

J. Matheron (1961)

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 33

-----

Exemple expérimental d'anisotropie zonale.

Les données expérimentales que nous nous proposons d'étudier sont empruntées à RYCHOV<sup>1</sup>. Il s'agit d'un gisement stratiforme horizontal, dont la forme est en gros celle d'un rectangle de 300 X 200 m<sup>2</sup>. Les données numériques disponibles sont les puissances de cette formation, mesurées selon une maille carrée de 10 mètres de côté, soit au total 600 puissances mesurées, dont quelques unes, situées hors du contour du gisement, ont une valeur nulle. Nous reproduisons ci-contre, figure 1, les courbes d'égales puissances, et, sur le tableau I les valeurs numériques des données originales, d'après l'article cité<sup>1</sup> de STAMMBERGER. Il ressort de cette figure 1 qu'il existe, pour les puissances, une direction privilégiée, ou run, orientée grossièrement E - W, et le long de laquelle les courbes d'égale puissance ont tendance à s'aligner. Nous allons essayer d'interpréter ce run en décrivant la variation régionalisée à deux dimensions de la puissance au moyen d'un schéma de de Wijs à anisotropie zonale. Nous désignerons par  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les dispersions absolues isotropes et zonales. On sait que, dans un tel schéma, les variogrammes expérimentaux relatifs aux différentes directions se présentent comme des droites, si l'on prend une échelle logarithmique pour les distances, au moins pour des valeurs relativement grandes de la distance.

---

1. Cité dans STAMMBERGER "Können Erkundungsdaten die Lagerstätten verhältnisse richtig widerspiegeln" Zeitsch für Bergbau - Bergakademie Freiberg - Février 1958.

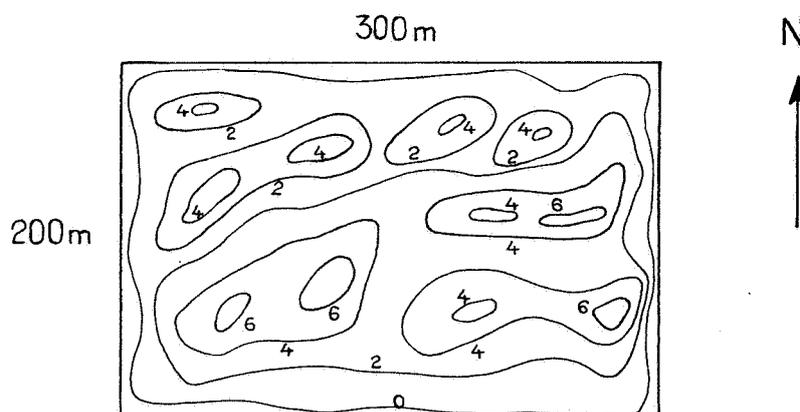


Figure 1

Courbes d'égales puissances, de 2 en 2 m

TABLEAU I - Les Puissances

0 0.5 0.8 09 0	0 0 0 01 02	07 08 09 06 0	0 02 03 03 0
0.1 1.2 2.0 20 10	11 10 0.8 10 16	16 20 22 18 19	15 18 14 09 01
0 1.5 3.0 25 11	17 19 21 27 32	20 21 28 31 36	34 30 21 15 02
0.2 1.5 3.9 26 10	20 33 37 45 34	21 26 36 40 48	42 36 27 14 0
0.1 1.5 40 24 10	24 45 51 42 21	20 30 42 51 57	52 42 30 13 0
0.2 1.6 3.6 20 11	32 48 43 28 20	26 34 50 61 62	55 38 29 10 0
0.3 1.7 2.9 16 14	31 37 26 21 23	30 40 56 63 58	50 35 21 09 0
0.1 1.0 2.0 10 19	30 25 20 20 28	37 51 57 53 49	43 29 19 10 0
0.1 0.7 0.8 10 25	35 28 21 25 34	43 50 51 52 51	40 28 18 13 01
0 0.6 0.9 16 34	38 27 20 26 37	42 47 53 56 50	41 27 17 12 02
0 0.8 1.5 26 40	40 22 21 27 35	49 53 67 63 54	40 31 19 14 04
0 0.9 1.7 33 51	35 21 23 29 40	55 67 70 60 50	40 30 17 13 03
0 1.0 1.8 34 42	31 23 22 30 45	57 60 58 50 42	37 26 18 11 01
0 0.8 1.5 20 29	20 26 25 34 46	48 46 42 37 33	30 20 17 10 0
0 0.6 1.3 15 20	20 20 24 35 40	39 35 30 30 30	30 26 19 10 0
0 0.7 1.4 19 25	22 21 25 30 30	32 30 20 34 39	38 30 18 13 0
0.1 0.9 1.8 28 32	20 23 29 35 30	35 30 36 41 48	45 35 20 15 0
0.2 1.42.5 39 31	26 25 40 45 34	30 35 46 52 54	46 57 22 14 01
0.3 1.6 30 40 28	25 27 43 51 38	30 40 48 60 55	47 36 24 13 02
0.5 2.0 3.2 34 23	24 26 45 62 40	31 41 52 63 56	40 30 21 12 01
0.6 1.8 2.1 21 21	22 25 51 61 39	33 40 54 61 53	35 28 19 10 02
0.3 1.6 1.9 20 25	20 26 50 62 40	31 39 53 58 49	32 25 16 09 02
0 1.0 18 30 34	20 27 48 60 40	30 36 50 51 40	27 21 19 08 01
0 0.8 21 41 32	21 28 42 63 41	30 34 50 50 38	25 20 15 10 0
0 0.2 11 28 24	20 27 45 64 42	31 30 40 53 37	28 19 14 12 0
0 0.1 09 14 18	20 30 50 63 43	31 30 40 53 47	31 23 17 13 04
0 0.2 10 19 26	30 40 55 61 40	30 31 42 60 56	43 27 21 15 06
0.1 0.6 18 31 37	42 43 46 41 30	32 31 48 70 62	45 28 24 17 08
0.2 0.1 16 27 20	28 30 29 20 16	19 24 51 50 35	26 17 14 13 05
0 0 0 0 0	08 10 04 01 0	0 09 21 10 02	03 04 03 02 0

Pour toutes les directions de l'espace, à l'exception de la direction privilégiée qui est celle du run, on doit observer des droites parallèles, dont la pente commune est proportionnelle à  $(\alpha_1 + \alpha_2)$ . Pour la direction du run, on observe également une droite, mais de pente plus faible, proportionnelle à la seule dispersion isotrope  $\alpha_1$ . A partir des données expérimentales, nous avons calculé les dix premiers points du variogramme pour les directions N - S et E W (distances d variant de 10 en 10, de 10m à 100m), et les 7 premiers points du variogramme pour les directions N E - S W et N W - S E (distance d variant de  $10\sqrt{2}$  = 14,14m en  $10\sqrt{2}$ , de 14,14m à  $70\sqrt{2}$  ~~100m~~). Les valeurs numériques obtenues sont les suivantes :

Variogramme des Puissances selon 4 directions					
d	Variog.NS	Variog.EW	d	Variog.NW-SE	Variog.NE-SW
10	1.059	0.612	14,14	1.760	1.122
20	2.866	1.402	28,28	4.102	3.082
30	4.179	2.001	42,42	5.187	4.264
40	4.970	2.216	56,57	5.752	4.885
50	5.383	2.300	70,71	6.032	5.704
60	6.061	2.441	84,85	6.319	5.882
70	5.981	2.980	98,99	6.807	5.430
80	5.593	2.605			
90	5.773	2.689			
100	6.666	2.802			

Ces quatre variogrammes expérimentaux sont représentés, en échelle logarithmique, sur la figure 2. Conformément aux prévisions de la théorie, ces 4 courbes sont assimilables à des droites, dont trois sont parallèles, la quatrième - qui correspond à la direction E W, c'est-à-dire à la direction du run, ayant une pente nettement plus faible que les trois autres. Le schéma de de Wijs à anisotropie zonale représente donc très bien l'allure qualitative du phénomène. Examinons quantitativement ce qu'il en est :

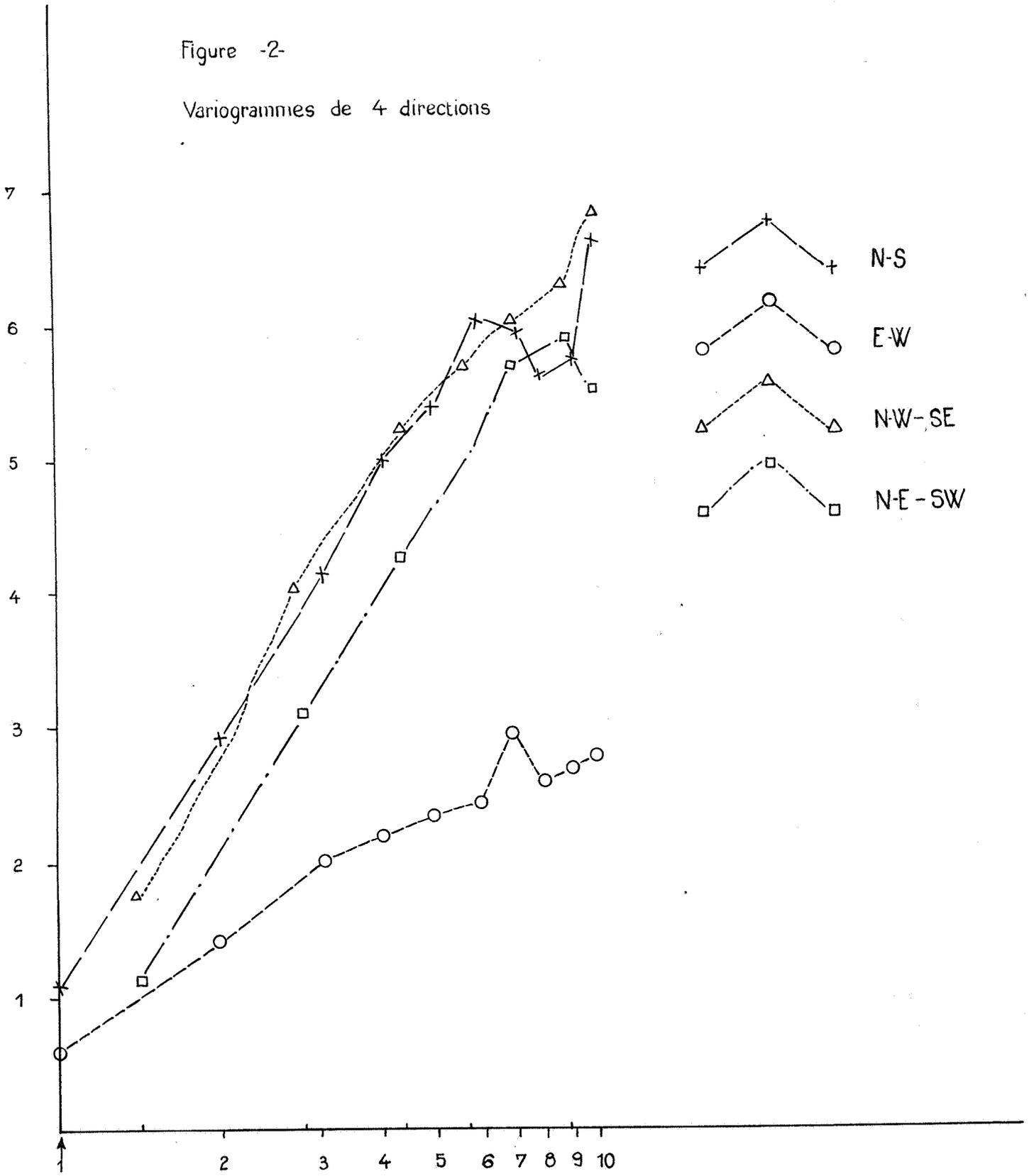
A/ En prenant pour les distances une unité égale à 10m, le variogramme

E W peut être représenté par la droite :

$$(1) \quad 6^2 d = 0.61 + 0.99 \log d$$

Figure -2-

Variogrammes de 4 directions



d'où une valeur  $3\alpha_1 = 0.495$  pour la dispersion absolue isotrope  $\alpha_1$ .  
Le variogramme N - S, lui, peut s'interpoler par :

$$(2) \quad \sigma^2 d = 1.06 + 2.48 \log d$$

Si nous admettons que la loi de dispersion isotrope définie en (1) est exempte d'anisotropie géométrique, le variogramme (2) doit être interprété comme la somme du variogramme isotrope (1) et du variogramme zonal. Par différence, on obtient pour le variogramme zonal :

$$(3) \quad \sigma^2 d = 0.45 + 1.49 \log d$$

Et finalement, le variogramme selon une direction quelconque se mettra sous la forme :

$$(4) \quad \sigma^2 d = 1.06 + 0.99 \log r + 1.49 \log (z - z')$$

r représentant la distance, et  $(z - z')$  la différence des ordonnées sur l'axe NS. En particulier, pour une direction diagonale NE - SW ou NW-SE, en aurait :

$$z - z' = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

d'où, pour les deux diagonales, le variogramme :

$$(5) \quad \sigma^2 d = 1.06 - 1.49 \log \sqrt{2} + 2.48 \log r = 0.545 + 2.48 \log r$$

A cette équation, nous comparerons le variogramme moyen, obtenu en faisant la moyenne, terme à terme, des variogrammes NE - SW et NW, SE.

Cette comparaison est représentée sur le tableau suivant :

Variogramme moyen, NW - SE + NE - SW		
d	$\sigma^2 d$ théorique	$\sigma^2 d$ expérimental
1.41	1.40	1.44
2.83	3.22	3.59
4.24	4.12	4.72
5.66	4.85	5.32
7.07	5.39	5.87
8.48	5.84	6.10
9.90	6.24	6.12

L'accord est satisfaisant. Le schéma zonal adopté permet une prévision correcte du variogramme diagonal à partir des deux variogrammes NS et EW.

B/ Examinons maintenant si le variogramme (4) permet une prévision correcte des variances. Nous avons calculé les valeurs expérimentales de la variance générale des puissances dans le rectangle (2.61), de la moyenne des variances des puissances dans une ligne (1.32) et dans une colonne (2.39). Pour les variances dans les lignes et les colonnes, nous avons fait abstraction de la première et de la dernière ligne ou colonne, à cause de leur position en bordure du gisement et de la présence d'un nombre important de puissances 0, c'est-à-dire de points extérieurs à la formation.

Nous interpréterons tout à l'heure le variogramme par un schéma de de Wijs à constante  $a^2$ . Mais cette interprétation n'est pas nécessaire pour le calcul des variances. La variance de la puissance dans une zone d'extension donnée doit, en effet, être égale à la moitié de la valeur moyenne dans cette zone du variogramme écrit numériquement en (4). Par exemple, pour la variance générale, on prendra la demi valeur moyenne de 4 dans le rectangle 20 X 30 (l'unité étant 10m), et on tiendra compte de ce qu'un tel rectangle est équivalent à un segment de droite de longueur 20 + 30 = 50, soit :

$$6^2_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1.06 + 0.99 \left( \log 50 - \frac{3}{2} \right) + 1.49 \left( \log 20 - \frac{3}{2} \right) \right\} = 2.84$$

Pour la variance dans une colonne, on prendra la valeur moyenne de (2), soit :

$$6^2_2 = \frac{1}{2} \left\{ 1.06 + 2.48 \left( \log 20 - \frac{3}{2} \right) \right\} = 2.39$$

et pour la variance dans une ligne, la valeur moyenne de (1), soit :

$$6^2_3 = \frac{1}{2} \left\{ 0.61 + 0.99 \left( \log 30 - \frac{3}{2} \right) \right\} = 1.25$$

La comparaison de ces trois variances théoriques avec leurs valeurs expérimentales est résumée sur le tableau suivant :

	Valeur expérimentale	Prévision théorique
Variance des puissances dans le rectangle $6_1^2$	2.61	2.84
" " " dans une colonne $6_2^2$	2.39	2.39
" " " dans une ligne $6_3^2$	1.32	1.25

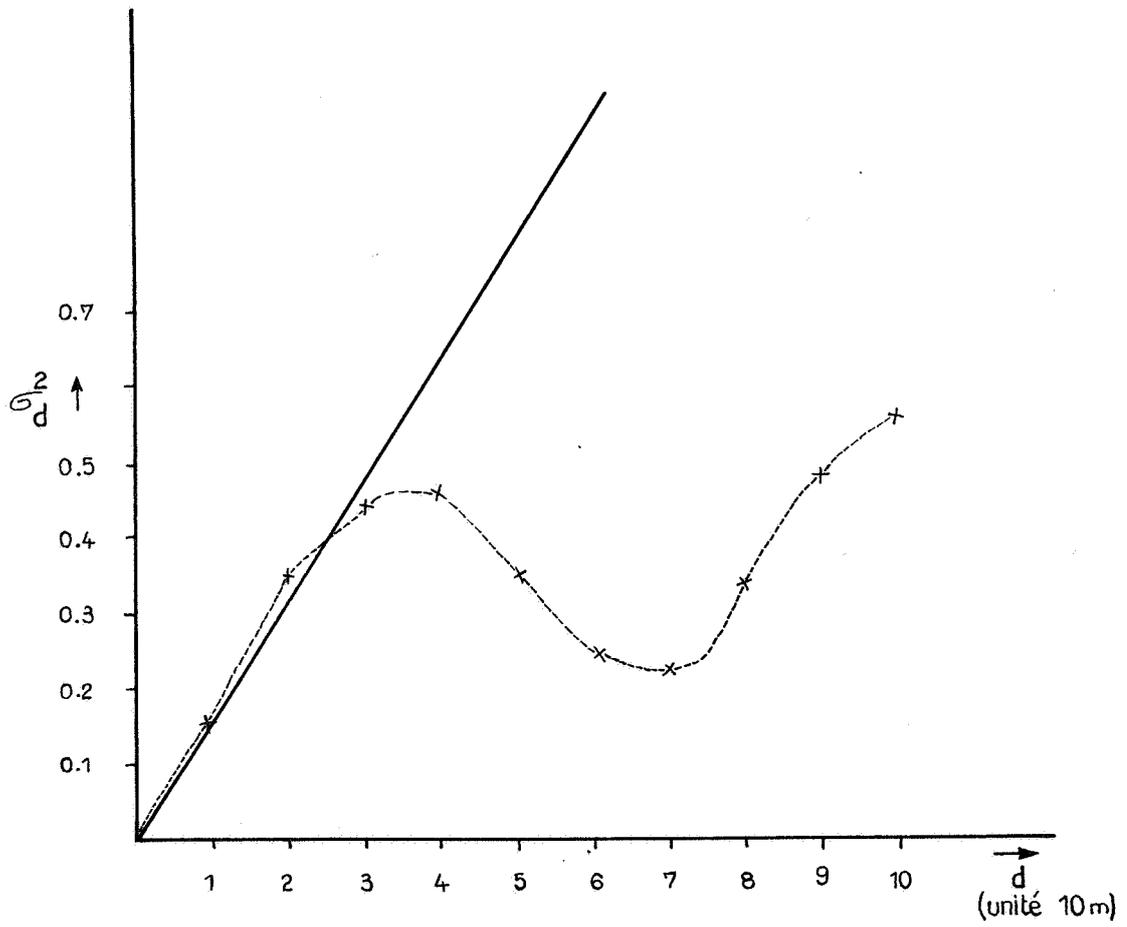
On voit que l'accord est bon, sauf peut-être pour la variance générale, dont la valeur expérimentale (2.61) est inférieure de 8 % à la prévision théorique (2.84), divergence d'ailleurs faible. Cette divergence est sans doute imputable à l'existence d'une périodicité E W, de période 75 m, qui se superpose au run, et qui est du reste bien marquée sur la figure 1 par l'alternance régulière des maxima des puissances, grossièrement alignés selon des colonnes parallèles.

C/ Pour mettre cette périodicité en évidence, nous avons calculé le variogramme des puissances moyennes des colonnes. Ne disposant que de 30 valeurs numériques pour établir un tel variogramme, on ne devra pas lui attacher une signification exagérée. Néanmoins, il met bien en évidence l'existence d'une période de 75m environ. Ce variogramme, représenté sur la figure 3, a été calculé pour 10 points : les valeurs numériques sont les suivantes.

Variogramme des colonnes	
Distance d (unité 10m)	Variance $6^2 d$
1	0.155
2	0.340
3	0.443
4	0.459
5	0.362
6	0.247
7	0.228
8	0.339
9	0.482
10	0.559

Figure 3

Variogramme des colonnes



Le variogramme théorique devrait avoir une allure linéaire, puisque la taille des colonnes (200m), est grande vis à vis de leurs distances (de 10 à 100m pour les 10 points calculés), et se déduire uniquement de la dispersion absolue isotrope  $6\alpha_1 = 0.99$ , puisque la zonalité est éliminée sur les colonnes. Son équation serait :

$$(6) \quad \gamma^2 d = 0.99 \ll \frac{d}{20}$$

Il est représenté, sur la figure 3, par une droite qui coïncide bien avec les trois premiers points expérimentaux. Au delà du quatrième point, l'effet de périodicité se manifeste, et la courbe expérimentale est nettement plus basse que la droite théorique. Or la variance d'une colonne dans le gisement n'est autre que la demi valeur moyenne de ce variogramme sur l'intervalle (0,30). De fait, la prévision théorique pour cette variance,  $2.84 - 2.39 = 0.45$  est notablement plus forte que la valeur observée,  $2.61 - 2.39 = 0.22$ . Cette forte divergence est bien expliquée par la figure 3, et doit être considérée comme imputable à la périodicité. Elle se répercute sans changement sur la variance des puissances dans le gisement. L'écart entre la valeur théorique, 2.84, et la valeur expérimentale 2.61 - qui a même valeur absolue, mais une importance relative beaucoup plus faible - doit donc être, lui aussi, imputé à cette périodicité.

D/ Essayons maintenant d'interpréter les ordonnées à l'origine des variogrammes (1) et (3), représentant le terme isotrope et le terme zonal du variogramme général. Conformément au caractère géométrique de la variable puissance, il convient d'interpréter les résultats expérimentaux à l'aide de schéma de de Wijs à constante  $a^2$  différente de 0. Pour une fonction intrinsèque de la forme :

$$\gamma(r) = \frac{3\alpha}{2} \log(r^2 + a^2)$$

le variogramme a pour équation théorique :

$$(7) \quad \gamma^2 d = 2 \frac{3\alpha}{2} \log\left(1 + \frac{d^2}{a^2}\right) = 6\alpha \log \sqrt{1 + \frac{d^2}{a^2}}$$

Pour le terme isotrope, de dispersion absolue  $6\alpha_1 = 0.99$ , on trouve en identifiant (1) et (7) pour  $d = 1$  :

$$0.99 \log \sqrt{1 + \frac{1^2}{a_1^2}} = 0.61 \quad a_1 = 0.68, \text{ soit } a_1 = 6,8 \text{ m}$$

De même, pour le terme zonal, on identifiera (7) à (3) pour  $d = 1$ , ce qui donne :

$$0.45 = 1.49 \log \sqrt{1 + \frac{1}{a_z^2}} \quad \text{d'où } a_z = 1,1, \text{ soit } a_z = 11 \text{ m}$$

Ces longueurs  $a_1 = 6,8\text{m}$  et  $a_z = 11 \text{ m}$  sont de l'ordre de grandeur de la maille utilisée, qui est 10m, c'est pourquoi les variogrammes accessibles expérimentalement sont tous d'allure logarithmique : les constantes  $a^2$  ne régularisent la variation que dans le voisinage immédiat de chaque point mesuré.

E/ Etudions maintenant les variances d'estimation pour des mesures à maille plus lâche que 10 X 10. RYCHOV a divisé le rectangle 30 X 20 en 12 rectangles 10 X 5 et a étudié, d'un point de vue purement expérimental, ce qu'auraient donné les dispositifs de reconnaissance suivants :

1 - mesurer à maille systématique 10 X 5 (10 selon les lignes, et 5 selon les colonnes, conformément à l'anisotropie des données) c'est-à-dire une mesure dans chacun des rectangles 10 X 5, le point mesuré ayant même implantation dans chacun des rectangles.

2 - mesurer selon un mode aléatoire stratifié : soit une mesure en un point tiré au sort dans chacun des 12 rectangles précédents.

Rychov présente ses résultats sous forme d'histogramme de fréquences, que nous ne reproduisons pas ici. Il constate expérimentalement que les histogrammes obtenus par les modes 1 et 2 sont équivalents. Cela ne nous surprend pas, puisque nous savons qu'une maille systématique, dans le cadre d'un schéma à champ fixe et implantation flottante - c'est-à-dire le dispositif 1 - doit être regardé comme équivalent à un schéma aléatoire stratifié - c'est-à-dire au dispositif 2. L'efficacité

de ces deux modes d'échantillonnages peut être représentée par une variance. La valeur expérimentale, déduite des histogrammes de Rychov, que nous avons trouvée pour cette variance est égale à 0,096 pour les deux dispositifs. Examinons si la théorie permet de retrouver cette valeur numérique.

Dans un schéma aléatoire stratifié, la variance d'estimation est  $\frac{6^2 - 6^2 z}{n}$ ,  $6^2 - 6^2 z$  représentant la variance de la puissance dans le rectangle pris comme maille, c'est-à-dire dans le rectangle 10 X 5. Dans un tel rectangle, la variance des puissances résulte de la somme d'un terme zonal :

$$\frac{1}{2} \left\{ 0.45 + 1.49 \left( \log 5 - \frac{3}{2} \right) \right\} = 0.305$$

et d'un terme isotrope :

$$\frac{1}{2} \left\{ 0.61 + 0.99 \left( \log 15 - \frac{3}{2} \right) \right\} = 0.90$$

et a donc pour valeur théorique 0.90 + 0.30 = 1,20. La variance d'estimation résultante, puisque les rectangles sont au nombre de 12, est 12 fois plus petite, soit égale à 0.1 - Cette prévision théorique est en excellent accord avec la valeur expérimentale, qui est de 0.096.

Variance d'estimation pour une maille 10 X 5 avec implantation aléatoire stratifiée	
Prévision théorique	Valeur expérimentale
0.100	0.096

On peut conclure qu'à l'exception des anomalies périodiques observées sur le variogramme des colonnes, le schéma zonal utilisé représente de façon très correcte l'ensemble des faits expérimentaux observés, et permet en particulier une excellente prévision de l'efficacité d'une maille de reconnaissance.

