial g}{\partial x}\right]$$

De (17) on déduira :

$$x\frac{\partial g}{\partial x} = x\frac{\partial F}{\partial x} + t^2(1-t)^2\left(1-\frac{5}{24}t + \frac{25}{48}t^2\right) + (1-t)^2 xf^1 \left(-\frac{1}{2}-t+\frac{t^2}{6}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}t^3\right) - x^2 f''(1-t)^3\left(\frac{3+t^2}{6}\right)$$

D'où finalement :

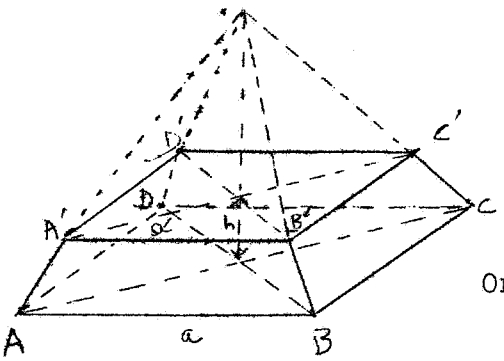
$$(18) \quad C_{aa}{}^1 = F + \frac{1}{6}(3+t^2)\left(3+\frac{97}{24}t^2 - \frac{25}{24}t^4\right) - \frac{1}{3}xf^1(3+t^2)\left(1+\frac{11}{3}t^2 -\right.$$

$$\left.\frac{2}{3}t^4\right) + \frac{1}{18}(3+t^2)^2(1-t^2)x^2 f''$$

Ces covariances gg' et $C_{aa}{}^1$ dépendent de F, mais non de ces dérivées. Seules y figurent les dérivées f' et f'' de l'équivalent f du parallélépipède (qui lui, est très bien connu). Si donc on ne

veut pas intégrer le système (16), on pourra se contenter de calculer F par les invariants (10) et calculer les covariances par (17) et (18) comme si F était une solution de (16). Ce ne sera là, évidemment, qu'une approximation grossière, moins grossière cependant que si l'on dérivait effectivement l'expression de F.

V - Krigeage d'un tronc de pyramide droite par deux grandes sections.



Soit un tronc de pyramide droite de hauteur h construite sur deux parallélogrammes ABCD et A'B'C'D', de côtés ab et a'b' (avec $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$). On prend comme variables :

$x = \frac{a+a'}{2}$ $e = \frac{a-a'}{2}$ et h

On suppose h petit vis à vis de $x = \frac{a+a'}{2}$ et de $\frac{b+b'}{2}$. Dans ces conditions, le logarithme de l'équivalent du parallélépipède correspondant à e = 0 est donné par la formule des grandes sections :

$$(19) \qquad f(x,h) = \gamma(o) + \frac{\pi}{6}\frac{h^2}{5}\log\frac{R}{h} + \frac{7\pi}{72}\frac{h^2}{S} + \frac{\pi}{15}\mathcal{L}\frac{h^3}{S^2}$$

$\gamma(o)$ est le log de l'équivalent de la base, c'est-à-dire du parallélogramme construit sur x et b $\frac{x}{a}$. L'aire S, le rayon équivalent R et le périmètre doivent être considérées, vis à vis des dérivations et intégrations, comme de la forme k_1x^2, k_2x et k_3x. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ par la formule de similitude, soit :

$$(19^{bis}) \quad x\frac{\partial f}{\partial x} = xf' = 1 - h\frac{\partial f}{\partial h} = 1 - \left(\frac{\pi}{3}\frac{h^2}{S}\log\frac{R}{h} + \frac{\pi}{36}\frac{h^2}{s} + \frac{\pi}{5}\frac{\mathcal{L}h^3}{S^2}\right)$$

Portant cette valeur de xf' dans le système (16), on obtient facilement, en intégrant par rapport à x, les expressions des deux fonctions y et z de la formule (15). On trouve :

$$(20)\quad \begin{cases} y = \dfrac{7}{16x^2} - \dfrac{\pi}{6}\,\dfrac{h^2}{Sx^2}\log\dfrac{R}{h} - \dfrac{\pi}{18}\,\dfrac{h^2}{Sx^2} - \dfrac{2\pi}{25}\,\dfrac{\mathcal{L}h^3}{S^2x^2} \\[2ex] z = -\dfrac{3}{32x^4} + \dfrac{\pi}{18}\,\dfrac{h^2}{Sx^4}\log\dfrac{R}{h} + \dfrac{\pi}{72}\,\dfrac{h^2}{Sx^4} + \dfrac{\pi}{35}\,\dfrac{\mathcal{L}h^3}{S^2x^4} \end{cases}$$

En portant dans (15), en posant $t = \frac{e}{x}$, on obtient l'expression approchée suivante pour le log de l'équivalent du tronc surbaissé de pyramide droite :

$$(21)\quad \begin{cases} F = \gamma(o) + \dfrac{\pi}{6}\,\dfrac{h^2}{S}\log\dfrac{R}{h} + \dfrac{7\pi}{72}\,\dfrac{h^2}{S} + \dfrac{\pi}{15}\,\dfrac{\mathcal{L}h^3}{S^2} + t^2\left(\dfrac{7}{16} - \dfrac{\pi}{6}\,\dfrac{h^2}{S}\log\dfrac{R}{h}\right. \\[2ex] \left. - \dfrac{\pi}{18}\,\dfrac{h^2}{S} - \dfrac{2\pi}{25}\,\dfrac{\mathcal{L}h^3}{S^2}\right) + t^4\left(-\dfrac{3}{32} + \dfrac{\pi}{18}\,\dfrac{h^2}{S}\log\dfrac{R}{h} + \dfrac{\pi}{72}\,\dfrac{h^2}{S} + \dfrac{\pi}{35}\right. \\[2ex] \dfrac{\mathcal{L}h^3}{S^2} \end{cases}$$

En particulier, si nous faisons $t = 1$, nous obtenons l'expression approchée de l'équivalent de la pyramide surbaissée :

$$(22)\qquad F = \gamma(10) + \frac{11}{32} + \frac{\pi}{18}\,\frac{h^2}{S}\log\frac{R}{h} + \frac{\pi}{18}\,\frac{h^2}{S} + \frac{8\pi}{525}\,\frac{\mathcal{L}h^3}{S^2}$$

Le $\gamma(10)$, l'aire S, le rayon équivalent R et le périmètre $\mathcal{L}$ sont relatifs non pas à la base elle-même, mais au quart de cette base, c'est-à-dire au parallélogramme construit sur $\frac{a+a^1}{2} = \frac{a}{2}$ et $\frac{b+b^1}{2} = \frac{b}{2}$. La méthode d'approximation développée au paragraphe III conduirait à considérer la pyramide surbaissée comme équivalente au parallélépipède construit sur $\frac{3a}{4}$, $\frac{3b}{4}$ et 0.684 h. En ramenant les notations au quart de base $\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}$, cette méthode donne :

$$F = \gamma(o) + \log\frac{3}{2} + \frac{\pi}{6}\,\frac{\overset{-2}{0.684}}{2.25}\,\frac{h^2}{S}\left(\log\frac{R}{h} + \log\frac{1,5}{0.684} + \frac{7}{12}\right)$$
$$+ \frac{\pi}{15}\,\frac{1.5}{1.5^4} \times \overset{-3}{0,684}\,\frac{\mathcal{L}h^3}{S^2}$$

$$= \gamma(o) + 0.405 + 0.034\pi\frac{h^2}{S}\log\frac{R}{h} + 0.0465\pi\frac{h^2}{S} + \frac{6,3}{1000}\pi\frac{\ell h^3}{S^2}$$

expression où seul le terme d'ordre 3 introduit une différence notable avec la formule (22). En toute rigueur, il ne nous est pas possible de choisir entre ces deux formules - puisque l'expression exacte est inconnue. Mais, pour le calcul des covariances, c'est la formule (21) qu'il convient de dériver. Pour des raisons de cohérence, c'est également celle-ci que nous adopterons pour calculer des covariances.

Calculons maintenant les covariances g et g' du tronc avec ses deux bases, et $C_{aa}1$ de ces deux bases entre elles. On utilisera les formules (17) et (18). F est donnée en (21), l'expression de x f' en (19bis). Pour calculer f" on dérivera (19bis), soit :

$$(23) \qquad x^2 f'' = -1 - \frac{\pi}{3}\frac{h^2}{S}\log\frac{R}{h} + \frac{\pi}{12}\frac{h^2}{S} - \frac{2\pi}{S}\frac{\ell h^3}{S^2}$$

On obtient les expressions suivantes :

$$(24) \quad \begin{cases} g' = \gamma(10) + \frac{7}{16}t^2 - \frac{3}{32}t^4 + \frac{1}{6}(3+t^2)\left(-t - \frac{9}{8}t^2 - \frac{3}{8}t^3\right) \\ \quad + \frac{\pi h^2}{S}\left(\frac{7}{72} - \frac{t^2}{18} + \frac{t^4}{72} + \frac{1}{216}(3+t^2)(1+t)^3\right) \\ \quad + \frac{\pi h^2}{S}\log\frac{R}{h}\left(\frac{1}{6} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{18} + \frac{1}{18}(3+t^2)(1+t)^3\right) \\ \quad + \frac{\pi \ell h^3}{S^2}\left(\frac{1}{15} - \frac{2}{25}t^2 + \frac{t^4}{35} + \frac{1}{30}(3+t^2)(1+t)^3\right) \end{cases}$$

$$(25) \quad \begin{cases} g = \gamma(o) + \frac{7}{16}t^2 - \frac{3}{32}t^4 + \frac{1}{6}(3+t^2)\left(t - \frac{9}{8}t^2 + \frac{3}{8}t^3\right) \\ \quad + \frac{\pi h^2}{S}\left(\frac{7}{72} - \frac{t^2}{18} + \frac{t^4}{72} + \frac{1}{216}(3+t^2)(1-t)^3\right) \\ \quad + \frac{\pi h^2}{S}\log\frac{R}{h}\left(\frac{1}{6} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{18} + \frac{1}{18}(3+t^2)(1-t)^3\right) \\ \quad + \frac{\pi \ell h^3}{S}\left(\frac{1}{15} - \frac{2}{25}t^2 + \frac{t^4}{35} + \frac{1}{30}(3+t^2)(1-t)^3\right) \end{cases}$$

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
C_{aa}{}^{1} = {} & \gamma(o) + \frac{7}{16}\, t^2 - \frac{3}{32}\, t^4 + \frac{1}{6}\,(3+t^2)\,\left(-\frac{21}{8}\, t^2 + \frac{5}{8}\, t^4\right) \\
& + \frac{\lambda h^2}{S}\left(\frac{7}{72} - \frac{t^2}{18} + \frac{t^4}{72} + \frac{(3+t^2)}{216}\,\left(5 + \frac{16}{3}\, t^2 - \frac{7}{3}\, t^4\right)\right) \\
& + \frac{\lambda h^2}{S} \log \frac{R}{h}\left(\frac{1}{6} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{18} + \frac{3+t^2}{18}\,(1+8t^2 - t^4)\right) \\
& + \frac{\lambda \mathcal{L} h^3}{S^2}\left(\frac{1}{15} - \frac{2}{25}\, t^2 + \frac{t^4}{35} + \frac{3+t^2}{45}\,(13\, t^2 - t^4)\right)
\end{aligned}
\right.
$$

Pour effectuer le Krigeage du tronc de pyramide par ses deux faces, on prendra un estimateur :

$$\lambda x + (1-\lambda)\, x^1$$

λ étant le poids de la grande section a, et on aura :

$$(27)\qquad \lambda = \frac{N}{D}$$

Avec :

$$
(28)\quad
\begin{aligned}
N &= -\gamma(0) - \log(1-t) - g + g' + C_{aa}{}^{1} \\
D &= -2\,\gamma(0) - \log(1 - t^2) + 2\, C_{aa}{}^{1}
\end{aligned}
$$

On remarquera que $\gamma(0)$ disparaît de ces formules.

-:-:-:-:-:-:-:-:-