

Note Géostatistique N° 29

Les formules du trapèze

Les formules établies jusqu'ici permettent de calculer la variance d'extension d'un traçage dans une zone d'influence rectangulaire, ou, pour un amas, d'une section rectangulaire dans une zone d'influence en forme de parallélépipède rectangle.

Autrement dit la théorie de la reconnaissance d'un gisement minier n'est accessible que pour une géométrie très particulière des travaux miniers et du gisement. En pratique, les différents traçages seront de longueurs différentes et seront rarement à l'aplomb les uns des autres, les colonnes minéralisées étant le plus souvent obliques et de forme irrégulière. A plus forte raison, les amas se laisseront difficilement assimiler à des prismes droits. Il convient donc d'essayer de généraliser les résultats obtenus à des configurations géométriques plus complexes, qui seront : le trapèze, pour les problèmes à deux dimensions, et les pyramides tronquées pour les amas. Nous nous occuperons dans cette note du problème à deux dimensions, c'est-à-dire des trapèzes. Nous arriverons à établir des formules rigoureuses. Mais leur complexité nous obligera à les remplacer par des formules d'approximation, et les méthodes d'approximation qui auront ainsi fait leurs preuves dans le plan nous permettront, dans une note suivante, de résoudre au moins grossièrement le problème beaucoup plus difficile des amas, pour lequel aucune formule exacte ne sera pratiquement disponible.

Pour des raisons de commodité, nous désignerons ici sous le nom de covariance de deux figures géométriques F_1 et F_2 la valeur moyenne de $\log_e r$, lorsque r représente la distance de deux points occupant toutes les positions possibles dans F_1 et F_2 . Une telle covariance sera notée ici $\text{cov } F_1/F_2$. Si F_1 et F_2 coïncident, on appellera variance la valeur moyenne de $\log r$ dans F_1 .

Pour établir des formules générales, nous ferons grand usage du principe de similitude, qui nous permettra souvent d'obtenir sans intégration l'expression exacte de ces fonctions. Si $f(a, b, c, \dots)$ est une telle covariance, exprimée au moyen des longueurs $a, b, c, \dots$ et de paramètres sans dimensions (conservant la même valeur dans une simili-

tude), et si l'on modifie l'ensemble de la figure $F_1 + F_2$ par une similitude infinitésimale de module $(1 + d\lambda)$ soit :

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \frac{dc}{c} \dots\dots\dots d\lambda$$

on aura toujours

$$(1) df = f'_a da + f'_b db + f'_c dc + \dots\dots\dots d\lambda$$

car la fonction f se met toujours sous la forme $\log a + g(\frac{b}{a}, \frac{c}{a} \dots)$.

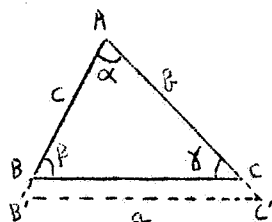
Il en résulte que toutes les fonctions f vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$(2) a f'_a + b f'_b + c f'_c + \dots\dots\dots = 1$$

I- LES FORMULES DU TRIANGLE

a/ Soit un triangle A B C, de côtés a b c et d'angles α B γ .

Pour calculer la variance V de ce triangle, nous considérerons la



similitude de centre A de module infinitésimal $(1 + d\lambda)$, transformant A B C en

A B' C'. La variation de la variance dV peut s'exprimer au moyen de la covariance du triangle et de l'aire B B' C C', c'est-à-dire de la covariance $g = \text{Cov BC/T}$ du triangle avec son côté BC. On a, en effet, S désignant l'aire du triangle :

$$(S + dS)^2 (V + dV) = S^2 V + 2 S dS g$$

soit :

$$V + \frac{1}{2} S \frac{dV}{dS} = g = \text{cov BC/T}$$

Mais, dans la similitude infinitésimale $(1 + d\lambda)$, on a, en vertu de (1)

$$\frac{dS}{S} = 2 d\lambda \qquad dV = d\lambda$$

Il reste donc :

$$(3) g = \text{cov BC/T} = \text{cov AB/T} = \text{cov AC/T} = V + \frac{1}{4}$$

On voit que le triangle a même covariance g avec chacun de ces trois côtés. C'est là une simple conséquence des propriétés d'un champ d'intégration triangulaire.

b/ Pour calculer maintenant la covariance $g = \text{cov BC/T}$ du triangle et d'un de ses côtés a, on appliquera une similitude infinitésimale de centre B.

Celle-ci nous donne :

$$(a + d a) (S + d S) (g + d g) = a S g + a d S \text{ cov BC/AC} + S d a \text{ cov C/T}$$

D'où l'on tire :

$$(4) 3 g + 1 = 2 \text{ cov BC/AC} + \text{cov C/T}$$

On voit apparaître les covariances Cov BC/AC de deux côtés d'un triangle, et Cov C/T du triangle et d'un de ses sommets.

C/ Pour calculer la covariance Cov BC/AC, on appliquera à nouveau une similitude de centre C. Celle-ci nous donne :

$$(5) 2 \text{ Cov BC/AC} + 1 = \text{Cov A/a} + \text{Cov B/b}$$

expression où apparaissent les covariances d'un sommet et du côté opposé.

d/ De même, pour avoir la covariance Cov C/T, on applique la similitude de centre C, et on trouve :

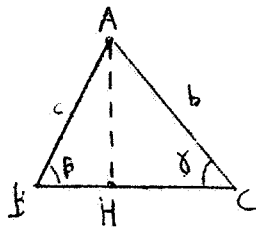
$$(6) \text{Cov C/T} + \frac{1}{2} = \text{Cov C/AB}$$

où apparaît la covariance du troisième sommet avec le côté qui lui est opposé.

Ainsi toutes les variances et covariances relatives aux éléments du triangle s'expriment en fonction des trois covariances cov A/a, cov B/b et cov C/c. Les équations (3), (4), (5) et (6) se récapitulent ainsi :

$$(7) \begin{cases} \text{Cov A/T} = \text{Cov A/a} - \frac{1}{2} \\ \text{Cov a/b} = \frac{1}{2} (\text{Cov A/a} + \text{Cov B/b}) - \frac{1}{2} \\ g = \text{Cov a/T} = \frac{1}{3} (\text{Cov A/a} + \text{Cov B/b} + \text{Cov C/c}) - \frac{5}{6} \\ V = \frac{1}{3} (\text{Cov A/a} + \text{Cov B/b} + \text{Cov C/c}) - \frac{13}{12} \end{cases}$$

Il nous suffit donc de trouver l'expression de la covariance, Cov A/a, d'un sommet A et du côté opposé a. Or il suffit, pour obtenir une telle expression, de connaître les covariances de A avec les deux segments



BH et HC, H étant le pied de la hauteur.

On sait que l'on a :

$$\begin{cases} \text{Cov A/BH} = \log C - 1 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \text{tg } B \\ \text{Cov A/HC} = \log b - 1 + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \text{tg } \gamma \end{cases}$$

La covariance cov A/a s'en déduit par :

$$\begin{aligned} (8) \text{Cov A/a} &= \frac{BH}{a} \text{cov A/BH} + \frac{HC}{a} \text{cov A/HC} \\ &= \frac{c}{a} \cos \beta \text{cov A/BH} + \frac{b}{a} \cos \gamma \text{cov A/HC}. \end{aligned}$$

Pour symétriser les notations, nous introduisons le diamètre d du cercle circonscrit. On rappelle les formules classiques :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = d$$

En exprimant toutes les longueurs en fonction de d et des trois angles, on trouve facilement :

$$(9) \quad \begin{aligned} \text{Cov } A/a &= \log d - 1 + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos \gamma \log \sin \beta + \\ &\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cos \beta \log \sin \gamma + \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} \alpha \end{aligned}$$

et les expressions analogues de cov B/b et cov C/c s'en déduisent par permutation circulaire. En portant dans (7), on obtient l'expression de la variance du triangle :

$$(10) \quad \begin{aligned} (& V = \log d - \frac{25}{12} + \frac{1}{3} \left(\frac{\cos \beta}{\sin \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\sin \beta} \right) \sin \alpha \log \sin \alpha + \\ & \frac{1}{3} \left(\frac{\cos \gamma}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} \right) \sin \beta \log \sin \beta + \frac{1}{3} \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \right) \\ & \sin \gamma \log \sin \gamma + \frac{1}{3} \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} \alpha + \frac{1}{3} \frac{\sin \gamma \sin \alpha}{\sin \beta} \beta \\ & + \frac{1}{3} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} \gamma \end{aligned}$$

Cas particuliers

On examinera les triangles rectangles et isocèles.

Pour un triangle rectangle, avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma = \phi$ et $d = a$, la formule (10) nous donne :

$$(11) \quad \begin{aligned} V &= \log a - \frac{25}{12} + \frac{1}{3} \left\{ \log \cos \phi + \sin^2 \phi \log \operatorname{tg} \phi + \frac{\phi}{\operatorname{tg} \phi} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \operatorname{tg} \phi + \frac{\pi}{2} \sin \phi \cos \phi \right\} \end{aligned}$$

Pour un triangle isocèle, avec $\beta = \gamma = \phi$, on trouve :

$$(12) \quad \begin{aligned} V &= \log d - \frac{25}{12} + \frac{1}{3} \left\{ 4 \cos^2 \phi \log 2 \cos \phi + 3 \log \sin \phi + \right. \\ &\quad \left. 2 \phi \sin 2 \phi + \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \operatorname{tg} \phi \right\} \end{aligned}$$

Pour un triangle rectangle et isocèle, on trouve numériquement :

$$V = \log d - \frac{3}{2} + 0.0866.$$

Le triangle rectangle isocèle est équivalent à 1.0895 d, soit à 1,54 côté de l'angle droit.

Pour le triangle équilatéral, on trouve :

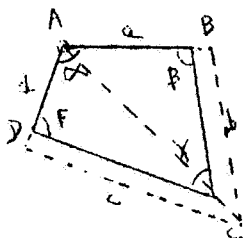
$$V = \log a - \frac{3}{2} + 0.3236$$

Le triangle équilatéral est équivalent à 1,382 fois son côté.

On trouvera les équivalents linéaires d'autres triangles particuliers dans la partie de cette note consacrée aux formules d'approximation.

II - LES FORMULES DU QUADRILATÈRE ET DU POLYGONE QUELCONQUES

A partir des formules du triangle, il est possible de constituer les expressions exactes des diverses variances et covariances relatives à un quadrilatère quelconque. Par des similitudes infinitésimales, en effet, on se ramène toujours à des covariances de deux segments de droite, ou du quadrilatère avec un de ses sommets, covariances que l'on



peut calculer en décomposant le quadrilatère en triangles.

Soit donc un quadrilatère Q, de sommets A B C et D, de côtés a b c d et d'angles α β γ et δ . On pose

$g_a = \text{Cov } a/Q$, et de même g_b , g_c et g_d .

Pour le calcul de g_a , on considérera la similitude infinitésimale de centre A. S désigne la surface du quadrilatère Q. On trouve :

$$(a + da) (S + dS) (g + dg) = aSg + ab \sin \beta da \text{ cov } b/a + ac \sin \delta dd \text{ cov } c/a + S da \text{ cov } B/Q$$

D'où

$$(I3) \quad 1 + 3 g_a = \frac{ab \sin \beta}{S} \text{ cov } b/a + \frac{cd \sin \delta}{S} \text{ cov } c/a + \text{cov } B/Q$$

Avec la similitude infinitésimale de centre B, on a de même :

$$(I4) \quad 1 + 3 g_b = \frac{ad \sin \alpha}{S} \text{ cov } d/a + \frac{bc \sin \gamma}{S} \text{ cov } C/a + \text{cov } A/Q$$

On obtient par symétrie six équations analogues en g_b , g_c

et g_d .

Par exemple, pour g_c

$$(I5) \quad 1 + 3 g_c = \frac{ab \sin \beta}{S} \text{ cov } a/c + \frac{cd \sin \delta}{S} \text{ cov } c/d + \text{cov } C/Q$$

$$= \frac{ad \sin \alpha}{S} \text{ cov } a/c + \frac{bc \sin \gamma}{S} \text{ cov } b/c + \text{cov } D/Q$$

Pour la variance V , on appliquera la similitude de centre A, qui donne :

$$(S + ds)^2 (V + dV) = S^2 V + 2 S b \sin \beta da g_b + 2 S C \sin F dd g_c$$

Mais on peut aussi appliquer des similitudes de centre B, C ou D. D'où les quatre équations équivalentes :

$$(I6) \quad \begin{aligned} (\quad V + \frac{1}{4} &= \frac{ab \sin B}{2 S} g_b + \frac{cd \sin F}{2 S} g_c \\) \\ (\quad &= \frac{bc \sin \gamma}{2 S} g_c + \frac{da \sin \alpha}{2 S} g_d \\) \\ (\quad &= \frac{cd \sin F}{2 S} g_d + \frac{ab \sin B}{2 S} g_a \\) \\ (\quad &= \frac{da \sin \alpha}{2 S} g_a + \frac{bc \sin \gamma}{2 S} g_b \\) \end{aligned}$$

Dans quatre relations, trois seulement sont indépendantes (b déterminant est nul).

En procédant par différences, pour éliminer V , on obtient deux relations entre les g :

$$(I7) \quad \begin{aligned} (\quad ab \sin B (g_b - g_a) + cd \sin F (g_c - g_d) &= 0 \\) \\ (\quad bc \sin \gamma (g_b - g_c) + da \sin \alpha (g_a - g_d) &= 0 \\) \end{aligned}$$

Ou encore :

$$(I8) \quad a \sin \alpha g_a - b \sin (\alpha + \beta) g_b - C \sin F g_c = 0$$

et trois équations analogues.

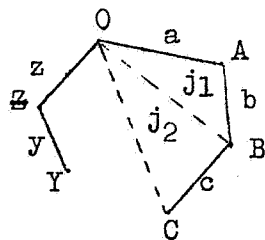
III - FORMULES POUR UN POLYgone QUELCONQUE

Plus généralement, on peut appliquer cette méthode à un polygone quelconque C A B C ... Y Z.

Soit g_a = covariance du polygone et de son côté a. On applique la similitude $(1 + \lambda)$ de centre O :

$$(I9) \quad 3 g_a + 1 = \frac{2}{S} \left\{ l_1 \text{ cov } a/b + l_2 \text{ cov } a/c + \dots \right\} + \text{cov } A/\text{Polygone}$$

$N-1$
et une relation^s analogue en prenant A comme centre de similitude. Les sur-



faces j_1 sont prises algébriquement. De même, pour $g_b, g_c \dots$

Pour la variance : on prendra, par exemple, la similitude de centre O :

$$(20) \quad V + \frac{I}{4} = \frac{1}{S} (j_1 g_b + j_2 g_c + \dots)$$

On aura $N - 1$ relations équivalentes en prenant les similitudes de centre A, B, C.... Y, Z - Pour calculer la covariance de deux segments de droite non parallèles. On écrira :

$$(21) \quad 1 + 2 \operatorname{cov} \delta/b = \frac{OA'}{a} \operatorname{cov} A'/b - \frac{OA}{a} \operatorname{cov} A/b$$

$$+ \frac{OB'}{b} \operatorname{cov} B'/a - \frac{OB}{b} \operatorname{cov} B/a$$

Si les deux segments sont parallèles, on prendra :

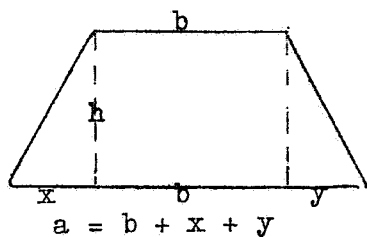
$$(22) \quad 2 ab \operatorname{cov} a/B = (b+x)^2 f(b+x) + (b+y)^2 f(b+y) - x^2 f(x) - y^2 f(y)$$

où le symbole $f(x)$ représente la covariance des deux côtés x d'un rectangle $h x$.

Remarque sur la formule (20)

Les $g_a, g_b \dots$ sont liés par $N - 1$ relations homogènes et linéaires obtenues en égalant les deuxièmes membres entre eux. Il n'y a en réalité, que 2 relations indépendantes.

On peut, en effet, remplacer j_1 par $\overline{OA} \wedge \overline{AB}$, j_2 par $\overline{OB} \wedge \overline{BC}$ etc.



$$a = b + x + y$$

les premiers membres relatifs à O et à A, par exemple, sont :

$$\overline{OO} \wedge \overline{OA} g_a + \overline{OA} \wedge \overline{AB} g_b + \overline{OB} \wedge \overline{BC} g_c + \overline{OC} \wedge \overline{CD} g_d + \dots$$

$$AO \wedge OA g_a + AA \wedge AB g_b + AB \wedge BC g_c + AC \wedge CD g_d + \dots$$

D'où la différence :

$$\overline{OA} \wedge (\overline{OA} g_a + \overline{AB} g_b + \overline{BC} g_c + \overline{CD} g_d + \dots)$$

Toutes ces différences devant être nulles, on a nécessairement :

$$(23) \quad \overline{OA} g_a + \overline{AB} g_b + \overline{BC} g_c + \dots = 0$$

Et inversement, si cette relation vectorielle est vérifiée, les N relations (20) sont équivalentes.

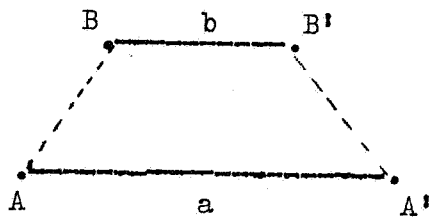
III-FORMULES POUR UN TRAPEZE QUELCONQUE

On appliquera les résultats ci-dessus au trapèze AA' BB', ayant les deux côtés a b parallèles.

En posant :

$$f = \text{cov } a/b \quad g_1 = \text{cov } a/Q \quad g_2 = \text{cov } b/Q \quad l = \frac{a+b}{2}$$

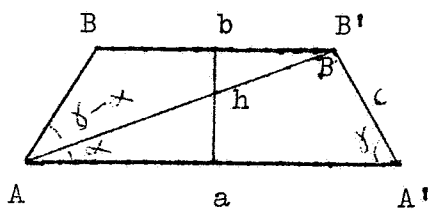
On obtient les similitudes habituelles :



(24)

$$\begin{aligned} & (3g_1 + l = \text{cov } A'/Q + \frac{b}{l} f + \frac{a}{l} \text{cov } AA'/A'B' \\ &) \\ & (= \text{cov } A/Q + \frac{b}{l} f + \frac{a}{l} \text{cov } AA'/AB \\ &) \\ & (3g_2 = \text{cov } B'/Q + \frac{a}{l} f + \frac{b}{l} \text{cov } B'B/B'A' \\ &) \\ & (= \text{cov } B/Q + \frac{a}{l} f + \frac{b}{l} \text{cov } BB'/BA \\ &) \\ & (V = \frac{a^2 g_1 - b^2 g_2}{a^2 - b^2} - \frac{l}{4} \\ &) \end{aligned}$$

IV - LES FORMULES DU TRAPEZE ISOCELE



Le trapèze isocèle est inscriptible. Soit d le diamètre du cercle circonscrit, qui nous servira de paramètre dimensionnel.

On pose :

$$\begin{aligned} & (a = d \sin(\alpha + \gamma) \quad b = d \sin(\gamma - \alpha) \\ &) \\ & (l = \frac{a+b}{2} = \sin \gamma \cos \alpha d, \frac{a-b}{2} = \sin \alpha \cos \gamma d \\ &) \\ & (h = d \sin \alpha \sin \gamma \end{aligned}$$

On prendra comme paramètre les angles α et γ (et $\beta = \pi - \alpha - \gamma$)

On trouve pour les notations du paragraphe III :

$$\begin{aligned} (25) \quad f &= Ld - \frac{3}{2} - \frac{\sin^2 \alpha \cos 2\gamma}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)} L \sin \alpha + \frac{\sin^2 \gamma \cos 2\alpha}{\sin \beta \sin(\delta - \alpha)} L \sin \gamma + \frac{(\pi - \alpha)}{2} \\ & \quad \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)} - \frac{(\pi - \gamma)}{2} \frac{\sin^2 \gamma \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (26) \quad & \left(1 + 3g_1 = 3 \left(Ld - \frac{3}{2} \right) + \left\{ 1 + \frac{\sin \gamma \cos 2\alpha}{\sin \beta \cos \alpha} + \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} \right\} L \sin \gamma \right. \\
 & \left(+ 2 \frac{\sin^2 \beta \cos \gamma}{\sin 2\alpha \sin \gamma} L \sin \beta - \frac{\sin^2 \alpha \cos 2\gamma}{\sin \beta \sin \gamma \cos \alpha} L \sin \alpha \right. \\
 & \left(+ \frac{2 \cos \gamma \sin^2 \alpha}{\sin \beta \cos \alpha} \gamma + \left\{ \frac{2 \sin^2 \beta}{\sin 2\alpha} - \frac{2 \sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \text{tg} \alpha \right\} \alpha + \frac{\pi}{2} \left\{ \text{tg} \alpha + \frac{2 \sin \alpha \sin (\gamma - \alpha)}{\cos \alpha \sin \beta} \right\} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (27) \quad & \left(1 + 3g_2 = 3 \left(Ld - \frac{3}{2} \right) + \left\{ 1 + \frac{\sin \gamma \cos 2\alpha}{\sin (\gamma - \alpha) \cos \alpha} + \frac{\sin 2(\gamma - \alpha)}{\sin 2\alpha} \right\} \right. \\
 & \left(L \sin \gamma - 2 \frac{\sin^2 (\gamma - \alpha) \cos \gamma}{\sin \gamma \sin 2\alpha} L \sin (\gamma - \alpha) - \right. \\
 & \left(\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \gamma}{\sin (\gamma - \alpha) \sin \gamma \cos \alpha} L \sin \alpha + \left\{ \frac{2 \sin^2 (\gamma - \alpha)}{\sin 2\alpha} - \right. \right. \\
 & \left(\frac{2 \sin \alpha \sin \gamma}{\sin (\gamma - \alpha)} - \text{tg} \alpha \right\} \alpha + \frac{2 \cos \gamma \sin^2 \alpha}{\sin (\gamma - \alpha) \cos \alpha} \gamma + \\
 & \left(\frac{3\pi}{2} \text{tg} \alpha \right) \\
 & \left(\text{(On passe de } g_1 \text{ à } g_2 \text{ en changeant } \gamma \text{ en } \pi - \gamma) \right)
 \end{aligned}$$

Cas particulier :

$\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (le trapèze est inscrit dans le cercle de diamètre AA',

soit d = a). On a alors :

$$\begin{aligned}
 (28) \quad & \left(f = Ld - \frac{3}{2} + \sin^2 \alpha L \sin \alpha + \cos^2 \alpha L \cos \alpha + \frac{\pi}{2} \cos^2 \alpha \text{tg} 2\alpha - \frac{\alpha \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \right. \\
 & \left(1 + 3g_1 = 3 \left(Ld - \frac{3}{2} \right) + 2 \cos^2 \alpha L \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha} L \sin \alpha + \right. \\
 & \left(\frac{\pi}{2} (\text{tg} \alpha + \sin 2\alpha) + \alpha \left(\frac{2}{\sin 2\alpha} - 3 \text{tg} \alpha \right) \right) \\
 & \left(\text{(à suivre)} \right)
 \end{aligned}$$

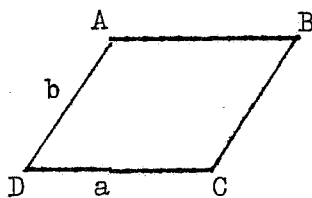
$$\begin{aligned}
 (28) \quad & (\text{suite}) \quad (1 + 3g_2 = 3 \left(Ld - \frac{3}{2} \right) + 4 \cos^2 \alpha L \cos \alpha + \frac{1}{2} (tg^2 \alpha - 1) L \cos 2\alpha \\
 &) \\
 & (+ tg^2 \alpha L \sin \alpha + \left(\frac{2 \cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha} - tg 2\alpha - tg \alpha - \right. \\
 &) \\
 & (\left. \frac{2 \sin^3 \alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha} \right)) + \frac{\pi}{2} \left(3 tg \alpha + \frac{2 \sin^3 \alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha} \right)
 \end{aligned}$$

La variance V s'en déduira par :

$$(29) \quad (\quad V = \frac{g_1 \sin^2 \beta - g_2 \sin^2 (\gamma - \alpha)}{\sin 2\alpha \sin 2\gamma} - \frac{1}{4} \quad)$$

V - FORMULES DU PARALLELOGRAMME

Pour un parallélogramme, on posera :



$$\text{cov } a/a = f_1 \quad \text{cov } b/b = f_2 \quad \text{cov } a/Q = g_1$$

$$\text{cov } b/Q = g_2$$

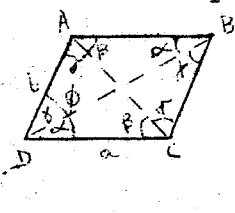
Et on obtiendra par les similitudes habituelles :

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & (\quad 3 g_2 + 1 = \text{Cov } A/Q + \text{Cov } AD/AB + f_2 = \text{Cov } B/Q + \\
 &) \\
 & (\quad \text{Cov } BA/BC + f_2 \quad) \\
 &) \\
 & (\quad 3 g_1 + 1 = \text{Cov } C/Q + \text{cov } CD/CB + f_1 = \text{Cov } D/Q + \\
 &) \\
 & (\quad \text{Cov } DC/DA + f_1 \quad) \\
 &) \\
 & (\quad V = \frac{1}{2} (g_1 + g_2) - \frac{1}{4} \quad)
 \end{aligned}$$

On trouvera des exemples numériques dans la deuxième partie de cette note.

On prend comme paramètre principaux a, b, ϕ ($a > b, \phi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$)

Les paramètres auxiliaires α, β, γ s'en déduisent par :

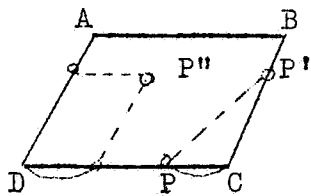


$$\begin{aligned}
 & (\quad AC^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos \phi \quad BD^2 = a^2 + b^2 + 2 ab \cos \phi \quad) \\
 &) \\
 & (\quad \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \phi}{AC} \quad \frac{\sin \gamma}{b} = \frac{\sin \beta}{a} = \frac{\sin \phi}{BD} \quad) \\
 &)
 \end{aligned}$$

On trouve explicitement, d'après les formules du triangle :

$$\begin{aligned}
 (31) \quad & \left(\begin{aligned} \text{Cov D/Q} &= La - L \sin \delta - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha}{\sin \delta} \cos \phi L \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{\sin \delta}{\sin \alpha} \cos \phi \\ &L \sin \delta + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \delta} + \frac{\cos \delta}{\sin \alpha} \right) \sin \phi L \sin \phi + \\ &\frac{1}{2} \frac{\sin \alpha \sin \phi}{\sin \delta} \delta + \frac{1}{2} \frac{\sin \phi \sin \delta}{\sin \alpha} \alpha \end{aligned} \right. \\
 & \left(\begin{aligned} \text{Cov DC/DA} &= La - L \sin \delta - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos B}{\sin \delta} + \frac{\cos \delta}{\sin B} \right) \sin \phi L \sin \phi + \\ &\frac{1}{2} \frac{\cos \phi \sin B}{\sin \delta} L \sin B + \frac{1}{2} \frac{\cos \phi}{\sin B} \sin \delta L \sin \delta + \\ &\frac{1}{2} \frac{\sin \phi \sin B}{\sin \delta} \delta + \frac{1}{2} \frac{\sin \phi \sin \delta}{\sin B} B \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$

On remarque que l'on passe de Cov D/Q à Cov DC/DA par le changement $\alpha \rightarrow B, \delta \rightarrow \delta, \phi \rightarrow \pi - \phi$. D'où les égalités remarquables :



$$\begin{aligned}
 (32) \quad & \left(\begin{aligned} \text{Cov D/Q} &= \text{Cov CD/CB} \\ \text{Cov C/Q} &= \text{Cov DC/DA} \end{aligned} \right) \\
 & \text{évidentes géométriquement.}
 \end{aligned}$$

Enfin, $\text{cov AB/CD} = f_1$ et $\text{Cov AD/CB} = f_2$ sont données par :

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{a} \cos \phi \right)^2 \left\{ L B D - \frac{3}{2} + (\pi - 2\alpha) \text{tg} \alpha + \text{tg}^2 \alpha L \sin \alpha \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{a} \cos \phi \right)^2 \left\{ L C A - \frac{3}{2} + (\pi - 2\beta) \text{tg} \beta + \text{tg}^2 \beta L \sin \beta \right\} \\ &- \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \phi \left\{ L b - \frac{3}{2} + (\pi - 2\phi) \text{tg} \phi + \text{tg}^2 \phi L \sin \phi \right\} \\ f_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{b} \cos \phi \right)^2 \left\{ L B D - \frac{3}{2} + (\pi - 2\delta) \text{tg} \delta + \text{tg}^2 \delta L \sin \delta \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{b} \cos \phi \right)^2 \left\{ L C A - \frac{3}{2} + (\pi - 2\delta) \text{tg} \delta + \text{tg}^2 \delta L \sin \delta \right\} \\ &- \frac{a^2}{b^2} \cos^2 \phi \left\{ La - \frac{3}{2} + (\pi - 2\phi) \text{tg} \phi + \text{tg}^2 \phi L \sin \phi \right\} \end{aligned} \right.$$

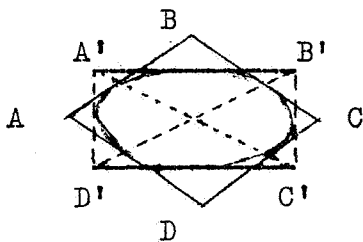
Ensuite :

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & \left(\begin{aligned} 1 + 3 g_1 &= \text{Cov } D/Q + \text{Cov } DC/DA + f_1 \\ & \end{aligned} \right. \\
 & \left(\begin{aligned} 1 + 3 g_2 &= \text{Cov } D/Q + \text{Cov } DC/DA + f_2 \\ & \end{aligned} \right. \\
 & \left(\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (g_1 + g_2) - \frac{1}{4} \end{aligned} \right. \\
 & \left. \right)
 \end{aligned}$$

Au premier ordre en $\frac{b}{a}$, f_1 se réduit à : $La - \frac{3}{2} + \frac{b}{a} \sin \phi$.

Il y a équivalence avec le rectangle $a \times h$ ($h = b \sin \phi$)

VI - FORMULES D'APPROXIMATION POUR LE PARALLELOGRAMME



Les formules précédentes étant complexes à manipuler numériquement, il est souhaitable de les remplacer par des expressions approchées plus simples.

Nous partirons d'une intuition géométrique :

l'équivalence de tous les parallélogrammes

A B C D construits sur deux diamètres conjugués d'une même ellipse :

Nous admettons que tous les parallélogrammes A B C D sont équivalents entre eux, et en particulier équivalents au rectangle construit sur les deux diamètres principaux de l'ellipse.

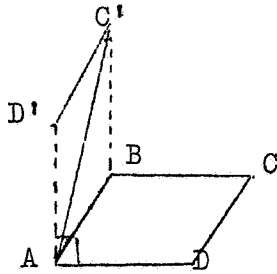
Désignons par r_1 r_2 et ϕ les deux côtés et l'angle du parallélogramme A B C D, et par a et b les côtés du rectangle principal A' B' C' D'. L'équivalent linéaire de tous ces parallélogrammes serait $a + b$. Or, on établit facilement les deux relations suivantes, qui découlent des propriétés des diamètres conjugués :

$$\begin{aligned}
 (35) \quad & \left(\begin{aligned} r_1 r_2 \sin \phi &= a b \\ & \end{aligned} \right. \\
 & \left(\begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned} \right. \\
 & \left. \right)
 \end{aligned}$$

Tous les parallélogrammes construits sur une même ellipse ont même aire et même somme $r_1^2 + r_2^2$. On en tire immédiatement :

$$(36) \quad a + b = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \sin \phi} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2S}$$

S étant l'aire. L'équivalent linéaire $a + b$ du parallélogramme $r_1 r_2 \phi$ peut aussi s'obtenir par une construction géométrique simple :



en A, élevons A D' perpendiculaire à A D et tel que A D' = A D.

La somme géométrique :

$$\overline{AD'} + \overline{AB} = \overline{AC'}$$

donne l'équivalent linéaire A C' cherché. Si $\phi = \frac{\pi}{2}$

(rectangle), la formule et la constuction donnent $r_1 + r_2$, comme il se doit.

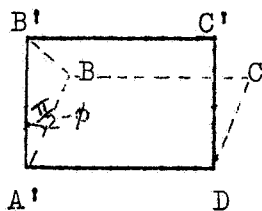
Ainsi - dans cette hypothèse, que nous vérifierons numériquement - la valeur moyenne de L r dans le parallélogramme r_1, r_2, ϕ serait :

$$\frac{1}{2} L (r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \sin \phi) - \frac{3}{2}$$

c'est-à-dire la partie réelle de :

$$L \left\{ r_1 + r_2 e^{i(\frac{\pi}{2} - \phi)} \right\} - \frac{3}{2}$$

Autrement dit, on passe du rectangle a, b, $\frac{\pi}{2}$ au parallélogramme a, b, ϕ en remplaçant le petit côté b par $b e^{i(\frac{\pi}{2} - \phi)}$ et en prenant la partie réelle des expressions obtenues : l'opérateur $e^{i(\frac{\pi}{2} - \phi)}$ représente, conformément à un



formalisme classique, la rotation qu'il faut faire subir à A B' pour l'amener en A B - c'est-à-dire pour déformer le rectangle en un parallélogramme d'angle ϕ .

Nous pouvons espérer que cette manière d'opérer nous permettra, en particulier, d'obtenir des expressions approchées des variances d'extension.

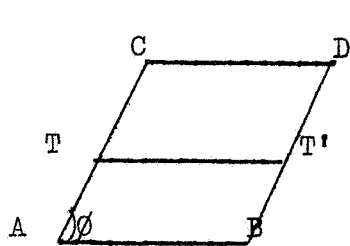
La variance d'extension $\overline{6E_1^2}$ des deux tracés A' D et B' C' et celle, $\overline{6E_2^2}$, des deux montages A B' et D C' au rectangle a b ont pour expression (avec $t = \frac{b}{a}$) :

$$(37) \quad \begin{aligned} & \left(\begin{aligned} \overline{6E_1^2} &= \frac{\pi}{6} t - \frac{1}{8} t^2 + \frac{1}{72} t^4 - \frac{1}{240} t^6 \end{aligned} \right. \\ & \left(\begin{aligned} \overline{6E_2^2} &= -\frac{1}{2} \log t + \frac{1}{4} + \frac{10}{72} t^2 - \frac{1}{6} t^2 \log t + \frac{1}{40} t^4 - \frac{1}{168} t^6 \end{aligned} \right. \\ & \left(\right. \end{aligned}$$

Par suite les variances d'extension des deux traçages AD et BC, et des deux montages AB et DC au parallélogramme a b ϕ auraient pour valeur :

$$(38) \quad \begin{aligned} (& 6^2 E_1 = \frac{\pi}{6} t \sin \phi + \frac{1}{8} t^2 \cos 2 \phi + \frac{t^4}{72} \cos 4 \phi + \frac{t^6}{240} \cos 6 \phi \\) & \\ (& 6^2 E_2 = -\frac{1}{2} \log t - \frac{10}{72} t^2 \cos 2 \phi + \frac{t^2}{6} \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \sin 2 \phi + \\) & \\ & \frac{1}{6} (t^2 \log t) \cos 2 \phi + \frac{t^4}{40} \cos 4 \phi + \frac{t^6}{168} \cos 6 \phi \\) & \end{aligned}$$

De même, la variance d'extension $6^2 E$ d'un traçage médian au parallélogramme ABCD doit avoir pour expression, selon le cas de figure :



$$(39) \quad \begin{aligned} (& 6^2 E = \frac{\pi}{6} t \sin \phi + 0.0739 t^2 \cos 2 \phi + 0.0035 t^4 \\) & \\ & \cos 4 \phi + 0.0005 t^6 \cos 6 \phi \\) & \\ (& 6^2 E = -0.3863 - \log t + \frac{\pi}{3} t \sin \phi + \frac{t^2}{6} \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \\) & \\ & \sin 2 \phi + \frac{1}{6} (t^2 \log t) \cos 2 \phi + \frac{11}{60} t^4 \\) & \\ & \cos 4 \phi + \frac{257}{1680} t^6 \cos 6 \phi \\) & \end{aligned}$$

Etant entendu que ϕ est l'angle aigu $\widehat{BAC}$.

Le tableau suivant donne, en fonction de b/a et ϕ , quelques valeurs de l'équivalent linéaire λ et des variances d'extension $6^2 E_1$ et $6^2 E_2$ du parallélogramme a = 1, b, ϕ , calculées par les formules exactes du N°V et par les formules approchées du N°6.

Tableau I							
Equivalent linéaire et variances d'extension du parallélogramme							
b/a	ϕ	λ exact	λ approché	$6^2 E_1$ exact	$6^2 E_1$ approché	$6^2 E_2$ exact	$6^2 E_2$ ap.
I/4	$\pi/12$	I.087	I.09	0.0410	0.0407	0.938	0.930
I/2	$\pi/12$	I.232	I.23	0.0953	0.0953	0.570	0.570
3/4	$\pi/12$	I.400	I.40	0.1667	0.1647	0.370	0.368I
I	$\pi/12$	I.585	I.59	0.2484	0.2507	0.248	0.2514
I/4	$\pi/6$	I.16	I.14	0.0695	0.0694	0.94I	0.94I
I/2	$\pi/6$	I.33	I.32	0.1478	0.1460	0.603	0.602
B/4	$\pi/6$	I.52	I.53	0.2275	0.2286	0.420	0.42I
I	$\pi/6$	I.74	I.73	0.3190	0.3132	0.319	0.313

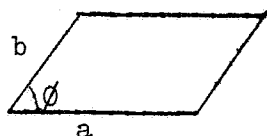
suite du tableau I

1/4	/4	I.194	I.19	0.0925	0.0925	0.951	0.951
1/2	/4	I.40	I.40	0.1845	0.1842	0.628	0.627
3/4	/4	I.628	I.62	0.2734	0.2733	0.458	0.457
I	/4	I.85	I.85	0.3570	0.3564	0.357	0.356
1/4	/3	I.216	I.22	0.100	0.1094	0.950	0.959
1/2	/3	I.40	I.46	0.211	0.2107	0.647	0.647
3/4	/3	I.63	I.69	0.301	0.3035	0.486	0.486
I	/3	I.85	I.93	0.387	0.3882	0.387	0.388

On voit que l'accord est remarquable, et justifie pleinement l'intuition géométrique qui sert de base à cette méthode d'approximation.

Cependant, la méthode analytique, qui consiste à remplacer b par $b e^{i(\frac{\pi}{2} - \phi)}$ dans les formules relatives au rectangle ab et à prendre la partie réelle des expressions obtenues, se généralisera difficilement dans le cas de figures géométriques plus complexes, comme le trapèze - et à fortiori elle ne sera pas utilisable pour les problèmes à trois dimensions. On obtiendra, par contre, des expressions aisément généralisables en calculant les diverses covariances par dérivation de l'expression approchée de l'équivalent linéaire. Cette méthode comporte, a priori, de gros dangers, puisque, en général, les dérivations augmentent le désaccord entre une formule approchée et la valeur exacte. Il pourrait se produire qu'une formule approchée donne un excellent équivalent linéaire, mais, les dérivées premières et surtout secondes différant notablement des valeurs vraies, de très mauvaises valeurs pour les covariances et les variances d'extension. Mais, comme nous disposons des formules exactes, il nous sera possible de vérifier les formules d'approximation, et de constater qu'elles sont en excellent accord avec les formules exactes.

Etant donné un parallélogramme $a b \phi$, l'équivalent linéaire E_q a pour valeur :



$$(40) \quad E_q = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 ab \sin \phi}$$

La variance V de ce parallélogramme - c'est-à-dire la valeur moyenne de $\log r$ dans le parallélogramme - s'écrit par conséquent

$$(41) \quad V = \frac{1}{2} \log (a^2 + b^2 + 2 ab \sin \phi)$$

Si nous admettons que cette formule est rigoureuse, et non pas seulement approchée, nous pouvons en déduire par dérivation la covariance $X(b)$ du parallélogramme avec le côté a , l'expression analogue $X(a)$ relative au côté b , et la covariance $Y(b)$ des deux côtés a :

$$\begin{cases} X(b) = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial b} \frac{b^2 V}{2} = V + \frac{b}{2} \frac{\partial V}{\partial b} \\ Y(b) = \frac{\partial^2}{\partial b^2} \frac{b^2}{2} V = V + 2b \frac{\partial V}{\partial b} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} \end{cases}$$

Soit explicitement, compte tenu de (41) :

$$(42) \quad \begin{cases} X(b) = V + \frac{b}{2} \frac{b + a \sin \phi}{E_q^2} \\ Y(b) = V + 2b \frac{b + a \sin \phi}{E_q^2} + \frac{b^2}{2} \left(\frac{1}{E_q^2} - \frac{2(b + a \sin \phi)^2}{E_q^4} \right) \end{cases}$$

On en déduit la variance d'extension σ_E^2 d'un traçage à médian, et la variance d'extension σ_{E1}^2 de deux tracés à de tête et de base :

$$(43) \quad \begin{aligned} \sigma_E^2 &= 2 X\left(\frac{b}{2}\right) - V(ab) - Y(0) = \log \left(a^2 + \frac{b^2}{4} + ab \sin \phi \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \log (a^2 + b^2 + 2 ab \sin \phi) - \log a + \frac{b}{2} \\ &\quad \frac{b/2 + a \sin \phi}{a^2 + b^2/4 + ab \sin \phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{E1}^2 &= 2 X(b) - V(ab) - \frac{1}{2} Y(0) - \frac{1}{2} Y(b) = \\ &\quad \frac{1}{4} \log \frac{a^2 + b^2 + 2 ab \sin \phi}{a^2} - \frac{b^2}{4} \left(\frac{1}{E_q^2} - \frac{2(b + a \sin \phi)^2}{R^4} \right) \end{aligned}$$

On verra sur le tableau II les valeurs exactes de la variance d'extension σ_{E1}^2 des deux tracés à comparées avec les valeurs données par (43) pour quelques parallélogrammes. Le premier chiffre donne la valeur exacte, le deuxième la valeur déduite de (43).

Tableau II					
Variance d'extension de deux tracages a dans un parallélogramme					
$b/a \backslash \phi$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
1/4	0.041	0.069	0.092	0.100	0.121
	0.056	0.076	0.097	0.111	
1/2	0.095	0.148	0.184	0.211	0.231
	0.134	0.168	0.196	0.220	
3/4	0.167	0.227	0.273	0.301	0.325
	0.210	0.248	0.288	0.307	
1	0.248	0.319	0.357	0.387	0.408
	0.260	0.316	0.359	0.410	
4/3	0.370	0.420	0.458	0.486	0.504
	0.295	0.395	0.444	0.479	
2	0.570	0.603	0.628	0.647	0.660
	0.410	0.507	0.577	0.677	
4	0.938	0.941	0.951	0.950	0.964
	0.683	0.773	0.832	0.905	

L'accord est bon pour les angles ϕ voisins de $\frac{\pi}{2}$, et moins bon pour les angles aigus. Néanmoins, en égard au degré de précision que l'on peut exiger en pratique sur l'estimation d'une erreur, l'ordre de grandeur est bon et les formules (43) peuvent être utilisées.

VII - FORMULES A. PROCHES POUR l'équivalent linéaire du TRIANGLE :

Nous avons obtenu pour le parallélogramme une excellente approximation en prenant une expression de la forme $R^2 + 2 S$, R^2 étant la somme des carrés des deux côtés et S la surface. Par analogie, nous avons cherché pour le triangle une expression du même type, où, au lieu de R^2 , figurerait la somme $a^2 + b^2 + c^2$ des carrés des trois côtés du triangle. Par tâtonnement, nous sommes parvenus à l'expression suivante de l'équivalent :

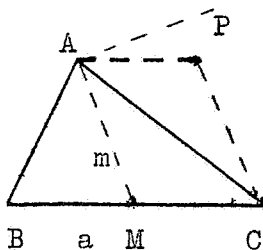
$$(44) \quad E_q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} + 2 S$$

Le tableau III suivant permet de comparer, pour quelques triangles de périmètre $2p = 1$, la valeur exacte et la valeur approchée calculée par la formule page précédente :

Tableau III Equivalent linéaire du Triangle			
α	β	Eq exact	Eq approché
$\frac{10\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	0.394	0.395
$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	0.408	0.411
$\frac{8\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	0.426	0.426
$\frac{8\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	0.416	0.422
$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	0.440	0.437
$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	0.424	0.428
$\frac{6\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	0.451	0.447
$\frac{6\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	0.445	0.443
$\frac{6\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	0.426	0.430
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	0.455	0.452
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	0.448	0.445
$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	0.460	0.455

On voit que l'accord est excellent :

- Il pourra être intéressant d'exprimer cet équivalent en fonction d'un seul côté a et de la médiane $AM = m$ correspondante :



$$(45) \text{ Eq} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{2}{3} m^2 + 2 S}$$

Si l'on considère le parallélogramme $AMCP$ construit sur la médiane m et le demi côté a correspondant, il a pour équivalent :

$$Ea = \sqrt{\frac{a^2}{4} + m^2 + 2 S} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} + 2 S}$$

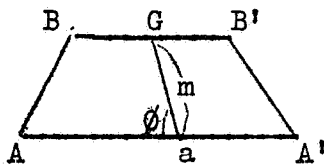
On a donc :

$$E^2_q = \frac{1}{3} (E^2_a + E^2_b + E^2_c)$$

L'équivalent du triangle s'obtient en faisant la moyenne quadratique des équivalents des trois parallélogrammes construits sur les médianes et les demi côtés correspondants.

IX - FORMULES d'approximation pour un TRAPEZE QUELCONQUE

Nous allons tout d'abord chercher une formule approchée



pour l'équivalent linéaire du trapèze. Il y a deux cas particuliers :

- Pour $b = 0$, le trapèze se réduit à un triangle et son équivalent linéaire prend la forme :

$$\frac{a^2 + AB^2 + A'B'^2}{3} + 2S = \frac{a^2}{2} + \frac{2}{3} m^2 + 2S$$

- Pour $b = a$, il se réduit à un parallélogramme, et l'équivalent prend la forme :

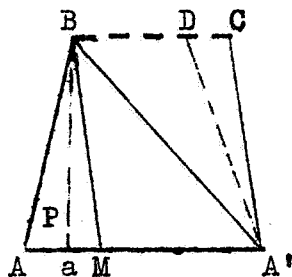
$$a^2 + m^2 + 2S$$

Dans le cas particulier où $m = \frac{\sqrt{3}}{2} a$, on note

qu'il y a équivalence entre le triangle BAA', de médiane m et de base a , et le parallé-

gramme BMA'C de côtés m et $\frac{a}{2}$: ils ont même

surface, et $m^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{2}{3} m^2 = a^2$



Par extension, nous admettons que tous les trapèzes intermédiaires tels que BDA'P, obtenus en portant $CD = MP$, ont même équivalent que ce triangle et ce parallélogramme.

Si l'on pose

$$(46) \quad \begin{cases} L = \frac{a+b}{2} \\ e = \frac{a-b}{2} \\ S = L m \sin \phi \end{cases}$$

l'expression

$$(47) \quad \begin{cases} Eq = \sqrt{L^2 + m^2 + e^2 - \frac{1}{3} \frac{e^2 m^2}{L^2}} + 2S = \\ \sqrt{L^2 + m^2 + e^2 - \frac{1}{3} \frac{e^2 m^2}{L^2}} + 2 L m \sin \phi \end{cases}$$

répond à ces trois conditions.

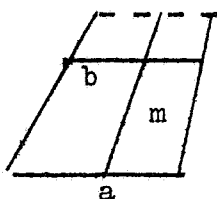
Pour un trapèze isocèle, $\sin \phi = 1$, et la médiane m se confond avec la hauteur h . On trouvera plus loin la comparaison des résultats que donne la formule ci-dessus avec les valeurs exactes de l'équivalent pour quelques trapèzes isocèles.

Par dérivation de l'équivalent linéaire, on peut obtenir des expressions des covariances des côtés a et b entre eux et avec le trapèze. On pose :

$$V = \log E_q = \frac{1}{2} \log (L^2 + m^2 + e^2 - \frac{1}{3} \frac{e^2 m^2}{L^2} + 2 L m \sin \phi)$$

La covariance g_b de b avec le trapèze, par exemple, s'obtient en donnant à m un petit accroissement de m dans le sens du côté b : on a alors :

$$(S + dS)^2 (V + dV) = S^2 V + 2 S dS g_b$$



$$g_b = V + \frac{S}{2} \frac{dV}{dS}$$

avec

$$dS = bdm \sin \phi \quad dL = \frac{1}{2} db = -e \frac{dm}{m}$$

Soit

$$g_b = V + \frac{1}{2} \frac{Lm}{b} \left(-\frac{\partial V}{\partial L} \frac{edm}{m} + \frac{\partial V}{\partial e} e \frac{dm}{m} + \frac{Vdm}{m} \right)$$

On tiendra compte de la relation de similitude :

$$L \frac{\partial V}{\partial L} + e \frac{\partial V}{\partial e} + m \frac{\partial V}{\partial m} = 1$$

et finalement :

$$(48) \quad \begin{cases} g_b = V + \frac{1}{2} \frac{L}{b} - \frac{1}{2} \frac{La}{b} \frac{\partial V}{\partial L} \\ g_a = V + \frac{1}{2} \frac{L}{a} - \frac{1}{2} \frac{Lb}{a} \frac{\partial V}{\partial L} \end{cases}$$

De même, la covariance Cab des deux côtés a et b s'obtient par :

$$Cab = g_a + \frac{S}{dS} g_a$$

Compte tenu de la relation de similitude appliquée à g_a , on trouvera :

$$(49) \quad Cab = V + \frac{3}{2} \frac{L^2}{ab} - \frac{L}{ab} (L^2 + 2 L^2) \frac{\partial V}{\partial L} + \frac{1}{2} L^2 \frac{\partial^2 V}{\partial L^2}$$

On remplacera les dérivées de V par leurs valeurs déduites de l'équivalent Eq :

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial L} = \frac{1}{Eq^2} \left(L + \frac{1}{3} \frac{e^2 m^2}{L^3} + m \sin \phi \right) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} = \frac{1}{Eq^2} \left(1 - \frac{e^2 m^2}{L^4} \right) - \frac{2}{Eq^4} \left(L + \frac{1}{3} \frac{e^2 m^2}{L^3} + m \sin \phi \right)^2 \end{cases}$$

En rapprochant (48) et (50), on obtient les expressions simplifiées suivantes :

$$\begin{cases} g_b = V + \frac{1}{2Eq^2} \left(S - eL + m^2 \left(1 + \frac{e}{L} + \frac{1}{3} \frac{e^2}{L^2} \right) \right) \\ g_a = V + \frac{1}{2Eq^2} \left(S + eL + m^2 \left(1 - \frac{e}{L} + \frac{1}{3} \frac{e^2}{L^2} \right) \right) \end{cases}$$

Et de même, en rapprochant (49) et (50) on obtient :

$$Cab = V + \frac{1}{Eq^2} \left(\frac{L^2}{2} + \frac{3}{2} m^2 + \frac{1}{6} \frac{e^2 m^2}{L^2} + 2 S \right) - \frac{1}{Eq^4} \left(\frac{L^2 + 1}{3} \frac{e^2 m^2}{L^2} + S \right)^2$$

Enfin, pour kriger le trapèze par les deux traçages a et b, on prendra un estimateur de la forme $\lambda x_b + (1 - \lambda) x_a$, λ étant le poids attribué au petit traçage b. On aura :

$$\lambda = \frac{N}{D}$$

avec

$$N = -\log a - g_b + g_a + Cab = -\log a + \frac{eL}{4ab} - \frac{L}{ab} \left(\frac{L^2}{2} + \frac{3}{2} e^2 - 2eL \right) \frac{\partial V}{\partial L}$$

$$D = -\log a - \log b + 2 Cab = -\log ab + 2V + \frac{3L^2}{ab} - \frac{L}{ab} (2L^2 + 3e^2) \frac{\partial V}{\partial L} + L^2 \frac{\partial^2 V}{\partial L^2}$$

La variance de Krigeage est alors :

$$\sigma_K^2 = -V - \log a + 2 g_a - \lambda^2 D$$

Le tableau ci-après permet de comparer les valeurs déduites des formules ci-dessus avec les valeurs exactes calculées pour 10 trapèzes isocèles inscrits dans le cercle de diamètre $d = 1$.

Tableau IV
Formules du trapèze

	S $\pi/12$ $\pi/3$	S $\pi/12$ $\pi/4$	$\pi/3$ $\pi/4$	S $\pi/12$ $\pi/6$	$\pi/3$ $\pi/6$	$\pi/4$ $\pi/6$	S $\pi/12$ $\pi/12$	$\pi/3$ $\pi/12$	$\pi/4$ $\pi/12$	$\pi/6$ $\pi/12$
a	0.7071	0.866	0.966	0.966	1.000	0.966	1.000	0.966	0.866	0.707
b	0.2589	0.500	0.259	0.707	0.500	0.259	0.866	0.707	0.500	0.259
h	0.8365	0.683	0.612	0.483	0.433	0.354	0.250	0.224	0.183	0.129
Cab exact	1.352	1.194	1.103	0.947	0.852	0.682	0.572	0.471	0.288	0.039
" approché	1.391	1.086	1.187	0.995	0.877	0.790	0.584	0.478	0.314	-0.016
ga exact	0.556	0.572	0.488	0.486	0.413	0.267	0.303	0.217	0.056	-0.213
" approché	0.546	0.568	0.480	0.484	0.409	0.260	0.308	0.214	0.053	-0.216
gb exact	0.684	0.578	0.510	0.445	0.329	0.141	0.255	0.125	-0.092	-0.451
" approché	0.670	0.568	0.479	0.443	0.323	0.122	0.267	0.125	-0.095	-0.452
V exact	0.286	0.319	0.236	0.284	0.192	0.026	0.197	0.073	-0.120	-0.426
" approché	0.277	0.318	0.230	0.282	0.188	0.022	0.182	0.066	-0.122	-0.429
λ exact	0.357	0.414	0.312	0.450	0.390	0.306	0.481	0.452	0.411	0.351
" approché	0.360	0.409	0.325	0.451	0.394	0.324	0.477	0.450	0.414	0.340
6_K^2 exact	0.604	0.415	0.426	0.266	0.268	0.290	0.111	0.125	0.138	0.127
" approché	0.581	0.459	0.367	0.238	0.251	0.221	0.136	0.127	0.122	0.151

Toutefois, ces formules sont encore relativement compliquées à manipuler. Il n'est pas inutile de rechercher des approximations plus grossières mais plus simples.

En ce qui concerne le paramètre de krigeage λ , on remarquera d'abord que a et b prennent mêmes valeurs pour les trapèzes isocèles ci-dessus lorsque l'on change α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et δ en $\frac{\pi}{2} - \delta$. Cette symétrie est à peu près observée aussi pour les valeurs numériques de λ . On en déduit qu'en première approximation λ ne dépend que du rapport a/b - c'est-à-dire est indépendant de la hauteur h. Ce point noté, on peut faire deux raison-

nements simplistes pour attribuer un poids à chacun des traçages :

- on peut penser que le meilleur estimateur du métal contenu dans le trapèze s'obtient en prenant la moyenne des quantités de métal contenues dans les deux traçages a et b. Cela revient, quant à la teneur, à attribuer un poids $\lambda_1 = \frac{b}{a+b}$ au petit traçage.

- On peut penser aussi que chacun des deux traçages commande, dans le trapèze, une même relevée $h/2$ égale à la moitié de la relevée totale h . Cela revient à pondérer le petit traçage par $\lambda_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{b}{a+b}$

La première approximation sous estime sans doute le poids du petit traçage b, tandis que la deuxième le surestime visiblement (pour $b=0$, on aurait $\lambda_2 = \frac{1}{4}$).

Une pondération intermédiaire entre ces deux extrêmes représenterait mieux les choses. Nous proposons une pondération par les racines carrées des longueurs, soit :

$$\lambda_3 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

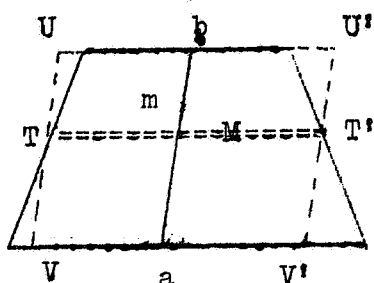
On verra sur le tableau suivant différentes valeurs de λ_1 , λ_2 et λ_3 comparées avec les valeurs exactes de λ . Deux valeurs différentes, mais voisines de λ figurent en principe en face d'une même valeur de λ_1 . Elles correspondent aux deux trapèzes isocèles de même rapport b/a :

λ_1	λ_2	λ_3	λ
0.268	0.384	0.378	0.357 0.351
0.366	0.433	0.432	0.414 0.411
0.211	0.356	0.341	0.311 0.306
0.422	0.461	0.460	0.449 0.452
0.333	0.417	0.415	0.390
0.466	0.482	0.482	0.481

En ce qui concerne la variance de Krigeage, on la comparera utilement avec la variance d'extension d'un traçage médian de longueur L dans un panneau rectangulaire de côtés L et h. Le tableau suivant donne quelques résultats :

h/L	σ_K^2	σ_E^2	h/L	σ_K^2	σ_E^2
1.732	0.58	0.71	0.268	(0.136 0.127 0.112 0.151)	0.135
1	(0.459 0.367)	0.453			
0.577	(0.237 0.251 0.221)	0.275			

Par extension, nous parvenons aux règles simples d'approximation ci-après :



1°/ Etant donné un trapèze ayant deux côtés parallèles inégaux a et b et une médiane m (par médiane, on entend la droite joignant les milieux des côtés a et b), on calculera l'équivalent linéaire par la formule :

$$Eq = \sqrt{L^2 + m^2 + e^2 - \frac{1}{3} \frac{e^2 m^2}{L^2}} + 2S$$

$$\begin{aligned} & (L = \frac{a + b}{2}) \\ & (e = \frac{a - b}{2}) \\ & S = \text{surface} \end{aligned}$$

2°/ La variance d'extension d'un traçage médian TT' de longueur L sera prise égale à la variance d'extension d'un traçage médian de longueur L dans le parallélogramme construit sur L et sur la médiane m (UU' VV' sur la figure).

3°/ Si le trapèze est reconnu par les deux traçages a et b de tête et de base, on pondérera les teneurs par les racines carrées des longueurs ($\lambda = \frac{V b}{V a + V b}$) et on prendra pour variance de Krigeage la variance d'extension des deux traçages L de tête et de base dans le parallélogramme précédent - c'est-à-dire, en pratique, la même variance qu'au 2°/ ci-dessus.

La règle qui consiste à pondérer par les racines carrées des longueurs paraîtra peut-être insolite, et ne devra pas être appliquée sans réflexion. Il convient d'en préciser les limites de validité. Toutes les théories exposées ici supposent :

- que l'on soit au sein d'un gisement homogène et isotrope.
- que le panneau à estimer (ici un trapèze) occupe une position quelconque à l'intérieur du gisement.

La condition d'homogénéité est primordiale. Si, par exemple, une zone hétérogène très riche se dessine au niveau du traçage b, à l'intérieur du gisement proprement dit dans lequel a est tracé, il n'y a plus aucun krigeage possible entre a et b. Le seul problème qui se pose est de déterminer l'extension de la zone riche hétérogène du traçage b - c'est-à-dire un problème géométrique.

La condition d'isotropie est moins sévère. Si, en effet, il y a une anisotropie purement géométrique, on pourra toujours transformer le trapèze par une affinité convenablement déterminée et appliquer la théorie ci-dessus. S'il y a une zonalité oblique ou orthogonale vis à vis des traçages, la théorie reste utilisable pourvu que les traçages aillent d'un bord à l'autre de la formation.

La troisième condition est plus préoccupante. Si l'on analyse, en effet, les bases conceptuelles sur lesquelles est édifiée la théorie des schémas statistiques, on s'aperçoit que celle-ci ne concerne que des panneaux ou des gisements supposés extraits d'un grand gisement fictif homogène doué de la même loi de dispersion intrinsèque, et y occupant une position quelconque. Elle implique que les limites dans l'espace du champ géométrique réel sont sans influence sur la variation régionalisée. Or, dans tous les cas où on aura affaire à des panneaux en forme de trapèze, les traçages a et b seront limités par les frontières du champ géométrique. S'il n'y a pas de corrélation entre la teneur et la longueur d'un niveau, la théorie reste applicable. Mais bien souvent une telle corrélation existera, soit positive, soit négative, sans que la théorie ci-dessus puisse

en rendre compte. On doit alors, en principe, introduire la variable régionalisée à une dimension, définie comme le tonnage au mètre d'approfondissement. Mais on disposera de trop peu de données pour espérer pouvoir déterminer la loi de dispersion de cette variable. On distinguera, en pratique, deux cas :

- Correlation positive : le filon est riche dans les parties renflées, et s'appauvrit aux terminaisons. Si l'on fait l'estimation à partir des tonnages au mètre - c'est-à-dire, en pratique, si l'on pondère par les longueurs des traçages, on attribuera un poids maximum aux parties riches et un poids minimum aux parties pauvres. Il sera souvent plus prudent de pondérer par les racines carrées des longueurs, conformément à la théorie ci-dessus (bien qu'elle ne soit pas strictement applicable) et conformément à une vieille règle empirique parfois observée.

- Correlation négative : si le filon s'appauvrit dans les parties renflées et s'enrichit dans les étranglements, la conclusion s'inverse. La prudence conseille alors de raisonner en termes de tonnage au mètre d'approfondissement - c'est-à-dire de pondérer par les longueurs.

C'est en définitive au géologue, ayant une connaissance directe du comportement de la minéralisation à estimer, qu'il appartiendra de choisir entre ces différentes méthodes. Il conviendra, cependant, d'éviter d'employer pour un même gisement homogène, tantôt l'une et tantôt l'autre méthode. Par exemple, il ne serait pas correct, par prudence excessive, de pondérer par les racines les traçages longs et riches, ou courts et pauvres, et par les longueurs les traçages courts et riches ou longs et pauvres : on introduirait ainsi un biais.