M° 41

BUREAU DE RECHERCHES GEOLOGIQUES
ET MINIERES

Département des Réserves

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 41

RECHERCHE D'OPTIMUM DANS LA RECONNAISSANCE et la MISE EN EXPLOITATION DES GISEMENTS MINIERS

-:-

G. MATHERON et Ph. FORMERY

Novembre 1962.

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 41

RECHERCHE D'OPTIMUM DANS LA RECONNAISSANCE et la MISE EN EXPLOITATION DES GISEMENTS MINIERS

T a b l e d e s M a t i è r e s

.../...

Table des Matières

... / ...

Table des Matières

Pages

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 41

Recherche d'optimum dans la reconnaissance
et
la mise en exploitation des gisements miniers

-:-

INTRODUCTION

Etant donnés l'ampleur des investissements mis en jeu dans l'industrie minière, et la gravité du risque de ruine, aucune Société, aucune autorité responsable, ne prennent la décision d'exploiter un nouveau gisement sans avoir procédé au préalable à une estimation aussi précise que possible de tous les paramètres géologiques, techniques et économiques qui conditionnent la rentabilité de la nouvelle mine. Ces paramètres sont nombreux et variés. Des études prévisionnelles de marché permettent de préciser les facteurs économiques (cours et débouché). Des essais de traitement en laboratoire, ou en laverie pilote, et l'étude détaillée de différents projets d'exploitation permettent de choisir et de chiffrer la meilleure solution technique. Enfin, des travaux de reconnaissance par sondages ou travaux miniers conduisent à une évaluation des réserves du gisement, en tonnage et en teneur. Il serait souhaitable, dans l'absolu, de connaître parfaitement ces différents paramètres. Mais l'information coûte cher. Les travaux de reconnaissance, en particulier, peuvent représenter un pourcentage non négligeable du total des investissements. Il arrive un moment où la valeur de l'information supplémentaire n'est plus en rapport avec son prix de revient. Entre les deux situations extrêmes, caractérisées, l'une par des dépenses de recherche nulles et un risque de ruine maximum, l'autre par une sécurité parfaite et des dépenses de recherches infinies, il existe nécessairement une situation de compromis correspondant à un optimum. Où se situe cet optimum, et comment le déterminer, telles sont les questions auxquelles tente de répondre la présente étude. Nous nous limiterons, en fait, au problème de la détermination du volume optimum des travaux de reconnaissance. Les données économiques (cours du minerai et possibilités de débouchés) sont supposées connues, de même que les caractéristiques techniques de la méthode d'exploitation et du procédé de traitement retenus. Nous devrons, par contre, étudier en détail l'influence du choix de deux paramètres techni-

... / ...

ques très importants : la cadence annuelle d'exploitation, et la teneur limite de coupure.

Il est clair que le problème ne peut pas se formuler dans l'absolu. Le niveau optimum de la reconnaissance dépend des caractéristiques du gisement lui-même, et ne peut être déterminé effectivement que si l'on dispose déjà de certains renseignements sur ces caractéristiques, c'est-à-dire, pratiquement, si l'on a déjà effectué une première phase de travaux de reconnaissance. On a un schéma séquentiel, où les décisions à prendre se présentent en cascade. A l'issue d'une première phase de reconnaissance, on se trouve placé en un point crucial C (Figure 1). :

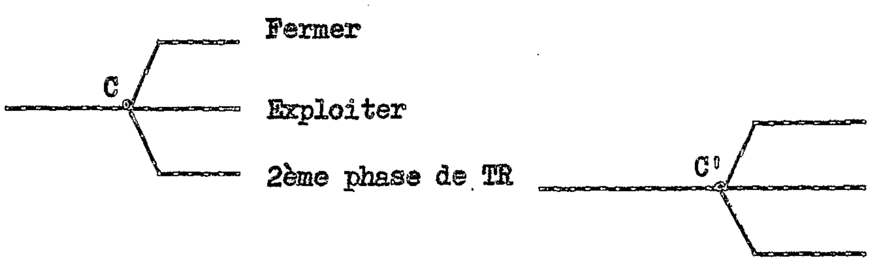


Figure 1

où l'on a le choix entre trois décisions possibles :

1)- Fermer le chantier et abandonner le gisement,

2)- Exploiter tout de suite,

3)- Faire une deuxième phase de travaux de reconnaissance.

Si l'on adopte la troisième décision, on se trouve-à l'issue de la deuxième tranche de travaux de reconnaissance - en un nouveau point crucial C', où, théoriquement, les trois décisions sont à nouveau possibles, mais peuvent être prises sur la base d'informations plus complètes qu'en C. Entre ces trois décisions, le choix suppose un critère : nous avons adopté le critère habituel, qui consiste à maximiser l'espèrance mathématique du bénéfice futur. On choisit la décision qui donne

.../...

la meilleure espérance en aval du point C. La première décision conduit à une espérance nulle. Celle de la deuxième se calcule en faisant le bilan prévisionnel du projet d'exploitation construit à partir de l'information disponible à l'issue de la première phase. Celle de la troisième s'obtient en anticipant, en probabilité,(1) les résultats de la deuxième phase de travaux et la décision à prendre qu'ils impliqueront en C' : elle met en balance la diminution du risque de ruine avec le coût des travaux supplémentaires. La Géostatistique fournit, à chaque étape, une mesure objective de l'information disponible sous la forme de variances d'estimation sur le tonnage et la teneur, auxquelles des raisonnements simples permettent d'attribuer une signification économique, et donc de calculer numériquement les diverses espérances mathématiques.

Mais ce n'est pas tout. Outre le risque de ruine, d'autres facteurs influent sur le volume optimum des travaux de reconnaissance. Si, en effet, la décision d'exploiter est prise, le risque de ruine ayant été jugé suffisamment faible, il reste à préparer un projet d'exploitation aussi bon que possible, comportant, en particulier, un choix optimum de la cadence annuelle d'exploitation et de la teneur limite. La cadence et la teneur limite optimales dépendent naturellement des réserves du gisement. Une erreur dans l'évaluation des tonnages et des teneurs conduit à un dimensionnement de l'exploitation qui s'écarte de l'optimum. Il en résulte une perte, dont la valeur probable peut être calculée, et doit être mise en balance avec le prix de revient de travaux supplémentaires. Même si l'on est certain de l'exploitabilité du gisement, il arrivera que l'on ait intérêt à faire des travaux de reconnaissance supplémentaires, non plus pour pallier un risque de ruine négligeable, mais pour choisir le meilleur programme d'exploitation.

Chronologiquement, le schéma séquentiel de la figure 1 se présente en premier lieu, les problèmes de dimensionnement n'intervenant qu'après la démonstration de l'exploitabilité. Mais un exposé théorique doit nécessairement observer l'ordre inverse, puisque c'est seulement lorsque l'on a défini les éventualités possibles en aval du point C, et chiffré leurs rapports, que l'on peut calculer les diverses espérances mathématiques : il faut, en premier lieu, approfondir le concept d'exploitabi-

... / ...

---

(1) - Le recours au langage probabiliste est, en fait, un artifice dont nous devrons examiner la valeur et les limites.

lité, et cela conduit obligatoirement à poser le problème du dimensionnement optimum. D'où le plan de cette étude : Dans une première partie - qui s'inspire largement des travaux de F. BLONDEL - on examinera la rentabilité d'un gisement dont les réserves sont connues et les problèmes posés par le choix d'une teneur limite et d'une cadence annuelle d'exploitation. Dans une deuxième partie, on déterminera le niveau optimum de la reconnaissance d'un gisement dont la rentabilité est certaine, en mettant en balance le coût des travaux et la perte due à un mauvais dimensionnement de l'exploitation. La troisième partie, enfin, tiendra compte du risque de ruine et formulera, de façon précise, le schéma séquentiel de la figure 1. Les deux premières parties, en réalité, traitent du problème posé par le choix de paramètres techniques : cadence d'exploitation, teneur limite, et volume des travaux de reconnaissance, ces derniers n'intervenant ici que dans la mesure où ils servent à définir l'optimum des deux premiers. Corrélativement, nous verrons que les raisonnements doivent être faits avec un taux d'actualisation nul, et qu'ils conduisent à des optima absolus. La troisième partie, au contraire, analyse des critères de décision : elle a pour objectif une optimisation séquentielle, ou relative (relative aux informations disponibles au point crucial C), et fait nécessairement intervenir un taux d'actualisation différent de zéro. A titre d'illustration, enfin, nous donnerons dans une quatrième et dernière partie un exemple numérique détaillé d'application.

*

*   *

CHAPITRE I

I.- CHOIX D'UNE TENEUR LIMITE ET D'UNE CADENCE ANNUELLE D'EXPLOITATION.

1).- Définition des paramètres.

Dans cette première partie, nous supposons que les caractéristiques du gisement sont parfaitement connues. En particulier, on a pu déterminer sans ambiguïté la meilleure méthode d'exploitation et le meilleur procédé de traitement possible. Il reste à choisir deux paramètres techniques essentiels :

- la cadence de production annuelle "t"
- la teneur limite, ou teneur de coupure "x."

La signification du deuxième paramètre doit être précisée. Dire que l'on prend x comme teneur de coupure signifie que l'on décide d'abandonner les panneaux dont la teneur moyenne est inférieure à x, et d'exploiter ceux dont la teneur est supérieure à x. Une telle notion n'a de sens que si l'on définit la taille des panneaux auxquels cette coupure s'appliquera, c'est-à-dire le niveau auquel opérera la sélection. Cette taille doit être considérée comme une donnée, puisqu'elle résulte des caractéristiques technologiques du mode d'exploitation que l'on a retenu.

Le tonnage de minerai "$T(x)$," et la teneur moyenne "$m(x)$" apparaissent comme deux fonctions, l'une décroissante et l'autre croissante, de la teneur de coupure x. Si $T(o) = T_o$ désigne le tonnage du gisement entier, la différentielle $-\frac{dT(x)}{T_o}$ représente, en pourcentage du tonnage total, le tonnage du minerai à teneur comprise entre x et $x + dx$. On l'interprète parfois comme la densité de fréquence $f(x)dx$ de la distribution statistique des teneurs en fonction des tonnages. Une telle interprétation n'est ni claire (1) ni essentielle. Nous n'en ferons pas usage. La fonction $T(x)$ représente simplement le résultat d'une méthode donnée d'exploitation lorsqu'on l'applique, avec une teneur limite x, à un gisement, c'est-à-dire, à un phénomène naturel, déterminé.

... / ...

(1) Voir page suivante.

On prendra bien garde, en particulier, de ne pas assimiler $\frac{T(x)}{T_o}$ à la distribution cumulée des teneurs des échantillons prélevés. Même si l'on admet les postulats probabilistes,[1] la distribution des teneurs des échantillons n'est

. . . .

(1) L'interprétation probabiliste de $T(x)$ n'est possible que moyennant des postulats assez artificiels qui ne sont que rarement explicités dans la littérature. On considère, par exemple, l'ensemble des panneaux, en nombre infini, possédant les dimensions minimales imposées par la technologie du mode d'exploitation adopté et susceptibles d'être implantés géométriquement dans l'espace minéralisé. On définit ensuite un procédé de tirage au sort donnant une même probabilité d'être choisi à chacun de ces panneaux. La teneur x du panneau choisi est alors une variable aléatoire, possédant une certaine densité de probabilité $f(x)$. La distribution cumulée $\int_x^\infty f(x)dx$ de cette variable pourrait très bien n'avoir qu'un lointain rapport avec la fonction $T(x)$. Lors de l'exploitation, le découpage en panneaux n'est pas fait au hasard. Le choix intelligent du mineur intervient, et joue un peu le rôle du démon de Maxwell de la thermodynamique. Conceptuellement, $T(x)$ pourrait être défini de la manière suivante : on considérerait, en premier lieu, l'ensemble des partitions P_k réalisant le découpage de l'espace minéralisé en panneaux de tailles <u>égales</u> ou <u>supérieures</u> à la limite technologique. Pour chaque partition P_k, la sélection des panneaux (en nombre fini) à teneur supérieure à x définit une fonction $T_k(x)$, et conduit à un bilan d'exploitation possible $B_k(x)$. Pour chaque valeur de x, il existe une partition P_i pour laquelle ce bilan est maximum ; l'indice i est une fonction de x, puisque il n'y a pas de raison pour qu'une même partition P_i soit optimale vis-à-vis de toutes les coupures x. $T(x)$ est égal, pour chaque valeur de x, à la valeur du $T_i(x)$ de la partition optimale P_i. En réalité, le mineur n'est pas infaillible, et la partition qu'il choisira ne sera pas forcément la meilleure : mais elle sera quand même, en général, l'une des meilleures possibles, et l'on sera toujours plus proche du "démon de Maxwell" que du "singe dactylographe".

De plus, la teneur de coupure x n'est sans doute pas, à elle seule, un critère de sélection satisfaisant. Un panneau isolé, à teneur supérieure à x, pourra être abandonné si son accès est trop onéreux. En toute rigueur, à chaque partition P_k de l'espace minéralisé en N_k panneaux est associé un ensemble de

$$1 + C^1_{N_k} + \dots + C^{N_k}_{N_k} = 2^{N_k}$$

projets d'exploitation possibles, comportant l'exploitation de $0, 1 \dots N_k$ panneaux. Parmi ces projets, l'un $S_k(b)$ est meilleur que les autres dans les conditions économiques du moment (caractérisées par un paramètre b). Si les conditions économiques varient, $S_k(b)$ est une fonction de b et définit un tonnage $T_k(b)$ et une teneur $m_k(b)$ associés à la partition P_k. A b fixé, on choisit, parmi l'ensemble $S_k(b)$, le meilleur projet $S_i(b)$. (L'indice i est une fonction de b). Le tonnage et la teneur associés à $S_i(b)$ définissent, lorsque b varie, les fonctions $T(b)$ et $m(b)$ donnant, en fonction des conditions économiques, le meilleur tonnage et la meilleure teneur possibles. Par élimination de b, on obtient une

.../...

des échantillons n'est pas du tout identique à la distribution $T(x)$ des teneurs des panneaux au niveau desquels opère la sélection. Elle est toujours plus dispersée. La géostatistique permet, en général, de calculer la variance de la distribution $T(x)$ des panneaux, à partir de la variance expérimentale des échantillons. Si les teneurs obéissent, au moins approximativement, à une loi de distribution simple (normale, lognormale, etc ...), il est aisé de reconstituer la fonction $T(x)$. En l'absence d'une loi simple, on pourra cependant construire l'histogramme des panneaux en resserrant l'histogramme des échantillons autour de sa valeur moyenne par une affinité de module égal au rapport des écarts types.

Ces méthodes ne sont utilisables que si l'on admet les postulats probabilistes (si le découpage en panneaux est assimilé à une partition aléatoire). Même si l'on admet cette hypothèse, il faut de plus que le gisement soit homogène. Dans le cas d'une hétérogénéité trop complexe pour permettre une séparation effective des sous-zones homogènes composantes, il ne restera plus que les méthodes graphiques usuelles, qui consistent à dessiner sur plan les contours des zones minéralisées à plus de x_1, x_2, ... et d'évaluer directement les volumes déterminés par ces différentes coupures. On obtiendra ainsi une image de la variation de $T(x)$ au voisinage des valeurs plausibles de x. Cette méthode graphique est parfois supérieure aux méthodes mathématiques, en particulier lorsqu'il y a des hétérogénéités, des zonalités ou des runs prononcés. De plus, elle n'implique aucun postulat probabiliste. Mais elle présente un danger grave de surestimation systématique de la teneur moyenne. En effet, pour estimer la teneur moyenne à l'intérieur d'un contour correspondant à une coupure x donnée, il faut kriger, c'est-à-dire tenir compte aussi bien des données extérieures que des données intérieures. Les données extérieures étant, par construction, inférieures à x, la pratique habituelle, qui consiste à n'en pas tenir compte, introduit bien une surestimation systématique - que l'on corrige, en général, à l'aide d'un "abattement pour sa-

.../...

o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o

(1) (fin de la note infrapaginale).

relation $m = f(T)$ donnant la teneur en fonction du tonnage. Le paramètre $x = \frac{d(mT)}{dT}$ qui s'introduit nécessairement dans les équations de l'optimum, joue exactement le rôle de la teneur de coupure envisagée ci-dessus : rien d'essentiel n'est changé. C'est uniquement pour simplifier l'exposé que nous avons introduit la teneur limite x comme une notion première, au lieu de la définir par l'équation (1).

lissage" plus ou moins arbitraire. Il faut, du reste, reconnaître que le problème est difficile. Si l'on était sûr de l'homogénéité géostatistique et de l'isotropie du gisement, dans la zone exploitable et un certain voisinage de celle-ci, il serait possible de faire un krigeage du type continu. Bien souvent, il y aura des zonalités ou des runs, qui ne permettront pas le calcul effectif du krigeage, ou même des hétérogénéités franches : dans ce cas, la notion de krigeage n'a plus de sens ; il s'agit, au sens strict, d'un véritable salissage dont l'expérience seule peut indiquer l'ordre de grandeur.

En résumé, on peut recommander la méthode suivante pour la détermination pratique des fonctions T(x) et m(x) : Au vu du plan d'échantillonnage, adopter l'attitude naturelle du mineur, c'est-à-dire choisir et dessiner, pour une limite x donnée, le mode de découpage en panneaux techniquement possibles qui paraît devoir conduire au meilleur résultat prévisible, et évaluer la teneur moyenne m(x) des panneaux sélectionnés, à l'aide d'un krigeage (si les conditions d'homogénéité et d'isotropie sont vérifiées), ou, à défaut, d'un salissage empirique. En recommençant l'opération pour deux ou trois valeurs de x, on obtiendra une image de la variation de T(x) dans la zone des coupures utiles, et cela suffira pour les applications pratiques.[1]

Quelles que soient les difficultés que l'on peut rencontrer en pratique dans leur détermination, les deux fonctions T(x) et m(x) existent, et représentent le résultat de l'application à un phénomène naturel déterminé (gisement) d'un procédé technologique défini (méthode d'exploitation). L'une, T(x), est décroissante, et l'autre, m(x), croissante. A toute teneur moyenne m (correspondant à une certaine coupure x) est donc associé un tonnage bien déterminé, dont la teneur moyenne est m. On peut donc aussi définir une fonction T(m), donnant le tonnage en fonction de la teneur moyenne, et non plus de la teneur x de coupure.

On peut également définir une fonction m(T) donnant la teneur moyenne en

... / ...

(1) Pour le krigeage, le lecteur peut se référer à mon "Traité de Géostatistique Appliquée". Tome I, Ed. TECHNIP, PARIS 1962.

fonction du tonnage retenu. On remarque que l'on a nécessairement :

$$(1) \quad x = \frac{d(mT)}{dT} = m + \frac{dm}{d(\log T)}$$

[illegible] log désigne le logarithme népérien). En effet $d(mT)$ représente le tonnage de métal dQ contenu dans la tranche marginale dT, dont la teneur est x.(1)* Dans certains cas, cette relation (1) servira à définir le paramètre de coupure x. Il peut arriver, en effet, que les conditions d'exploitabilité ne soient pas les mêmes dans les différentes portions du gisement. Un même panneau de même teneur peut être payant s'il est situé au coeur d'une zone riche, et inexploitable s'il est entouré de zones pauvres et ne paye pas ses frais d'approche. En pareil cas, il n'y a pas de teneur limite universelle, mais la fonction $T(m)$ est toujours définie et, par dérivation, la relation (1) permet d'introduire le paramètre x de coupure.

La relation $m(T)$ pourra, parfois, être représentée par une équation très simple :

$$(2) \quad m = \alpha - \beta \log T$$

ou loi de LASKY.(2)* Cette relation, obtenue empiriquement par S.G. LASKY, représente très bien l'évolution des réserves en fonction des teneurs dans le cas des porphiry copper (et pour une gamme de variation plausible des teneurs). Elle ne peut pas être extrapolée à zéro ou l'infini, sans conduire à des contradictions insurmontables. D'autre part, on peut montrer (3)* que, dans une gamme de variation plausible des paramètres, elle peut être considérée comme une bonne approximation de la

.../...

(1)* D'un point de vue purement mathématique, on écrit :

$$m(x)\ T(x) = -\int_x^{\infty} x T'(x) dx$$

et en différenciant, il vient :

$$d(mT) = x\, dT$$

(2)* LASKY - S.G.- "How Tonnage and Grade Relation help predict Ore Réserves". Eng.Min. Journ., NEW YORK, Avril 1950 -

(3)* G.MATHERON."Remarques sur la loi de Lasdy".Chron.Min.OM et de la Rech.Min.D&C,1959, pp.463-466.

relation lognormale entre teneurs et tonnages. Sans préjuger en rien de la validité générale d'une telle relation, il nous suffit de remarquer, d'un point de vue purement pragmatique, que la loi de LASKY constitue une excellente formule d'interpolation et permet, en particulier, de représenter le comportement de la courbe $m(T)$ entre deux points expérimentaux (connus, par exemple, à partir de deux projets d'exploitation différents). Nous en ferons usage dans l'exemple d'application donné dans la quatrième partie. Il ne sera pas légitime, en général, d'intégrer cette relation dans un intervalle très large. Par contre, les propriétés déduites de son comportement local, au voisinage des points expérimentaux, et en particulier la relation (1), auront des chances d'être vérifiées. Compte tenu de (2), la teneur de coupure x se met sous la forme très simple :

$$(3) \quad x = m - \beta$$

Après avoir défini les paramètres techniques du problème :

- cadence annuelle d'exploitation t,
- Teneur limite de coupure x,
- Tonnage $T(x)$
- Teneur moyenne $m(x)$

il reste à préciser les paramètres économiques utiles. Parmi ceux-ci, nous en distinguerons trois principaux : le cours du marché, les dépenses d'exploitation annuelles, et le montant des investissements.

<u>Le cours du marché</u>, en tant qu'il ne dépend pas de la volonté de l'exploitant, peut être considéré comme une donnée. Pour simplifier, nous le supposerons connu et constant. Il serait d'ailleurs relativement facile de modifier les équations que nous proposons ici de manière à tenir compte de l'incertitude de l'avenir.(1)* Par l'intermédiaire de la formule de vente du concentré et du rendement des installations de traitement, le cours du marché permet de définir la valeur $V(m)$ du métal récupérable contenu dans une tonne de minerai de teneur m.

... / ...

(1)* Plutôt que comme une variable aléatoire, il conviendrait de considérer la série chronologique des cours à venir comme engendrée soit par une variation régionalisée à une dimension, soit par un processus stockastique : ces deux points de vue possibles, qui ne sont pas étrangers l'un à l'autre, pourront faire l'objet d'études ultérieures.

On pourra souvent utiliser une formule linéaire :

$$(4) \quad V(m) = bm - b_0$$

dans laquelle la constante de pénalisation b_0, pourra toujours être regroupée avec le terme constant de l'expression de $p(t)$ que nous allons définir.

<u>Les frais annuels d'exploitation rapportés à la tonne de minerai</u> représentent l'ensemble des dépenses annuelles (exploitation, traitement, transport et frais généraux) divisées par la production annuelle t. Ils dépendent de la production t. On les représente par une fonction $p(t)$ que l'on suppose, en général, décroissante. On peut souvent admettre une relation de la forme :

$$(5) \quad p(t) = a_0 + \frac{a_1}{t}$$

qui implique, pour les dépenses annuelles :

$$t\, p(t) = a_1 + a_0 t$$

une forme linéaire : a_1 et a_0 sont les frais fixes et les frais proportionnels.

<u>Les investissements</u> groupent l'ensemble des dépenses qu'il est nécessaire de consentir avant l'ouverture de l'exploitation (travaux miniers préparatoires, usine de traitement, éventuellement : cité, voierie, voie ferrée, etc ...). Ils sont représentés par une fonction croissante de la cadence t, soit $\mathring{I}(t)$. Le rapport $\frac{\mathring{I}(t)}{t}$ des investissements à la production annuelle est, au contraire, une fonction décroissante de t.(1)* Pour les applications, on pourra utiliser soit

... / ...

(1)* Si $\frac{\mathring{I}(t)}{t}$ était une fonction croissante de t au delà d'une certaine valeur critique t_c, un raisonnement classique montre que, pour $t \gg t_c$, on a, en général, intérêt à fragmenter l'exploitation en plusieurs sièges autonomes, ayant chacun une production annuelle inférieure à t_c.

une formule linéaire (1)* :

$$(6)\quad \dot{I}(t) = C_0 + C_1\, t$$

Soit, plus généralement, une expression de la forme :

$$(7)\quad \dot{I}(t) = C_0 + C_1\, t^{\gamma}$$

l'exposant γ étant positif, et inférieur ou égal à 1. Pour $C_0 = 0$ et $\gamma = \frac{2}{3}$, on retrouve la loi empirique, utilisée dans différentes branches de l'industrie, et qui exprime que les investissements et la capacité de production varient, respectivement, comme le carré et le cube de la dimension des installations. Sous cette dernière forme, la formule (7) sera utilisée dans la quatrième partie.

En résumé, nous utiliserons les trois fonctions économiques suivantes :

- $V(m)$: valeur contenue dans la tonne de minerai à teneur m
- $p(t)$: dépenses d'exploitation à la tonne de minerai
- $\dot{I}(t)$: montant des investissements.

Il est commode d'introduire un paramètre supplémentaire, <u>la durée de vie N</u> de la mine, liée au tonnage $T(m)$ et à la cadence d'exploitation t par la relation évidente :

$$(8)\quad N = \frac{T(m)}{t}$$

Le bilan prévisionnel de l'exploitation future se représente, commodément, par l'expression de <u>la valeur actualisée des bénéfices futurs</u>. Nous désignerons par i <u>le taux d'actualisation</u>, et par B_i la valeur des bénéfices futurs actualisés à ce

... / ...

(1)* C'est la formule adoptée par F. BLONDEL, in "Evolution de la Notion de Réserves d'un gisement minéral", Congrès de Freiberg - Janv. 1959, auquel la présente formulation du problème est très largement empruntée.

taux. On a, évidemment :

$$(9) \quad B_i = \left[V(m) - p(t) \right] t \ \frac{1-e^{-iN}}{i} - \mathring{I}(t)$$

et, dans le cas particulier très important où le taux i est pris égal à 0, le bénéfice non actualisé prend la forme très simple :

$$(10) \quad B = \left[V(m) - p(t) \right] T(m) - \mathring{I}(t)$$

Dans tous les cas, le bénéfice peut être considéré comme une fonction des deux paramètres m et t, ou, si l'on préfère (compte tenu de l'équation (1)), de x et de t, teneurs de coupure et production annuelle. Le critère qui doit guider le choix des valeurs de ces deux paramètres est la maximation du bénéfice : encore faut-il savoir quelle valeur donner au taux i d'actualisation. Nous allons montrer que, d'une manière générale, les <u>valeurs optimales de tous les paramètres techniques doivent être déterminés relativement à un taux i d'actualisation égal à zéro</u>.

2).- <u>Equations générales de l'optimum.</u>

Dans un premier temps, nous écrirons les équations générales en laissant indéterminée la valeur du taux i d'actualisation. Nous montrerons ensuite qu'un taux i non nul conduirait à des anomalies, contraires aussi bien au comportement réel des exploitants (tout gisement, si gros soit-il, devrait être exploité, pratiquement, en un nombre d'années imposé d'avance et très petit) qu'à la moralité minière (pratique de l'écrémage). Nous indiquerons les raisons profondes pour lesquelles l'optimisation des paramètres techniques doit être faite à $i = 0$. En dernier lieu, nous particulariserons les équations générales au cas $i = 0$.

... / ...

2-a - Equations générales pour i quelconque.

Nous partons de l'expression (9) de la valeur actualisée des bénéfices futurs B_i, et nous cherchons les valeurs de m, t et N pour lesquelles B_i est maximum. Compte tenu de l'équation (8), qui exprime une condition de liaison entre m, t et N, le formalisme classique de Lagrange conduit aux équations suivantes de l'optimum :

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial B_i}{\partial t} = \lambda N \\[2ex] \dfrac{\partial B_i}{\partial N} = \lambda t \\[2ex] \dfrac{\partial B_i}{\partial m} = - \lambda \dfrac{dT}{dm} \end{cases}$$

auxquelles l'équation de liaison (8) doit être jointe, en vue d'éliminer le paramètre de Lagrange λ. Afin de simplifier les écritures, on posera :

$$(12) \quad b = \frac{d\, V(m)}{dm}$$

Ce paramètre b, qui représente la valeur du point de métal supplémentaire contenu dans une tonne de minerai de teneur m, est une constante dans le cas particulier où l'on admet la relation (4) : en pratique, il en sera toujours ainsi. Avec l'expression (9) de B_i, le système (11), auquel on adjoindra toujours l'équation (8), s'explicite de la manière suivante :

$$(13) \quad \begin{cases} \left[V - \dfrac{d}{dt}\, tp(t) \right] \dfrac{1-e^{-iN}}{i} = \lambda N + \mathring{I}'(t) \\[2ex] (V-p)\, e^{-iN} = \lambda \\[2ex] bt\, \dfrac{1-e^{-iN}}{i} = -\lambda \dfrac{dT}{dm} \end{cases}$$

La deuxième équation montre que le multiplicateur λ de Lagrange peut être interprété comme la valeur actualisée (hors amortissement) de la dernière tonne de minerai que produira l'exploitation à l'issue de ses N années de vie. Nous l'utiliserons pour éliminer λ. De plus, la relation (1) permet d'exprimer la dérivée $\frac{dT}{dm}$ en fonction de la teneur moyenne m et de la teneur de coupure x. Après quelques calculs élémentaires, on obtient le système suivant :

$$(14) \quad \begin{cases} (V-p)\left[\dfrac{1-e^{-iN}-iN\,e^{-iN}}{i}\right] = \dot{I}' + t\,\dfrac{(1-e^{-iN})}{i}\,\dfrac{dp}{dt} \\ x = \dfrac{p}{\dot{}} + (m-x)\left[\dfrac{e^{iN}-1-iN}{iN}\right] \end{cases}$$

Ce système, complété par l'équation (8) et la relation tonnage-teneur, se résout assez facilement par approximations successives. Dans le cas particulier où les teneurs n'interviennent pas (gisements du type "tout ou rien") la première équation subsiste seule et détermine la cadence annuelle. Si t est connu, la deuxième équation permet de calculer rapidement la teneur de coupure x : le terme en $(m - x)$ joue le rôle d'un facteur correctif, et se réduit à une constante dans le cas particulier où la loi de Lasky (3) est vérifiée.

2-b - Anomalies entraînées par un taux i non nul.

Utilisé avec un taux i différent de 0, le système (14) conduit, dans les applications numériques aux gisements réels, à des conclusions qui paraissent aberrantes. Nous en verrons un exemple dans la quatrième partie. Mais ces anomalies sont déjà visibles sur la forme même des équations (14). En premier lieu, la première équation (14), ou équation de la cadence annuelle, implique que la durée de vie de la mine ne doit pas dépasser certaine valeur $N_@$, si gros que soit le tonnage T à exploiter.(1)* A la limite, un gisement infiniment grand doit être vidé en un nombre fini d'années. Pour le voir, il suffit de montrer que - pour i non nul - la première équation (14) ne peut pas admettre de solution avec N infini. Pour N infini et $i \neq 0$, en effet, les exponentielles s'évanouissent, et il

.../...

° °

(1)* Cette conclusion est indiquée dans P. MASSÉ "Le choix des Investissements". Dunod. Paris, 1959, pp.350 et suiv, mais avec des hypothèses très restrictives(p constant et $\dot{I}$ proportionnel à t).

reste :

$$(15) \quad V = i \frac{d\overset{o}{I}}{dt} + \frac{d(pt)}{dt}$$

Or, p et $\overset{o}{I}$ sont des fonctions décroissantes de t, ce qui implique les inégalités :

$$\frac{dI}{dt} \leqslant \frac{\overset{o}{I}}{t} \qquad \frac{d\,(pt)}{dt} \leqslant p$$

L'équation (15), si elle était vérifiée, entraînerait :

$$Vt \leqslant i\overset{o}{I} + pt$$

Une telle relation exprime exactement que l'exploitation est déficitaire : L'équation (14) conduit donc à une durée de vie finie dès lors que le gisement est exploitable. Dans les applications numériques, on s'aperçoit presque toujours que - sauf pour des tonnages T extrêmement petits - la durée de vie de la mine déterminée par (14) est pratiquement constante et égale à la valeur critique supérieure N_c : et N_c est en général très petit. Tout gisement, quel que soit son tonnage, devrait être vidé en un nombre d'années extrêmement faible. Pour illustrer ce point, donnons un exemple emprunté à F. BLONDEL.(1)* Il s'agit d'un gisement de fer africain, pour lequel tonnage et teneur sont pratiquement imposés (type tout ou rien), de sorte que seule la première équation (14) intervient. De l'étude de différents projets d'exploitation, on a déduit les relations suivantes :

$$\begin{cases} V = 15 \text{ dollars (valeur constante, puisque la teneur est imposée),} \\ p = 9 + \dfrac{3.10^6}{t} \quad \text{(p en dollars, t en tonnes/an),} \\ I(t) = 50.10^6 + 10\,t \quad \text{(en dollars)} \end{cases}$$

Avec ces valeurs numériques et un taux $i = 10\,\%$, la durée limite N_c est à peine

.../...

(1)* F. BLONDEL - Loc. cit.

supérieure à 7 ans. En fonction du tonnage T, on trouve :

Tonnage T (en millions de tonnes)	Production annuelle (en millions de tonnes)	Durée de vie (en années)
20	6	3.3
50	7.7	6.5
100	14.3	7.0
350	48.0	7.2
1.600	219.0	7.3

Pour un tonnage supérieur à 50 ou 100 millions de tonnes, la durée de vie est pratiquement constante et égale à 7 ans. Pour vider en 7 ans un gisement d'un milliard et demi de tonnes, il faut atteindre la production annuelle fabuleuse de 200 millions de tonnes. On objectera qu'en pareil cas des contraintes interviennent, le marché mondial étant incapable d'absorber un tel excédent. En fait, même si la conjoncture était à une extrême pénurie de minerai de fer, aucune Société n'adopterait un rythme de production aussi vertigineux. De plus, l'anomalie, observée pour les gros gisements de fer, se manifeste aussi dans le cas de gisements métalliques plus modestes, dont la production est incapable d'avoir une influence sur le marché mondial.(1)* Il n'est pas correct d'invoquer des raisons particulières pour expliquer un phénomène général.

L'étude de l'équation de la cadence révèle donc une première anomalie : durée de vie de la mine pratiquement indépendante du tonnage, et très brève en comparaison de la pratique réelle. Les exploitants, en fait, ajustent toujours leur production annuelle à leurs réserves. On trouve parfois dans la litté-

.../...

(1)* On en verra un exemple dans la quatrième partie.

rature une vieille règle empirique selon laquelle la production doit être proportionnelle à la racine carrée du tonnage (ou, plus généralement, augmenter avec lui, mais moins vite que lui). Ces résultats se retrouvent, comme nous le montrerons dans un instant, à condition de faire $i = 0$. La règle de la racine carrée, en particulier, se déduit directement de l'équation (6).

Examinons maintenant la deuxième équation(14), qui donne la teneur de coupure x. Le facteur : $\frac{e^{iN}-1-iN}{iN} = \frac{1}{2}\, iN + \frac{1}{3!}\, (iN)^2 + \ldots$

s'annule pour $i = 0$. Pour i non nul, il est une fonction strictement positive et rapidement croissante de la durée de vie N. Pour $i = 0$, donc, l'équation s'écrit :

$$(16) \qquad x = \frac{p}{b}$$

Ce n'est rien d'autre que la règle marginaliste suivant laquelle on exploite toute tonne qui paye ses frais en aval (les investissements étant amortis sur les parties riches du gisement). Cette règle est effectivement appliquée, en pratique, par toutes les Sociétés minières. Or, si l'on introduit un taux d'actualisation non nul, on voit apparaître un terme correctif

$(m-x)\, \frac{e^{iN}-1-iN}{iN}$ obligatoirement positif (et nullement négligeable, comme on peut le voir dans l'application numérique de la quatrième partie). Appliquée avec un taux non nul, la deuxième équation conduit à la pratique de l'écrémage, contraire à la fois à la moralité minière et au comportement réel des exploitants sérieux.

Dans les deux cas, la conclusion est la même : on n'obtient de résultats satisfaisants et conformes à la pratique réelle qu'à la condition de prendre un taux d'actualisation égal à zéro. Ce n'est pas là une circonstance fortuite, comme nous allons le voir.

... / ...

2- c - L'optimisation des paramètres techniques doit se faire à i = 0.

Dans une économie globale, ou planifiée, il est presque évident (1)* que les paramètres techniques doivent être déterminés avec un taux d'actualisation $i = 0$.

L'objectif que l'on se fixe, en effet, est de produire chaque année, au moindre prix de revient, la quantité de minerai ou de métal correspondant aux besoins de la collectivité pour l'année en cours : on considère globalement ces besoins, et les possibilités de l'industrie minière prise dans son ensemble, et non pas les particularités de chaque gisement individuel. Prise dans son ensemble l'industrie minière est considérée comme pratiquant l'autofinancement. Les bénéfices bruts de l'ensemble des gisements en exploitation pendant l'année en cours servent à financer les investissements que l'on doit faire la même année pour ouvrir de nouvelles exploitations en remplacement de celles qui viennent à épuisement. Les investissements relatifs à chaque gisement particulier ne sont donc pas amortis sur la production future de ce gisement lui-même, mais sur l'ensemble de la production réalisée cette année là par tous les gisements en exploitation. Les investissements apparaissent comme une simple charge pour reconstitution de gisement - et le taux d'actualisation disparaît, puisque l'on n'a plus à comparer entre elles que des dépenses effectuées la même année.

Même en économie concurrentielle, le même point de vue doit être adopté(et est effectivement adopté, au moins implicitement, comme le montre l'analyse du comportement réel des exploitants) par une société minière assez importante pour autofinancer ses exploitations. Cette société a, par exemple, besoin de tant de milliers de tonnes de plomb chaque année pour alimenter ses fonderies : le seul problème consiste, pour elle, à s'assurer cet approvisionnement au plus faible prix de revient, donc en minimisant la somme des dépenses d'exploitation et d'investissements effectuées pendant l'année en cours. Elle déter-

... / ...

(1)* Nous écrirons explicitement les équations de l'économie planifiée au paragraphe 2 - d.

minera donc production annuelle, teneur de coupure et, de façon générale, tous les paramètres techniques, par une condition d'optimum à $i = 0$. C'est bien ainsi qu'elle doit procéder (et qu'elle procède effectivement), si elle ne veut pas se condamner à dépenser, chaque année, davantage d'argent pour obtenir un même résultat.

Pour illustrer ce raisonnement, nous avons repris l'exemple, déjà cité, du gisement de fer de F. BLONDEL. Supposons que l'on dispose, pour approvisionner l'industrie, d'un grand nombre de gisements possédant les mêmes caractéristiques et le même tonnage $T = 1$ milliard de tonnes. Si les besoins annuels sont égaux à un milliard de tonnes, on voit qu'en moyenne un gisement vient à épuisement chaque année, et une nouvelle exploitation doit être ouverte pour le remplacer. Nous avons calculé, à l'aide des équations (14) et pour les deux taux $i = 0$, et $i = 10$ %, la production annuelle optimale t de chaque gisement, le nombre $k = N$ de gisements exploités simultanément, ici égal à la durée de vie de chacun d'eux, et les dépenses totales d'exploitation et d'investissements nécessaires pour assurer chaque année la production constante d'un milliard de tonnes :

	$i = 0$	$i = 0$
Production t	$17{,}4 \quad 10^6$	$143.\ 10^6$
Nombre k de gisements exploités simultanément	57,5	7
Dépenses d'exploitation	$9.172 \quad 10^6$	$9.021 \quad 10^6$
Investissements	$224 \quad 10^6$	$1.480 \quad 10^6$
TOTAL (Dollars)	$9.396 \quad 10^6$	$10.501 \quad 10^6$

... / ...

Pour $i = 10\ \%$, les dépenses d'exploitation sont légèrement plus faibles, mais les investissements considérablement plus élevés. Au total, pour obtenir un même résultat (production d'un milliard de tonnes tous les ans), on dépense dans un cas 10,5 milliards de dollars, et dans l'autre 9,4 seulement. Avec $i = 0$, la tonne de minerai de fer revient 10 % moins cher.

A la racine du problème, nous trouvons le fait que l'expression (9) de la valeur actualisée du bénéfice futur n'a été prise comme critère économique qu'à la suite d'une erreur d'optique. Maximiser B_i revient à restreindre son attention à la considération d'un gisement unique. Si, en tant que phénomène naturel, chaque gisement doit effectivement être considéré comme unique, il est clair, qu'en tant que phénomène économique, toutes les sources d'approvisionnement sont comparables entre elles, le critére de comparaison étant le prix de revient. Il n'y a aucune raison de se limiter à un gisement particulier. Il se peut très bien que l'on ait intérêt à exploiter simultanément plusieurs gisements avec des cadences plus faibles. Pour le montrer, nous donnons ci-après, conformément au goût du jour, un petit modèle très simple, où nous parlerons de machines, et non plus de gisements, pour souligner le fait que les sources d'approvisionnement sont de même nature économique.

Supposons que l'on trouve sur le marché une gamme de machines capables de produire une même marchandise A. La machine de type $M(t)$ produit par an t tonnes du produit A de valeur unitaire V. Elle coûte $\dot{I}(t)$ à l'achat, nécessite des dépenses de fonctionnement $p(t)$ à la tonne et dure $N(t)$ années. Le raisonnement qui nous a conduit aux équations (14) revient à supposer que l'on achète une machine unique. La valeur actualisée du bénéfice futur est :

$$(17)\quad B_i = \frac{1-e^{-iN}}{i}\,(V-p)t - \dot{I}$$

Mais, en réalité, au bout de N années la machine est hors d'usage et doit être remplacée. De façon générale, toutes les N années il faudra acheter une machine nouvelle. Pour tenir compte de cette prolongation (1)* à l'infini, on doit

(1)* Sur cette prolongation à l'infini, on peut consulter, en particulier, P.MASSE, Loc.cit.

majorer le deuxième membre de (17) par le terme $B_i\ e^{-iN}$ (puisque, dans N années, on se retrouve exactement dans la situation actuelle). On trouve une deuxième expression, déjà meilleure, du B_i :

$$(17)\ \text{bis} \qquad B_i = \frac{V-p}{i}\,t - \frac{\dot{I}}{1-e^{-iN}}$$

Mais pourquoi se limiter à n'avoir qu'une seule machine à la fois ? Si l'on admet, en (17 bis), la possibilité d'acquérir une machine neuve au temps N, rien ne nous empêche d'en acheter une dès aujourd'hui. Ouvrons donc un atelier, dans lequel nous installerons n machines achetées simultanément :

$$(17)\ \text{ter} \qquad B_i = \frac{n}{i}(V-p)t - \frac{n\dot{I}}{1-e^{-iN}}$$

En réalité, nous avons intérêt à étaler dans le temps l'achat des différentes machines. Mis à part quelques à coup, qui se produiront au démarrage, un régime permanent s'établira vite, dans lequel on achètera une nouvelle machine toutes les $\frac{N}{n}$ années. Au moment d'un tel achat, le B_i a l'expression suivante :

$$(17)^{IV} \left\{ \begin{aligned} B_i &= \frac{n}{i}(V-p)t - \frac{\dot{I}}{1-e^{-iN}}\left[1+e^{-\frac{iN}{n}}+e^{-2\frac{iN}{n}}+\dots+e^{-(n-1)i\frac{N}{n}}\right] \\ &= \frac{n}{i}(V-p)t - \frac{\dot{I}}{1-e^{-i\frac{N}{n}}} \end{aligned} \right.$$

Si par hasard n est grand (si nous avons beaucoup de machines), notre bénéfice actualisé prend la forme :

$$(18) \qquad B_i = \frac{n}{i}\left[(V-p)t - \frac{\dot{I}}{N}\right]$$

dans laquelle le taux d'actualisation n'intervient plus que par le facteur 1/i : il va donc disparaître des équations de l'optimum. En ce qui concerne n,

... / ...

il faut naturellement le limiter par une contrainte. On s'imposera comme objectif, par exemple, de produire tous les ans une quantité donnée $Q = nt$ du produit A. Si l'on prend de plus, comme dans le cas des gisements, $t = \frac{N}{T}$, il va rester :

$$(19) \qquad B_i = \frac{Q}{iT}\left[(\dot{V}-p)T - \dot{I}\right]$$

Si T est une constante,(1)* l'optimisation de B_i en t conduit naturellement à la première équation (14) écrite avec $i = 0$.

2 - d - Equations de l'optimum pour $i = 0$

Etant acquis que la teneur limite, la production annuelle et, de façon générale, tous les paramètres techniques d'une exploitation, doivent être optimisés avec un taux d'actualisation nul, les équations de l'optimum s'obtiennent en faisant $i = 0$ dans le système (14). Il vient ainsi :

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{l} T\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{d\dot{I}}{dt} = 0 \\[2ex] x = \dfrac{p}{b} \end{array} \right.$$

Ce système, très simple, se résoud facilement par approximations successives, dès lors que l'on connaît la fonction $T(x)$ donnant le tonnage dispo-

... / ...

(1)* T figure en dénominateur dans (19). Si T est une fonction $T(m)$, l'optimisation de B_i en m conduirait à un écrémage forcené : cela est naturel, puisque nous avons admis implicitement qu'un nombre infini de gisements était à notre disposition. On ne prend que le meilleur de chacun d'eux, quitte à en gaspiller un grand nombre chaque année. Comme les richesses naturelles sont limitées on s'impose (dans le cadre d'une politique générale, en économie collectiviste, sous la pression d'un Service des Mines, en économie concurrentielle) de ne consommer chaque année qu'un nombre k donné de gisements. Le rapport Q/T est remplacé par une constante, et (19) coïncide alors, à une constante près, avec l'expression (10) du bénéfice non actualisé.

nible en fonction de la teneur de coupure x. On notera, en particulier, que la valeur V(m) du minerai n'intervient que dans la deuxième équation, par l'intermédiaire de la valeur b du point supplémentaire contenu dans une tonne de minerai. La première équation donne la cadence de production t en fonction du tonnage T sans faire intervenir les conditions du marché. Elle exprime un optimum purement technique, correspondant au meilleur dimensionnement possible des installations destinées à exploiter un tonnage T donné. Ce n'est que pour les très gros gisements que les conditions du marché se réintroduiraient, éventuellement, dans l'expression de la cadence d'exploitation optimale pour un tonnage donné, sous la forme, par exemple, d'une contrainte exprimant la limitation des débouchés possibles.

Si l'on adopte les expressions (5) et (7) de p(t) et I(t), le système (20) se particularise de la manière suivante :

$$(21) \qquad \begin{cases} t = \left[\dfrac{a_1 \ T(x)}{\gamma \ C_1} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}} \\ x = \dfrac{1}{b} \left(a_o + \dfrac{a_1}{t} \right) \end{cases}$$

et se résout par approximations successives. Dans le cas particulier $\gamma = 1$, la première équation donne la règle empirique, suivant laquelle la cadence de production doit être prise proportionnelle à la racine carrée du tonnage. Dans beaucoup d'applications pratiques, on utilisera la loi de LASKY pour exprimer la relation T(x) : nous en verrons un exemple dans la quatrième partie.

Le système (20) a été obtenu dans l'optique d'une économie concurrentielle. En économie planifiée, on arrive également à ce même système, et d'une manière beaucoup plus directe, puisque l'élimination du taux d'actualisation se fait d'elle-même. En effet, l'objectif visé est alors d'assurer, chaque année, une production Q d'un métal donné. Pour assurer cette production, on dispose d'un certain nombre de gisements, caractérisés par leurs fonctions $T_i(x)$, $p_i(t)$ et $\dot{I}_i(t)$. Dans le cadre d'une politique à long terme, dont la définition joue un rôle essentiel, on estime que les ressources disponibles permettent de consommer chaque année un nombre n_i de gisements de la catégorie i.

... / ...

Pour assurer une production Q, on doit avoir, en premier lieu :

$$(22) \quad \sum_i n_i \; m_i(x_i) \; T_i(x_i) = Q$$

Les dépenses annuelles nécessaires, pour assurer cette production, comprennent d'une part les dépenses d'exploitation, de l'autre les investissements qu'il faut consentir pour remplacer les n_i gisements de chaque catégorie qui viennent à épuisement cette année là. Elles ont pour expression :

$$\sum_i n_i \left[p_i(t_i) \; T_i(x_i) + \dot{I}_i(t_i) \right]$$

C'est cette expression qu'il convient de minimiser, relativement à la teneur de coupure x_i et à la cadence annuelle t_i des gisements de chaque classe i, et compte tenu de la condition (22). En désignant par μ le paramètre de Lagrange, on obtient facilement les équations suivantes :

$$(23) \quad \begin{cases} T_i \dfrac{dp_i}{dt_i} + \dfrac{d\dot{I}_i}{dt_i} = 0 \\[2ex] x_i = \dfrac{p_i}{\mu} \end{cases}$$

Les n_i ont disparu de ces équations, qui - pour chaque indice i - constituent un système identique à (20), dans lequel le paramètre μ de Lagrange joue exactement le rôle de la valeur b du point de métal - c'est-à-dire le rôle du prix du marché. La seule différence avec l'économie concurrentielle est que μ est déterminé - par l'organisme planificateur - de manière à vérifier la condition globale (22), ce qui suppose la résolution complète du système (22), (23) relativement à toutes les catégories i de gisements, les n_i étant définis dans le cadre d'une politique de gestion à long terme des riches-

... / ...

ses naturelles. Le paramètre μ apparaît comme le prix réalisant l'optimum du programme de production globale dans le cadre de cette politique définie à l'avance par la donnée des n_i. Une fois que ce prix μ a été fixé par l'autorité planificatrice, les paramètres relatifs à chaque gisement se calculent exactement comme en économie concurrentielle, c'est-à-dire à l'aide du système (20).

Notons donc, en passant, cette "convergence" remarquable : les paramètres techniques d'une exploitation se calculent de la même façon (avec $i = 0$) en économies planifiées (1)* et libérale.

3).- Notion de limite d'exploitabilité tonnage-teneur.

Certains seront peut-être choqués de cette disparition, même en économie libérale, du taux d'actualisation. Précisons bien notre pensée : seuls les paramètres techniques (c'est-à-dire, pour l'essentiel, les paramètres qui déterminent les dimensions d'une exploitation) doivent être optimisés à $i = 0$. Le taux d'intérêt i, en réalité, ne sera pas supprimé. Il interviendra nécessairement quand il s'agira de juger de la rentabilité de chaque gisement particulier, et de prendre une décision quant à sa mise en exploitation. Autrement dit, on déterminera les caractéristiques techniques optimales d'une exploitation éventuelle à l'aide du système (20), c'est-à-dire avec $i = 0$, et on prendra une décision sur la mise en exploitation en examinant le bilan financier de l'affaire, c'est-à-dire en appliquant le taux i du marché. Les valeurs de t et de x déduites du système (20) seront portées dans l'expression (9) du bé-

. . . ./. . .

(1)* L'analyse que nous donnons ici du comportement rationnel de l'autorité planificatrice conserve un caractère théorique, et ne préjuge en rien de la pratique réellement observée dans les pays d'économie socialiste. D'après F. STAMMBERGER ("Zum Problem der Bauwürdigkeit", Zeitsch. für angew. geo, Février/mars 1957, Berlin), il semblerait que l'on détermine, en principe, la teneur x de coupure de telle manière que la teneur moyenne $m(x)$ du tonnage $T(x)$ soit égale (ou pas trop supérieure) à une "teneur industrielle minimale" (Industrielles minimal gehalt). Le phénomène de la rente étant jugé malsain (pour des raisons idéologiques, on pourrait presque dire pour des raisons morales), il faut empêcher à tout prix les gisements naturellement riches d'être favorisés par rapport aux gisements plus marginaux ; à la limite, on ferait cesser le scandale d'un minerai trop riche en le mélangeant volontairement à du stérile. Mais il s'agit là d'une position doctrinale à laquelle, pour notre part, nous doutons fort que la pratique se conforme réellement.

néfice actualisé et c'est seulement si la valeur numérique de ce B_i est positive que le gisement sera, effectivement, mis en exploitation. Cette règle simple :

1°/ Ne pas actualiser pour déterminer les caractéristiques techniques de l'exploitation,

2°/ Actualiser le bilan obtenu pour prendre une décision de mise en exploitation de chaque gisement particulier.

pour contradictoire qu'elle puisse paraître, n'en semble pas moins correspondre au comportement réel des sociétés minières en économie libérale : il est naturel qu'elles actualisent au moment de prendre chaque décision particulière, conformément aux lois générales des économies de concurrence (2°), mais nous avons vu qu'elles n'actualisaient pas les paramètres techniques, sous peine de dépenser davantage d'argent chaque année pour assurer une même production (1°). En économie planifiée, la règle 1°/ est certain[illegible] appliquée. La deuxième règle est moins évidente (et la convergence est moins frappante) : il reste, cependant, que si - toutes choses égales d'ailleurs - le plan laisse le choix entre deux gisements à mettre en exploitation pendant l'année en cours, on ouvrira en premier lieu celui qui assure la meilleure rentabilité. Cela revient bien à réintroduire un taux d'actualisation au moment où l'on prend la décision d'exploiter : mais la difficulté est de préciser ce "toutes choses égales d'ailleurs" dont le contenu exact n'est pas clair.

Dans tous les cas le critère, pour décider de la mise en exploitation d'un gisement particulier, est le signe du bénéfice futur B_i (calculé, éventuellement, en économie planifiée, avec $i = 0$). Dans les applications on prendra l'expression (9) de B_i, avec le taux i du marché, et les valeurs de m et de t déduites du système (20) on exploitera si :

$$(24) \quad B_i(t,m) \geqslant 0$$

Pour $B_i = 0$, le gisement est marginal : l'égalité, dans la relation (24), exprime le concept de limite d'exploitabilité tonnage-teneur. A tout tonnage donné, la

... / ...

relation :

$$(25) \quad B_i = \left[V(m) - p(t)\right] \; t \; \frac{1 - e^{-i\frac{T}{t}}}{i} - \mathring{I}(t) = 0$$

où t est calculé par le système (20), associe une teneur limite d'exploitabilité $m_L(T)$ en dessous de laquelle le gisement n'est plus exploitable. Inversement, à toute teneur correspond un tonnage limite $T_L(m)$. On se gardera bien de confondre la teneur de coupure x avec la teneur limite d'exploitabilité $m_L(T)$. La fonction $m_L(T)$ s'obtiendra en résolvant, pour chaque valeur de T, l'équation obtenue en remplaçant, dans (25), t par sa valeur déduite de la première équation (20), prise, par exemple, sous la forme (21). Nous verrons une application pratique dans la quatrième partie.

*

* *

CHAPITRE II

II.- RECONNAISSANCE OPTIMALE POUR LE DIMENSIONNEMENT DE L'EXPLOITATION.

1)- Position du Problème

Comme nous l'avons indiqué au début de cette étude, nous n'introduisons pas encore, dans cette deuxième partie, le risque de ruine, c'est-à-dire le risque, jamais tout-à-fait nul, de mettre en exploitation un gisement qui ne serait, en fait, pas rentable. Nous admettons que la preuve, ou du moins la quasi certitude, de cette rentabilité a pu être établie. Il faut alors dresser un projet précis et définitif d'exploitation et de traitement. Les paramètres de dimensionnement : production annuelle t, et teneur de coupure x, sont calculés par les équations (20). Cependant, pour résoudre cette équation, nous ne connaissons pas la véritable relation tonnage-teneur $T(x)$, mais seulement une estimation de celle-ci $T_E(x)$, qui en diffère plus ou moins, selon que la reconnaissance a été plus ou moins poussée. Par suite, les paramètres t_E et x_E que nous allons déterminer vont différer des valeurs t_o et x_o qui correspondraient à l'optimum pour la véritable fonction $T(x)$ inconnue. Ce désaccord entraîne une perte, dont nous allons essayer de chiffrer la valeur probable. On peut, naturellement, diminuer cette perte en effectuant des travaux de reconnaissance supplémentaires, qui permettront d'obtenir une meilleure estimation de $T(x)$. Mais ces travaux, eux aussi, coûtent cher. Il y a un optimum, correspondant à un volume de travaux de reconnaissance tel que la somme de la perte et du coût des travaux de recherche soit minimale. Cet optimum a le même caractère technique qu'au paragraphe précédent : les travaux de reconnaissance ne sont envisagés ici que comme un paramètre technique auxiliaire servant à déterminer la taille optimale de l'exploitation. Conformément au paragraphe 2-c, on devra raisonner avec un taux $i = 0$. Comme la fonction approchée $T_E(x)$ conduit à une solution voisine de l'optimum réel (x_o, t_o), on doit s'attendre à observer une perte du second ordre (ce qui ne signifie pas qu'elle soit négligeable) dont la valeur

... / ...

probable[(1)*]" pourra s'exprimer en fonction des variances d'estimations sur le tonnage et la teneur.

Le problème étant relativement délicat à formuler, nous examinerons d'abord le cas particulier simple des gisements du type "tout ou rien", et ensuite seulement le cas général.

2 - Cas des gisements du type "tout ou rien".

Par gisement du type tout ou rien, nous désignons un gisement, dont la teneur n'est pas nécessairement constante, mais dans lequel aucune sélection n'est possible : ou bien on exploite tout, ou bien on n'exploite pas.[(2)*] La relation tonnage-teneur ne joue aucun rôle : tonnage et teneur sont ici imposés par la nature, et l'homme n'a aucun choix possible. Dans ce cas, l'erreur commise sur l'estimation de la teneur moyenne est sans incidence sur le dimensionnement : la coupure étant imposée, le seul paramètre technique que l'on ait à déterminer est la production annuelle t, qui ne dépend que du tonnage T. En différenciant la première équation (20) on voit qu'une erreur δT sur l'estimation du tonnage entraîne un écart δt entre la cadence adoptée et la véritable cadence optimale, écart dont l'expression est :

$$\delta t = - \frac{p' \, \delta T}{T p'' + I''}$$

---

(1)* L'expression "valeur probable" est ambigüe, en ce sens qu'elle a l'air d'impliquer une référence à un modèle probabiliste. Nous reviendrons plus longuement, dans la 3ème Partie, sur l'artifice probabiliste. Il suffit, pour l'instant, d'observer que les variances d'estimation, qui interviennent seules ici, sont définies en Géostatistique sans référence à aucun modèle probabiliste, et possèdent une signification physique objective. Le lecteur pourra se référer au "Traité de Géostatistique Appliquée" déjà cité.

(2)* Ce type de gisement se rencontre, en pratique, plus souvent qu'on ne croit. Un gisement tout ou rien n'est pas, obligatoirement, limité par du stérile franc. Il peut être entouré d'une frange minéralisée inexploitable, géostatistiquement hétérogène avec lui. On observe alors le phénomène du [illegible] connaissent bien : les calculs de tonnage [illegible] conduisent, pratiquement, à des résul[illegible] entre panneaux exploitables et inexploitables [illegible]

.../...

Relativement au bénéfice (non actualisé) optimal, cette divergence entraîne une perte, que l'on obtient par un développement limité :

$$P = -\delta \left[(V-p)T-\dot{I}\right] = (Tp' + I')\,\delta t + \tfrac{1}{2}\,(Tp'' + I'')\,\overline{\delta t}^{\,2}$$

Le terme du premier ordre est nul, d'après l'équation (20), puisque l'on est voisin de l'optimum. Compte tenu de l'expression de δt, on trouve :

$$P = \frac{1}{2}\,\frac{p'^2}{T\,p'' + \dot{I}''}\,\overline{\delta T}^{\,2}$$

En valeur probable, $\overline{\delta T}^{\,2}$ donne la variance σ_T^2 sur l'estimation du tonnage, dont la Géostatistique permet de calculer la valeur en fonction des caractéristiques des travaux de reconnaissance. On a donc :

$$(26)\quad P = \frac{1}{2}\,\frac{p'^2}{Tp'' + \dot{I}''}\,\sigma_T^2$$

Cette perte P doit être mise en balance avec le coût R des travaux de reconnaissance. R est une fonction décroissante de σ_T^2. On obtiendra le volume optimum de la reconnaissance en résolvant l'équation :

$$(27)\quad \frac{dR}{d\sigma_T^2} + \frac{1}{2}\,\frac{p'^2}{Tp'' + \dot{I}''} = 0$$

qui exprime que la somme $P + R$ est minimum. En pratique, on exprimera R et σ_T^2 en fonction d'un même paramètre (nombre n de sondages, longueur ℓ tracée, etc..), ou, éventuellement, de plusieurs. Si les u_i désignent ces paramètres, on aura à résoudre le système :

$$(28)\quad \frac{\partial R}{\partial u_i} + \frac{1}{2}\,\frac{p'^2}{Tp'' + \dot{I}''}\,\frac{\partial \sigma_T^2}{\partial u_i} = 0$$

Dans le cas où il y a effectivement plusieurs paramètres u_i (par exemple, dans la reconnaissance d'un filon par travaux miniers, la relevée entre niveaux et la maille des rainurages dans les traçages), la résolution du système (28) donne à la fois le volume global optimum des dépenses que l'on doit consacrer à la reconnaissance, et la meilleure ventilation de celles-ci entre les différentes catégories de travaux (traçages et rainurages).

A titre d'illustration, imaginons un grand gisement de fer sédimentaire, de forme à peu près elliptique ou rectangulaire reconnu par un réseau de sondages à maille adaptée, c'est-à-dire implantés aux noeuds d'un réseau rectangulaire, avec un rapport de maille égal au rapport des dimensions du gisement. La géostatistique nous indique que la variance relative $\frac{\sigma_T^2}{T^2}$ sur l'estimation du tonnage est la somme de deux termes : le premier(1)* représente l'effet de bordure, ou si l'on veut l'erreur sur l'estimation de la surface minéralisée, et admet une expression de la forme $\frac{0,244}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{D_1 D_2}{S}}$, n étant le nombre de sondages utiles, S l'aire minéralisée, D_1 et D_2 les diamètres (plus généralement, les variations diamétrales si l'aire S n'est pas convexe) de l'aire minéralisée. Pour un contour elliptique, on prend $\sqrt{\frac{D_1 D_2}{S}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,13$, et le premier terme se réduit à $\frac{0,276}{n^{3/2}}$. Le deuxième terme représente l'erreur sur l'estimation de la puissance moyenne, et admet une expression de la forme $\frac{A}{n}$, où A est légèrement inférieure à la variance relative des puissances dans le gisement, et peut être considérée comme une constante (c'est, en réalité, une fonction lentement décroissante de n). Nous prendrons une valeur plausible, telle que A = 0,10. En résumé, la variance relative a pour valeur :

$$\frac{\sigma_T^2}{T^2} = \frac{0.276}{n^{3/2}} + \frac{A}{n}$$

En ce qui concerne les données économiques, nous prendrons pour p(t) et $\dot{I}(t)$ des expressions de la forme (5) et (6), et nous désignerons par C le coût unitaire du sondage. La somme, que l'on veut minimiser, de la perte et du coût de la reconnaissance, s'écrit, en fonction du nombre N de sondages.

... / ...

(1)* Traité de Géostatistique appliquée, Tome 3 (à paraître).

$$\frac{1}{4} \sqrt{a_1 \, C_1 \, T} \left[\frac{0.276}{n^{3/2}} + \frac{A}{n} \right] + Cn$$

En annulant la dérivée en n, on obtient :

$$\frac{1}{4} \sqrt{a_1 \, C_1 \, T} \left[\frac{0,414}{n^{5/2}} + \frac{A}{n^2} \right] = C$$

Numériquement, prenons T = un milliard de tonnes, $a_1 = 3.10^6$, $c_1 = 10$, comme dans l'exemple de F. BLONDEL déjà cité, $A = 0.10$ et un coût unitaire C de 2.000 dollars par sondage. On trouve $n = 60$ environ.

3 - Cas où la relation Tonnage-Teneur intervient

Lorsque la relation Tonnage-teneur intervient, c'est-à-dire lorsque l'on sélectionne des panneaux exploitables extraits d'un gisement géostatistiquement homogène, le problème est un peu plus délicat à formuler. Désignons par T_o et t_o le tonnage sélectionné et la production annuelle correspondant au projet optimum. Du fait que la véritable relation tonnage teneur n'est pas exactement connue, le projet adopté sera $T_o + \delta T_1$, $t_o + \delta t$, légèrement différent de l'optimum. Mais, de plus, la réalisation ne sera pas exactement conforme au projet adopté : la cadence de production sera bien $t_o + \delta t$, mais le tonnage retenu, $T_o + \delta T_1 + \mathcal{T}$ différera légèrement de la prévision $T_o + \delta T_1$ d'une quantité petite $\mathcal{T}$. Désignons par $\delta T = \delta T_1 + \mathcal{T}$ l'écart entre le tonnage effectivement exploité et l'optimum théorique T_o. Comme on est voisin d'un optimum (T_o, t_o), la perte due aux écarts δt et δT est donnée par la différentielle seconde (changée de signe) du bénéfice :

$$(29) \quad P = -\frac{1}{2} \left[b \frac{dx}{dT} \overline{\delta T^2} - 2 \frac{dp}{dt} \delta t \, \delta T - \left(\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{d^2 p}{dt^2} T \right) \overline{\delta t}^2 \right]$$

Cette perte doit être positive, sinon la solution (T_o, t_o) ne serait pas un véritable optimum. Ceci implique l'inégalité :

.../...

$$(30) \quad p'^2 + b\,\frac{dx}{dT}\,(\dot{I}'' + Tp'') < 0$$

Comme $\frac{dx}{dT}$ est négatif, on doit, en particulier, avoir :

$$(31) \quad \dot{I}'' + Tp'' > 0$$

Ces inégalités doivent être vérifiées au moins pour $T = T_o$ et $t = t_o$. Il reste, maintenant, pour calculer effectivement la valeur de la perte à l'aide de (29), à exprimer les valeurs probables de $\overline{\delta T^2}$, $\overline{\delta t\,\delta T}$, et $\overline{\delta t^2}$ en fonction de variances d'estimation que la géostatistique soit capable de calculer (au moins approximativement). Mais on s'aperçoit que les relations entre les variations δT, δt et l'erreur commise dans l'évaluation du tonnage et de la teneur s'expriment de façon différente, selon la nature plus ou moins rigide de la méthode d'exploitation adoptée. Nous distinguerons et nous traiterons les deux cas extrêmes correspondant à une exploitation parfaitement rigide et parfaitement adaptative.

L'exploitation parfaitement rigide correspond au cas d'une carrière. A partir des renseignements donnés par la reconnaissance, on choisit le tonnage que l'on veut exploiter, et on trace sur plan les limites précises des panneaux que l'on sélectionne. Le tonnage que l'on exploitera effectivement ne différera de ce projet que d'une quantité τ très petite, et souvent négligeable[(1)*] L'ex-

.../...

---

(1)* τ représente l'erreur sur l'estimation du tonnage des panneaux retenus, l'effet de bordure étant exclu, puisque l'on s'est imposé les limites de ces panneaux. Dans le cas d'une formation stratiforme, par exemple, on connaîtra parfaitement l'aire occupée par les panneaux choisis. Par contre, on commettra une petite erreur dans l'estimation de la puissance moyenne. Le terme τ représente cette erreur.

.../...

ploitation adaptative, au contraire, correspond à une méthode très sélective. Ce n'est plus le tonnage à exploiter, mais la teneur de coupure qui est imposée. On suppose que le mineur, jouant à la perfection son rôle de " démon de Maxwell" est capable de respecter, lors de l'exploitation effective, la teneur de coupure x_E établie dans le projet. La perte, ici, résulte essentiellement de ce que $x_E = x_o + \delta x$ diffère légèrement de la coupure optimale x_o. On doit s'attendre à une perte plus faible qu'en exploitation rigide, et on le vérifiera en effet.

3 a - Méthode d'exploitation rigide

Pour formuler commodément le problème, nous prendrons comme variable principale le paramètre *géométrique* S sur lequel s'exerce *réellement* le choix du mineur. Dans le cas d'une formation stratiforme ou filonienne, par exemple, S représentera l'aire minéralisée sélectionnée par le mineur. Dans le cas d'un amas, S serait plutôt un volume. A partir des informations fournies par les travaux de reconnaissance, le mineur procède à l'estimation des fonctions T(S) et m(S) donnant le tonnage et la teneur affectés au meilleur projet de taille S, et il en déduit, par la relation (1), la teneur de coupure x(S). Ces estimations $T_E(S)$, $m_E(S)$, et $x_E(S)$ diffèrent des valeurs véritables par les quantités, généralement petites, $\mathcal{T}(S)$, $\mu(S)$ et $\xi(S)$, qui sont des fonctions de S :

$$(32) \quad \begin{cases} T_E(S) = T(S) + \mathcal{T}(S) \\ m_E(S) = m(S) + \mu(S) \\ x_E(S) = x(S) + \xi(S) \end{cases}$$

Dans la suite, nous interprèterons $\mathcal{T}(S)$ et $\mu(S)$ comme les erreurs commises dans l'estimation du tonnage et de la teneur affectés à un périmètre donné S(1)*. Faute de connaître les vraies fonctions T(S), m(S), x(S), on en sera réduit à écrire le système (20) définissant l'optimum au moyen des fonctions erronées $T_E(S)$, $m_E(S)$, $x_E(S)$. La résolution du système (20), où l'on prend comme variables les caractéristiques techniques S et t :

$$\begin{aligned} p'T(S) + p'\mathcal{T}(S) + I' &= 0 \\ x(S) + \xi(S) &= \frac{p}{b} \end{aligned}$$

conduit à un projet d'exploitation $S_o + \delta S$, $t_o + \delta t$, légèrement différent du

---

(1)* Cette assimilation n'est pas absolument correcte, puisque, parmi les différents périmètres possibles de même taille S, celui que retient le mineur pour construire les fonctions T_E et m_E n'est pas forcément le meilleur possible. Mais cette deuxième cause de divergence doit être regardée comme conduisant à des erreurs petites vis-à-vis de $\mathcal{T}$ et de μ

projet optimum S_o, t_o. Les variations δS et δt, ou du moins leurs valeurs principales, sont une conséquence des erreurs d'estimation τ et μ, et se calculent en résolvant le système :

$$(33) \quad \begin{cases} (p''T + \dot{I}'')\,\delta t + p'\,\dfrac{dT}{dS}\,\delta S + p'\tau = 0 \\[2ex] b\xi + b\,\dfrac{dx}{dS}\,\delta S = p'\,\delta t \end{cases}$$

Le périmètre choisi, $S_o + \delta S$, est effectivement exploité, puisque la méthode est supposée rigide. Il lui correspond un tonnage $T_o + \delta T$ qui diffère de l'optimum T_o par la quantité :

$$\delta T = \frac{dT}{dS}\,\delta S$$

En résolvant (33), on obtient pour δt et δT les expressions suivantes :

$$(34) \quad \begin{cases} \delta t = \dfrac{bp'\left(\xi - \tau\,\dfrac{dx}{dT}\right)}{b\,\dfrac{dx}{dT}\,(p''T + \dot{I}'') + p'^2} \\[4ex] \delta T = -\,\dfrac{p'^2\tau + b\,(p''T + \dot{I}'')\,\xi}{p'^2 + b\,\dfrac{dx}{dT}\,(p''T + \dot{I}'')} \end{cases}$$

Il suffit de porter ces expressions dans l'équation (29) pour obtenir la perte P :

$$P = -\,\frac{1}{2}\left[\frac{-\,bp'^2\,\dfrac{dx}{dT}\,\tau^2 + 2\,bp'^2\tau\xi + b^2(\dot{I}'' + p''T)\,\xi^2}{p'^2 + b\,\dfrac{dx}{dT}\,(\,p''T + \dot{I}'')}\right]$$

L'inégalité (30) montre que cette perte est toujours positive, quels que soient τ et ξ. On remarque aussi que le paramètre S a été éliminé, la dérivée $\frac{dx}{dT}$ pouvant se calculer directement à partir de la relation teneur-tonnage $T(x)$. En valeur probable, les termes τ^2, ξ^2, et $\tau\,\xi$ donnent les variances

... / ...

σ_τ^2, σ_ξ^2 et la covariance $\sigma_{\tau\xi}$, et on trouve finalement :

$$(35)\quad P = -\frac{1}{2}\left[\frac{-\,bp'^2\,\frac{dx}{dT}\,\sigma_\tau^2 + 2\,bp'^2\sigma_{\tau\xi} + b^2(I'' + p''T)\sigma_\xi^2}{p'^2 + b\,\frac{dx}{dT}\,(p''T + I'')}\right]$$

Le calcul de la variance σ_τ^2 n'introduit pas de difficultés particulières : c'est la variance d'estimation (effet de bordure exclu) sur le tonnage T(S) affecté au périmètre S, telle que la géostatistique permet de la calculer. La deuxième variance σ_ξ^2 pose un problème un peu plus difficile. Bien que $\xi(S)$ représente l'erreur sur la teneur de coupure x(S), il ne faut pas l'interpréter(1)* comme une erreur sur la teneur moyenne d'une frange dS infiniment petite ceinturant le périmètre S. On doit, au contraire, définir $\xi(S)$ d'une manière analytique, à l'aide de $\mu(S)$, T(S) et de la relation (1). En effet, ce terme ne représente pas l'erreur sur la teneur d'une portion du gisement, mais résulte, globalement, d'une mauvaise adaptation des fonctions $T_E(S)$ et $m_E(S)$, c'est-à-dire d'une erreur sur l'évaluation des paramètres de la relation tonnage teneur. Si la loi de Lasky est utilisable, on a

$$\begin{cases} m(S) - x(S) = \beta \\ m_E(S) - x_E(S) = \beta + \delta\beta \end{cases}$$

$\delta\beta$ représentant l'erreur sur le paramètre β de la loi de LASKY, et on en tire :

$$\mu(S) - \xi(S) = \delta\beta$$

Si la loi de Lasky est extrapolable jusqu'au périmètre maximum S_M correspondant au gisement entier, le paramètre β n'est autre que la teneur $m(S_M)$ du gisement entier, et $\delta\beta$ l'erreur $\mu(S_M)$ commise sur l'estimation de cette teneur. On sait qu'en fait, la loi de Lasky risque de ne pas être vérifiée jusqu'au périmètre S_M. Mais le caractère fondamental du terme $\xi(S)$, qui est d'être lié à une erreur sur l'estimation des paramètres de la relation Tonnage-teneur,

... / ...

(1)* Cette interprétation conduirait, en général, à une variance σ_ξ^2 infinie.

donne une certaine légitimité aux résultats obtenus par cette extrapolation. Admettons donc la relation :

$$(36) \quad \xi(S) = \mu(S) - \mu(S_M)$$

Comme le périmètre maximum S_M du gisement entier résulte de la juxtaposition du périmètre S sélectionné et de son complémentaire $S_M - S$, l'erreur $\mu(S_M)$ sur la teneur globale s'obtient en pondérant par les tonnages l'erreur $\mu(S)$ sur S et l'erreur $\nu(S_M - S)$ sur le complémentaire $S_M - S$, soit :

$$\mu(S_M) = \frac{T(S)\,\mu(S) + \left[T(S_M) - T(S)\right]\,\nu(S_M) - S)}{T(S_M)}$$

En portant dans (36), et en écrivant T_M et T au lieu de $T(S_M)$ et $T(S)$, il vient :

$$\xi(S) = \frac{T_M - T}{T_M}\left[\mu(S) - \nu(S_M - S)\right]$$

Les périmètres S et $S_M - S$, obtenus par juxtaposition de zones d'influence d'échantillons distincts, sont, en général, estimés indépendamment l'un de l'autre, de sorte que les variances d'estimation σ_μ^2 et σ_ν^2 des teneurs de S et de $S_M - S$, sont additives. On en déduit la variance σ_ξ^2 :

$$(37) \quad \sigma_\xi^2 = \left(\frac{T_M - T}{T_M}\right)^2 \left(\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2\right)$$

De plus, les variances d'éstimation sont, le plus souvent, inversement proportionnelles au tonnage retenu (1)* de sorte que l'on peut écrire :

$$\sigma_\nu^2 = \frac{T}{T_M - T}\,\sigma_\mu^2$$

En portant dans (37), il vient :

$$(38) \quad \sigma_\xi^2 = \frac{(T_M - T)}{T_M}\,\sigma_\mu^2$$

... / ...

(1)* Une variance telle que σ_μ^2 s'obtient en divisant la variance d'extension d'un échantillon distinct dans sa zone d'influence par le nombre n des zones d'influence : ce nombre n est proportionnel à S, lui-même approximativement proportionnel au tonnage.

On voit que σ^2_ξ est toujours inférieure à la variance d'estimation σ^2_μ de la teneur. En fait, elle admet une limite supérieure, égale à σ^2_μ, et atteinte pour $T = 0$, c'est-à-dire lorsque le tonnage retenu est nul. Lorsqu'il y aura ambigüité sur la définition du tonnage total T_M (par exemple, s'il y a passage à peu près continu du minerai au stérile, sans qu'il soit possible de fixer une limite précise), on pourra évaluer le rapport à l'aide de la loi de Lasky :

$$(39) \qquad \frac{T_M - T}{T_M} = 1 - T\, e^{1 - \frac{\alpha}{\beta}}$$

les valeurs numériques de α et β étant celles que l'on a calculées en interpolant entre deux projets réels. De même, la covariance $\sigma_{\tau\xi}$ (qui interviendra, en général, comme un terme correctif) se calculera à partir de la covariance géostatistique $\sigma_{\tau\mu}$ reliant les estimations du tonnage et de la teneur du périmètre S (effet de bordure exclu), par l'équation :

$$(40) \qquad \sigma_{\tau\xi} = \frac{T_M - T}{T_M}\, \sigma_{\tau\mu}$$

En portant (38) et (40) dans l'expression (35), on obtient la perte P. On détermine ensuite le volume optimum de la reconnaissance en minimisant la somme P + R de cette perte P et du coût R des travaux de reconnaissance : si le volume des travaux de reconnaissance est fixé par des paramètres u_1, u_2, ..., on doit résoudre le système :

$$(41) \qquad \frac{\partial P}{\partial u_i} + \frac{\partial R}{\partial u_i} = 0$$

et la solution obtenue donne à la fois le volume optimum des dépenses globales qui doivent être consacrées à la reconnaissance, et la meilleure ventilation de celles-ci entre les différentes catégories de travaux correspondant aux différents paramètres u_i. Il n'est pas utile d'expliciter ici, sous forme littérale, l'équation (41) : Nous donnerons un exemple d'application à un problème pratique dans la quatrième partie.

... / ...

3 - b - Méthode d'exploitation adaptative

Dans la méthode adaptative, l'attention se porte sur le choix de la teneur de coupure ($x_o + \delta x$) adoptée dans le projet et que le mineur, jouant à la perfection son rôle de démon de Maxwell, est supposé respecter lors de l'exploitation effective. Cette teneur de coupure diffère de l'optimum x_o d'une quantité δx qu'il s'agit de calculer. La véritable relation Tonnage-Teneur n'est pas exactement connue. Le mineur utilise les résultats de la reconnaissance pour étudier divers projets correspondant à différentes valeurs du paramètre S, à chacune desquelles il affecte un tonnage et une teneur estimés, avec les mêmes erreurs $\tau(S)$ et $\mu(S)$ que dans les équations (32). Mettant en correspondance le tonnage $T + \tau$ avec la teneur de coupure $x + \xi$, il obtient une relation tonnage-teneur $T(x) + \theta\,(x)$, qui diffère de la véritable relation $T(x)$ par un terme $\theta(x)$, généralement petit, vérifiant la relation :

$$T(x + \xi) + \theta(x) = T + \tau$$

D'où l'on tire :

$$(42)\quad \theta(x) = \tau - \frac{dT}{dx}\,\xi$$

Cette erreur $\theta(x)$ va entraîner un écart entre le projet ($t_o + \delta t$, $x_o + \delta x$) adopté et réalisé, et le véritable optimum(t_o, x_o). Le projet, en effet, est choisi comme la solution du système biaisé :

$$\begin{cases} p'T(x) + p'\theta(x) + \dot{I}' = 0 \\ x = \dfrac{p}{b} \end{cases}$$

et les écarts δt et $\hat{\delta} x$ vérifient les relations :

$$\begin{cases} p'\theta + p'\dfrac{dT}{dx}\delta x + (p''T + \dot{I}'')\,\delta t = 0 \\ \delta x = \dfrac{p'}{b}\delta t \end{cases}$$

.../...

On en déduit les écarts δt et δx, ainsi que l'écart δT entre le tonnage $T_o + \delta T$ qui sera effectivement exploité et l'optimum T_o :

$$\begin{cases} \delta t = \dfrac{- p'b \dfrac{dx}{dT} \theta}{p'^2 + b \dfrac{dx}{dT} (p''T + I'')} \\[2em] \delta T = \dfrac{dT}{dx} \delta x = \dfrac{- p'^2 \theta}{p'^2 + b \dfrac{dx}{dT} (p''T + I'')} \end{cases}$$

Les valeurs de ces écarts sont ensuite portées dans l'expression (29) de la perte, qui devient :

$$P = \frac{1}{2} \frac{bp'^2 \dfrac{dx}{dT} \theta^2}{p'^2 + b \dfrac{dx}{dT} (p''T + I'')}$$

θ est alors remplacé par son expression (42), et on obtient, en passant aux valeurs probables :

$$(43) \quad P = \frac{1}{2} \frac{bp'^2 \dfrac{dx}{dT} \sigma_\tau^2 - 2\, bp'^2 \sigma_{\tau\xi} + bp'^2 \dfrac{dT}{dx} \sigma_\xi^2}{p'^2 + b \dfrac{dx}{dT} (p''T + I'')}$$

Les variances σ_ξ^2 et σ_τ^2, et la covariance $\sigma_{\tau\xi}$ se calculent exactement comme au paragraphe précédent, et on achève, de la même façon, la résolution du problème en minimisant la somme $P + R$ de cette perte et du coût des travaux de reconnaissance.

Il est instructif de comparer la perte P_r, correspondant à la méthode rigide, et donnée par l'équation (35) avec la perte P_a donnée en (43) et correspondant à la méthode parfaitement adaptative. Toutes choses égales d'ailleurs - c'est-à-dire pour les mêmes fonctions $I(t)$ et $p(t)$, la même relation teneur-Tonnage et les mêmes travaux de reconnaissance - ces deux pertes diffèrent de la

... / ...

quantité :

$$P_r - P_a = - \frac{1}{2} b \frac{dT}{dx} \sigma_{\xi}^2$$

Comme $\frac{dT}{dx}$ est négatif, on voit que cette différence est toujours positive : comme on pouvait s'y attendre, la perte est toujours plus grande dans le cas de la méthode rigide.

Dans la pratique, une exploitation en carrière correspond à peu près à la description que nous avons donnée d'une méthode rigide. Par contre, aucune méthode d'exploitation réelle n'est parfaitement adaptative : le mineur est incapable de respecter rigoureusement la teneur de coupure prévue par le projet. En dehors du cas des carrières, on sera, le plus souvent, dans un cas intermédiaire, et, comme il est difficile d'apprécier le degré de rigidité et d'adaptation, on pourra, pour des raisons de prudence, se servir dans tous les cas de l'expression (35), qui correspond à l'hypothèse la plus pessimiste.

*

* *

CHAPITRE III

OPTIMISATION SEQUENTIELLE ET ARRET DES RECHERCHES

1)- Le problème de l'Arrêt des Recherches.

Il convient maintenant de réintroduire le risque de ruine. Dans le chapitre précédent, nous avons admis que la rentabilité du gisement avait pu être établie, et nous avons déterminé le meilleur niveau de la reconnaissance, en tenant compte seulement de la perte entraînée par un mauvais dimensionnement des installations. Il s'agissait d'un optimum purement technique, ayant valeur absolue, et défini sans actualisation. Le problème que nous abordons maintenant présente la plus haute importance pour la pratique de la recherche minière. Il se résume dans la question essentielle : A quel moment convient-il d'arrêter les recherches, et de prendre une décision - positive ou négative - quant à la mise en exploitation du gisement ? Le problème ne peut plus se formuler dans l'absolu. On doit se contenter d'analyser les éléments qui commandent la décision relativement au passage d'une phase de la recherche à la phase suivante. Reprenant le schéma séquentiel de la figure 1, supposons qu'une première tranche TR_1 de travaux de reconnaissance ait été exécutée. Elle a fourni des indications chiffrées sur le tonnage et la teneur du gisement reconnu, et les méthodes de la géostatistique ont permis de fixer la précision avec laquelle ces informations représentent la réalité. Une étude d'exploitabilité, d'autre part, a pu définir pour quels tonnages et quelles teneurs une exploitation pouvait être payante. Au point crucial C de la figure 1, auquel on est ainsi parvenu, trois décisions sont possibles :

1 - On décide de ne pas exploiter et on abandonne le gisement (on ferme),

2 - On décide d'exploiter tout de suite (1)*

3 - On décide de faire une deuxième tranche TR_2 de travaux de reconnaissance.

Si l'on adopte la troisième décision, on se retrouve, après l'exécution des TR_2, en un nouveau point crucial C', où, théoriquement, les trois

(1)* Si l'on n'actualise pas, il est indifférent d'exploiter tout de suite ou plus tard. Si l'on actualise, il est préférable d'exploiter tout de suite, sauf dans le cas où les cours seraient aujourd'hui, à un niveau anormalement bas, et où l'on espérerait leur redressement dans les années à venir. Comme nous ne prenons pas en compte dans cette étude, la variabilité des cours, nous n'envisageons pas non plus la solution d'attente, dont la formulation sur des bases réalistes serait assez délicate.

décisions sont à nouveau possibles, mais peuvent être prises à la lumière d'une information améliorée. Dans de nombreux cas, en pratique, il sera hors de question, en réalité, d'envisager une troisième phase TR_3 de recherches. Nous nous limiterons, dans cette étude, au cas où le seul choix possible, en C', consistera à mettre, ou non, le gisement en exploitation.

Ce problème séquentiel se formule, nécessairement, de manière dicontinue. En particulier, la deuxième phase de recherche TR_2, envisagée dans la troisième décision, sera imposée par la technologie. Par exemple, si l'on a reconnu un gisement filonien par traçages équidistants de 60m, la deuxième phase consistera à tracer des sous-niveaux intermédiaires, de manière à ramener à 30 m la relevée entre niveaux. Ou bien, pour un gisement stratiforme reconnu par sondages à maille carrée, elle consistera à centrer la maille, c'est-à-dire à doubler le nombre des sondages utiles. Cette deuxième phase ne dépend donc pas d'un paramètre variant de façon continue, et dont la valeur pourrait être choisie arbitrairement.(1)* Elle est imposée.

On aura parfois l'illusion qu'un choix continu est possible. Par exemple, ayant reconnu un gisement filonien puissant à troix niveaux, et échantillonné ces troix niveaux par des sondages percutants horizontaux, pris du toit au mur de la formation, on pourrait s'imaginer améliorer l'information disponible en resserrant la maille des percutants dans les niveaux déjà tracés sans faire de travaux miniers supplémentaires. La maille des percutants apparaîtrait ainsi comme un paramètre à peu près continu. Mais on sait (Théorème du Statisticien déçu(2)*)

... / ...

(1)* Nous supposons, essentiellement, que la reconnaissance du gisement a été <u>exhaustive</u>. On a pu se tromper dans l'évaluation du tonnage et de la teneur, mais la totalité du gisement a été reconnue. Les travaux de reconnaissance ont débordé sur les limites de la minéralisation dans l'espace, et il n'y a pas de problème d'extension. Il ne serait d'ailleurs pas possible de traiter, mathématiquement, un problème d'extension. Un filon peut se prolonger à l'aval du dernier niveau reconnu, et la géologie peut apporter des arguments en faveur de cette extension : mais ces arguments ne sont pas chiffrables. Ni la Géostatistique, ni aucun artifice probabiliste ne peuvent remplacer une information manquante. Dans le cas des filons, il est, en fait, très rare que les travaux miniers atteignent la terminaison aval. Les calculs de rentabilité, que l'on fait en pratique, ne tiennent pas compte d'un aval possible au delà du dernier niveau. Le tonnage effectivement reconnu doit justifier, à lui seul, la mise en exploitation. Nous ferons exactement de même dans notre analyse théorique.

(2)* Traité de Géostatistique Appliquée. Tome I.

que l'amélioration apportée par des percutants supplémentaires serait presque toujours négligeable, la plus grande partie de la variance d'estimation provenant de l'extension des sections (supposées connues) à leurs tranches d'influence à trois dimensions, extension sur laquelle le resserrement de la maille des percutants reste sans action.

La géostatistique permet de calculer la précision avec laquelle les réserves sont connues à l'issue des TR_1, mais elle permet aussi de prévoir à l'avance la nouvelle précision avec laquelle elles seront connues lorsque l'on aura exécuté la deuxième phase TR_2, telle que la technologie l'impose. Pour formuler le problème séquentiel, il convient d'attribuer une valeur économique au supplément d'information apporté par les TR_2, et de le comparer au prix de revient des TR_2 eux mêmes. Parmi les trois décisions possibles, on devra choisir celle qui conduit à la plus grande valeur probable du bénéfice futur(1)* en aval du point C (c'est-à-dire,

---

(1)* Nous laisserons volontairement ouverte la question de savoir si le bénéfice doit, ou non, être actualisé. En économie collectiviste, on n'actualiserait sans doute pas. En économie concurrentielle, le raisonnement de la première partie s'applique encore, au moins théoriquement : une grande société, se fixant comme objectif de produire chaque année une quantité donnée de métal au moindre prix de revient, devrait chercher à minimiser la somme des dépenses consenties chaque année, et qui comprennent des dépenses d'exploitation, des investissements, pour remplacer les gisements venus à épuisement cette année là, et des travaux de recherche, pour préparer le remplacement des gisements qui s'épuiseront les années suivantes. Ce point de vue conduirait, en bonne logique, à adopter l'expression non actualisée du bénéfice dans l'optimisation séquentielle des recherches(corrélativement,d'ailleurs,le paramètre b ne correspondrait plus au prix du marché,mais à un prix interne, défini par la Société de manière, précisément, à optimiser son programme de production global).

Ce raisonnement nous avait paru péremptoire, lors de l'étude de l'optimisation technique faite dans les deux premières parties, parce qu'il conduisait à une description correcte du comportement réel des exploitants. Dans l'optimisation séquentielle, au contraire, le comportement réel des exploitants, en économie concurrentielle, correspond à un taux non nul. On cherche, en effet, un critère de décision quant à une mise en exploitation éventuelle, et - en économie concurrentielle - on ne décide d'exploiter un gisement que si la valeur actualisée du bénéfice futur doit être positive. Nous nous servirons donc de l'expression (9), correspondant à un taux i non nul. Il sera extrêmement facile de passer au cas $i = 0$ en remplaçant, dans les résultats obtenus, les exponentielles e^{-iN} par l'unité, et les expression $\frac{1 - e^{-iN}}{i}$ par N.

.../...

sans tenir compte des dépenses antérieures, mais en tenant compte, pour la troisième décision, du prix de revient de la deuxième tranche TR_2, puisqu'en C celle-ci n'est pas encore exécutée). Mais la notion de valeur probable n'est pas immédiate. Nous devrons la définir avec soin, et préciser les limites de l'artifice probabiliste. C'est seulement ensuite que nous aborderons l'étude du problème séquentiel lui-même, en traitant successivement le cas d'un gisement tout ou rien, et le cas où la relation Tonnage-teneur intervient effectivement.

2)- L'artifice Probabiliste.

On sait que le tonnage, ou la teneur, d'un gisement ne constituent en aucune façon des variables aléatoires (1)*. La teneur d'un gisement, par exemple, est un phénomène naturel physiquement bien déterminé, et unique, même si les informations disponibles ne permettent pas de la connaître exactement. La question : combien y a-t-il de chances pour que la teneur de ce gisement dépasse 10 % est dépourvue de signification. Si la teneur est 11 %, il y a, si l'on veut, 100 chances sur 100 pour qu'elle soit supérieure à 10 %, et zéro si elle est égale à 9 %. Mais comme, précisément, on ne sait pas si la teneur réelle est 9 % ou 11 %, une telle proposition est purement formelle.(2)* Cependant, pour développer le raisonnement

---

(fin de la note précédente).

Les économistes attachent, avec raison, une grande importance au choix du critère adopté. Outre l'expression (9), actualisée ou non, du bénéfice futur, bien d'autres critères peuvent être envisagés, conduisant à des pratiques plus ou moins malthusiennes et à diverses variétés d'écrémage. Par exemple, le point de vue strictement capitalistique se fixerait comme objectif de faire rendre à chaque action le plus fort revenu possible, et conduirait à maximiser le rapport $\frac{B_i}{I}$ ... De même, le point de vue, un peu naïf, du technicien pur conduirait à minimiser le prix de revient du kilo de métal $\frac{(V - p)T - \hat{I}}{T_m}$ etc ... D'une manière générale, J. LESOURNE (in "Technique économique de gestion industrielle", Dunod, Paris) indique que les rapports, tels que $\frac{B}{I}$ .., constituent de mauvais critères économiques. Dans le problème qui nous occupe, le seul choix possible se limite donc à faire, ou non, $i = 0$ dans l'expression (9) du bénéfice.

(1)* - On peut même dire que c'est là le point de départ de la Géostatistique.

(2)* - La teneur pourrait se probabiliser moyennant certains postulats arbitraires. Il faudrait, en premier lieu, définir, dans l'ensemble des gisements réels, des classes d'équivalence (c'est le problème de la classification des gîtes minéraux, sur lequel les métallogénistes discutent à perte de vue), considérer l'ensemble des gisements appartenant à la même classe C que le gisement étudié, définir un procédé de tirage au sort, et admettre que le gisement étudié peut être considéré comme ayant été tiré au sort dans la classe C suivant ce procédé. La teneur devient alors une variable aléatoire : mais sa loi de probabilité dépend étroitement de la définition des classes d'équivalence. Suivant la définition adoptée, on pourrait obtenir à peu près n'importe quelle loi. On peut se demander

... / ...

séquentiel, nous avons besoin de définir des valeurs probables, et cela ne peut être fait qu'en assimilant certaines grandeurs à des variables aléatoires. Toute probabilisation est artificielle, en ce domaine, et entraîne une très large part d'arbitraire. Pour diminuer cet arbitraire, nous devons réduire les postulats probabilistes au strict nécessaire. Nous ne probabiliserons donc ni les teneurs, ni leurs estimations, mais seulement les erreurs, c'est-à-dire la différence entre l'estimation et la valeur vraie. Pour abréger le langage, nous allons traiter le cas des teneurs. Mais les raisonnements auront un caractère général, et s'appliqueront aussi bien à un tonnage ou à une relation Teneur-tonnage. Nous définirons, en premier lieu, la notion géostatistique de variance d'estimation : cette notion possède une signification physique objective, et n'implique aucun artifice probabiliste, de même que la relation d'additivité que nous établirons ensuite. Enfin, nous introduirons le moins d'arbitraire possible en probabilisant les erreurs, de manière à donner un sens à la notion de valeur probable.

2 a - La notion Géostatistique de variance d'estimation

Pour faire comprendre la notion géostatistique de variance d'estimation, imaginons un gisement G, de teneur moyenne inconnue m, reconnue par des travaux miniers. On imaginera, par exemple, G sous la forme de la portion d'un gisement filonien situé à l'amont du dernier niveau tracé. Pour estimer m, on dispose de la teneur z donnée par l'échantillonnage des travaux miniers. Dans un tel problème, la teneur m est unique et physiquement déterminée. Ce n'est pas une variable aléatoire. Mais il en est exactement de même de z, puisque l'implantation des travaux miniers, relativement au panneau G à estimer, n'est pas quelconque, mais unique et bien déterminée. Une loi de probabilité de z à m fixé n'a pas plus de sens

---

(suite de la note (2)* de la page précédente)

d'ailleurs, si les critères géologiques peuvent conduire à autre chose qu'à des analogies non transitives (A analogue à B et B analogue à C n'entraînant pas A analogue à C). Dans ce cas, les classes d'équivalence ne seraient pas logiquement définissables. Peut-être est-ce là l'origine des difficultés inextricables rencontrées par les métallogénistes dans la classification des gisements minéraux.

... / ...

qu'une loi de m à z fixé. Ni l'une ni l'autre de ces lois n'existe.

Pour lever la difficulté, la géostatistique rend leur mobilité à m et z simultanément, en supposant que le gisement G est un panneau extrait d'un grand gisement K, dans lequel est supposée régner la loi de dispersion intrinsèque(1)* définie par le variogramme expérimental observé dans les travaux miniers. Il est inutile de faire intervenir une loi de distribution, au sens statistique, des teneurs dans le gisement K. Si le panneau G se déplace dans K, en entraînant les travaux miniers qui lui sont liés, les deux teneurs m et z deviennent des variables régionalisées. On définit alors la variance d'estimation de m par z, comme la valeur moyenne,(2)* dans le champ K, de l'expression $(m - z)^2$:

$$(44) \qquad D^2(m - z) = \frac{1}{V_K} \iiint_K (m - z)^2 dv$$

V_K désignant le volume du gisement K. Cette variance est calculable à partir du variogramme, et le caractère intrinsèque de la loi de dispersion nous garantit qu'elle ne dépend pas de la forme et des dimensions de K. Elle s'exprime par des intégrations effectuées sur le variogramme et dans le panneau G ou dans les travaux miniers. On notera bien que cette définition, purement géométrique, n'implique aucune référence à une loi de probabilité hypothétique. La variance d'estimation possède une signification physique objective au même titre que le variogramme qui sert à son calcul.

2 - b - La relation d'additivité

Imaginons, maintenant, qu'après une première phase de travaux de reconnaissance, qui nous a donné une première estimation z, nous décidions d'effectuer une deuxième phase de recherche. Ces nouveaux travaux ne sont pas implantés

---

(1)* Pour les notions de loi de dispersion intrinsèque et de variogramme, cf, "Traité de Géostatistique Appliquée", Tome I, ch. IV.

(2)* On remarquera que (44) représente aussi la variance d'estimation de z par m : cela est naturel, puisque les variables régionalisées m et z jouent des rôles symétriques.

... / ...

de façon quelconque par rapport aux premiers. La teneur u qu'ils vont nous indiquer est donc tout aussi unique, et physiquement déterminée que m et z, et devient, en même temps que m et z, une variable régionalisée dans le champ K. Par des relations analogues à (44), on définit les variances d'estimation, σ_z^2 et $\sigma_{u'}^2$, de m par z et u, et la covariance σ_{uz} des erreurs (m - z) et (m - u) :

$$\begin{cases} \sigma_z^2 = D^2(z - m) \\ \sigma_u^2 = D^2(u - m) \\ \sigma_{uz} = E(m - z)(m - u) \end{cases}$$

Le symbole E représente ici une valeur moyenne dans le champ K. Tout comme l'expression (44), ces expressions ne dépendent en réalité que du variogramme et de la géométrie du panneau et des travaux miniers.

Lorsque les travaux de deuxième phase sont exécutés, leur teneur u est combinée avec la teneur z de la première phase pour donner une nouvelle estimation z' de la moyenne m :

$$z' = \lambda u + (1 - \lambda) z$$

Le paramètre λ est déterminé par la méthode habituelle du krigeage, qui consiste à minimiser la variance d'estimation de m par z'. Cette variance $\sigma_{z'}^2$:

$$\sigma_{z'}^2 = \frac{1}{V_K} \iiint_K (z' - m)^2 dv = \lambda^2 \sigma_u^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\sigma_{uz} + (1 - \lambda)^2 \sigma_z^2$$

est minimale pour

$$\lambda = \frac{N}{D} = \frac{\sigma_z^2 - \sigma_{uz}}{\sigma_z^2 + \sigma_u^2 - 2\sigma_{uz}}$$

.../...

Le dénominateur D de cette expression n'est autre que $D^2(z - u)$, c'est-à-dire la variance d'estimation de u par z. Avec cette valeur du paramètre λ de krigeage, la variance d'estimation de m par z' prend la forme :

$$(45) \quad \sigma^2_{z'} = \sigma^2_z - \lambda N = \sigma^2_z - \lambda^2 D \quad ,$$

Mais l'estimateur z' étant lui-même une variable régionalisée dans K, on peut définir la variance d'estimation σ'^2 de z' par z :

$$\sigma'^2 = D^2(z - z')$$

On obtient immédiatement :

$$\sigma'^2 = \lambda^2 \ D^2(z - u) = \lambda^2 D$$

et la relation (45) se met sous la forme :

$$(46) \quad \sigma'^2 = \sigma^2_z - \sigma^2_{z'}$$

La variance de l'estimation que l'on peut faire, à l'aide du résultat z de la première phase de reconnaissance, du résultat z' que l'on obtiendra par l'ensemble des deux phases, lorsque la deuxième phase aura été réalisée, apparaît comme la différence entre les variances d'estimation de m avant et après la deuxième phase. Cette variance σ'^2 représente exactement le gain d'information apporté par les nouveaux travaux de reconnaissance.

Cette relation (46), ou relation d'additivité, nous sera précieuse dans la formulation du raisonnement séquentiel. Elle est absolument générale, et résulte d'un processus régionalisé de krigeage. En particulier, elle possède une signification physique objective, et n'implique aucune référence à un modèle probabiliste plus ou moins arbitraire.

... / ...

2 - c - La Probabilisation des erreurs.

Nous n'avons encore introduit aucun artifice probabiliste, et toutes les variances que nous avons définies ont une signification objective. En vue de définir une notion de valeur probable, en limitant ua maximum la part de l'arbitraire, nous ne probabiliserons que les erreurs. Seules, les différences du type $(m - z)$ seront assimilées à des variables (1)* aléatoires, et traitées comme telles.

A une variable telle que :

$$y = m - z$$

assimilée à une variable aléatoire, nous attribuerons une loi de probabilité, définie par une densité de fréquence $f(y)dy$. La forme mathématique de la fonction $f(y)$ est, a priori, indéterminée, mais la variance et la moyenne de y sont, elles, parfaitement définies : la variance est nécessairement égale à la variance d'estimation σ_z^2 définie plus haut, et la valeur moyenne ne peut être que nulle (2)*

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(y) = 0 \\ D^2(y) = \sigma_z^2 \end{array} \right.$$

Une fois fixées la valeur moyenne et la variance de la loi $f(y)$, on s'aperçoit, en traitant des exemples numériques, que la forme mathématique de cette loi n'a que peu d'influence sur les résultats utiles. En pratique, et pour des raisons de commodité, nous utiliserons tantôt une loi normale et tantôt une loi lognormale.

... / ...

---

(1)* Le postulat implicite consiste ici à considérer l'ensemble des gisements reconnus avec la même variance d'estimation σ_z^2, et à tirer l'un d'entre eux au sort : la différence $m - z$ entre sa teneur réelle et l'estimation déduite des travaux de reconnaissance est une variable aléatoire de variance σ_z^2 : la classe d'équivalence est définie sans ambiguïté, et la part laissée à l'arbitraire est très réduite.

(2)* Il suffit, pour le voir, d'imaginer un champ K assez étendu. Dans un tel champ, les variables régionalisées m et z ont même valeur moyenne, et par suite $(m - z)$ a une valeur moyenne nulle. Dans le cas où G est un panneau sélectionné pour sa richesse, on n'oubliera pas que l'estimateur z doit résulter d'un krigeage, tenant compte aussi bien des données extérieures pauvres que des données intérieures riches

Ceci étant, la teneur réelle m, inconnue, mais unique, du gisement peut se mettre sous la forme de la somme :

$$m = z + y$$

de la quantité fixe z, numériquement connue, et de la variable aléatoire y, dont la loi de probabilité est f(y). Par suite, et bien qu'elle ne soit pas réellement probabilisable, il est légitime de traiter la quantité inconnue m comme une variable aléatoire de valeur probable z et de variance σ_z^2

$$(48)\begin{cases} E(m) = z \\ D^2(m) = \sigma_z^2 \end{cases}$$

Dans ce raisonnement, on n'a fait nulle part appel à la notion de loi de distribution de z à m fixé, ou de m à z fixé, loi dont nous savons qu'elle ne serait pas définissable objectivement. Seule l'erreur y = m - z a été probabilisée. Si m était connue, et si nous cherchions une estimation de z, nous devrions écrire, de la même façon :

$$(49)\begin{cases} E(z) = m \\ D^2(z) = \sigma_z^2 \end{cases}$$

Certains statisticiens orthodoxes seront peut être choqués par cette manière de raisonner. En fait, il n'y a aucune raison pour que le formalisme du calcul des probabilités classiques soit transposable à la géostatistique. Nous allons montrer, cependant, que le raisonnement classique conduit nécessairement, à la limite, aux relations (48). Les lecteurs que le purisme ou l'orthodoxie ne tourmentent pas peuvent, sans inconvénients, passer directement au paragraphe 3.

Le statisticien classique aurait considéré m et z comme de véritables variables aléatoires, sans insister, sur les postulats implicites que cela présuppose, et aurait soigneusement distingué les lois de z à m fixé et de m à z fixé. Dans cette optique, les relations (48) et (49) sont clairement incompatibles. Supposons, par exemple, que la distribution de m et z soit normale, avec

.../...

une moyenne commune m_o, des variances σ_1^2 et σ_2^2, et un coefficient de corrélation ρ. La valeur probable de z à m fixé serait :

$$E(z.m) = m_o + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (m - m_o)$$

Le statisticien classique admet volontiers (1)* que la valeur probable de z à m fixé soit égale à m, c'est-à-dire la relation (49). Il en résulte

$$\rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

La valeur probable de m à z fixé est alors :

$$(50) \quad E(m.z) = m_o + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (z - m_o) = m_o \left(1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} z$$

Elle est différente de z, puisque, si l'une des droites de régression a la pente unité, l'autre a nécessairement une pente différente de 1. Pour donner un sens concret à m_o, σ_1^2, et σ_2^2, interprétons les comme la moyenne et les variances de m et z dans un grand gisement K dont G serait extrait. Il y a d'ailleurs là quelque chose d'un peu inquiétant, puisque ces trois paramètres prendront des valeurs bien différentes, selon que l'on retiendra une plus ou moins grande portion de K. Mais supposons, à la limite, que K devienne très grand. Les deux variances σ_1^2 et σ_2^2 sont majorées d'une même constante A qui tend vers l'infini. A la limite, il reste :

$$E(m.z) = z$$

La deuxième droite de régression a rejoint la première, et la relation (48) en découle. On montrerait, de la même façon que la variance liée $\sigma_1^2(1 - \rho^2)$ a pour limite la variance d'estimation de la géostatistique.

... / ...

(1)* L'inverse, c'est-à-dire la relation (48), le choquerait : il assimile implicitement z au résultat d'un tirage au sort effectué sur une urne de composition m.

Il y a plus. Supposons que le statisticien orthodoxe veuille utiliser la relation (50) dans une application pratique. Il lui faudra déterminer les valeurs numériques des variances et de la moyenne générale m_o. En ce qui concerne m_o, deux cas sont possibles. Ou bien G est un gisement entier, et l'on ne dispose d'aucun autre échantillon que ceux qui ont servi au calcul de z. Devra-t-on prendre m_o supérieur ou inférieur à z ? On sera, en fait, obligé d'estimer m_o à partir de z lui-même, et la relation (50) donnera encore $E(m.z) = z$. Ou bien G n'est qu'un panneau d'un gisement réel plus grand, et des échantillons ont été prélevés à l'extérieur de G. La teneur m_o est alors interprétée comme la teneur moyenne du gisement entier. Pour l'estimer, on fera une moyenne globale indifférenciée de tous les échantillons disponibles, intérieurs ou extérieurs à G. L'équation (50) représente alors un krigeage, c'est-à-dire une pondération ou un partage d'influence entre les échantillons extérieurs et intérieurs. A dire vrai, il s'agira là d'un mauvais krigeage car le terme indifférencié m_o ne représente sûrement pas la meilleure pondération possible des échantillons extérieurs. On a toujours intérêt à attribuer à chaque échantillon extérieur son poids propre, tenant compte de sa plus ou moins grande proximité du panneau G à estimer, et calculé de manière à rendre minimale la variance d'estimation. Mais, en réalité, c'est précisément par un tel krigeage que l'estimateur z doit toujours être formé. Comme les échantillons extérieurs sont incorporés dans l'expression de z, il ne reste plus rien au statisticien classique pour procéder à l'estimation de m_o.

3 - L'Optimisation séquentielle pour un gisement du type tout ou rien.

Après avoir éclairci ces indispensables préliminaires théoriques, nous allons maintenant traiter du problème de l'arrêt des recherches dans le cas le plus simple où la relation tonnage-teneur n'intervient pas, c'est-à-dire dans le cas des gisements tout ou rien. Nous poserons, tout d'abord, les équations générales du problème. Nous chercherons ensuite à les particulariser. Enfin, nous traiterons le cas particulier très simple, mais fréquent, où la teneur intervient seule, et celui également important, où le tonnage intervient seul.

... / ...

3 - a - Formulation générale du problème.

L'exploitation d'un gisement de tonnage T et de teneur m, laisse un bénéfice dont la valeur actualisée $B_i(T,m)$ est, par exemple, donnée par l'équation (9), dans laquelle la cadence annuelle d'exploitation t a été déterminée comme il a été dit dans la première partie. Nous négligerons ici les conséquences d'un mauvais dimensionnement des installations. La perte, calculée dans la deuxième partie, est du deuxième ordre et peut être négligée vis-à-vis du risque de ruine : en tenir compte conduirait à une complication, pratiquement inutile, des équations générales. La cadence t est ici considérée comme une simple fonction de T et m, donnée par la résolution de la première équation (20). En première approximation, on pourra même souvent considérer p et I comme des constantes.

Ceci dit, reprenons le schéma séquentiel de la figure 1. Au point C, c'est-à-dire à l'issue de la première campagne de reconnaissance, on dispose des estimations T_1 et m_1 du tonnage et de la teneur. Les valeurs vraies τ et μ sont inconnues, quoique physiquement déterminées, et nous avons vu qu'il était légitime de les traiter comme des variables aléatoires, dont les valeurs probables et les variances seraient :

$$(51) \qquad \begin{cases} E(\tau) = T_1 \\ D^2(\tau) = \sigma_{T_1}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} E(\mu) = m_1 \\ D^2(\mu) = \sigma_{m_1}^2 \end{cases}$$

Les variances sont les variances d'estimation calculées par la géostatistique. Eventuellement, il faudrait tenir compte d'une covariance $\sigma_{T_1 m_1}$; car les erreurs sur le tonnage et la teneur ne peuvent pas toujours être considérées comme indépendantes. La densité de probabilité $f_1(\tau, \mu, T_1, m_1) d\tau d\mu$ des deux variables τ et μ peut être choisie de manière assez arbitraire, sous réserve de vérifier les relations (51), et, éventuellement, de respecter la covariance $\sigma_{T_1 m_1}$.

De même, si l'on effectue la deuxième campagne, on aura, au nouveau point crucial C', les nouvelles estimations T_2 et m_2. A ce moment, les valeurs

.../

vraies τ et μ pourront être traitées comme des variables aléatoires vérifiant les relations ;

$$(52)\quad \begin{cases} E(\tau) = T_2 \\ D^2(\tau) = \sigma^2_{T_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} E(\mu) = m_2 \\ D^2(\mu) = \sigma^2_{m_2} \end{cases}$$

et soumises à une loi de probabilité $f_2(\tau, \mu, T_2, m_2)d\tau\, d\mu$, qui peut être prise quelconque, sous réserve de respecter les relations (52), et, éventuellement, une covariance $\sigma_{T_2 m_2}$.

Mais, au point C, la deuxième campagne n'a pas encore été exécutée. T_2 et m_2 sont inconnues, quoique physiquement déterminées, et on peut les traiter comme des variables aléatoires vérifiant les relations (46) et (48), qui s'écrivent ici :

$$(53)\quad \begin{cases} E(T_2) = T_1 \\ \\ E(m_2) = m_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma^2_T = \sigma^2_{T_1} - \sigma^2_{T_2} \\ \\ \sigma^2_m = \sigma^2_{m_1} - \sigma^2_{m_2} \end{cases}$$

La variance σ^2_T d'estimation de T_2 à partir de T_1 s'obtient en faisant la différence des variances d'estimation de T à partir de T_1 et de T_2. La loi de probabilité $g(T_2, m_2; T_1 m_1)\, dT_2\, dm_2$ de T_2 et m_2 vérifie, outre les conditions (52), la relation :

$$(54)\quad f_1(\tau, \mu ; T_1\, m_1) = \iint f_2(\tau, \mu ; T_2, m_2)\, g(T_2, m_2 ; T_1 m_1) dT_2 dm_2$$

l'intégrale étant étendue au champ des valeurs possibles de T_2 et m_2,

Ceci étant, examinons les trois décisions possibles au point crucial C, et évaluons, pour chacune d'elles l'espérance mathématique du bénéfice futur $B(\tau, \mu)$ La première décision - fermer le chantier et abandonner le gisement - conduit très clairement à un bénéfice nul. Nous écrirons :

$$(55)\quad E(B_1) = 0$$

... / ...

La deuxième décision - arrêter les recherches, et exploiter le gisement - conduit à un bénéfice $B(\tau,\mu)$ dont la valeur probable se déduit de la loi $f_1(\tau,\mu;\ T_1,m_1)$ de τ et μ lorsque les estimations T_1 et m_1 sont connues, soit :

$$(56)\quad E(B_2) = \iint B(\tau,\mu)\ f_1(\tau,\mu;\ T_1,m_1)d\tau d\mu$$

L'intégration est étendue au champ des valeurs possibles de τ et μ. Pour la troisième décision, la formulation est un peu plus complexe. Anticipant les résultats T_2 et m_2 de la deuxième campagne, transportons nous par la pensée au deuxième point crucial C', où deux décisions seulement seront possibles : fermer, ou exploiter. A ces deux décisions, sont associées des espérances données par des équations analogues à (55) et (56) :

$$(57)\quad \begin{aligned} E'(B_1) &= 0 \\ E'(B_2) &= \iint B(\tau,\mu)\ f_2(\tau,\mu;\ T_2m_2)\ d\tau d\mu \end{aligned}$$

et, en C', on adoptera la première ou la deuxième décision selon que $E'(B_2)$ sera négatif ou positif. Mais, en C, la deuxième campagne n'a pas encore été effectuée. Il convient donc, à l'aide de la loi $g(T_2,m_2;\ T_1m_1)$ de T_2 et m_2 lorsque T_1 et m_1 sont connus, d'anticiper, en probabilité, la décision future qui sera prise en C'. Il convient également de tenir compte du coût R de la deuxième campagne de recherche, puisque, en C, R n'a pas encore été dépensé. On obtient ainsi l'expression suivante pour l'espérance attachée à la troisième décision :

$$(58)\quad E(B_3) = \iint_D E'(B_2)\ g(T_2,m_2;\ T_1,m_1)dT_2\ dm_2 - R$$

L'expression de $E_2'(B)$, qui figure sous le signe somme, est donnée par la deuxième équation (57), et le domaine D d'intégration en T_2 et m_2, qui représente l'ensemble des cas où, en C', on décidera d'exploiter, est défini par l'inégalité :

$$(59)\quad E'(B_2) \geqslant 0$$

Si R était nul, $E(B_3)$ serait nécessairement supérieur à $E(B_2)$, puisque la deuxième campagne, en complétant l'information, élimine du champ des cas possibles un certain nombre d'éventualités où le gisement, à l'exploitation, se révèle-

... / ...

[illegible] des recherches supplémentaires, l'équation (58) met exactement en balance le coût de l'information et la valeur économique qu'on doit lui attribuer. Le critère de décision est alors très simple : les E(B) étant calculés, par les équations (55), (56), et (58), on choisit celle des trois décisions qui donne la meilleure espérance.

3 - b - Particularisation des équations générales

Le calcul numérique effectif de l'expression (56), et surtout (58), est relativement difficile, dans le cas général. Le résultat, d'autre part, dépend de la forme adoptée pour les lois de probabilité f_1, f_2 et g. Mais ces lois sont parfaitement arbitraires, et peuvent être prises quelconques, sous réserve seulement de vérifier les conditions de valeur moyenne et de variance qui leur sont imposées. En pratique, on leur attribuera une forme mathématique qui conduise aux calculs les plus simples possibles.

Examinons, en premier lieu, l'expression (56) de $E(B_2)$. Le bénéfice $B(\mathcal{T}, \mu)$ doit être pris sous la forme (9). Au point crucial C, les problèmes posés par le dimensionnement des installations apparaissent comme un peu lointains, et dépourvus d'urgence. La perte calculée dans la deuxième partie est d'ailleurs du second ordre, c'est-à-dire négligeable, en première approximation et au point C, vis-à-vis du risque de ruine. On peut considérer la cadence annuelle t comme une constante, puisque les incidences de ses variations possibles apparaissent comme très faibles, et difficilement calculables au point C. Celà revient à considérer les investissements I et les dépenses à la tonne p comme des constantes, numériquement forfaitées. On prendra donc le bénéfice sous la forme :

$$(60) \quad B(\mathcal{T}, \mu) = (b\mu - p)\, t \; \frac{1 - e^{-i\frac{\mathcal{T}}{t}}}{i} - \dot{I}$$

Dans cette expression, μ intervient linéairement, et $\mathcal{T}$ par l'intermédiaire d'une exponentielle. Il pourra donc être commode de traiter μ comme une variable lognormale, et $\mathcal{T}$ comme une variable normale : μ et $e^{-i\frac{\mathcal{T}}{t}}$ sont ainsi lognormales simultanément. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous rejetons en Annexe le détail des calculs, et les expressions lognormales exactes. En posant $N_1 = \frac{T_1}{t}$, on obtient pour $E(B_2)$ l'expression approchée :

... / ...

$$(61) \quad E(B_2) = (bm_1 - p)t \, \frac{1 - e^{-iN_1}}{i} - \acute{I}$$

qui est un simple démarquage de (60). On se contente de remplacer τ et μ, dans l'expression du bénéfice, par leurs valeurs probables T_1 et m_1.

Passons maintenant au calcul, plus difficile de l'expression (58). En premier lieu, $E'(B_2)$ se calcule exactement comme en (61) :

$$(62)\quad E'(B_2) = (bm_2 - p)t\,\frac{(1 - e^{-iN_2})}{i} - \hat{I}$$

En deuxième lieu, l'expression obtenue doit être portée dans l'intégrale de l'équation (58). Le calcul exact de cette intégrale serait assez difficile, car le domaine D d'intégration, défini par l'inégalité (59), est limité par la courbe, assez complexe, d'équation $E'(B_2) = 0$, qui représente la limite d'exploitabilité tonnage-teneur. Il est préférable de transformer l'intégrale double en une intégrale simple, en introduisant une nouvelle variable :

$$X = E'(B_2)$$

dont la loi de probabilité $H(X\,;\,T_1,\,m_1)dX$ peut, en principe, se calculer à partir de f_2 et g. On a alors :

$$(63)\quad E(B_3) = \int_0^{\infty} X\,H(X\,;\,T_1,\,m_1)dX - R$$

l'intégrale étant cette fois, prise de zéro à l'infini. En ce qui concerne la loi H, il serait, en réalité, assez vain de la déduire rigoureusement de f_2 et de g, ces deux dernières lois étant de forme arbitraire, on peut aussi bien se donner directement une loi $H(X)$ de forme aussi simple que possible, sous réserve seulement que la valeur moyenne et la variance de cette loi prennent les valeurs exactes. La valeur probable de X n'est autre que l'espérance $E(B_2)$ calculée en (61).

Une expression approchée (1)* de la variance de X s'obtient rapidement, en linéarisant X, fonction des variables m_2 et T_2 dans un petit domaine autour du point (m_1, T_1). On a approximativement :

$$X - E(B_2) = \frac{\partial X}{\partial m_1}(m_2 - m_1) + \frac{\partial X}{\partial T_1}(T_2 - T_1)$$

$$\sigma_X^2 = E\left[X - E(B_2)\right]^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial m_1}\right)^2 \sigma_m^2 + 2\frac{\partial X}{\partial m_1}\frac{\partial X}{\partial T_1}\sigma_{mT} + \left(\frac{\partial X}{\partial T_1}\right)^2 \sigma_{T_1}^2$$

Or :

$$X = (bm_2 - p)t\,\frac{1 - e^{-i\frac{T_2}{t}}}{i} - I$$

$$\frac{\partial X}{\partial m_1} = tb\,\frac{1 - e^{-iN_1}}{i} \qquad\qquad \frac{\partial X}{\partial T_1} = (bm_1 - p)e^{-iN_1}$$

... / ...

---

(1)* - Les formules exactes sont données dans l'annexe I.

d'où :

$$(64)\quad \sigma_X^2 = b^2t^2\left(\frac{1-e^{-iN_1}}{i}\right)^2 \sigma_m^2 + (bm_1 - p)^2 e^{-2iN_1} \sigma_T^2 + 2bt(bm_1-p)e^{-iN_1}\left(\frac{1-e^{-iN_1}}{i}\right)\sigma_{mT}$$

On assimilera X à une variable normale ayant la variance ainsi calculée et la valeur probable :

$$X_o = (bm_1 - p)t\,\frac{1 - e^{-iN_1}}{i} - I$$

En désignant par G(z) l'intégrale gaussienne habituelle :

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

l'expression (62) se met sous la forme simple :

$$(65)\quad E(B_3) = X_o\, G\left(-\frac{X_o}{\sigma_X}\right) + \frac{\sigma_X}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{X_o^2}{\sigma_X^2}} - R$$

Les tables de la fonction G, qui donnent généralement aussi la valeur de l'exponentielle, permettent un calcul numérique très facile. Si X_o dépasse 3 ou 4 fois l'écart type σ_X, on pourra utiliser les formules asymptotiques données en Annexe II.

3 - c - Cas particulier où la teneur intervient seule

Il arrive parfois que l'erreur sur le tonnage puisse être négligée, et que, par suite, la teneur intervienne seule. Il en est souvent ainsi, en particulier, dans le cas des gisements filoniens.(1)* Les formules du paragraphe précédent se simplifient beaucoup. Si la teneur limite de rentabilité est m_L, et la teneur réelle μ, le bénéfice peut toujours se mettre sous la forme :

$$(66)\quad B = bT(\mu - m_L)$$

(1)* - En réalité, la reconnaissance d'un filon par travaux miniers laisse, presque toujours, ouverte la possibilité d'une extension en aval, mais cette possibilité n'est pas chiffrable. Dans l'étude de la rentabilité de l'exploitation, on ne prend en compte que le tonnage effectivement reconnu. On doit faire la même chose pour l'optimisation de la reconnaissance : on ne retient que le tonnage démontré, et celui-ci est considéré comme certain, ce qui revient à annuler la variance d'estimation σ_T^2

.../...

où T est le tonnage, et b la valeur du point de métal contenu dans une tonne de minerai. Par une application immédiate des relations (48), on trouve :

$$(67) \quad \begin{cases} E(B_1) = 0 \\ E(B_2) = bT(m_1 - m_L) \end{cases}$$

On voit, et c'était bien évident a priori, que si le choix, en C, se limitait aux deux premières décisions, on exploiterait ou on abandonnerait selon que l'estimation m_1 serait supérieure, ou inférieure à la limite d'exploitabilité m_L. Pour calculer $E(B_3)$, on assimile, comme au paragraphe précédent, m_2 à une variable lognormale de valeur moyenne m_1 et de variance $\frac{\sigma^2_m}{m_2^2} = \sigma^2$. On obtient très facilement :

$$(68) \quad E(B_3) = bT\left[m_1\ G(z - \sigma) - m_L\ G(z)\right] - R$$

G étant l'intégrale de Gauss, et z la variable réduite associée à la limite m de rentabilité :

$$z = \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{m_L}{m_1}\right) + \frac{1}{2}\sigma$$

Pour illustrer ces diverses formules, donnons un exemple numérique. Un gisement de Plomb-Zinc a été reconnu à un niveau par travaux miniers, et par des travaux de surface. Le tonnage certain est de 400.000 tonnes. Il y a peut être un aval, mais on n'en tient pas compte. La valeur du Pb, du Zn et de l'Ag. contenus dans une tonne de minerai a été estimée (1)* à 3.000 anciens francs. La teneur limite correspond à 3.000 anciens francs, de sorte que l'on est exactement dans le cas marginal. Compte tenu de l'incertitude des cours futurs, nous ferons cependant les calculs pour trois valeurs différentes de m_L, soient 2.700, 3.000 et 3.300. La teneur moyenne est connue avec un écart-type d'estimation.

$\sigma_{m_1} = 0,15$. Une deuxième campagne de reconnaissance, qui consisterait à tracer un sous-niveau intermédiaire, couterait 40 millions, et donnerait un nouvel (2)* écart-type $\sigma_{m_2} = \frac{1}{2}\sigma_{m_1}$. On en déduit l'écart type σ_m de l'estimation de m_2 à

(1)* Comme il y a plusieurs métaux, il est plus simple de raisonner directement sur les valeurs contenues, et non sur les teneurs.

(2)* On est dans la zone linéaire du variogramme, de sorte que la nouvelle variance est égale au quart de l'ancienne.

... / ...

partir de m_1 :

$$\sigma_m = \sqrt{\sigma_{m_1}^2 - \sigma_{m_2}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma_{m_1} = 0.13$$

Le calcul des espérances (67) et (68) pour les trois limites d'exploitabilité conduit aux résultats numériques suivants (en millions d'anciens francs).

m_L	2.700	3.000	3.300
$E(B_1)$	0	0	0
$E(B_2)$	+ 120	0	- 120
$E(B_3)$	136 - 40 = + 96	56 - 40 = + 16	20 - 40 = - 20

Si la limite est fixée à 2.700 francs, on doit exploiter tout de suite. Si elle est de 3.300, on doit abandonner. Si elle est de 3.000, c'est-à-dire dans le cas exactement marginal, il y a un avantage théoriquement non nul, mais numériquement assez faible (16 millions), à faire une deuxième campagne de reconnaissance. C'est là une circonstance assez générale : c'est dans le cas exactement marginal que les informations apportées par des travaux supplémentaires présentent le maximum d'intérêt. Cet intérêt décroit assez vite dès que l'on s'écarte du cas marginal par excès ou par défaut. Dès que l'on est pratiquement sûr que la teneur réelle est supérieure (ou inférieure) à la limite de rentabilité, on décide d'exploiter (ou de fermer), et le besoin de travaux nouveaux ne se fait nullement sentir.

3 - d - Cas où le tonnage intervient seul.

Dans certains cas, la teneur moyenne peut être considérée comme bien connue, tandis que le tonnage inspire certaines inquiétudes. Il en est souvent ainsi pour les gisements sédimentaires, et aussi pour les gisements dans lesquels la minéralisation payante se présente sous forme de lentilles discontinues, réparties irrégulièrement au sein d'une formation homogène inexploitable par elle-même. En pareil cas, la

... / ...

rentabilité est liée à la démonstration d'un tonnage suffisant pour amortir les investissements.

Avec les mêmes notations, pour les tonnages, qu'en 3 - b, et en désignant par V la valeur de la tonne de minerai, on trouve pour $E(B_2)$:

$$(69) \quad E(B_2) = \frac{1 - e^{-i \frac{T_1}{t} + \frac{i^2}{2} \frac{\sigma_{T_1}^2}{t^2}}}{i} (V - p)t \ - \dot{I}$$

On note que cette espérance est toujours plus petite que si le tonnage était parfaitement connu ($\sigma_{T_1}^2 = 0$). C'est là un effet de l'actualisation. Les chances pour que le tonnage réel soit inférieur ou supérieur à T_1 sont bien égales, mais la perte qui se produit dans le premier cas a lieu dans un avenir moins éloigné que le gain qui apparaît dans le deuxième - et pose donc plus lourd en valeur actualisée. Cet effet est, en réalité, le plus souvent négligeable, le terme $\frac{i^2}{2} \frac{\sigma_{T_1}^2}{t^2}$ étant en général assez petit.

Si l'on adopte la troisième décision, la deuxième campagne donnera un résultat T_2, avec une variance d'estimation $\sigma_{T_2}^2$, et on aura, au point C' :

$$E'(B_2) = \frac{1 - e^{- i \frac{T_2}{t} + \frac{i^2}{2} \frac{\sigma_{T_2}^2}{t^2}}}{i} (V - p)t \ - \dot{I}$$

et, en C', on décidera d'exploiter ou d'abandonner selon que $E'(B_2)$ sera positif ou négatif, c'est-à-dire selon que T_2 sera supérieur ou inférieur au tonnage limite de rentabilité T_L correspondant à $E'(B_2) = 0$:

$$(70) \quad T_L = - \frac{t}{i} \log \left(1 - \frac{i\dot{I}}{(V-p)t} \right) + \frac{i^2}{2} \frac{\sigma_{T_2}^2}{t^2}$$

Ce tonnage (1)* est d'autant plus petit que σ_{T2}^2 est plus petit, c'est-à-dire que la reconnaissance est plus poussée. C'est encore un effet de l'actualisation. En exécutant une deuxième campagne, on abaisse le tonnage limite de la quantité positive :

---

(1)* - Ce tonnage diffère du tonnage limite défini dans la 1ère partie par le terme correctif $\frac{i^2}{2} \frac{\sigma_T^2}{t^2}$; qui traduit l'effet de l'incertitude. Ce terme étant toujours petit, les deux notations du tonnage limite coïncident pratiquement.

$$\frac{i^2}{2}\,\frac{\sigma_{T1}^2 - \sigma_{T2}^2}{t^2} = \frac{i^2}{2}\,\frac{\sigma_T^2}{t^2}$$

Au point C, T_2 est assimilé à une variable normale, de valeur probable égale à T_1, et de variance $\sigma_T^2 = \sigma_{T_1}^2 - \sigma_{T_2}^2$. L'exponentielle $e^{-i\frac{T_2}{t}}$ étant une variable lognormale, l'expression (63) se calcule explicitement, en intégrant, sur les tonnages, de T_o à l'infini. On obtient :

$$(71)\quad E(B_3)= \frac{(V-p)t}{i} - I \quad G\left(\frac{T_L - T_1}{\sigma_T}\right) - \frac{(V-p)t}{i}\, e^{-i\frac{T_1}{t} + \frac{i^2}{2}\frac{\sigma_T^2}{t^2}}\, G\left(\frac{T_1 - T_L}{i\sigma_T} - \frac{i\sigma_T}{t}\right) - R$$

Cette équation, où G est l'intégrale de Gauss, permet un calcul numérique facile.

4/- L'Optimisation séquentielle dans le cas d'une relation Tonnage-Teneur.

Dans le cas où la relation tonnage-teneur intervient effectivement, le problème de l'optimisation séquentielle devient à peu près inextricable si l'on cherche à le formuler de façon rigoureuse. Par contre, si, au point crucial C, on néglige les incidences d'un mauvais choix de la teneur de coupure x et de la cadence t, ce qui est légitime en première approximation, on retombe sur les équations du cas tout ou rien. En effet, en C, les résultats de la première campagne donnent une estimation $T_1(x)$ de la relation tonnage-teneur. Cette relation permet d'élaborer un avant projet sommaire d'exploitation, comportant une coupure x_1, un tonnage T_1 et une teneur m_1. Adoptons, conformément à la prudence, le point de vue d'une exploitation rigide. Le tonnage T_1 est délimité sur plan. Son périmètre est connu. Il n'y a pas d'effet de bordure, et T_1 ne diffère du tonnage qui serait réellement exploité, lors de l'exécution du projet, que par un terme de variance $\sigma_{T_1}^2$ représentant, par exemple, l'erreur sur l'estimation d'une puissance moyenne (effet de bordure exclu). De même m_1 représente la teneur réelle

.../...

du périmètre choisi avec une variance $\sigma^2_{m_1}$, que l'on sait calculer.

A l'issue de la deuxième phase, on aura une nouvelle estimation $T_2(x)$ de la relation tonnage-teneur, à l'aide de laquelle on élaborera un nouveau projet (x_2, T_2, m_2), comportant, en général, pour le tonnage retenu T_2, le choix d'un périmètre légèrement différent du premier. Mais cette différence est, en première approximation, sans incidence sur les nouvelles variances d'estimation $\sigma^2_{T_2}$ et $\sigma^2_{m_2}$, qui peuvent se calculer comme si les deux périmètres coïncidaient. Le raisonnement se poursuit exactement comme dans le cas tout ou rien. En C, T_2 et m_2 sont inconnues, mais peuvent être traitées comme des variables aléatoires vérifiant les relations (53), et les diverses espérances se calculent exactement comme au paragraphe 3 - b. De plus, l'effet de bordure étant exclu, il arrivera souvent que l'erreur résiduelle sur le tonnage soit faible, et que les variances d'estimation σ^2_T puissent être négligées. On est alors ramené au cas très simple où la teneur intervient seule, et l'on peut utiliser les résultats du paragraphe 3 - c.

CHAPITRE IV

IV.- EXEMPLE D'APPLICATION ISSU D'UN PROJET REEL D'EXPLOITATION.

Nous nous proposons d'illustrer par un exemple numérique les différents points mis en évidence dans les trois premières parties. Les caractéristiques du gisement et de son exploitation nous ont été suggérées par un projet réel d'exploitation, dont les données ont été modifiées pour des raisons de discrétion.

Disons seulement qu'il s'agit d'un gisement que l'on a décidé de prendre en carrière. Une importante quantité de stérile de couverture est à prendre en même temps - ou à peu près - que le minerai. Le matériel de carrière est loué à une entreprise, d'où il résulte que les dépenses d'excavation sont à peu près proportionnelles à la quantité de minerai et de stérile manipulés. D'autre part, les divers projets d'exploitation montrent que le rapport du stérile au minerai reste à peu près constant.

L'exploitation du gisement exige, en outre, la création assez onéreuse d'un atelier de concentration. Il faut ajouter, de plus, quelques investissements assez minces. On admettra que le cube des investissements croît comme le carré de la cadence annuelle d'exploitation : c'est là une loi assez communément adoptée et qui a déjà été mentionnée au début de cette étude. La gestion de l'atelier de concentration révèle des frais proportionnels (au tonnage traité) et des frais fixes annuels.

Ceci posé, nous respecterons les notations des trois premières parties, sans guère nous étendre de nouveau sur leur définition.

L'exercice proposé, d'un point de vue théorique revient à l'étude d'une fonction de bénéfice de la forme :

$$B = (V - p)t \frac{1 - e^{-iN}}{i} - \dot{I} \qquad \text{où} \quad N = \frac{T}{t}$$

et V une fonction de T par l'intermédiaire de m, et éventuellement d'une autre fonction explicite de T. $\frac{dV}{dT}$ désigne la dérivée totale par rapport à T :

$$\frac{dV}{dT} = \frac{\partial V}{\partial m}\frac{dm}{dT} + \frac{\partial V}{\partial T}$$

p et $\dot{I}$ sont des fonctions de t seulement.

... ...

1)- Estimation des paramètres.

1°/ Données relevant à la fois de la géologie et de la technique d'exploitation.

L'analyse de trois projets d'exploitation de la carrière, correspondant à divers périmètres d'étendues différentes permet d'ajuster une loi de Lasky représentant la teneur moyenne d'exploitation en fonction du tonnage de minerai relatif au périmètre retenu.

Les trois projets relatifs aux extensions respectives de 320.000 tonnes, 530.000 tonnes, 770.000 tonnes, révèlent des teneurs moyennes de 1,46 %, 1,15 %, 0,87 %. Ces trois projets s'alignent convenablement sur la droite de Lasky :

$$m = \alpha - \beta \log T \quad ^{(1)*} \qquad \text{avec} \quad \alpha = 5{,}36, \quad \beta = 0{,}674$$

les tonnages étant exprimés en milliers de tonnes, les teneurs en %.

On note que la loi de la teneur de coupure se déduit de la loi de m par la translation $-\beta$, comme il a été exposé plus haut.

$$x = m - 0{,}674.$$

2°/ Valorisation du produit recélé.

Il a été précisé au 1°/ que les tonnages seraient exprimés en milliers de tonnes, les sommes d'argent dans ce qui suit le seront en milliers de N.F.

Le métal récupéré est vendu 9,45 NF le kilo. Cependant, l'atelier de concentration ne permet pas de sauvegarder la totalité du métal contenu, le rendement escompté est :

9(m - 0,10) Kg de métal par tonne de minerai.

... / ...

La valeur contenue dans une tonne de minerai est, par suite, :

$$9{,}45(9m - 0{,}9) = 85\ m - 8{,}5$$

Le terme désigné plus haut par b est ici égal à 85, quant au terme 8,5 indépendant de la teneur, nous allons l'englober dans les dépenses directes.

3°/ Dépense à la tonne.

Elle est décomposée :

- en dépenses directes à la tonne : a_o

comprenant : le coût d'extraction d'une tonne de minerai : 4,00 NF

: le coût d'extraction de 4,376 ~~tonnes~~ de stérile pour 1 t. de minerai à 2,5 NF la t. : 10,94 NF

les frais directs de l'atelier de concentration : 11,20 NF

enfin, le terme soustractif de la valeur contenue : 8,50 NF

a_o = 34,64 NF

- en frais fixes à la tonne .... : $\frac{a_1}{t}$

a_1 représente principalement les charges fixes annuelles de l'atelier de concentration. :

$$a_1 = 580$$

4°/ Investissements.

Ils correspondent essentiellement au coût de construction de l'atelier de concentration : l'expérience nous a indiqué qu'ils pouvaient être représentés par :

$$I = 617\ t^{2/3}$$ (617 est le terme C_1 indiqué plus haut)

.../...

En résumé, la teneur moyenne est donnée par :

$$m = 5{,}36 - 0{,}674 \log T$$

et la fonction de bénéfice :

$$B = (85\, m - 34{,}64 - \frac{580}{t})t\, \frac{1 - e^{-iN}}{i} - 617\, t^{2/3}$$

2)- Les équations de l'optimum

2-a - Les équations de l'optimum.- Optimisation des bénéfices actualisés et non-actualisés.

L'optimum est obtenu par le couple (T,t) qui annule les équations aux dérivées partielles de B par rapport à T et par rapport à t. La présente étude a exposé (cf. Chapitre I.2.c.) les raisons pour lesquelles l'optimum devait être recherché à taux d'actualisation nul (c'est-à- dire en faisant i = o dans les équations aux dérivées partielles). Nous allons cependant, ici, afin de pouvoir juger des ordres de grandeur et des différences entre deux conceptions, chercher l'optimum selon les deux méthodes :

- en rendant maximum l'expression du bénéfice, actualisé au taux i= 0,0
- " " " " " " non actualisé (i = 0).

Nous allons donner, avant de particulariser les fonctions et les constantes numériques, les équations générales de l'optimum à taux i non nul :

$$B'_T = e^{-iN} (V - p) + \frac{1 - e^{-iN}}{i}\, t\, \frac{dV}{dT} = 0$$

$$B'_t = \frac{1 - e^{-iN} - iNe^{-iN}}{i} (V - p) - t\, \frac{1 - e^{-iN}}{i}\, \frac{dp}{dt} - \frac{dI}{dt} = 0$$

... / ...

Ces équations peuvent s'écrire, en introduisant dans la première l'expression de la teneur de coupure x, et en remplaçant la seconde par une combinaison linéaire des deux équations :

$$i \neq 0 \begin{cases} x = \frac{p}{b} + \frac{e^{iN} - 1 - iN}{iN}(m - x) \\ \frac{1 - e^{-iN}}{i}\left(\frac{e^{iN} - 1 - iN}{iN}\, T\,\frac{dV}{dT} + t\,\frac{dp}{dt}\right) + \frac{d\dot{I}}{dt} = 0 \end{cases}$$

La première équation suppose toutefois que <u>V est proportionnel à m</u>. : V = bm.

Pour <u>i = 0</u>, le système se réduit à :

$$i = 0 \begin{cases} x = \frac{p}{b} \\ T\,\frac{dp}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0 \end{cases}$$

On retrouve le système maintes fois utilisé dans les premières parties de l'étude en particularisant les fonctions V(T), p(t) et I(t), selon les formules retenues pour l'exemple envisagé et en attribuant aux paramètres les valeurs numériques indiquées, on obtient les systèmes d'équations, en notant que la teneur de coupure x est une fonction de T définie par la Loi de Lasky :

$$x = m - \beta = \alpha - \beta - \beta \log T$$

$$i \neq 0 \begin{cases} T \log T + \left(\frac{e^{0,08\,N} - 1}{0,08\,N} - 7,3479\right)T + 10,1239\,N = 0 \\ \frac{e^{0,08\,N} - 1 - 0,08N}{0,08N}\,T - 0,5744\,\frac{N^{1/3}}{1 - e^{-0,08N}}\,T^{2/3} + 10,1239\,N = 0 \end{cases}$$

Pour i = 0 le système d'équation se réduit à :

$$i = 0 \begin{cases} \log T + 8,2376\,T^{-0,6} - 6,3479 = 0 \\ t = 1,2289\,T^{0,6} \end{cases}$$

La seconde équation associe à chaque ampleur T du périmètre d'exploitation la cadence annuelle appropriée t.

.../...

Le système des équations de l'optimum, dans le cas général : i non nul, se résoud par itérations. On se donne une valeur de N, à laquelle la deuxième équation associe une valeur de T, que l'on porte dans la première équation, dont on déduit une nouvelle valeur de N. Cette nouvelle valeur est portée dans la deuxième équation qui donne une nouvelle valeur de T et ainsi de suite ... Au bout d'un petit nombre d'itérations on obtient pour T et N des limites qui sont les racines du système, c'est-à-dire les caractéristiques de l'optimum.

La résolution du système dans le cas i = 0 est plus élémentaire, car les variables T et t sont séparées.

Le tableau suivant présente les résultats dans chacune des deux hypothèses :

- optimum défini sans actualisation,
- optimum défini avec actualisation (i = 8%).

		Optimum défini sans actualisation	Optimum défini avec actualisation (i = 8%)
	Ampleur du périmètre T	464,6	385,1
	Cadence annuelle d'exploitation t	49,0	71,1
	Nombre d'années d'exploitation $N = \frac{T}{t}$:	9,49	5,42
	Teneur de coupure observée x	0,547 %	0,673 %
	Teneur moyenne du gisement retenu m ..	1,221 %	1,347 %
	Importance des Investissements I	8.256	10.586
	Valeur du Bénéfice global non actualisé	18.361	17.025
	" " " " actualisé(i = 8%)	10.394	11.818
non actualisées	Dépenses totales d'exploitation (1)*	17.646	13.209
non actualisées	Dépenses totales y compris investissement	25.902	23.795
non actualisées	Tonnage de métal récupéré ..(tonnes).....	4.687	4.322
non actualisées	Dépense au kilo de métal (NF)	5,526	5,506

(1)* On a déduit de p le terme de rendement qui y avait été inclus au § I, 3°

Les paramètres techniques obtenus par optimisation du bénéfice actualisé conduisent à écrémer le gisement, à grossir les investissements et à réduire les dépenses globales d'exploitation.- La vie de l'exploitation est réduite pratiquement de moitié.

On pourrait être surpris de ce que le prix de revient (dépenses d'exploitation non-actualisées et augmentées des investissements, l'ensemble étant réparti sur la production de métal) soit à peu près identique dans l'une et l'autre options. On se serait plutôt attendu à un meilleur prix de revient pour l'optimum obtenu sans actualisation.

Ce fait n'a, en réalité, rien d'étonnant car le critère d'optimisation du bénéfice non-actualisé n'est pas identique à un critère d'optimisation du prix de revient. Voyons succinctement ce que donnerait le critère d'optimisation du prix de revient appliqué à notre gisement et à quel gachis il mènerait.

b) - Digression sur l'optimisation du prix de revient.

Pour éviter la confusion des notations, on désigne par : p^* le prix de revient p déduction faite du terme de rendement qui y avait été inclus au § 1, 3°.

Le prix de revient au kilo de métal s'écrit :

$$\rho = \frac{p^*T + \mathring{I}}{9(m-0{,}1)T} = \frac{p^*}{9(m-0{,}1)} + \frac{\mathring{I}}{9(m-0{,}1)T}$$

Les paramètres techniques t et T de l'exploitation sont obtenus en annulant les dérivées partielles ρ'_t et ρ'_T

L'équation $\rho'_t = 0$ adapte la cadence d'exploitation t au périmètre T :

$$T\frac{dp^*}{dt} + \frac{d\mathring{I}}{dt} = 0$$

cette équation est identique à l'équation d'adaptation de la cadence au tonnage

/... / ...

qui a été obtenuedans l'optique de maximisation du bénéfice non actualisé.

L'équation $\rho_T^{\prime}$, par contre, où l'on peut introduire comme plus haut la teneur de coupure x, conduit à une expression différente de celle-ci :

$$x - 0{,}1 = \frac{p^{*}T}{\dot{I}}\,(m - x)$$

Le système des deux équations devient, avec les fonctions et les valeurs numériques adoptées pour p^{*} et $\dot{I}$:

$$\begin{cases} T = 0{,}7092\ t^{5/3} \\ t + 55{,}44 \log t - 215{,}61 = 0 \end{cases}$$

qui définissent la cadence d'exploitation annuelle $t = 29{,}0$, puis l'ampleur du périmètre $T = 194{,}1$, puis la teneur de coupure : $x = 1{,}136$ %.

Obéir au critère d'optimisation du prix de revient nous amènerait à un écrémage éhonté du gisement et à une exploitation anarchique dont les caractéristiques seraient les suivantes :

Ampleur du périmètre T		194,1
Cadence annuelle d'exploitation t		29,0
Nombre d'années d'exploitation $N = \frac{T}{t}$		6,69
Teneur de coupure observée x		1,136 %
Teneur moyenne du gisement retenu m		1,810 %
Importance des Investissements $\dot{I}$		5.824
Valeur du Bénéfice global non actualisé		13.447
" " " " actualisé (i = 8%)		9.081
non actualisées	Dépenses totales d'exploitation	8.956
	" " y compris investissement	14.780
	Tonnage de métal récupéré (tonnes)	2.987
	Dépense au kilo de métal (NF)	4,948

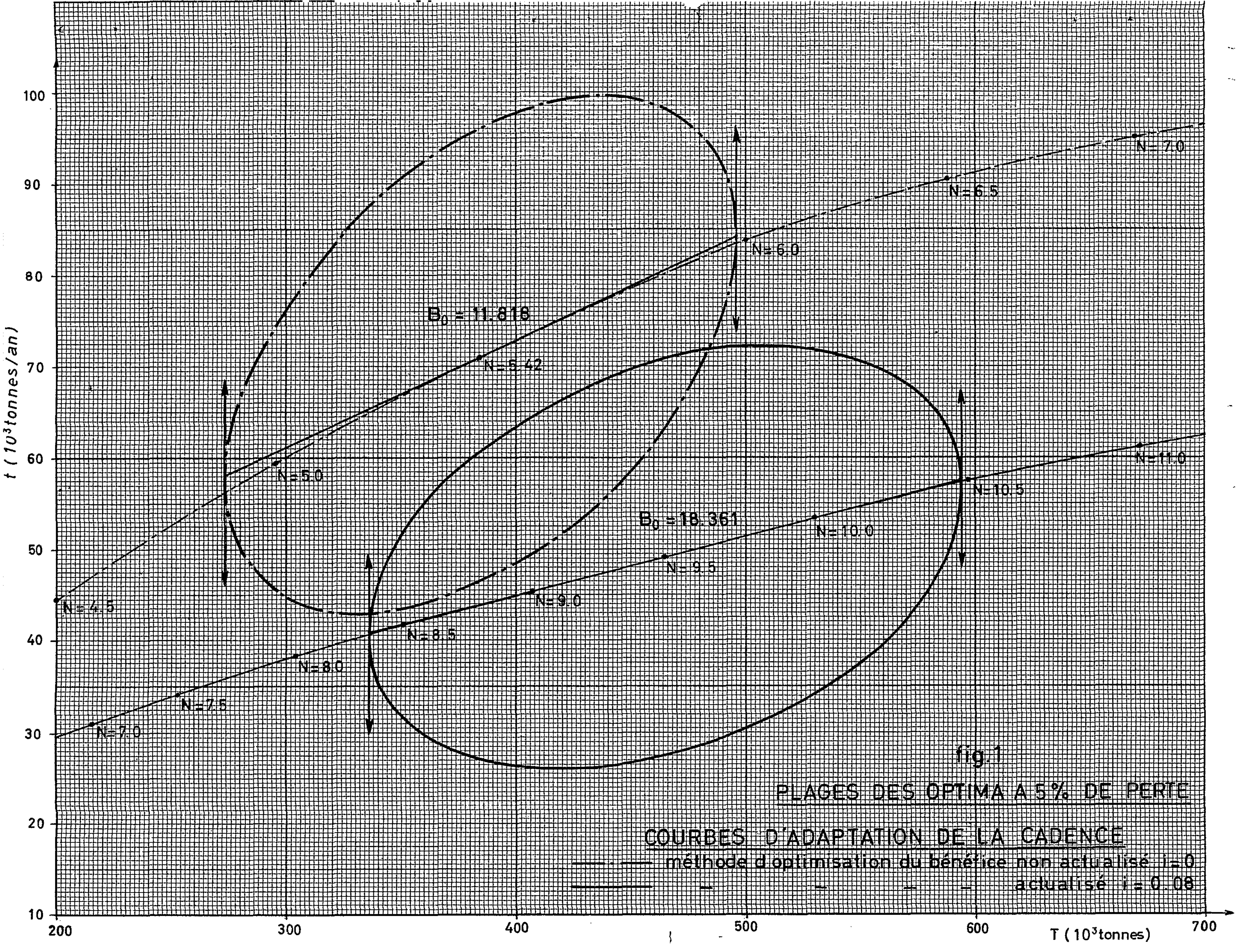


fig.1

PLAGES DES OPTIMA A 5% DE PERTE

III.- Comportement du Bénéfice au voisinage de l'optimum. Cadence adaptée.

Nous poursuivons encore en ce paragraphe la comparaison détaillée des deux procédés d'optimisation technique, avec ou sans actualisation. Notre choix entre les deux méthodes est déjà fait - pour des raisons théoriques. Nous continuerons, toutefois, l'analyse afin de faire ressortir le comportement des caractéristiques dans deux options radicalement différentes.

3 - a - Plages autour des optima.

On peut se demander si l'optimum s'apparente à un sommet escarpé ou à une croupe arrondie - autrement dit quelle serait la conséquence sur le bénéfice d'une modification des caractéristiques autour de l'optimum ? On ne pourra pas, en général, respecter exactement l'optimum défini, car les divers projets d'exploitation possibles forment une suite discrète entre les termes de laquelle on ne pourra pas toujours s'arrêter. La sensibilité de la fonction de bénéfice autour de ses maxima est figurée simplement par la construction des courbes ellipses sur lesquelles la perte, petite, de bénéfice reste constante.

On a porté sur le diagramme joint, en coordonnées T et t les ellipses correspondant à une perte de 5 % sur chacun des deux optima. (cf. Figure 1)

La détermination de ces plages exige la connaissance de la différentielle seconde du bénéfice aux points optima. Nous donnson les expressions des dérivées partielles secondes, à l'optimum, dans chacune des deux options :

.../...

<u>i différent de zéro.</u> <u>pour i = 0</u>

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
B''_{T^2} = \dfrac{1-e^{-iN}}{iN}\, T\, \dfrac{d^2V}{dT^2} + (1+e^{-iN})\, \dfrac{dV}{dT} & = T\, \dfrac{d^2V}{dT^2} + \dfrac{2dV}{dT} \\[2ex]
B''_{Tt} = \dfrac{1-e^{-iN}-iN}{i}\, \dfrac{dV}{dT} - e^{-iN}\, \dfrac{dp}{dt} & = -\dfrac{dp}{dt} \\[2ex]
B''_{t^2} = N^2(1-e^{-iN})\, \dfrac{dV}{dT} + 2\, Ne^{-iN}\, \dfrac{dp}{dt} - \dfrac{1-e^{-iN}}{i}\, \dfrac{d^2(pt)}{dt^2} - \dfrac{d^2I}{dt^2} & = -T\, \dfrac{d^2p}{dt^2} - \dfrac{d^2I}{dt^2}
\end{array}
\right.
$$

formules qui donnent d'après les données numériques retenues :

<u>i différent de zéro</u> <u>pour i = 0</u>

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
B''_{T^2} = -0{,}1245 & = -0{,}1233 \\[1ex]
B''_{Tt} = +0{,}2264 & = +0{,}2420 \\[1ex]
B''_{t^2} = -1{,}8774 & = -3{,}8284
\end{array}
\right.
$$

3 - b - Adaptation de la cadence d'exploitation au périmètre retenu.

S'il est difficile de choisir exactement pour périmètre, le périmètre correspondant à l'optimum de T, il est généralement plus aisé d'adapter convenablement la cadence d'extraction, ainsi que la capacité de l'atelier de traitement t au tonnage retenu.

La relation, qui lie T et t adapté à T, est donnée par l'annulation de la dérivée partielle du bénéfice par rapport à t.

... / ...

Dans le cas où l'optimisation des paramètres techniques est réalisée à taux d'actualisation nul, cette relation est très simple et prend, avec les fonctions envisagées la forme déjà signalée :

$$t = 1{,}2289\ T^{0{,}6}$$

Si les paramètres techniques étaient obtenus par optimisation du bénéfice actualisé, la loi qui lie T et t se traduit par la relation moins aisée entre N et T, dont la forme numérique est d'après les lois envisagées :

$$\frac{e^{0{,}08N} - 1 - 0{,}08N}{0{,}08}\ T \log T - 7{,}3479\ \frac{e^{0{,}08N} - 1 - 0{,}08N}{0{,}08}\ T + 7{,}1798\ N^{1/3}\ e^{0{,}08N}\ T^{2/3} - 10{,}1239\ N^{2} =$$

Les deux courbes d'adaptation sont portées sur le graphique, elles passent évidemment par les optima et leurs tangentes en ces points ne sont autres que le diamètre conjugué des cordes de l'ellipse parallèles à l'axe des t. Cette propriété évidente analytiquement se conçoit aisément : la direction de la tangente à la courbe d'adaptation est telle que, à perte de bénéfice constante, le tonnage retenu pour le périmètre de carrière soit le plus éloigné du tonnage optimum. On peut aussi dire d'un point de vue à peine différent que la direction de la tangente est telle que la perte soit la plus petite pour un écart donné du tonnage avec le tonnage optimum. Ces deux façons de voir font apparaître les points à tangentes parallèles à l'axe des t, dans le système d'ellipses. (cf. Figure 1).

IV.- Courbe d'exploitabilité

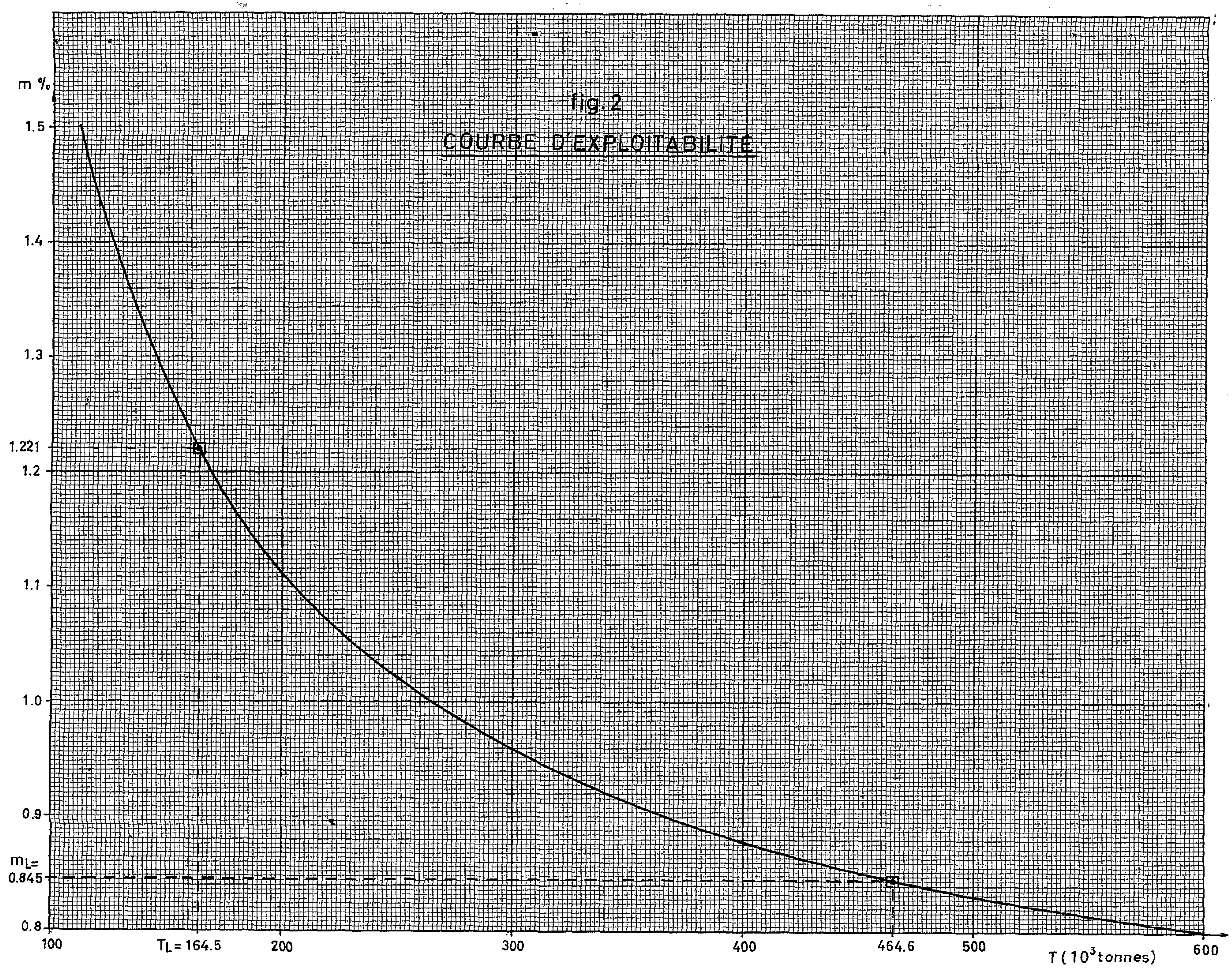
Ayant semble-t-il suffisamment poussé la comparaison entre les deux points de vue d'optimisation du bénéfice, nous considérerons dans tout ce qui suit que les caractéristiques de l'optimum technique sont obtenues par maximisation du bénéfice non actualisé.

Dès lors, nous retiendrons une cadence d'exploitation de 49.000 tonnes par an, à laquelle correspond une dépense à la tonne p = 46,48 NF (charges directes augmentées

... / ...

fig. 2

COURBE D'EXPLOITABILITE



des frais indirects à la tonne), et une masse d'investissements de 8.246.000 NF. Par ailleurs, le périmètre optimum correspond à un tonnage de 464.600 tonnes à une teneur moyenne de 1,221 %, et devrait être exploité en $N = 9{,}49$ années.

La cadence annuelle d'exploitation étant choisie, c'est-à-dire les dépenses et les investissements étant bien définis, la courbe d'exploitabilité met en évidence les couples : tonnage de la carrière - teneur moyenne susceptibles d'annuler le bénéfice actualisé. Cette courbe est représentée par l'équation : (cf. Chap. I, (3) équation 25).

$$\left[V(m) - p(t) \right] t \ \frac{1-e^{-i\bar{N}}}{i} \quad - \mathring{I}(t) = 0$$

soit ici :

$$(52.063\ m \ - \ 28.469)\ (1 - e^{-0{,}00163\,T}) - 8.256 = 0$$

Deux valeurs remarquables sont données par cette équation :

- <u>la teneur d'exploitabilité</u> m_L obtenue pour la valeur optimum du tonnage $T = 464{,}6$ c'est-à-dire $m_L = 0{,}845$ %

- <u>le tonnage limite d'exploitabilité</u> T_L obtenu pour la teneur moyenne du périmètre optimum $m = 1{,}221$ %. Soit : $T_L = 164{,}5$

La courbe de rentabilité est tracée sur un graphique joint (Voir Figure 2)

V.- <u>Reconnaissance optimale en vue de définir correctement les paramètres techniques - - tonnage et cadence de l'exploitation.</u>

On se reportera au Chapitre II, dont la démarche et les conclusions s'appliquent sans modifications au cas de notre carrière. Nous nous trouvons devant un type <u>d'exploitation rigide</u>, où le périmètre est défini à l'avance, l'effet de bordure est négligeable, l'erreur sur le tonnage est presque exclusivement due à l'erreur sur la puissance moyenne de la formation minéralisée, qui se traduit par la variance désignée dans le Chapitre II par σ^2_τ.

Ayant décidé que la carrière devait être reconnue par sondages, on souhaiterait savoir , a priori, l'ordre de grandeur du nombre de sondages à implanter.

En effet, une reconnaissance trop approximative conduit inévitablement à définir de façon défectueuse le périmètre d'exploitation optimum, et à se tromper, en outre, sur la quantité réelle de minerai qu'il recèle. Ces deux déterminations erronées se traduisent, par ailleurs, en une adaptation imparfaite de la cadence d'exploitation. Il est bien évident, par contre, qu'il n'y a pas à développer, outre mesure, une reconnaissance onéreuse. Un compromis doit être trouvé entre la perte inévitable consécutive à une reconnaissance limitée et le coût des travaux.

Il faut reconnaître, que les caractéristiques de l'exploitation et les paramètres géostatistiques ne peuvent être appréciés que par un minimum de reconnaissance préalable. La détermination, au moyen des indications données par les sondages préalables, du nombre optimum de sondages à forer, doit permettre d'indiquer si la reconnaissance préalable est déjà suffisante au point où elle est parvenue et s'il y a lieu d'arrêter les travaux, ou de poursuivre et de rectifier le projet d'exploitation à la lumière des nouvelles données.

Ceci posé, une campagne de reconnaissance restreinte nous a permis d'établir les expressions approximatives des variances d'estimation σ^2_μ de la teneur moyenne et σ^2_τ du tonnage (effet de bordure exclu), en fonction du nombre n de sondages.

$$\sigma^2_\mu = \frac{0{,}08}{n}\,(6 - \ln) \qquad\qquad \sigma^2_\tau = \frac{12.000}{n}\,(6 - \ln)$$

Ces expressions permettent le calcul de la perte, dont l'expression est établie au paragraphe 3 -a - du Chapitre II. Le coût des travaux associés à cette perte est, si un sondage revient à 4.250 NF :

$$R = 4{,}25\ n.$$

... / ...

La formule (35) donne l'expression de la perte probable :

$$(35) \quad P = -\frac{1}{2}\,\frac{-\,bp'^2\,\frac{dx}{dT}\,\sigma_{\tau}^2 + 2\,bp'^2\,\sigma_{\tau\xi} + b^2(I'' + p''T)\,\sigma_{\xi}^2}{p'^2 + b\,\frac{dx}{dT}\,(I'' + p''T)}$$

dans laquelle s'introduisent les dérivées partielles secondes calculées au paragraphe 3 - optimisation du bénéfice non-actualisé :

$$P = \frac{1}{2}\,\frac{-\,B''_{T2}(B''_{Tt})^2\,\sigma_{\tau}^2 + 2b(B''_{Tt})^2\,\sigma_{\tau\xi} - b^2 B''_{t2}\,\sigma_{\xi}^2}{B''_{T2}\,B''_{t2} - (B''_{Tt})^2}$$

σ_{τ}^2 est connu, σ_{ξ}^2 est estimé d'après les formules (38) et (39) au moyen de σ_{μ}^2, α, β, - $\sigma_{\tau\xi}$ est négligé, ce qui est admissible d'après la formule (40) si les estimations de la teneur moyenne et du tonnage sont à peu près indépendantes, ce qui est le cas ici :

$$B''_{T2} = -\,0{,}1233 \qquad B''_{Tt} = 0{,}2420 \qquad B''_{t2} = -\,3{,}8284$$

$$\sigma_{\tau\xi} = 0 \qquad \sigma_{\xi}^2 = (1 - Te^{1-\frac{\alpha}{\beta}})\,\sigma_{\mu}^2 = 0{,}555\,\sigma_{\mu}^2$$

d'où :

$$P = 0{,}008731\,\sigma_{\tau}^2 + 18.564\,\sigma_{\mu}^2$$

et en fonction du nombre n de sondages :

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{12.000}{n}\,(6 - \log n) \qquad \sigma_{\mu}^2 = \frac{0{,}08}{n}\,(6 - \log n)$$

$$P = 1590\,\frac{6 - \log n}{n}$$

Le nombre le meilleur de sondages, du moins pour ce qui est de définir correctement les paramètres techniques, minimise la valeur probable de

.../...

la perte, accrue du coût des travaux supplémentaires :

$$P + R = 1.590 \frac{6 - \log n}{n} + 4{,}25\, n$$

c'est-à-dire, annule l'équation dérivée :

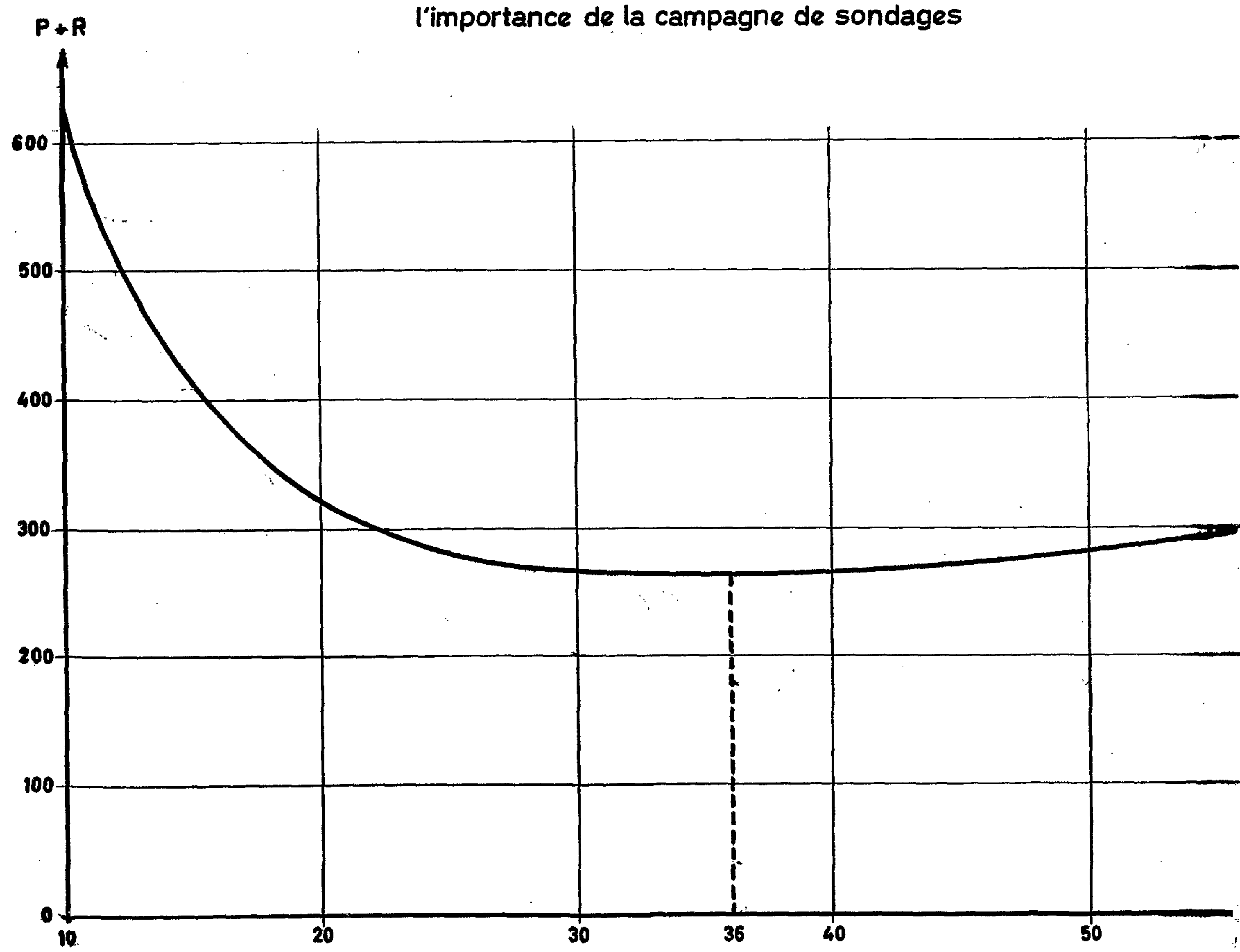
$$n^2 - 374\,(7 - \log n) = 0$$

On trouve que le volume optimum de sondages est de 36.

La courbe ci-dessous présente les variations de la fonction P + R, perte probable, augmentée du coût des recherches correspondantes, en fonction de l'importance n de la campagne. Elle montre, en particulier, par sa dissymétrie, que, dans le doute, il vaut mieux reconnaître plutôt davantage que trop peu.

Figure 3

Perte probable accrue du coût de la reconnaissance correspondante selon l'importance de la campagne de sondages



VI.- OPTIMISATION SEQUENTIELLE ET PROBLEME DE L'ARRET DES RECHERCHES.

Cette dernière question ne se propose plus de déterminer de façon suffisamment adéquate les caractéristiques techniques de l'exploitation, mais s'intéresse aux travaux de reconnaissance en tant que ceux-ci peuvent prémunir contre une ruine éventuelle.

Nous nous trouvons au point C, à l'issue d'une première tranche de sondages de reconnaissance : 28 sondages ont été forés, se répartissant selon une maille carrée de 30 mètres de côté. Du point de vue du risque de ruine, y-a-t-il lieu de s'en tenir là et d'exploiter ? ou bien est-il préférable d'effectuer une seconde tranche de reconnaissance, en centrant la maille et en précisant certaines zones ambigües, ce qui conduirait à forer 32 sondages supplémentaires, soit un total de 60 sondages ? Il est à peine besoin d'indiquer qu'il ne saurait être question de renoncer à l'exploitation à l'issue de la première tranche de reconnaissance, l'espérance de bénéfice :

$E(B_2) = 10.394$ étant franchement positive.

il s'agit plutôt de savoir si la deuxième tranche de reconnaissance est susceptible d'améliorer encore cette espérance de bénéfice, déduction faite du coût de la deuxième tranche de reconnaissance : $E(B_3)$ désigne cette nouvelle espérance.

On peut appliquer textuellement les raisonnements et conclusions du Chapitre III : la carrière est un gisement où intervient une relation tonnage teneur,[(1)*] dont l'étude peut être rattachée approximativement à celle d'un gisement du type "tout ou rien", dans le cas général où jouent simultanément les variations du tonnage et de la teneur. (cf.Chap.III, § 3, 3b).

Le problème est résolu par les formules (61), (64) et (65) du paragraphe 3-b-.

Les divers termes sont calculés au moyen des paramètres techniques correspondant à l'optimum, défini sans actualisation ; nous les rappelons :

... / ...

(1)* Chap.III, § 4)

$b = 85$; $m = 1,221$ %

$t = 49,0$ $p = 46,48$

$N = 9,49$

Quant aux variances d'estimation introduites dans la formule (64), elles représentent l'amenuisement des variances d'estimation entre la fin de la première tranche et la fin de la seconde tranche - correspondant respectivement à $n = 28$ et $n = 60$ sondages.

$$\sigma_m^2 = \frac{0,08}{28}(6 - \log 28) - \frac{0,08}{60}(6 - \log 60) = 0,0076 - 0,0025 = 0,0051$$

$$\sigma_T^2 = \frac{12.000}{28}(6 - \log 28) - \frac{12.000}{60}(6 - \log 60) = 1.143 - 381 = 762$$

D'où :

$E(B_2) = X_o = 10.394$ d'après la formule (61).

$$\sigma_X^2 = b^2\, t^2 \left(\frac{1 - e^{-iN}}{i}\right)^2 \sigma_m^2 + (bm - p)^2\, e^{-2iN}\, \sigma_T^2 \quad \text{(Formule 64)}$$

$$\sigma_X^2 = 767.000.000\, \sigma_m^2 + 719\, \sigma_T^2$$

$$\sigma_X^2 = 3.912.000 + 548.000 = 4.460.000 \quad \text{D'où } \sigma_X = 2.110$$

L'essentiel de la variance est dû à la variabilité de la teneur moyenne - il était à peu près évident de prime abord que la variabilité de la puissance moyenne interviendrait peu et il eût été acceptable de traiter cette dernière partie comme si la teneur intervenait seule (cf. Chapitre III, § 3, 3-c).

Le rapport de la valeur centrale X_o à l'écart-type σ_X est grand :

$$z = \frac{X_o}{\sigma_X} = \frac{10.394}{2.110} = 4,92$$

... / ...

et on peut substituer à la formule (65) donnant $E(B_3)$ un développement asymptotique(L donné en annexe et dont le premier terme est :

$$E(B_3) = E(B_2)\left[1 + \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z^3\sqrt{2\pi}}\right] - R$$

Le coût de la tranche supplémentaire de reconnaissance est :

$$R = 32 \times 4,25 = 136$$

D'où :

$$E(B_3) = 10.394 + 0,0002 - 136$$

Le bénéfice $E(B_3)$ que l'on peut espérer réaliser après avoir fait la deuxième tranche de reconnaissance est inférieur, au bénéfice $E(B_2)$ au point C, de la totalité du coût des travaux supplémentaires, à une somme infime près : 0,20 NF !

On en conclut que, dans la ligne de conduite à tenir vis-à-vis du risque de ruine, il n'y a certainement pas lieu de faire la seconde tranche de reconnaissance.

Une conclusion qui nous semble intéressante et assez inattendue apparaît c'est ici la détermination correcte des paramètres techniques et non la crainte de ruine qui régit la densité de la reconnaissance à qui elle impose une valeur assez élevée.

ANNEXE

Formules asymptotiques

Dans l'expression générale (65), ou dans les expressions particulières (68) et (71) figurent des intégrales de Gauss G(u), où l'argument u est une variable réduite. Si l'on est voisin du cas marginal, u est petit, en valeur absolue, et il faut utiliser effectivement les tables de la fonction G. Mais si l'on est franchement supra ou infra marginal, on peut utiliser la formule asymptotique :

$$
(K) \quad \begin{cases} G(u) = \dfrac{1}{u\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}u^2} \left[1 - \dfrac{1}{u^2} + \dfrac{1.3}{u^4} - \dfrac{1.3.5.}{u^6} + \dots \right] & \text{pour } u > 0 \\[2ex] G(u) = 1 - G(u) & \text{pour } u < 0 \end{cases}
$$

Ces formules sont utilisables, en pratique, dès que $|u|$ est supérieur à 3 ou 4.

Par exemple, si X_o est plus grand que σ_X, la formule (65) peut s'écrire :

$$
(L) \quad \begin{cases} E(B_3) = \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{X_o^2}{\sigma_X^2}} \left[\dfrac{\sigma_X^2}{X_o^2} - 1.3 \left(\dfrac{\sigma_X}{X_o}\right)^4 + \dots \right] - R & X_o < 0 \\[2ex] E(B_3) = X_o + \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{X_o^2}{\sigma_X^2}} \left[\dfrac{\sigma_X^2}{X_o^2} - 1.3 \left(\dfrac{\sigma_X}{X_o}\right)^4 + \dots \right] - R & \text{pour } X_o > 0 \end{cases}
$$

La décroissance très rapide de l'exponentielle permet de voir que, dès que l'on s'écarte de quelques écarts types du cas marginal, les travaux supplémentaires ne présentent pratiquement plus aucun intérêt économique.