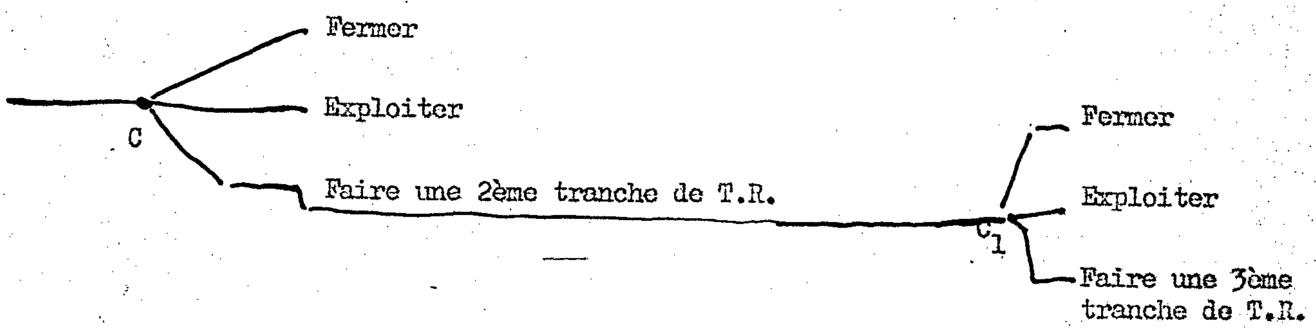
N° 39

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 39

A QUEL MOMENT CONVIENT-IL D'ARRETER LES TRAVAUX DE RECONNAISSANCE ?

Le problème que nous abordons ici est l'un des plus importants de la recherche minière : à quel moment convient-il d'arrêter les travaux de reconnaissance et de prendre une décision, positive ou négative, quant à la mise en exploitation du gisement. Posé dans toute sq généralité, un tel problème serait assez délicat à formuler. Nous nous contenterons ici d'analyser les éléments qui doivent commander la décision relativement au passage d'une phase de la recherche à la phase suivante. Une première tranche de travaux de reconnaissance est supposée avoir été déjà exécutée. Elle a fourni des informations chiffrées sur le tonnage et la teneur du gisement reconnu, et les méthodes de la géostatistique ont permis de fixer la précision avec laquelle ces informations représentent la réalité. Une étude d'exploitabilité, d'autre part, a permis de définir pour quels tonnages et quelles teneurs, l'exploitation pouvait être payante. Au point crucial C auquel on est ainsi parvenu, trois décisions sont possibles :



1 - On décide de ne pas exploiter et on abandonne le gisement ;

2 - On décide d'exploiter tout de suite ;

3 - On décide de faire une 2ème tranche de travaux de reconnaissance.

Si l'on adopte cette troisième décision, on se trouve à l'issue de la deuxième tranche de travaux de reconnaissance, en un nouveau point crucial C_1 où, théoriquement les trois décisions sont à nouveau possibles. En pratique, cependant, il ne sera pas question dans la plupart des cas, d'envisager une troisième tranche de reconnaissance et le choix se limitera, en C_1, à mettre ou non le gisement en exploitation.

Cette deuxième phase de T.R. que l'on envisage dans la 3ème décision sera imposée par la technologie. Par exemple, si l'on a reconnu le gisement par traçages équidistants de 60 m, la deuxième phase consistera à tracer des sous niveaux intermédiaires, de manière à ramener la relevée entre niveaux à 30 m. Ou bien, si l'on fait des sondages à maille carrée, la deuxième phase consistera à centrer la maille (c'est-à-dire à doubler le nombre des sondages). Cette deuxième phase ne dépend donc pas de façon continue d'un paramètre que l'on peut choisir. Elle est imposée, et le seul choix possible consiste à la réaliser ou non. On aura parfois l'illusion qu'un tel choix continu est possible. Par exemple, ayant reconnu un gisement filonien puissant par trois niveaux et échantillonné ces niveaux par sondages percutants horizontaux pris du toit au mur, on pourrait s'imaginer améliorer la connaissance que l'on a du gisement en resserrant la maille des percutants dans les niveaux existants, sans faire de travaux miniers supplémentaires. La maille des percutants apparaitrait ainsi comme un paramètre à peu près continu. Mais on sait (théorème du Statisticien Déçu) que l'amélioration apportée par les nouveaux percutants sera presque toujours négligeable, la plus grande partie de la variance d'estimation provenant de l'extension des sections (supposées connues) à leurs tranches d'influence à 3 dimensions - extension sur laquelle le resserrement de la maille des percutants est sans action.

Par contre, la géostatistique sera capable de prévoir à l'avance la nouvelle précision avec laquelle le gisement sera connu après l'éxécution de la deuxième phase de T.R. telle que la technologie l'impose. Tout le problème va consister à évaluer la valeur du supplément d'information que l'on peut ainsi acquérir, et de la comparer au prix de revient des T.R. eux-mêmes. Et, parmi les trois décisions possibles, on devra choisir celle qui conduit à la plus grande valeur probable du bénéfice futur, en aval du point C, c'est-à-dire sans tenir compte des dépenses antérieures (mais en tenant compte, pour la troisième décision, du prix de revient de la deuxième tranche de T.R., puisque celle-ci n'est pas encore exécutée). Dans le cas général, il y a interférence entre le tonnage T, la teneur moyenne m et la teneur limite d'exploitabilité m_o. Si l'on augmente m_o, le tonnage T disponible diminue en général, tandis que m augmente. Mais inversement, s'il se trouve que le tonnage réel est plus important qu'on ne s'y attendait, il est en général possible d'abaisser la teneur limite m_o, ce qui par contre coup modifie à nouveau T et m. Avant d'aborder le problème général, nous examinerons les deux cas particuliers simples suivants :

1) Le tonnage réel T et la teneur limite m_o peuvent être considérés comme connus a priori. La décision à prendre dépend alors uniquement de la teneur m. Ce cas correspond à peu près à la plupart des petits et moyens gites métalliques filoniens ou parafiloniens, pour lesquels les travaux de première phase permettent de fixer le tonnage avec une précision bien meilleure que la teneur.

2) La teneur moyenne réelle, au contraire, peut être considérée comme très bien connue a priori, tandis qu'une grosse incertitude règne sur le tonnage. La décision à prendre dépend alors uniquement du tonnage. Ce cas correspondra - en première approximation - aux grands gisements sédimentaires de fer, potasse, etc, ... et aussi à certains gisements métalliques riches (de type tout ou rien) se présentant sous la forme d'un chapelet de lentilles, de petites ou moyennes dimensions, disséminées dans une formation plus vaste.

I - CAS OU LA TENEUR INTERVIENT SEULE

Si le tonnage est T, la teneur limite m_o et la teneur réelle (inconnue) z, le bénéfice que l'on retirerait d'une exploitation serait :

$$(1) \qquad B = A\,T\,(z - m_o)$$

la constante A représentant la valeur carreau du point de métal contenu dans une tonne de minerai. Si au contraire on décide de fermer tout de suite le chantier et d'abandonner le gisement, on aura par définition :

$$B = 0$$

La première décision conduit à un bénéfice nul (en aval du point C). En ce qui concerne la deuxième décision, elle conduit à un bénéfice donné par (1), donc positif si $z > m_0$ et négatif si $z < m_0$. Mais la teneur réelle z est inconnue. On en connait seulement une estimation m, à partir des TR de la première phase. On peut alors assimiler z à une certaine variable aléatoire de valeur probable m, et dans ces conditions la valeur probable du bénéfice futur - dans l'hypothèse où on choisit la deuxième décision est :

$$(2) \quad E(B) = AT(m - m_0)$$

A la différence de (1), cette équation ne représente plus un bénéfice certain. La teneur réelle z du gisement peut, en effet, différer notablement de m par excès ou par défaut - et l'on aura alors un bénéfice plus important, ou au contraire plus faible ou même une perte. Mais si l'on disposait de mille gisements semblables ayant tous donné cette teneur estimée m, le bénéfice moyen que l'on réaliserait en les exploitant tous serait exactement : $AT(m - m_0)$

On voit - c'était bien évident a priori - que si le choix se limitait aux deux premières décisions (abandonner définitivement, ou exploiter tout de suite), le critère serait donné par le signe de $m - m_0$: on exploiterait si la teneur limite était inférieure à la teneur estimée m, on fermerait dans le cas contraire.

Examinons maintenant ce qui se passe si l'on décide de faire une deuxième tranche de TR. Antérieurement à cette deuxième phase, z est une variable aléatoire de valeur probable.

$$(3) \quad E(z) = m$$

et de variance σ_E^2 (calculable par la géostatistique). Après avoir exécuté cette deuxième phase, on aura une nouvelle estimation y de z, plus précise que la première, et z aura la valeur probable

$$(4) \quad E(z) = y$$

et la variance $\sigma^2_{\varepsilon'}$ (inférieur à σ^2_{ε}), calculable a priori par la géostatistique. A ce moment là, on examinera si cette nouvelle estimation y est ou non supérieure à la teneur limite m_0. On ne tiendra pas compte de l'éventualité, en général peu réaliste, où l'on déciderait une troisième phase de recherche. D'après ce qui précède, on décidera d'exploiter si y est supérieure à m_0, et alors :

(5) $E(B) = A\,T\,(y - m_0) > 0$

Si au contraire y est inférieure à m_0, on décidera de fermer, et on aura :

(6) $E(B) = 0$

Telle sera la situation au point C'. Mais nous sommes au point C, où les travaux de deuxième tranche n'ont pas encore été réalisés. On doit donc diminuer E(B) du prix de revient P de ces TR. Et d'autre part, y n'est pas encore connu, mais peut être considérée comme une variable aléatoire de valeur probable m et de variance σ^2.
On voit facilement que l'on doit avoir :

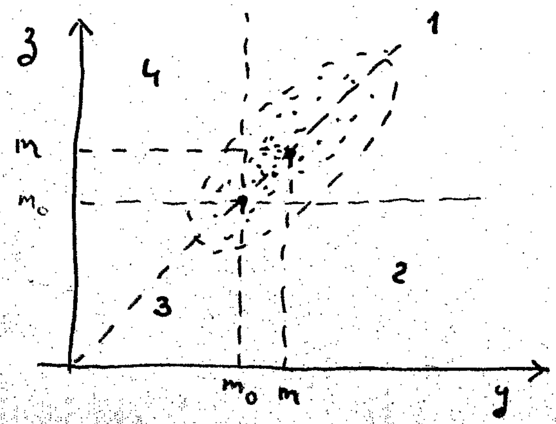
(7) $$\sigma^2_{\varepsilon} = \sigma^2_{\varepsilon'} + \sigma^2$$

En effet, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sigma^2 & = & D^2\,(y - m) \\ \sigma^2_{\varepsilon} & = & D^2\,(z - m) \\ \sigma^2_{\varepsilon'} & = & D^2\,(z - y) \end{array}\right.$$

et les différences $(z - y)$ et $(y - m)$ sont indépendantes. On en tire :

(8) $$\sigma^2 = \sigma^2_{\varepsilon} - \sigma^2_{\varepsilon'}$$



Le nuage de corrélation ci-joint résume bien les données du problème. On porte y en abscisse et z en ordonnée, et chaque point représente un gisement possible. Le nuage est centré au point (m, m) et s'allonge le long de la première bissectrice, puisque la valeur probable de z lorsqu' y est connu est y.

(la droite de régression a une pente égale à l'unité). Prenons par exemple le cas $m > m_0$ Si l'on avait choisi la deuxième décision, on aurait exploité non seulement tous les gisements bénéficiaires des quadrants 1 et 4 situés au dessus de l'horizontale d'ordonnée m_0 mais également tous les gisements déficitaires des quadrants 2 et 3 situés au dessous. Si au contraire, on choisit **la troisième décision**, les TR supplémentaires vont nous donner une nouvelle estimation y. On exploitera si $y > m_0$ c'est-à-dire dans tous les cas bénéficiaires du quadrant 1, mais aussi dans les cas déficitaires (beaucoup moins nombreux) du quadrant 2. Si au contraire $y < m_0$ on fermera : dans les cas nombreux du quadrant 3, on évitera une perte, mais aussi, dans les cas, beaucoup moins nombreux, du quadrant 4 on manquera ainsi un gain. L'effet global sur E (B) est évidemment positif, mais il convient d'en retrancher le coût P des TR eux-mêmes.

Pour faire un calcul exact, il faut admettre une hypothèse sur la loi de probabilité des variables z et y. En pratique, cette hypothèse n'a pas grande influence sur le résultat. On obtient des résultats numériques comparables avec, par exemple, des lois normales ou log normales. Nous avons choisi la loi log normale, qui conduit à des formules plus élégantes, et correspond mieux au fait que les erreurs doivent être prises sous forme relative (avec une loi normale pour l'erreur, la teneur estimée étant 1 %, les teneurs + 3 % et - 1 % apparaitraient comme également probables - ce qui n'a pas de signification physique, tandis qu'avec une loi lognormale ce sont les teneurs 3 % et 0,333 % qu'il convient de comparer).

Soit donc y une variable lognormale de médiane γ et de variance σ^2 , avec :

$$(9) \qquad E(y) = m = \gamma e^{\sigma^2/2}$$

On prend la variable normale réduite :

$$(10) \qquad Y = \frac{1}{\sigma} \log \frac{y}{\gamma} = \frac{1}{\sigma} \log \frac{y}{m} + \frac{1}{2}\sigma$$

A y fixé $> m_0$, le bénéfice est donné par (5), tandis qu'il est nul pour $y < m_0$ on a donc au total :

$$E(B) = \frac{A\,T}{\sqrt{2\pi}} \int_{Y_0}^{\infty} (\gamma e^{\sigma Y} - m_0)\, e^{-\frac{Y^2}{2}} \, dY \quad - P$$

Yo étant la variable réduite (10) associée à la teneur limite. On obtient :

$$(11) \quad E(B) = A\,T\left[m\,G(Yo - \sigma) - m_o\; G(Yo)\right] - P$$

La fonction G étant l'intégrale classique de Gauss, et P étant le coût de la deuxième tranche de TR.

En résumé, chacune des trois décisions conduit à une valeur calculable de l'espérance mathématique du bénéfice futur, comme le montre le tableau ci-joint :

I - (Abandonner le gisement)	$E(B_1) = 0$
II - (Exploiter)	$E(B_2) = A\,T\,(m - m_o)$
III - (2ème tranche de TR)	$E(B_3) = A\,T\left[m\,G(Yo - \sigma) - m_o\,G(Yo)\right] - P$

On choisira naturellement celle des trois décisions qui rend maximum l'espérance mathématique du bénéfice futur.

EXEMPLE NUMERIQUE

Le gisement de Pb Zn de la Finoza (Corse) a été reconnu par un niveau (galerie et percutants) et des travaux de surface. La valeur du Pb, du Zn et de l'Ag contenu à la tonne a été estimé à 3 000 anciens francs avec une précision que la géostatistique montre être représentée par un écart type (relatif) $\sigma_\varepsilon = 0.15$. La teneur limite correspond à 3 000 francs à la tonne, de sorte que l'on est exactement dans le cas marginal. Nous ferons les calculs, cependant, pour trois valeurs différentes de m_o, soit 2700, 3 000 et 3 300. Le tonnage, que l'on peut considéré comme connu, est de 400 000 tonnes. Une deuxième campagne de TR, qui consisterait à tracer un sous niveau intermédiaire coûterait 40 millions, et conduirait à un nouvel écart type $\sigma_{\varepsilon'} = \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon$ (on est dans la zone linéaire du variogramme). On en déduit l'écart type de y autour de M. :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 - \sigma_{\varepsilon'}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma_\varepsilon = 0.13$$

En appliquant les formules précédentes, on obtient :

	$m_o = 2700$	$m_o = 3\,000$	$m_o = 3\,300$
I - (on ferme) $E(B_1)$	0	0	0
II - (on exploite) $E(B_2)$	+ 120 millions	0	- 120
III - (2ème tranche de TR) $E(B_3)$	136 - 40 = 96	56 - 40 = +16	20 - 40 = -20

Si la teneur limite est 2 700, on doit exploiter. Si elle est de 3 300, on doit fermer. Si elle est de 3 000 (cas exactement marginal), il y a un léger intérêt à faire la deuxième tranche de travaux. C'est d'ailleurs là une circonstance assez générale : lorsque l'on est exactement marginal, les informations apportées par une campagne supplémentaire présentent le maximum d'intérêt; cet intérêt s'amortit assez vite dès que l'on s'écarte du cas marginal par excès ou par défaut. Dès que l'on est pratiquement sûr que la teneur réelle est supérieure (ou inférieure) à la teneur limite, on décide d'exploiter (ou de fermer) et des travaux complémentaires ne présentent pas d'intérêt.

II - CAS OU LE TONNAGE INTERVIENT SEUL

Pour certains grands gisements sédimentaires à teneur peu variable (Fer, Potasse... on pourra parfois admettre que la rentabilité d'une exploitation est liée uniquement à l'existence d'un tonnage de minerai suffisant pour amortir les investissements, en général considérables, que l'on est obligé de faire au départ. Quand on essaye de formuler ce problème, on s'aperçoit que l'un des facteurs déterminants est le choix du taux de production annuelle, que nous désignerons par t tonnes /an. En fait, le tonnage total T étant supposé exactement connu, ainsi que les caractéristiques technologiques des différents modes d'exploitation possibles, on s'aperçoit qu'il existe une valeur optimum de la production annuelle t, valeur réalisant le maximum du bénéfice futur (BLONDEL). La théorie générale veut que ce soit la valeur actualisée du bénéfice futur qui soit optimisée. On constate, cependant, qu'en actualisant on est conduit à formuler des règles contraires à la pratique (tout gisement, si gros soit-il devrait être vidé en un très petit nombre d'années), tandis qu'en prenant un taux d'actualisation $i = 0$ on retombe sur la règle pratique selon laquelle la production annuelle t doit être proportionnelle à la racine du tonnage T total : il conviendra de rendre compte de cet apparent paradoxe. Ce sera l'objet d'un premier paragraphe. Nous examinerons ensuite, dans un deuxième paragraphe, ce que coûte une erreur sur l'estimation du tonnage, en comparaison du prix de revient des travaux nécessaires pour réduire cette erreur, et nous essayerons d'en déduire des règles permettant de déterminer le niveau optimum de la reconnaissance.

1) Optimum de la production annuelle t - lorsque le tonnage T est connu exactement.

Nous reprenons ici un calcul de M. BLONDEL ainsi que les valeurs numériques qu'il a choisies pour traiter un exemple correspondant à un gisement de fer africain.

Les notations sont les suivantes :

V = Valeur de la tonne de minerai - (V = 15 dollars)

T = Tonnage total du gisement (connu)(on prendra 200 millions et un milliard de tonnes)

t = production annuelle (à déterminer)

p = prix de revient (extraction, traitement, transport au port minéralier) de la tonne de minerai. C'est une fonction $p(t)$ de la production annuelle. On prendra :

$$(12) \qquad p(t) = a_0 + \frac{a_1}{t} \qquad (a_0 = 9, \quad a_1 = 3.10^6)$$

I = montant des investissements (en dollars) : c'est également une fonction $I(t)$ de t

On prendra pour $I(t)$ une fonction linéaire :

$$(13) \qquad I(t) = Co + C_1 t \qquad (Co = 50.10^6, \quad C_1 = 10)$$

N = durée de vie de la mine, évidemment donnée en fonction de t, par :

$$(14) \qquad N = \frac{T}{t}$$

i = taux d'actualisation (nous prendrons soit $i = 10$ %, soit $i = 0$).

Avec ces notations, on écrit immédiatement la valeur B_i des bénéfices futurs actualisés pour le taux i%.

$$(15) \qquad Bi = \frac{1 - e^{-iN}}{i} (V-p)t - I$$

avec, en particulier pour $i = 0$

$$(16) \qquad Bo = (V-p)\,T-I$$

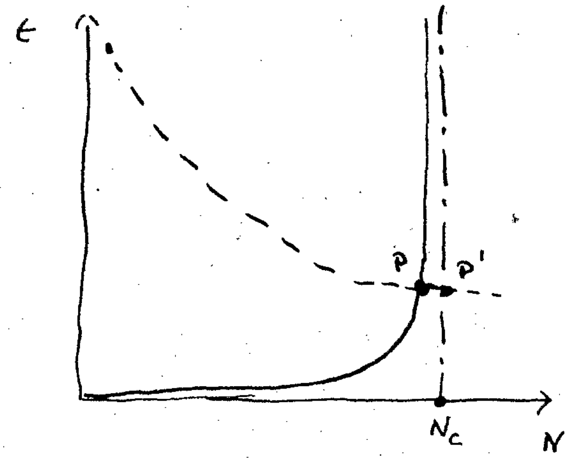
La valeur actuelle du bénéfice futur Bi sera maximum pour une production annuelle t vérifiant :

$$(17) \qquad \frac{dBi}{dt} \quad \frac{1 - e^{-iN}}{i} \left[V - \frac{d(pt)}{dt} \right] - N\,(V - p)e^{-iN} - \frac{dI}{dt} = 0$$

Compte tenu de (12), (13) et (14), on voit que la production annuelle optimum est donnée par la résolution du système suivant :

$$(18) \qquad t = \frac{T}{N}$$

$$t = \frac{Na_1}{C_1\, e^{iN} - \frac{(V - ao)}{i}(e^{iN} - 1 - iN)}$$



La première équation est représentée par l'hyperbole $Nt = C^{te}$. Quant à la deuxième, on peut voir qu'elle admet une asymptote verticale pour une valeur Nc annulant le dénominateur, et que, sauf pour des valeurs de t très petite, elle reste très proche de cette asymptote. Le point P d'intersection de cette courbe avec l'hyperbole $Nt = C^{te}$ est donc très proche du point P' où l'asymptote coupe cette hyperbole. Pratiquement, celà veut dire que, quel que soit le tonnage T total, on devra vider le gisement en un même nombre Nc d'années, c'est-à-dire adopter $t = \frac{T}{Nc}$

C'est là une conclusion tout à fait contraire à la pratique usuelle et, à dire vrai, assez choquante. Si l'on analyse la pratique réelle, on constate que plus un gisement est gros, et plus son exploitation dure longtemps : la production annuelle t et la durée de vie N de la mine augmentent tous les deux avec T, mais plus lentement que T, par exemple comme $\sqrt{T}$. Nous montrerons dans un instant que l'on retrouve bien ce résultat en prenant i = 0, c'est-à-dire en n'actualisant pas.

Dans le cas étudié avec les valeurs numériques indiquées par BLONDEL, et un taux i = 10 %, l'équation (18) s'écrit :

$$t = \frac{3.10^6 \, N}{10 \, e^{N/10} - 60 \, (e^{N/10} - 1 - \frac{N}{10})}$$

D'où la table suivante :

N (en années)	t (en millions de tonnes/an)	T = Nt
6	3,6	21,6
6,1	3,98	24,2
6,2	4,43	27,4
6,3	4,97	31,3
6,4	5,65	36,2
6,5	6,33	41,1
6,6	7,16	47,3
6,7	8,19	54,8
6,8	9,54	64,9
6,9	11,82	81,6
7,0	15,5	109
7,1	25,1	178
7,2	48,0	350
7,3	219,0	1600

Le gisement de 50 millions de tonnes devrait être exploité en 6 ans et 7 mois, celui de 100 millions en 7 ans et celui d'un milliard et demi en 7 ans et quatre mois. (à raison de plus de 200 millions de tonnes par an).

Cela signifie que ce gisement devrait être vidé en sept ans, quel que soit son tonnage. Pour un gisement de 200 millions de tonnes, on devrait, en particulier adopter une production annuelle de 30 millions de tonnes par an, valeur qui ne peut pas être considérée comme réaliste (et qui est effectivement très supérieure au chiffre réellement adopté et qui est de 5 à 10 millions de tonnes/an).

On peut penser que ce résultat est dû, en partie, au fait que la valeur V de la tonne (15 dollars) est très élevée vis à vis du prix de revient d'exploitation p (de l'ordre de 10 dollars). Il nous a paru intéressant de faire les calculs en prenant V = 10 (cas a priori marginal) et V = 12. Pour V = 10, l'équation (18) donnerait :

$$t = \frac{3.10^6 \; N}{10e^{N/10} - 10(e^{N/10} - 1 - \frac{N}{10})} = \frac{3.10^6 N}{10 + N}$$

Quelque soit N, on trouve une production optimum t inférieure à 3.10^6 tonnes, c'est-à-dire toujours faible. Cela signifie que le gisement n'est jamais exploitable quelque soit son tonnage. Pour minimiser la perte en valeur actuelle, les équations conduisent naturellement à des productions annuelles très faibles.
Pour V = 12, enfin, on aurait :

$$t = \frac{3.10^6 N}{10\; e^{N/10} - 30\; (e^{N/10} - 1 - \frac{N}{10})} = \frac{3.10^6 \; N}{30 + 3N - 20e^{\;N/10}}$$

N	t	T
6	1.55 10^6	9.3 10^6
8	2.55	20,4
10	5,5	55
11	11,0	121
11,5	26,8	308
11,6	346,0	4000

On exploiterait 50 millions de tonnes en 10 ans, 100 millions en 11 ans, et plusieurs milliards en 11 ans et demi.

Enfin, on définira le tonnage limite d'exploitabilité comme le tonnage minimum assurant un bénéfice (15) positif pour la production annuelle définie par (18). Dans le cas V = 15, avec N = 7 ans, on voit que pratiquement :

$$B = \frac{1 - e^{-0.7}}{0.1} \left[(V - ao)\frac{T}{7} - a_1 \right] - Co - C_1 \frac{T}{7}$$

est positif à partir de : $T \geqslant 22.10^6$ tonnes

Examinons maintenant ce que l'on obtient en <u>n'actualisant pas : i = 0</u>

On aura :

$$(19) \qquad B = (V - p)T - I = (V - ao)T - a_1 \frac{T}{t} - Co - C_1 t$$

et le bénéfice sera maximum pour :

$$(20) \qquad t = \sqrt{\frac{a_1}{C_1} T} \qquad \text{ou} \quad N = \sqrt{\frac{C_1}{a_1} T}$$

La production annuelle et la durée de la mine doivent être prises proportionnelles à la racine carrée du tonnage. On retrouve ainsi une vieille règle empirique suivant laquelle un gisement quatre fois plus gros doit assurer une production deux fois plus importante. Il est également très satisfaisant de constater que le coefficient de $\sqrt{T}$, qui est $\sqrt{\frac{a_1}{C_1}}$ ou $\sqrt{\frac{C_1}{a_1}}$, ne dépend que des parties mobiles de p(t) et I(t), en bon accord avec le marginalisme. En particulier la valeur de V (prix de vente du minerai) n'intervient pas sur le niveau optimum de production : celui-ci ne dépend que du tonnage et des caractéristiques technologiques a_1 et C_1 de l'exploitation. Numériquement, on trouve :

T	t	N
20.10^6	2.10^6	10
50.10^6	$3,9.\ 10^6$	12,9
100.10^6	$5,5.\ 10^6$	18,2
200.10^6	$7,8.\ 10^6$	25,8
500.10^6	$12,3.\ 10^6$	40,7
1000.10^6	$17.4.\ 10^6$	57,5

Chiffres cette fois très vraisemblable (et en accord avec le projet réellement adopté).

On définira également sans difficulté le tonnage limite d'exploitabilité (pour $i = 0$). En effet, lorsque t est choisi d'après (20), le bénéfice (19) devient :

$$B_{max} = (V - ao)\,T - 2\sqrt{a_1 C_1\, T} - Co$$

il est positif pour

$$\sqrt{T} > \frac{\sqrt{a_1 c_1} + \sqrt{a_1 c_1 + c_0 (V - a_0)}}{V - a_0}$$

Numériquement, **pour** l'exemple étudié :

$$\sqrt{T} > 3950 \qquad T > 15,6.\ 10^6 \text{ tonnes}$$

Ainsi donc, on obtient des résultats réalistes en prenant un taux d'actualisation nul, et des résultats franchement aberrant en actualisant. C'est là un résultat assez contraire aux théories économiques habituelles, et il convient de s'y arrêter quelque peu. Remarquons tout d'abord que le point de vue d'une économie globale, ou collectiviste, conduirait à raisonner sur un taux d'actualisation nul. De ce point de vue, en effet, l'objectif à atteindre est de produire chaque année au moindre prix de revient la quantité H de minerai qui représente les besoins de l'industrie pour l'année en cours. Imaginons, pour simplifier l'exposé, que nous disposions d'un grand nombre de gisement ayant tous les mêmes caractéristiques (mêmes tonnages, et même fonction $I(t)$ et $p(t)$). Le seul problème est alors de déterminer le nombre k de gisement qui doivent se trouver simultanément en exploitation, la production annuelle de chacun d'eux étant t telle que :

$$k\,t = H$$

Les dépenses à faire pour assurer cette production H sont d'une part les dépenses directes d'exploitation $H\,h(t)$ et d'autre part les investissements $\frac{H}{T}\,I\,(t)$ qu'il convient de faire pour assurer le remplacement des $\frac{H}{T}$ gisements qui viennent à épuisement cette année là. On détermine donc k ou t de manière à minimiser la somme :

$$H\left[h(t) + \frac{I(t)}{T}\right]$$

ce qui revient exactement à faire le calcul précédent avec $i = 0$.

Cette disparition du taux d'intérêt dans les équations d'une économie globale mérite réflexion. Une telle économie considère globalement les besoins et les possibilités de l'industrie minière prise dans son ensemble, et non pas ceux de chaque gisement individuel. Prise dans son ensemble, l'industrie minière doit être considérée comme pratiquant l'autofinancement. Les bénéfices bruts de l'ensemble des gisements en exploitation dans l'année en cours servent à financer les investissements que l'on doit faire la même année pour ouvrir de nouvelles exploitations en remplacement de celles qui viennent à épuisement. Les investissements relatifs à chaque gisement particulier ne sont donc pas amortis sur la production future de ce gisement lui-même, mais sur l'ensemble de la production réalisée cette année là par tous les gisements en exploitation. Les investissements apparaissent ainsi comme une simple charge d'exploitation pour reconstitution de gisement - et le taux d'actualisation disparaît, puisque l'on n'a plus à comparer entre elles que des dépenses effectuées la même année.

Dans une économie concurrentielle, ce point de vue doit être adopté par une Société minière assez importante pour autofinancer ses exploitations. Cette Société a, par exemple, besoin de tant de milliers de tonnes de plomb chaque année pour alimenter ses fonderies : le seul problème consiste pour elle à s'assurer cet approvisionnement au plus faible prix de revient, donc en minimisant la somme des dépenses d'exploitation et des investissements del'année en cours. Elle déterminera donc la production optimum de chaque gisement particulier selon les équations (20), donc avec $i = 0$. Et de fait ces équations correspondent beaucoup mieux à la pratique réelle que (18).

Le taux d'intérêt, en réalité, ne sera pas supprimé. Il interviendra quand il s'agira de juger de la rentabilité de chaque affaire. Autrement dit, on déterminera les caractèristiques optimum d'une exploitation éventuelle comme si le taux d'actualisation était nul, c'est-à-dire avec les équations (20),et l'on déci-

... / ...

dera de la mise en exploitation en examinant le bilan financier de l'affaire, donc en appliquant le taux i du marché au résultat de l'exploitation : le t tiré des équations (20) est porté dans l'expression (15) du bénéfice actualisé B_i, et on exploitera si ce B_i est positif.

Une telle attitude paraîtra peut être illogique. Il semble bien, cependant, qu'elle représente le comportement réel d'une Société minière en économie concurrentielle : On doit, en effet, déterminer la production annuelle t de chaque gisement avec un taux d'intérêt nul, sans quoi l'on se condamne à dépenser davantage d'argent chaque année pour assurer une production donnée, et d'un autre côté, on ne peut décider la mise en exploitation d'un gisement que si celle-ci doit être bénéficiaire compte tenu du taux d'intérêt i.

A titre d'indication, nous indiquons sur le tableau suivant les dépenses annuelles totales qu'il convient de faire chaque année pour assurer une production d'un milliard de tonnes, lorsque l'on dispose d'un grand nombre de gisements de tonnage $T = 1$ milliard de tonne ; en moyenne, un gisement est épuisé chaque année et un autre doit être ouvert :

	$i = 0$	$i = 10\ \%$
- Production t	$17{,}4\ 10^6$	$143.\ 10^6$
- Nombre de gisements exploités simultanément.	57,5	7
- Dépenses d'exploitation $h(t)$	$9\ 172\ 10^6$	$9021\ 10^6$
- Investissements I	$224\ 10^6$	$1480\ 10^6$
Dépense totale annuelle	9,396 milliards	10,501 milliards

.../...

2/ **Niveau optimum de la reconnaissance** - Pour rester cohérent avec le point de vue exposé ci-dessus, nous devrons raisonner à taux d'actualisation nul. De fait, les dépenses de reconnaissance apparaissent comme des préinvestissements qu'il est nécessaire de consentir chaque année si l'on désire ouvrir l'année suivante le ou les gisements destinés à remplacer ceux qui sont venus à épuisement. Du reste, on pourrait aussi conduire les calculs avec $i \neq 0$ En général, on sait très bien chiffrer à l'avance ce que coûtera une campagne de reconnaissance (tant de mètres de sondages à tel prix). En regard, il faut faire figurer la valeur de l'information recueillie, ou si l'on veut, savoir chiffrer ce que coûterait une erreur sur le tonnage. A la différence du problème précédent, où la perte due à l'erreur avait une origine unique (possibilité de mettre en exploitation des gisements en réalité inframarginaux) la perte, ici, provient de deux sources : Tout d'abord, comme au premier paragraphe, il se peut que le tonnage réel soit inférieur au tonnage limite, même si l'estimation a conduit à un chiffre plus élevé. Pour un gisement comme Fort-Gouraud, un tel risque n'existe pratiquement pas, mais il peut cesser d'être négligeable pour des gisements plus marginaux. Il conviendra d'en tenir compte. Mais il y a une deuxième source de perte : du fait que le tonnage a été estimé à une valeur T différente de la valeur réelle T_0, on a fixé la cadence d'exploitation à une production annuelle t optimum pour le tonnage T, mais différente de la cadence optimale to correspondant au tonnage réel to.

Examinons d'abord cette première perte. Si le tonnage réel To était connu, on prendrait la cadence annuelle :

$$(21) \qquad t_0 = \sqrt{\frac{a_1}{c_1}\, T_0}$$

et on aurait le bénéfice optimum :

$$(22) \qquad B_0 = (V - a_0)T_0 - 2\sqrt{a_1 c_1 T_0} - C_0$$

Mais, en fait, ce tonnage a été estimé à $T \neq t_0$, et on a pris la cadence :

$$t = \sqrt{\frac{a_1}{c_1}\, T} \neq t_0$$

qui va entraîner un bénéfice B moindre :

$$B = T_0(V - a_0) - a_1\frac{T_0}{t} - C_0 - c_1 t$$

D'où une perte due à l'erreur sur To, qui est :

$$B_0 - B = \sqrt{a_1 c_1}\left[\sqrt{T} + \frac{T_0}{\sqrt{T}} - 2\sqrt{T_0}\right]$$

... / ...

Si l'on pose :

$$(23) \quad \theta = \frac{T-T_0}{T_0}$$

on doit s'attendre à observer une perte du 2ème ordre par rapport à θ (puisque B_o correspond à un optimum). On trouve, en effet :

$$(24) \quad B_o - B = \frac{1}{4}\sqrt{a_1 c_1 T_0}\ \theta^2$$

L'espèrance mathématique de cette perte est alors :

$$(25) \quad E(B_o - B) = \frac{1}{4}\sqrt{a_1 c_1 T_0}\ \frac{\sigma_T^2}{T^2}$$

puisque la valeur moyenne de θ^2 n'est pas autre chose que la variance relative $\frac{\sigma_T^2}{T^2}$ représentant l'erreur sur le tonnage. On sait, en général, calculer au moins approximativement une telle variance relative, donc chiffrer la perte due à l'erreur. On met ensuite cette perte en balance avec le coût des travaux de reconnaissance, et en écrivant que la somme de ces deux termes est minimum, on détermine le niveau optimum de reconnaissance.

Le résultat dépendra évidemment de l'expression que l'on adoptera pour $\frac{\sigma_T^2}{T^2}$ Raisonnons sur le cas d'un gisement sédimentaire reconnu par sondages extérieurs implantés à maille carrée. La variance sur le tonnage est la somme de deux termes :

$$(26) \quad \frac{\sigma_T^2}{T^2} = \frac{1}{n^2}\frac{h^2}{S} + \frac{A}{n}$$

dont le premier représente l'effet de bordure (erreur sur l'estimation de l'aire minéralisée) et le deuxième l'erreur commise sur l'estimation de la puissance moyenne. Le terme A, qui représente la variance d'extension de la puissance d'un sondage dans sa zone d'influence, diminue en principe quand cette zone d'influence diminue, donc quand n augmente. Mais pour le genre de gisements que nous avons en vue (grands gisements sédimentaires), la puissance est toujours petite vis-à-vis de la maille et la variation de A est très lente : en première approximation, on raisonnera comme si A était une constante. Numériquement, on prendra par exemple :

$$\frac{h^2}{S} = 4 \qquad A = 0.12$$

Enfin, si P est le prix de revient d'un sondage, le coût de la campagne est n P.

... / ...

On doit donc déterminer n de manière à rendre l'expression :

$$\frac{1}{4}\sqrt{a_1 c_1 T_0}\left[\frac{1}{n^2}\frac{h^2}{S}+\frac{A}{n}\right]+Pn$$

minimum. On annulera la dérivée par rapport à n :

$$\frac{1}{4}\sqrt{a_1 c_1 T_0}\left[-\frac{2}{n^3}\frac{h^2}{S}-\frac{A}{n^2}\right]+P=0$$

soit numériquement :

$$(27) \quad \frac{11\,000}{n^3}+\frac{165}{n^2}=\frac{P}{\sqrt{T}}$$

P étant exprimé en dollars. Par exemple, pour des sondages à 2,4 millions de francs (4.800 dollars), on trouve $n = 50$ pour $T = 10^9$ tonnes. Le gisement d'un milliard de tonne devrait être reconnu par une campagne de 50 sondages utiles. Cela peut paraître peu. Mais n'oublions pas que nous avons admis que seuls les tonnages comptaient. En réalité, les teneurs interviennent toujours, ne serait ce que pour déterminer le toit et le mur de la couche exploitable - toit et mur qui seront le plus souvent un toit et un mur de teneur. Ce fait très général conduit à adopter le plus souvent une maille plus serrée que ne le voudrait l'équation (27)

Il reste à examiner la deuxième catégorie de " perte " due à l'erreur sur le tonnage, perte qui résulte de la possibilité où l'on se trouve, si la reconnaissance n'a pas été assez poussée, de mettre en exploitation un gisement dont le tonnage réel serait inférieur au tonnage limite - c'est-à-dire ne permettrait pas d'amortir les investissements. Tout comme dans le problème analogue relatif aux teneurs, ce problème ne se traite pas dans l'absolu. On doit faire un raisonnement sequentiel, c'est-à-dire se placer en un point crucial $\mathcal{C}$, à l'issue d'une première campagne de sondages ayant indiqué un tonnage T, avec une variance d'estimation σ_T^2 connue, et examiner laquelle des trois décisions suivantes doit être adoptée :

1/ abandonner le gisement,

2/ le mettre en exploitation tout de suite,

3/ faire une deuxième campagne de sondages.

Dans l'optique d'une économie strictement globale, on doit raisonner à taux $i = 0$

Dans l'optique concurrentielle, il faut prendre un taux d'intérêt non nul, c'est-à-dire utiliser l'expression (15) du bénéfice actualisé (étant

.../...

entendu que, même dans ce cas, la production annuelle t a été déterminée par (20), c'est-à-dire avec $i = o$).

Examinons successivement les deux cas.

a) Optique globale - On désigne par T le tonnage estimé à l'issue de la première campagne, par y le tonnage (actuellement inconnu) estimé à l'issue de la deuxième campagne, et par z le tonnage réel (inconnu). On admet que z peut être assimilé à une variable aléatoire dont la valeur probable et la variance seraient :

$$(28) \quad \begin{cases} E(z) = T \\ D^2(z) = \sigma_T^2 \end{cases} \quad \text{à l'issue de la 1ère campagne.}$$

$$\begin{cases} E(z) = y \\ D^2(z) = \sigma_{T'}^2 \end{cases} \quad \text{à l'issue de la deuxième campagne.}$$

et que y - antérieurement à l'exécution de la première campagne - est une variable aléatoire telle que :

$$(29) \quad \begin{cases} E(y) = T \\ D^2(y) = \sigma_T^2 - \sigma_{T'}^2 \end{cases}$$

Si l'on admet que ces variables sont log-normales, on assimilera les variances logarithmiques aux variances relatives $\frac{\sigma_T^2}{T^2}$

Si l'on est dans un cas vraiment marginal, la perte due au risque d'exploiter un gisement inexploitable est du premier ordre par rapport à l'ecart type de y, tandis que la perte due à un mauvais choix de la production annuelle t est du deuxième ordre : celle-ci pourra donc souvent être négligée en première approximation, ce qui revient à raisonner comme si p et I étaient des constantes ($a_1 = c_1 = 0$ dans les équations (12) et (13).

Dans ce cas, on a :

$$(30) \qquad B = (V - p) z - I$$

D'où, pour les deux premières décisions :

$$(31) \quad \begin{cases} E(B_1) = 0 \\ E(B_2) = (V-p)T - I \end{cases}$$

... / ...

En particulier $E(B_2)$ est positif si le tonnage estimé T est supérieur au tonnage limité.

$$(32) \qquad T_L = \frac{I}{V-p}$$

Si l'on adopte la 3ème décision, la deuxième campagne donnera une nouvelle estimation y au vue de laquelle on décidera d'exploiter ou de fermer suivant que y sera supérieur ou inférieur à T_L, avec des espèrances :

$$\begin{cases} E(B) = 0 & si\ y < T_L \\ E(B) = (V-p)y - I & si\ y > T_L \end{cases}$$

auxquelles il convient de retrancher le coût P de la deuxième campagne. Si donc f(y) représente la loi de probabilité de y (antérieurement à la réalisation de la deuxième campagne) l'espèrance attachée à la troisième décision au point C a pour valeur :

$$(33) \qquad E(B_3) = \int_{T_L}^{\infty} [(V-p)y - I]\, f(y)\, dy \; - P$$

avec les hypothèses adoptées (y lognormale de valeur probable T et de variance $\frac{\sigma_T^2 - \sigma_{T'}^2}{T^2} = \sigma^2$) on trouve immédiatement :

$$(34) \qquad \begin{cases} E(B_3) = (V-p)T\, G(Y_0 - \sigma) - I\, G(Y_0) - P \\ Y_0 = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{\sigma} \log \frac{T_L}{T} \end{cases}$$

La décision à prendre résultera immédiatement de la comparaison des trois espèrances indiquées en (31) et (34)

Il pourrait cependant arriver que la perte dûe à un mauvais choix de la production annuelle T ne soit pas négligeable vis-à-vis du risque précédent. Il en sera ainsi, en particulier, si l'on est relativement loin du cas marginal (si T n'est pas très voisin de T_L : le cas réaliste sera évidemment celui où $T > T_L$) Dans ce cas, les équations vont se compliquer un peu, mais se traiter assez facilement si l'on admet la lognormalité des distributions de y et de z. Tout d'abord, pour la première décision on a toujours :

$$(35) \qquad E(B_1) = 0$$

Pour la deuxième décision, si le tonnage réel est z, on aura un bénéfice :

$$B_2 = z(V - a_0) - a_1 \frac{z}{t} - c_0 - c_1 t$$

... / ...

avec (puisque t a été déterminé au vu de l'estimation T du tonnage) :

$$t = \sqrt{\frac{a_1}{c_1}}\ T$$

Soit :

$$B_2 = \mathfrak{z}(V - a_o) - \sqrt{\frac{a_1\ c_1}{T}}\ \mathfrak{z} - C_o - \sqrt{a_1\ c_1\ T}$$

D'où l'espérance attachée à la deuxième décision : (puisque $E(\mathfrak{z}) = T$)

$$(36)\quad E(B_2) = (V - a_0)\ T - 2\sqrt{a_1\ c_1\ T} - C_0$$

équation qui, du reste résultait immédiatement de (22)

Examinons enfin la troisième décision. Si la deuxième campagne nous donne une estimation y, nous examinerons en premier lieu si ce tonnage y est supérieur au tonnage limite.

$$(37)\qquad T_L = \left[\frac{\sqrt{a_1\ c_1} + \sqrt{a_1\ c_1 + c_0\ (V - a_0)}}{V - a_0}\right]^2$$

Si $y < T_L$, on décidera de fermer (et l'espérance sera nulle). Si $y > T_L$, on exploitera, avec une production annuelle

$$(38)\qquad t = \sqrt{\frac{a_1}{c_1}\ y}$$

qui dépendra du résultat y de la deuxième campagne. L'espérance sera alors

$$(V - a_o)y - 2\sqrt{a_1\ c_1}\ \ \sqrt{y} - Co$$

Au point C où nous sommes, la valeur de y n'est pas encore connue et, de plus, il faut tenir compte du coût P de la deuxième campagne. On a donc :

$$E(B_3) = \int_{T_L}^{\infty}\left[(V - a_o)y - 2\sqrt{a_1\ c_1}\ \ \sqrt{y} - Co\right] f(y)\ dy\ - P$$

Si y est supposée lognormale avec une médiane et une variance :

$$\begin{cases} \gamma = T\ e^{-\sigma^2/2} \\ D^2(y) = \sigma^2 \end{cases}$$

$\sqrt{y}$ est également lognormale avec une médiane $\sqrt{\gamma}$ et une variance $\frac{1}{4}\ \sigma^2$, donc avec une valeur probable.

$$E(\sqrt{y}) = \sqrt{T}\ e^{-\frac{1}{8}\sigma^2}$$

Il est certain que le choix de la loi de distribution de y influe sur un tel résultat, et introduit une certaine part d'arbitraire. Quoiqu'il en soit, on trouve facilement l'expression lognormale de l'espérance $E(B_3)$:

$$(39) \quad \begin{cases} E(B_3) = (V - a_0)T \; G[Y_0 - \sigma] - 2\sqrt{a_1 c_1}\,\sqrt{T}\, e^{-\frac{\sigma^2}{8}}\, G(Y_0 - \frac{\sigma}{2}) - c_0 G(Y_0) - P \\ Y_0 = \frac{1}{\sigma} \log \frac{T_L}{T} + \frac{1}{2}\sigma \end{cases}$$

La comparaison de (35), (36) et (39) permet alors de choisir la meilleure solution. On remarquera que ces formules tiennent compte à la fois du risque d'exploiter un gisement inframarginal et de la perte due à un mauvais choix de la production annuelle.

Pour donner un exemple numérique, plaçons nous dans un cas à peu près marginal. Supposons, par exemple, $V = 10$ dollars, les autres paramètres ayant les mêmes valeurs que plus haut. On a $V - a_0 = 1$ dollar (et on a vu que, si on actualisait, un tel gisement était inexploitable quel que soit son tonnage). Si on n'actualise pas, le tonnage limite donné par (37) est :

$$T_L = 210 \quad 10^6 \text{ tonnes.}$$

Supposons que nous ayons reconnu ce gisement par une première campagne de sondage ayant donné exactement $T = 210 \quad 10^6$ tonnes, avec une variance (relative) :

$$\sigma_T^2 = \frac{4}{n^2} + \frac{0{,}12}{n}$$

n étant le nombre des sondages. Si l'on exécute une deuxième campagne en centrant les mailles, c'est-à-dire en doublant n, on aura une nouvelle variance :

$$\sigma_{T'}^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{0{,}06}{n}$$

D'où, par différence

$$\sigma^2 = \frac{3}{n^2} + \frac{0{,}06}{n}$$

Numériquement, pour quelques valeurs de :

	$n = 30$	$n = 50$	$n = 70$	$n = 100$
σ^2	$\frac{5{,}33}{1000}$	$\frac{2{,}4}{1000}$	$\frac{1{,}46}{1000}$	$\frac{0{,}9}{1000}$
σ	$\frac{7{,}3}{100}$	$\frac{4{,}9}{100}$	$\frac{3{,}8}{100}$	$\frac{3}{100}$

Comme $T = T_L$, la fonction $E(B_3)$ s'écrit ici, sous forme numérique avec $(V - a_0 = 1)$

... / ...

$$E(B_3) = 10^6 \left[210\ G(-\tfrac{1}{2}\sigma) - 79{,}6\ G(0)^{e^{-\frac{\sigma^2}{8}}} - 50\ G(\tfrac{1}{2}\sigma)\right]$$

Les arguments de la fonction de Gauss étant petits, on peut prendre :

$$G(\gamma) = G(0) - \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}$$

et, corrélativement, remplacer $e^{-\sigma^2/8}$ par 1. On trouve alors :

$$E(B_3) = 10^6 \left[0{,}4 + 52\sigma\right] - P$$

P étant le prix de la campagne supplémentaire de η sondages.

Selon que $E(B_3)$ sera positif ou non, on fera ou non la deuxième campagne (car, $E(B_1) = E(B_2) = 0$, puisque l'on s'est placé dans le cas marginal). On fera cette deuxième campagne si :

$$\sigma > \frac{P}{52.10^6} - \frac{0{,}4}{52}$$

Les espérances mathématiques correspondantes sont les suivantes :

n	30	50	70	100
$E(B_3)$	$4{,}2.10^6 - P$	$2.95.10^6 - P$	$2.37\ 10^6 - P$	$1.96\ 10^6 - P$
=	$+ 3{,}9\ 10^6$	$+ 2{,}05\ 10^6$	$+ 1.67\ 10^6$	$+ 0.96.10^6$

Les valeurs numériques correspondent à un coût unitaire de 10.000 dollars par sondages : on voit que dans les 4 cas examinés on a intérêt à exécuter la deuxième campagne. On sait que c'est là une circonstance générale lorsque l'on est dans le cas marginal. Toute information supplémentaire a, dans ce cas, une très grande valeur. Supposons donc qu'au lieu du tonnage marginal de 210.10^6 tonnes nous ayons estimé un tonnage à peine supérieur de :

$$T = 250.10^6 \text{ tonnes.}$$

Les variables réduites prennent des valeurs assez élevées pour que toutes les fonctions de Gauss soient voisines de l'unité (et, en effet, il y a une probabilité négligeable pour que le tonnage réel soit inférieur aux 210 millions de tonnes). Dans ces conditions (36) et (39) ne vont différer, pratiquement, que par le terme P qui jouera contre la troisième décision. C'est bien ce que l'on observe numériquement en calculant $E(B_3) - E(B_2)$. On trouve pour $n = 30$ et $n = 50$:

n	30	50
$E(B_3) - E(B_2)$	$0{,}23.10^6 - P$	$3\,700 - P$

Ainsi, dans le cas $n = 30$, on peut envisager de faire une campagne supplémentaire de 30 sondages, sous réserve que celle-ci coûte moins de 230.000 dollars, c'est-à-dire que le prix unitaire de sondage soit inférieur à 7 700 dollars (ou 3 850 000 anciens francs), ce qui n'est pas exclu à priori. Mais pour $n = 50$, on ne disposerait que de 3 700 dollars pour 50 sondages supplémentaires, soit 74 dollars par sondage. On ne fera donc pas de deuxième campagne, et à fortiori on n'en fera pas non plus si $n = 70$ ou 100.

b) Optique concurrentielle - La méthode précédente se heurte à une objection très forte : elle n'actualise pas le bénéfice futur. Même si on détermine la production annuelle t avec un taux $i = 0$, comme il est nécessaire de le faire si l'on veut réaliser chaque année une production donnée au meilleur prix de revient (et comme on le fait toujours en pratique), il est hors de doute qu'au moment de décider de la mise en exploitation, le critère à utiliser est la valeur actualisée du bénéfice futur. Il doit en être ainsi même dans une optique collectiviste, puisque de deux gisements exploitables pour un taux $i = 0$, on aura toujours intérêt à exploiter d'abord celui qui laisse la plus grande marge bénéficiaire. L'opposition entre les optiques globales et concurrentielles est donc moins réelle qu'il ne semblait à priori, puisque l'une et l'autre optique conduisent aux mêmes règles pratiques :

1/ Déterminer la production annuelle (et plus généralement tous les paramètres techniques de l'exploitation) comme si i était nul.

2/ Décider de la mise en exploitation d'un gisement donné (ou choisir les gisements à mettre en exploitation dans l'année en cours) d'après le critère de la valeur actualisée du bénéfice futur (donc avec un taux i non nul).

... / ...

Ces deux règles, pour contradictoires qu'elles paraissent, ne s'en imposent pas moins à la pratique.

En raison de la plus grande complexité des calculs dans le cas où i n'est pas nul, nous étudierons uniquement le cas où la perte due à un mauvais choix de t est négligeable vis-à-vis du risque de tomber sur un gisement inexploitable. Cela revient à raisonner comme si V et p étaient des constantes, et la production annuelle t fixée ne varietur. On doit alors raisonner sur le bénéfice actualisé B_1 donné en (15) et relatif au tonnage réel

$$(40) \qquad B_1 = \frac{1 - e^{-i\frac{\gamma}{t}}}{i} (V - p)\, t - I$$

Comme V, p et t sont supposés fixes, la seule quantité aléatoire est l'exponentielle. Pour des raisons de commodités, on admettra cette fois que le tonnage réel γ peut être assimilé à une variable normale, de manière à ce que l'exponentielle soit elle-même une variable lognormale.

Evaluons les espèrances relatives aux trois décisions possibles. Si on décide d'abandonner le gisement, on a toujours :

$$(41) \qquad E(B_1) = 0$$

Si l'on décide d'exploiter tout de suite, $E(B_2)$ est la valeur probable de (40) que l'on obtient en remplaçant l'exponentielle par sa valeur probable.

Ayant admis que γ est une variable aléatoire de moyenne T et de variance σ_T^2, l'exponentielle $e^{-\frac{i\gamma}{t}}$ est une variable lognormale de médiane $e^{-\frac{iT}{t}}$ et de variance $\frac{i^2}{t^2}\sigma_T^2$, donc de valeur probable :

$$E\left(e^{-\frac{i\gamma}{t}}\right) = e^{-\frac{iT}{t}}\, e^{\frac{1}{2}\frac{i^2}{t^2}\sigma_T^2}$$

D'où l'espérance relative à la deuxième décision :

$$(42) \qquad E(B_2) = \frac{1 - e^{-i\frac{T}{t} + \frac{i^2}{2}\frac{\sigma_T^2}{t^2}}}{i} (V - p)\, t - I$$

On voit que cette espérance est toujours plus petite que dans le cas où le tonnage est parfaitement connu ($\sigma_T^2 = 0$). C'est là un effet du taux d'actualisation i, car les chances pour que le tonnage réel soit inférieur ou supérieur à T sont bien égales, mais la perte qui se produit dans le premier

... / ...

cas a lieu dans un avenir moins éloigné que le gain qui apparaît dans le deuxième – et pèse donc plus lourd en valeur actualisée.

Examinons enfin la troisième décision. Si la deuxième campagne conduit à un tonnage y supérieur au tonnage limite T_L, on exploitera avec une espérance donnée par (42), en y remplaçant T par y et σ_T^2 par $\sigma_{T'}^2$. Si, au contraire, y est inférieure à T_L on n'exploitera pas. Donc, en tenant compte du prix P de la 2ème campagne, on a :

$$E(B_3) = \int_{T_L}^{\infty} \frac{1}{i}\left\{1 - \exp\left[-i\frac{y}{t} + \frac{i^2}{2}\frac{\sigma^2_{T'}}{t^2}\right]\right\}(V-p)t\, f(y)\,dy - \int_{T_L}^{\infty} I\, f(y)\,dy - P$$

Pour le calcul de cette expression, on admettra que y est une variable normale de moyenne T et de variance $\sigma^2 = \sigma^2_T - \sigma^2_{T'}$. Par suite $\exp\left[-i\frac{y}{t}\right]$ est une variable lognormale de médiane $e^{-i\frac{T}{t}}$ et de variance $\frac{i^2\sigma^2}{t^2}$. Cette remarque permet le calcul effectif de $E(B_3)$:

$$(43)\quad E(B_3) = \left[\frac{(V-p)t}{i} - I\right] G\left(\frac{T_L - T}{\sigma}\right) - \frac{(V-p)t}{i}\, e^{-i\frac{T}{t} + \frac{i^2}{2}\frac{\sigma_T^2}{t^2}}\, G\left[\frac{T - T_L}{i\sigma} - \frac{i\sigma}{t}\right] - P$$

Quant au tonnage limite T_L qui joue un rôle déterminant dans l'équation ci-dessus, on doit le définir comme le tonnage annulant la valeur probable actualisée du bénéfice futur (évaluée après la deuxième phase, c'est-à-dire en remplaçant σ^2_T par $\sigma^2_{T'}$ dans (42). Soit :

$$\frac{1}{i}\left[1 - \exp\left(-\frac{iT}{t} + \frac{i^2}{2}\frac{\sigma^2_{T'}}{t^2}\right)\right](V-p)t - I = 0$$

D'où l'on tire :

$$(44)\qquad T_L = -\frac{t}{i}\log\left[1 - \frac{iI}{(V-p)t}\right] - \frac{i^2}{2}\frac{\sigma^2_{T'}}{t^2}$$

Il est notable que ce tonnage limite est d'autant plus grand que $\sigma^2_{T'}$ est plus petit, c'est-à-dire que la reconnaissance est plus poussée. Le simple fait d'exécuter une deuxième campagne de sondage augmente donc le tonnage limite de la quantité $\frac{i^2}{2}\frac{\sigma^2_T - \sigma^2_{T'}}{t^2} = \frac{i^2}{2}\frac{\sigma^2}{t^2}$, puisque σ^2_T est remplacée par $\sigma^2_{T'}$: c'est là une conséquence de l'introduction d'un taux i non nul.

.../ ...

III <u>Cas où le tonnage et la teneur interviennent simultanément, mais sans interférence.</u>

Dans le cas général, le tonnage et la teneur interviennent simultanément dans la détermination de l'exploitabilité. Les paramètres techniques de l'exploitation sont alors la production annuelle t, comme ci-dessus, et la teneur limite de coupure ou d'exploitabilité C. Mais, à leur tour, le tonnage T et la teneur moyenne m dépendent en général du choix de C, puisqu'en abaissant la teneur de coupure, on augmente les réserves T et on abaisse la teneur moyenne m. Il y a alors interférence, et nous examinerons dans le paragraphe suivant ce cas, qui est le cas général. Mais il arrive parfois, au moins en première approximation, que le choix de C n'influe pas de façon sensible sur les réserves T. Il en sera ainsi lorsque le gisement sera du type tout ou rien : le gisement proprement dit (géostatistiquement homogène) est franchement exploitable dans toutes ses parties, tandis que sa frange faiblement minéralisée est franchement inexploitable. En pratique, cette condition sera à peu près réalisée lorsqu'il y aura un seuil de teneur très franc se situant aux alentours des valeurs possibles de C. Le choix technique est alors limité entre deux possibilités : ou bien exploiter la totalité de la zone riche définie par ce seuil - ou bien ne rien exploiter du tout.

Ce cas, du type tout ou rien, que nous allons examiner maintenant, peut être traité par simple superposition des résultats des deux paragraphes précédents.

1/ <u>Choix de la cadence de production annuelle</u> - Nous conserverons les notations du paragraphe précédent. Les investissements I (t) et le prix de revient (extraction, traitement et transport) p (t) ne dépendent pratiquement que de la production annuelle t et peuvent être représentés par des formules du type (12) et (13). La valeur V contenue à la tonne de minerai dépendra, par contre, de la teneur m. On pourra, en général, la représenter par une formule du type :

$$V = b\,m - b_0 \qquad (45)$$

où la constante b_0 (qui n'a rien à voir avec une teneur limite) dépendra de la formule de vente et pourra souvent être prise égale à 0. Lorsque la teneur

... / ...

moyenne m est fixée, V est une constante comme dans le paragraphe précédent et par suite, pour un gisement du type tout ou rien, on déterminera la production annuelle t comme si le tonnage T intervenait seul - c'est-à-dire par la formule (20).

2/ Niveau optimum de reconnaissance. Nous nous limiterons au problème des trois décisions possibles en un point crucial C. Les espérances mathématiques attachées à la première décision

$$(46) \qquad E(B_1) = 0$$

et à la deuxième :

$$(47) \qquad E(B_2) = \frac{1}{i} \left[1 - \exp\left(-i\frac{T}{t} + \frac{i^2}{2} \sigma^2 \frac{T}{t^2}\right)\right] \left[bm - p\right] - I$$

s'obtiennent aisément, puisque la valeur probable de la teneur inconnue z est m, sous réserve que les estimations m et T de la teneur et du tonnage puissent être considérées comme indépendantes (cette condition ne sera pas toujours réalisée). Par contre le calcul de $E(B_3)$ est beaucoup plus difficile, puisque le tonnage limite T_1 dépend évidemment de la nouvelle teneur. Si l'on désigne par τ et y le tonnage et la teneur que l'on obtiendrait à l'issue de la deuxième campagne de sondage et par $f(\tau, y)\, d\tau\, dy$ la loi de probabilité de ces deux variables, on aurait à calculer l'intégrale double :

$$(48) \quad E(B_3) = \iint_D \left\{ \frac{1}{i} \left[1 - \exp\left(-i\frac{\tau}{t} + \frac{i^2}{2} \frac{\sigma_{T'}^2}{t^2}\right)\right] (by - p)t - I \right\} f(\tau, y)\, d\tau\, dy - P$$

étendue au domaine infini D défini par l'inégalité :

$$(49) \quad \frac{1}{i} \left[1 - \exp.\left(-i\frac{\tau}{t} + \frac{i^2}{2} \frac{\sigma_{T'}^2}{t^2}\right)\right] (by - p)t - I \geqslant 0$$

En pratique, ce calcul se simplifiera beaucoup si l'une des deux variables (le plus souvent le tonnage) est connue avec une bien meilleure précision que l'autre. On admettra alors qu'elle est exactement connue, et on sera ramené à un cas à une seule variable.

IV Cas général, où tonnage et teneur interfèrent. Nous examinerons ce qu'il est possible de dire sur le choix optimum des paramètres de l'exploitation et sur le niveau optimum de reconnaissance.

... / ...

1/ Choix des paramètres de l'exploitation.- Ces paramètres sont au nombre de deux : une teneur x de coupure, ou teneur limite, et une production annuelle t. Dire que l'on prend x comme teneur de coupure signifie que l'on abandonnera les panneaux à teneur moyenne inférieure à x, et que l'on exploitera les panneaux à teneur supérieure à x. Cette notion ne prend un sens que si l'on définit la taille des panneaux auxquels cette coupure s'appliquera, c'est-à-dire le niveau auquel opérera la sélection. Cette taille doit être considérée comme une donnée : elle résulte des caractèristiques technologiques du mode d'exploitation que l'on envisage.

Le tonnage T (x) et la teneur m(x) sont des fonctions, l'une décroissante, l'autre croissante, de la teneur de coupure x. Si $T(0) = T_o$ est le tonnage correspondant au gisement entier, la différentielle $-\frac{dT(x)}{To}$ représente, en pourcentage du tonnage total, le tonnage de minerai à teneur comprise entre x et x + dx, c'est-à-dire la densité de fréquence f(x)dx de la distribution statistique des teneurs en fonction des tonnages. On prendra bien garde, cependant, dans les applications pratiques, de ne pas assimiler purement et simplement $\frac{T(x)}{To}$ à la distribution cumulée des teneurs des échantillons prélevés. La distribution des teneurs des échantillons n'est pas du tout identique à la distribution T(x) des teneurs des panneaux au niveau desquels opère la sélection. Elle est toujours plus dispersée. La géostatistique nous permettra, en général, de déduire la variance de la distribution T(x) des panneaux à partir de la variance expérimentale des échantillons. Si les teneurs obéissent approximativement à une loi de distribution simple (normale ou lognormale, par exemple) il sera aisé de reconstituer la fonction T(x). Si les teneurs n'obéissent à aucune loi simple, on pourra cependant déduire l'histogramme des panneaux de l'histogramme des échantillons, en resserrant celui-ci, autour de sa valeur moyenne, par une affinité de module égale au rapport des écarts types des panneaux et des échantillons. Ces méthodes ne sont cependant utilisables que si le gisement est homogène. Dans le cas d'une hétérogénéité trop complexe pour permettre une séparation effective des sous-zones homogènes composantes, il ne restera plus que les méthodes graphiques directes usuelles, qui consistent à dessiner sur plan les contours des zones minéralisées

... / ...

à plus de x_1, x_2 ... et d'évaluer directement les volumes déterminés par ces différentes coupures : on obtiendra ainsi une image des variations de T (x) au voisinage des valeurs plausibles de la coupure. Cette méthode graphique est parfois supérieure aux méthodes mathématiques, en particulier dans le cas où, en plus des hétérogénéités, existent des zonalités ou des runs prononcés. Mais elle présente un danger grave de surestimation systématique de la teneur moyenne. En effet, l'estimation de la teneur moyenne intérieure au contour correspondant à la teneur limite x doit résulter d'un krigeage et tenir compte aussi bien des données extérieures que des données intérieures. Comme les données extérieures sont, par définition, inférieures à x, la pratique habituelle, qui consiste à ne pas en tenir compte, introduit bien une surestimation systématique - que l'on corrige, en général, empiriquement en pratiquant un abattement plus ou moins arbitraire pour salissage. Il faut, du reste, reconnaître que le problème est difficile. Si l'on était sûr de l'homogénéité géostatistique et de l'isotropie du gisement (zone exploitable et voisinage de celle-ci), il serait possible de faire un krigeage du type continu. Mais bien souvent, il y aura des zonalités ou des runs, qui ne permettent pas le calcul effectif du krigeage, ou même des hétérogénéités franches : dans ce dernier cas, le krigeage n'a plus de sens, et il s'agit, au sens strict, d'un véritable salissage dont l'expérience seule peut indiquer l'ordre de grandeur.

Quelles que soient les difficultés que l'on rencontrera en pratique dans leur détermination, les deux fonctions T (x) et m(x) existent, et sont l'une décroissante, l'autre croissante. Il en résulte qu'à toute teneur moyenne m (définie pour une certaine coupure x) correspond un tonnage bien déterminé dont la teneur moyenne est m : m peut donc, aussi, définir une fonction T (m) donnant le tonnage en fonction de la teneur moyenne m, et non plus de la teneur de coupure x On observera que l'on a nécessairement :

$$(50) \qquad x = \frac{d\,[mT(m)]}{d\,T\,(m)} = m + \frac{T\,(m)\,dm}{dT\,(m)}$$

En effet $d[(mT(m)]$ représente le tonnage métal $d\rho$ contenu dans la tranche marginale d T(m), dont la teneur est x.

Ceci étant, on déterminera la teneur de coupure x et la production annuelle t par maximation du bénéfice futur. Nous allons retrouver ainsi les mêmes anomalies qu'aux paragraphes précédents en ce qui concerne le taux d'actualisation i. Prenons, en effet, un taux i différent de 0. On a, avec les mêmes notations que plus haut :

$$(51) \qquad B_i = \frac{1}{i}\left\{1 - \exp\left[-i\,\frac{T\,(m)}{t}\right]\right\}(bm - p)\,t \;- I$$

.../...

l'annulation de la dérivée en t redonne l'équation (18), avec un tonnage $T(m)$ fonction de m. On arrive à la même conclusion : quel que soit le tonnage, le gisement doit être exploité en un nombre N_c d'année imposé d'avance.

Annulons la dérivée en m, en vue de déterminer la teneur limite :

$$(52) \quad \frac{dBi}{dm} = \frac{dT}{dm}\, e^{-\frac{iT}{t}} (bm - p) + \frac{1 - e^{-\frac{iT}{t}}}{i}\, bt = 0$$

Si le taux d'intérêt i était assez petit, on obtiendrait, en ne retenant que les termes du premier ordre en i :

$$\frac{dT}{dm}(bm - p) + bT - i\left[\frac{T}{t}(bm - p)\frac{dT}{dm} + \frac{1}{2} b \frac{T^2}{t}\right] = 0$$

On en déduit :

$$b\,\frac{d(mT)}{dT} - p = i\,\frac{T}{t}\left(bm - p + \frac{1}{2} b\, T \frac{dm}{dT}\right)$$

et, en remarquant que l'on a :

$$bm - p = bT\,\frac{dm}{dT} + 0\,(i)$$

Il vient :

$$(53) \quad b\,\frac{d(mT)}{dT} = p - i\,\frac{bT^2}{2t}\frac{dm}{dT} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{p}{b} + \frac{i}{2}\frac{T}{t}\left(m + \frac{p}{b}\right)$$

En comparant avec (50), on constate que le premier membre est égal à $b\,x$. Ainsi, pour $i = 0$, on retrouve la règle habituelle :

$$(54) \quad x = \frac{p}{b}$$

On exploite jusqu'à la teneur x qui paye le prix de revient p, à l'exclusion des investissements. Pour un taux i non nul, cette teneur marginaliste de coupure serait majorée d'un terme en $- i\,\frac{bT}{2t}\,\frac{dm}{dT} + 0(i^2)$, positif puisque $\frac{dm}{dT}$ est négatif. Ainsi la stricte application du critère : maximer la valeur actuelle du bénéfice futur - est incompatible avec la coupure marginaliste (54), et conduit à des coupures toujours plus élevées, c'est-à-dire à un écrémage. Cependant, la pratique usuelle, même en économie concurrentielle, correspond toujours à la coupure marginaliste. On exploite toute tonne qui paye ses frais en aval, les investissements étant amortis sur les zones les plus riches du gisement. Et c'est bien ainsi qu'il convient de procéder si l'on

... / ...

désire que l'industrie minière prise dans son ensemble (ou une grande Société possèdant plusieurs gisement) assure chaque année une production donnée au meilleur prix de revient. Les investissements que l'on fait chaque année pour remplacer les gisements épuisés sont de véritables charges d'exploitation qué l'on amortit sur la production globale de l'année en cours, et non pas sur la production future des gisements particuliers que l'on vient d'ouvrir. Dès lors le taux d'intérêt i disparaît et l'optimum correspond à la coupure marginaliste (54)

Dans cette optique (à la fois globale et marginaliste) où l'on fait $i = 0$, la production t et la teneur x de coupure sont les solutions du système d'équation :

$$(55) \quad \begin{cases} t = \sqrt{\dfrac{a_1}{c_1} \, T(x)} \\ \\ x = \dfrac{1}{h} \left(a_0 + \dfrac{a_1}{t} \right) \end{cases}$$

On les calcule facilement par approximations successives, dès lors que la foncrion $T(x)$ est connue (au moins dans la zone des coupures plausibles).

Remarquons qu'en économie entièrement planifiée on obtient des équations identiques. L'objectif à atteindre est d'assurer chaque année une production φ du métal donné. Pour assurer cette production, on dispose d'un certain nombre de gisements, caractèrisés par leurs Tonnages $T_i(x)$ et leurs paramètres techniques $p_i\,(t)$ et $I_i(t)$. De plus, dans le cadre d'une politique à long terme, on estime que les ressources disponibles permettent de consommer chaque année un nombre λ_i de gisements de la catégorie i : Le choix de cette politique est fondamental, puisque tout le reste en dépend. Pour assurer la production φ, on doit donc avoir

$$(56) \qquad \sum \lambda_i T_i(x_i)\, m_i(x_i) = \varphi$$

Les dépenses annuelles pour assurer cette production sont :

$$\sum_i \lambda_i \left(p_i T_i + I_i \right)$$

... / ...

C'est cette expression qu'il convient de minimiser, relativement à la teneur limite x_i et à la production t_i des gisements de chaque type i. En désignant par μ le paramètre de Lagrange, on obtient les équations :

$$(57)\quad \begin{cases} T_i \dfrac{d\gamma_i}{dt_i} + \dfrac{dI_i}{dt} = 0 \\ p_i \dfrac{dT_i}{dm_i} = \mu \dfrac{dm_iT_i}{dm_i} \end{cases}$$

Les λ_i ont disparu de ces équations, dont la première est identique à la 1ère équation (55) : c'est une équation où n'interviennent que des facteurs technologiques. Quant à la seconde, compte tenu de (50), elle s'écrit :

$$x_i = \frac{p_i}{\mu}$$

et l'on voit que le paramètre μ de Lagrange joue le même rôle que la valeur ou le prix b du point de métal contenu - c'est-à-dire le rôle du prix du marché. La seule différence avec l'économie concurrentielle est que μ est déterminé de manière à vérifier la relation supplémentaire (56), ce qui suppose la résolution complète du système (56) (57) (pour l'ensemble des catégories i de gisements, les λ_i étant donnés à priori). Ainsi μ apparaît comme le prix réalisant l'optimum du programme de production globale dans le cadre d'une politique définie à l'avance et représenté par les λ_i. Ce prix ayant été fixé, les paramètres de chaque gisement se calculent par les équations marginalistes (55).

2/ <u>Niveau optimum de la reconnaissance</u>. - Dans le cas général, les expressions de $E(B_2)$ et $E(B_3)$ deviennent fort compliquées. On pourra cependant se faire une idée de leurs valeurs en admettant une approximation linéaire. Tout d'abord, on admettra que la teneur x de coupure et la production annuelle t peuvent être considérés comme fixes. On sait que celà revient à admettre que la perte due à une lègère différence entre les valeurs adoptées et leurs valeurs optimales réelles (qui est du second ordre relativement aux écarts type) est négligeable vis-à-vis de la perte entraînée par le risque de mettre en exploitation un gisement en réalité inexploitable (perte du premier ordre relativement aux écarts type). Partons alors de l'expression du bénéfice futur actualisé, où T_R et m_R désignent les valeurs réelles du Tonnage T(x) et de la teneur m(x) relativement à la coupure x.

$$(58)\qquad B_R = \frac{1 - e^{-i\frac{T_R}{t}}}{i} (b\, m_R - p)t - I$$

... / ...

T_R et m_R seront assimilés à des variables normales ayant comme valeurs probables le tonnage $T = T(x)$ et la teneur $m = m(x)$ déduites des résultats de la reconnaissance.

On posera :

$$(59) \quad \begin{cases} T_R = R + \delta T \\ m_R = m + \delta m \end{cases}$$

δT et δm étant des variables normales centrées. En nous limitant à une approximation linéaire relativement aux δT et δm, on voit que l'on peut écrire :

$$(60) \quad \begin{cases} B_R = B + \delta B \\ B = \dfrac{1 - e^{-\frac{iT}{t}}}{i} (bm - p)t - I \\ \delta B = b(\dfrac{1 - e^{-iT/t}}{i}) \, t \, \delta m + e^{-\frac{iT}{t}} (bm - p) \, \delta T \end{cases}$$

B est l'estimation du bénéfice futur que l'on obtient à partir des résultats de la reconnaissance : le bénéfice futur réel en diffère de la quantité aléatoire δB, linéaire en δm et δT, donc de valeur probable nulle. On écrit donc très facilement les espérances attachées aux deux premières décisions (au premier ordre) :

$$(61) \quad \begin{cases} E(B_1) = 0 \\ E(B_2) = B = \dfrac{1 - e^{-\frac{iT}{t}}}{i} (bm - p)t - I \end{cases}$$

Le calcul de l'espérance $E(B_3)$ attachée à la troisième décision est un peu plus complexe. Si la deuxième phase de reconnaissance conduit aux nouvelles valeurs

$$(62) \quad \begin{cases} T' = T + \delta T' \\ m' = m + \delta m' \end{cases}$$

On exploitera si :

$$(63) \quad X = E(B') = B + b(\frac{1 - e^{-i\,T/t}}{i})t \, \delta m' + e^{-\frac{iT}{t}}(bm - p) \, \delta T'$$

... / ...

est positif, avec une espérance $E(B') = X$, et si $X < 0$ on décidera de ne pas exploiter, l'espérance étant alors nulle. On a donc

$$(63)\quad E(B_3) = \int_0^\infty X\, f(x)\, dX - P \qquad \int_0^\infty X f(X)\, dX - P$$

$f(x)$ représentant la densité de probabilité associée à la variable aléatoire X définie en (63), et P représentant le coût de la deuxième phase de reconnaissance. Il reste à déterminer $f(X)$. Nous désignerons par m_0 et T_0 la teneur moyenne globale et le tonnage total du gisement entier (pour une coupure $x = 0$). Le tonnage coupé $T(x)$ est une fonction de la forme :

$$(64)\quad T(x) = T_0 \int_x^\infty g(x;\, m_0, \sigma^2_x)\; dx$$

expression dans laquelle $g(x)$ représente la distribution statistique des teneurs des panneaux au niveau desquels opère la sélection, distribution dont la valeur probable et la variance sont m_0 et σ^2_x. De même, la teneur moyenne $m(x)$ est de la forme :

$$(65)\quad m(x) = \frac{\int_x^\infty g(x;\, m_0, \sigma^2_x)\; dx}{\int_x^\infty g(x;\, m_0, \sigma^2_x)\; dx}$$

Des erreurs δT_0, δm_0 et $\delta \sigma^2_x$ sur l'estimation des paramètres du gisement entier se répercutent, au premier ordre, sur $T(x)$ et $m(x)$ selon les formules suivantes :

$$(66)\quad \begin{cases} \delta T = \dfrac{T\,\delta T_0}{T_0} + \dfrac{\partial T}{\partial m_0}\,\delta m_0 + \dfrac{\partial T}{\partial \sigma^2_x}\,\delta \sigma^2_x \\[2ex] \delta m = \dfrac{\partial m}{\partial m_0}\,\delta m_0 + \dfrac{\partial m}{\partial \sigma^2_x}\,\delta \sigma^2_x \end{cases}$$

Les dérivées partielles figurant dans ces expressions peuvent se déduire de la loi de distribution des teneurs des panneaux, lorsque celle-ci est connue. Supposons, par exemple, que celle loi soit lognormale avec une variance (logarithmique) σ^2_x et une moyenne m_0. On a :

$$(67)\quad \begin{cases} T(x) = T_0\, G(z) \\ m(x) = m_0\, \dfrac{G(z - \sigma_x)}{G(z)} \\ z = \dfrac{1}{\sigma_x} \log \dfrac{x}{m_0} + \dfrac{1}{2}\sigma_x \end{cases}$$

... / ...

Par dérivation de la fonction de Gauss, on trouve facilement :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G(z)}{\partial m_o} = \dfrac{1}{m_o \sigma \sqrt{2\pi}} \, e^{-z^2/2} \\ \dfrac{\partial G(z)}{\partial \sigma^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma^2} (z-\sigma) e^{-z^2/2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial G(z-\sigma)}{\partial m_o} = \dfrac{1}{m_o \sigma \sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}} \\ \dfrac{\partial G(z-\sigma)}{\partial \sigma^2} = \dfrac{1}{2\sigma^2\sqrt{2\pi}} \, z \, e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}} \end{cases}$$

D'où les dérivées partielles cherchées :

$$(68) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial m_o} = \dfrac{T_o}{m_o \sigma_x \sqrt{2\pi}} \, e^{-z^2/2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial \sigma_x^2} = \dfrac{T_o}{2\sigma_x^2 \sqrt{2\pi}} (z-\sigma) e^{-z^2/2} \\ \dfrac{\partial m}{\partial m_o} = \dfrac{m}{m_o} + \dfrac{T_o}{T} \dfrac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}} - \dfrac{m}{m_o}\dfrac{T_o}{T}\dfrac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \\ \dfrac{\partial m}{\partial \sigma_x^2} = \dfrac{m_o T_o}{T} \dfrac{1}{2\sigma_x^2\sqrt{2\pi}} \, z \, e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}} - m \dfrac{T_o}{T}\dfrac{1}{2\sigma_x^2\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \end{cases}$$

En portant dans (63), on obtient pour X une expression de la forme :

$$(69) \quad \begin{cases} X = B + \lambda\, \delta T'_o + \mu\, \delta m'_o + \nu\, \delta \sigma_x^2 \\ \lambda = e^{-i\frac{T}{t}} (bm - p) \dfrac{T}{T_o} \\ \mu = bt \dfrac{(1-e^{-i\frac{T}{t}})}{i} \dfrac{\partial m}{\partial m_o} + e^{-i\frac{T}{t}} (bm-p) \dfrac{\partial T}{\partial m_o} \\ \nu = bt \dfrac{(1-e^{-i\frac{T}{t}})}{i} \dfrac{\partial m}{\partial \sigma_x^2} + e^{-i\frac{T}{t}} (bm-p) \dfrac{\partial T}{\partial \sigma_x^2} \end{cases}$$

C'est une expression linéaire relativement aux accroissements $\delta T'_o$, $\delta m'_o$ et $\delta \sigma_x^{2\prime}$, dont on sait calculer les coefficients λ, μ et ν. Ces accroissements sont assimilés à des variables normales de moyenne nulles. Les variances de $\delta T'_o$ et $\delta m'_o$ s'obtiennent en faisant les différences des variances arithmétiques sur les estimations du tonnage total et de la teneur globale après la première phase de reconnaissance et après la deuxième

$$D^2(\delta T'_o) = \sigma^2_{T_o} - \sigma^2_{T'_o}$$

$$D^2(\delta m'_o) = \sigma^2_E - \sigma^2_{E'}$$

Pour la troisième variance $D^2[\delta \sigma_x^2]$, qu'on ne sait pas calculer en général, on pourra prendre

$$D^2[\delta \sigma_x^2] = 0$$

si l'on estime que la dispersion absolue est très bien connue, soit, dans le cas contraire :

$$D^2[\delta \sigma_x^{\prime}] = 2\sigma_x^2 (\sigma_E^2 - \sigma_{E'}^2)$$

par analogie avec le cas classique. Comme ces accroissements sont des variables

... / ...

indépendantes (en première approximation, car il pourrait y avoir corrélation entre $\delta T'_o$ et $\delta m'_o$), on prendra pour X une loi normale de paramètre :

$$\begin{cases} E(x) = B \\ \sigma^2 = \lambda^2 (\sigma_T^2 - \sigma_{T'}^2) + \mu^2 (\sigma_E^2 - \sigma_{E'}^2) + \nu^2 D^2 (\delta \sigma_{x'}^2) \end{cases}$$

et on calculera $E(B_3)$:

$$E(B_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_0^\infty X \, e^{-\frac{(x-B)^2}{2\sigma^2}} \, dX - P$$

ce qui donne

$$(71) \quad E(B_3) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{B^2}{2\sigma^2}} + B\, G\left(-\frac{B}{\sigma}\right) - P$$

C'est la comparaison de la valeur numérique de (71) avec celles de (61) qui permettra finalement de choisir l'une des trois décisions. On ne devra cependant pas perdre de vue le caractère très approximatif de l'expression obtenue pour $E(B_3)$.

G. MATHERON.

G. MATHERON.