ECOLE DES MINES DE PARIS
CENTRE DE MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE FONTAINEBLEAU
N-144

PROPOSITION POUR LA FIXATION D'UNE MAILLE DE RECONNAISSANCE DU GISEMENT DE BAUXITE DE MINIM MARTAP

——oOoOo——

G. MATHERON
avril 1960

——oOo——

Cet exposé comprendra trois parties :

1/ Généralités sur la précision avec laquelle est connue la teneur moyenne d'un gisement donné à partir d'une reconnaissance par puits ou sondages à maille régulière. Cette précision est mesurée par une variance d'échantillonnage. Cette variance d'échantillonnage dépend en principe de trois paramètres :

- Un paramètre intrinsèque de dispersion absolue dépendant uniquement de la nature métallogénique du gisement;

- Le nombre de puits ou de sondages exécutés;

- La longueur de la maille du plan d'implantation des puits ou des sondages.

Des formules théoriques permettent de calculer la variance d'échantillonnage à partir de ces trois éléments. Les formules pratiques finalement retenues peuvent s'interpréter aussi bien comme une conséquence des formules théoriques que comme une interpolation entre des valeurs numériques expérimentalement connues.

2/ Ces idées générales seront comparées numériquement avec les données fournies par PECHINEY sur le gisement de bauxite de MEHENGUI, gisement géologiquement comparable à celui de Minim-Martap. Ces données comportent 300 sondages à maille de 50 m et deux carrés élémentaires de 50 par 50 reconnus par 242 sondages à maille de 5 m. La théorie précédente permet, à partir de ces données, de calculer a priori la précision que donnerait une maille régulière de 200 m. D'autre part, les 300 sondages disponibles à maille de 50 m contiennent 16 implantations possibles de sondages à mailles de 200 m. Les 16 valeurs numériques de la teneur moyenne du gisement obtenues à partir de ces 16 implantations possibles donnent une bonne estimation de la précision d'une telle maille de reconnaissance. La précision observée expérimentalement coïncide très bien avec la précision théorique calculée a priori.

3/ Ces résultats sont ensuite transposés au cas de Minim Martap en vue de déterminer la maille qu'il convient d'adopter dans la reconnaissance de ce gisement. Cette reconnaissance doit se faire en deux étapes :

- étude générale à large maille du gisement en vue de localiser, en un ou plusieurs panneaux sélectionnés sur l'ensemble du gisement, le volume économiquement nécessaire de réserve à la meilleure teneur possible. Une erreur sur le choix de ces meilleurs panneaux aurait des conséquences économiques graves, qui justifient l'importance attribuée à cette première phase de recherche.

.../

- Etude détaillée, à maille plus serrée, des panneaux sélectionnés. Par mesure de sécurité, nous proposons d'appliquer cette maille à un nombre de panneaux un peu plus élevé et totalisant des réserves un peu plus importantes qu'il ne serait strictement nécessaire, une deuxième sélection, plus fine, permettant à l'issue de cette deuxième phase de délimiter plus rigoureusement les panneaux finalement retenus.

Les mailles sont calculées en fonction de la précision souhaitée

- Puisqu'il est inévitable que les panneaux retenus à la première phase ne soient pas réellement les meilleurs panneaux possibles existant dans le gisement, on cherchera simplement à obtenir que leur teneur moyenne ne soit pas inférieure de plus d'un demi point ou d'un point à la meilleure teneur possible.

- Pour la deuxième phase, on s'imposera de ne commettre qu'une erreur de l'ordre du demi-point, par défaut ou par excès, sur la teneur moyenne de l'ensemble des réserves finalement retenues.

Deux schémas sont en définitive proposés :

PREMIER SCHEMA

	Nombre de puits au km2	Maille approximative	Nombre total de puits	Prix de revient approximatif
Première phase	1,5	800	225	45 M
Deuxième phase	6	400	150	30 M
			375	75 M

DEUXIEME SCHEMA

	Nombre de puits au km2	Maille approximative	Nombre total de puits	Prix de revient approximatif
Première phase	1,25	900	187	37,4M
Deuxième phase	10	300	250	50
			437	87,4M

.../

La première solution doit être retenue si l'on estime, au départ, avoir de fortes chances d'exploiter réellement un jour, étant entendu qu'il sera toujours possible, si le besoin s'en fait alors sentir, de resserrer davantage la maille de la deuxième phase. Le deuxième schéma, qui entraîne de moindres engagements au niveau de la première phase, doit être préféré si l'avenir du gisement paraît plus incertain.

*

* *

I.- GENERALITES SUR LA PRECISION D'UNE MAILLE DE RECONNAISSANCE

a) Notion de variance - Variance d'échantillonnage.

Il est théoriquement possible d'implanter dans un gisement une infinité de sondages ou de puits. L'ensemble des teneurs xi que donnerait la totalité de ces sondages ou de ces puits constitue une population statistique. Il est commode de caractériser une telle population par deux paramètres :

- une moyenne arithmétique :

$$m = \frac{1}{n} \sum xi \quad (n = \text{nombre des sondages})$$

qui n'est autre que la teneur moyenne du gisement.

- une variance ou écart quadratique moyen

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2$$

qui mesure le degré de dispersion des valeurs individuelles autour de leur valeur moyenne.

La racine carrée de la variance est l'écart-type σ. Si les valeurs individuelles se répartissent selon la loi normale (courbe en cloche) 95 % d'entre elles sont comprises dans l'intervalle $m \pm 2\sigma$. Une valeur quelconque, choisie au hasard, a 95 chances sur 100 de tomber dans cet intervalle. L'intervalle $\pm 2\sigma$ donne donc une mesure pratique de la marge de variation possible.

Lorsqu'un gisement a été reconnu par un nombre limité n de sondages, la moyenne m' des teneurs de ces sondages n'est généralement pas rigoureusement égale à la teneur moyenne réelle m du gisement. On conçoit qu'il serait possible d'implanter d'une infinité de façons le même nombre n de sondages à la même maille régulière, les différents schémas possibles se déduisant les uns des autres par translation. On conçoit aussi

.../

que chacun de ces schémas donnerait une moyenne arithmétique m' différente. A ce titre, m'apparaît comme une variable aléatoire; l'ensemble des valeurs moyennes m' correspondant à l'ensemble des implantations possibles constitue une population statistique. Et cette population nous pouvons la caractériser à son tour par deux paramètres :

- une valeur moyenne qui n'est autre que la teneur réelle du gisement,

- une variance, que nous appellerons variance d'échantillonnage $\sigma^2 E$.

Cette variance d'échantillonnage caractérise la dispersion des estimations possibles de la teneur moyenne pour un nombre de sondages et une maille donnés : autrement dit elle mesure la précision d'un schéma de reconnaissance.

L'écart-type d'échantillonnage, σE, est intéressant à considérer. En effet, même si les teneurs des sondages ne sont pas rigoureusement distribuées selon une loi normale, les moyennes arithmétiques m' ont une distribution qui converge vers le type normal lorsque le nombre n augmente. Dans le cas de gisements de bauxite, on est pratiquement assuré de la normalité. Il en résulte que la teneur moyenne fournie par un schéma d'implantation quelconque comprenant n sondages à la maille imposée à 95 chances sur cent de tomber dans l'intervalle $m \pm 2\sigma E$.

En réalité, m n'est pas connue. Mais on conçoit qu'il y a aussi à peu près 95 chances sur cent pour que la teneur moyenne réelle m ne diffère de la valeur m' fournie par les sondages que d'une quantité inférieure à $2\sigma E$ en valeur absolue.

Pratiquement, celà signifie que l'on peut prendre comme limite de l'erreur sur la teneur moyenne le double, $+2\sigma E$, de l'écart-type d'échantillonnage.

b) Expression théorique de la variance d'échantillonnage - Le variogramme.

Mathématiquement parlant, les teneurs x_1 et x_2 que donneraient deux sondages implantés à une distance d l'un de l'autre ne peuvent pas être considérées comme des données indépendantes. On conçoit que, si la distance d est faible, et si le sondage 1 a donné une teneur x_1 élevée, le sondage 2 implanté à la distance d a plus de chances de donner une teneur élevée qu'un sondage implanté au hasard. Deux sondages voisins donneront, en moyenne, des teneurs moins différentes l'une de l'autre que deux sondages quelconques. Cette corrélation, au sens statistique, entre les teneurs de sondages voisins ne signifie rien d'autre que l'existence d'un certain degré de continuité de la minéralisation. Il est intéressant d'essayer de chiffrer ce degré de continuité, qui doit être évidemment différent selon les types de gisement. Indiquons simplement ici qu'il est commode de représenter cette relation de continuité au moyen d'une courbe que nous appellerons variogramme.

.../

Si nous considérons l'ensemble des couples x_1 x_2 des teneurs des sondages possibles implantés dans le gisement à la distance de l'un de l'autre, la variable $x_1 - x_2$ se caractérise par une moyenne, qui est nulle, et une variance :

$$\sigma^2_d = \frac{1}{n} \sum (x_1 - x_2)^2$$

qui donne une mesure de la dépendance l'une envers l'autre de ces deux teneurs. Le variogramme est la courbe représentant cette variance en fonction de la distance d

$$(1)\ \sigma^2_d = f(d)$$

On s'attend à ce que f(d) soit une fonction croissante de la distance d, puisqu'aussi bien plus les sondages sont voisins moins leurs teneurs doivent différer en moyenne. A la limite, pour d = 0 f(d) doit s'annuler puisque les deux sondages coïncident. Toutefois, le comportement de la fonction au voisinage de l'origine n'a pas grande importance du point de vue pratique. Dans le domaine d'utilisation usuelle, le variogramme peut souvent se représenter de façon très acceptable par une équation de la forme :

$$(2)\ f(d) = A + 4\alpha \log d$$

Le paramètre α, ou dispersion absolue, caractérise le degré de discontinuité de la minéralisation. C'est un paramètre intrinsèque dont la signification théorique est étroitement liée au principe de similitude et présente une grande importance pour la métallogénie.

Sans insister ici sur ces implications théoriques, nous considérons cette relation comme représentant une bonne interpolation des données expérimentales.

On démontre que, si cette relation est vérifiée, la variance d'échantillonnage fixant la précision avec laquelle est connue la teneur d'un gisement reconnu par n sondages implantés selon une maille carrée de côté d, est donnée par la formule :

$$(3)\ \sigma^2 = \frac{\sigma^2_d}{2n} - \frac{2{,}14\alpha}{n} = \frac{1}{2n} f\left(\frac{d}{2{,}91}\right)$$

Il n'est pas étonnant que la variance d'échantillonnage prenne une forme en 1/n et soit liée étroitement au variogramme. En effet, l'erreur possible prévient du fait que la teneur x_i de chaque sondage diffère de la teneur réelle m_i de son "polygone d'influence". Berreur totale est de la forme :

$$\frac{1}{n} \sum (x_i - m_i)$$

Si les différences $(x_i - m_i)$ peuvent, en moyenne, être considérées comme indépendantes les unes des autres, et si h^2 est la variance de

.../

/...

$(x_i - m_i)$ la variance d'échantillonnage doit être égale à : $\frac{h^2}{n}$. Donc :

- La variance est bien en $\frac{1}{n}$, ce qui signifie qu'à maille égale un gisement 4 fois plus grand (reconnu par quatre fois plus de sondage) est connu avec une précision double.

- Elle est proportionnelle à h^2 qui représente une sorte de demi-moyenne des valeurs du variogramme pour les valeurs de la distance inférieure à d. Il n'est donc pas étonnant de trouver une formule du type (3). Seul, en fait, la valeur numérique 2,91 du facteur de d dépend de la nature logarithmique du variogramme.

L'intérêt de la formule (3), c'est que le variogramme f(d) est directement accessible à l'expérience.

*

* *

II.- VERIFICATION NUMERIQUE DANS LE CAS DU GISEMENT DE BAUXITE DE MEHENGUI

A/ Les données.

Le gisement stratiforme de bauxite de MEHENGUI est analogue à celui de MINIM-MARTAP, avec des dimensions plus réduites. A la différence de MINIM, où l'on n'a plus que des plateaux résiduels, le gisement est resté ici d'un seul tenant. Il a été reconnu par Pechiney au moyen de 300 sondages utiles implantés à la maille carrée de 50 m. De plus, deux carrés de 50 x 50 ont été reconnus chacun par 121 sondages à maille de 5 m, dans le but de tester la continuité de la minéralisation. Les données fournies, sur un schéma d'implantation, comportent les teneurs du toit au mur en Al_2O_3 et la puissance de chaque sondage.

B/ Le variogramme - Vérification de la formule 2.

Les variances $\sigma^2 d = f(d)$ ont été calculées numériquement par lignes et par colonnes, de 5 m en 5 m à partir des deux carrés et de 50 en 50 m à partir du schéma d'implantation. Sur les diagonales NE-SW et NW-SE, les valeurs de f(d) ont de même été calculées de 6 en 7 m et de 70 en 70 m. Le tableau I présente les résultats numériques :

.../

TABLEAU I

Distance d (unité = 5 m)	Nombre de données	Variance $\sigma^2 d = f(d)$
1	440	9.42
1.41	400	9.60
2	396	12.18
2.83	324	12.90
3	352	14.18
4	308	15.75
4.24	256	14.40
5	264	17.76
5.65	196	17.12
6	220	20.18
7	320	18.95
8	132	21.37
8.49	100	22.83
9	88	26.33
10	641	25.20
14.1	497	24.45
20	488	25.50
28.2	440	31.50
30	456	27.60
40	421	28.50
42.4	393	29.70
50	383	30.10
56.5	342	30.3
60	344	31.0
70	601	32.1
80	279	27.8
84.9	237	33.7
90	242	30.5
100	398	33.2

Nous disposons donc de 29 points expérimentaux. La figure 1 représente le variogramme expérimental en échelle logarithmique. L'alignement, compte tenu du nombre des données, est assez satisfaisant. Les anomalies pour 9, 28 et 30 sont presque significatives. Elles correspondent probablement à de petites déviations réelles, et non à de simples fluctuations statistiques. Il n'en reste pas moins, qu'en gros, le phénomène obéit à une loi logarithmique. Les écarts les plus importants, si l'on rétablissait l'échelle arithmétique de 1 à 100 paraîtraient tout à fait insignifiants. Leur amplitude est trop faible pour empêcher l'interpolation logarithmique de donner des résultats pratiquement utilisables.

.../

/...

La formule :

$$f(d) = 7,9 + 5,76 \log d \quad \text{(log népérien)}$$
$$d = \text{unité } 5 \text{ m}$$

qui correspond à la droite de la figure 1 peut être utilisé pour établir des prévisions.

C/ Etude d'une maille de 200 m - Vérification de la formule 1.

Si le gisement de MEHENGUI avait été reconnu à la maille 200 par $n = \frac{300}{16} = 18,7$ sondages, la formule (3) donnerait pour la variance d'échantillonnage :

$$\sigma^2_E = \frac{1}{2n} f\left(\frac{d}{2,91}\right) = \frac{23,2}{2 \times 18,7} = 0,62$$

A cette valeur - 0,62 de la variance théorique d'échantillonnage correspond un écart-type de 0,785, donc une erreur possible, au niveau de 95/100 en probabilité de $\pm$ 1,57.

Cette prévision de la théorie (variance d'échantillonnage de 0,62 - erreur possible de $\pm$ 1,57) peut être vérifiée expérimentalement. A partir des 300 sondages de la maille 50, nous pouvons choisir 16 schémas d'implantation possibles à la maille 200. Pour chacun de ces schémas on a calculé la teneur moyenne; du fait que les schémas sont au nombre de 16, on obtient ainsi une bonne idée de la loi de distribution de l'estimation de la teneur moyenne à partir d'une maille 200 - donc une bonne estimation de la variance d'échantillonnage et de l'erreur possible.

Les 16 valeurs obtenues (voir tableau II) s'échelonnent entre 40,90 et 43.94 - soit dans un intervalle de 3 points. Il est intéressant de voir que le nombre de sondages utiles varie entre 15 et 22, ce qui peut donnerune idée de la précision avec laquelle le tonnage serait connu à partir d'une maille de 200.

.../

TABLEAU II

n° du schéma à maille 200	Nombre de sondages	Teneurs moyennes obtenues
1	19	43.58
2	22	43.54
3	19	41.79
4	19	43.00
5	22	42.73
6	22	42.86
7	20	40.90
8	19	42.73
9	19	43.94
10	20	43.15
11	18	42.11
12	19	41.79
13	15	42.93
14	16	42.75
15	15	41.60
16	16	42.31

Cette distribution des teneurs moyennes obtenues à la maille 200 est bien caractérisée par les deux paramètres habituels.

- Une moyenne arithmétique de 42.59 (légèrement différente de la moyenne des 300 sondages qui est de 42.63, parce que les 16 schémas comportent un nombre variable de sondages).

- Une variance, qui n'est autre que la variance d'échantillonnage de la maille 200 : elle est égale à 0,596. Il lui correspond une erreur possible de $\pm 2\sigma_E = \pm 1{,}53$. Ces valeurs expérimentales sont en excellent accord avec nos prévisions théoriques, comme le montre le tableau III.

.../

TABLEAU III

Prévision d'une maille 200 : comparaison des prévisions théoriques et des valeurs expérimentales

	Prévisions théoriques	Valeurs expérimentales
Variance d'échantillonnage σ^2_E	0,62	0,595
Erreur possible $\pm 2\sigma_E$	$\pm$ 1,57	$\pm$ 1,53

La validité pratique des méthodes de calcul exposées plus haut est donc bien établie pour le gisement de MEHENGUI. Il semble légitime de les appliquer au gisement très analogue de MINIM-MARTAP.

*

* *

III.- APPLICATION AU GISEMENT DE MINIM MARTAP

1/ Les données.

On a retenu comme données les teneurs moyennes du toit au mur argileux des puits de la maille régulière (600 m) de TCHABAL HALEO et MINIM :

- puits de la maille régulière, car les relations de position des puits jouent ici un rôle capital.
- Tchabal HALEO et MINIM car ce sont les seuls pour lesquels on dispose du plan d'implantation des puits.

Nous n'indiquons ici que les résultats relatifs à la teneur équivalente, qui est égale à $Al_2O_3 - 3SiO_2$. Seule cette expression présente une signification économique puisqu'il est compté trois points de pénalité en Al_2O_3 par point de silice soluble. C'est donc bien cette teneur équivalente qu'il importe de connaître au point ou au demi-point près.

.../

En vue de déterminer la maille optimum d, on a construit le variogramme des teneurs équivalentes, c'est-à-dire la courbe :

$$\sigma^2_d = f(d)$$

Les données expérimentales disponibles à HALEO et MINIM permettent de calculer f(d) pour d = 600, 1200, 1800 ..... de 600 en 600 mètres. Six valeurs expérimentales ont été calculées et ont été interpolées par la formule :

$$f(d) = 28{,}1 + 3{,}08 \log d \text{ (log neperien)}$$

On en déduit directement la variance d'échantillonnage - variance fixant la précision avec laquelle est connue l'expression $Al_2O_3 - 3SiO_2$ - d'un panneau de 4 km2 (80 millions de tonnes) reconnu par n puits.

$$\sigma^2_E = \frac{24.15 - 0{,}77 \log n}{n} \qquad \text{(log neperien)}$$

2/ Détermination des mailles optimum.

Le programme de reconnaissance à envisager comprend, en principe, deux parties :

a) Localisation des trois meilleurs panneaux de 4 km2 (80 millions de tonnes) représentant la réserve optimum de 240 millions de tonnes économiquement nécessaires. Ces panneaux doivent être localisés par une campagne de reconnaissance générale de l'ensemble du gisement à maille homogène. Cette maille est définie par le nombre n_1 de puits creusés dans chaque panneau de 4 km2.

b) Eventuellement, les trois panneaux localisés pourront être reconnus en détail à maille plus serrée. Cette maille est définie parle nombre n_2 de puits creusés dans chacun des panneaux. Il nous reste à déterminer les valeurs recommandables de n_1 et n_2.

a) Localisation des trois meilleurs panneaux de 80 millions de tonnes :

Pour les besoins du raisonnement, nous admettons que les 150 km2 minéralisés du rapport Pianet sont constitués de 37,5 panneaux distincts de 4 km2. Il va de soi que les plateaux réels sont les uns plus grands, les autres plus petits que ce chiffre; mais nous pourrons sans grand risque appliquer aux plateaux réels la maille de $\frac{n_1}{4}$ puits au km2 déduite de cette hypothèse simplificatrice.

- La teneur réelle (inconnue) de chacun de ces panneaux a, dans l'ensemble du gisement, une variance

$$\sigma^2_m = \alpha \log \frac{s}{4}$$

.../

s étant la surface totale du gisement supposé continu, soit environ 875 km2. On prend cette surface totale de 875 km2, et non la surface minéralisée de 150 km2, car il est admis que l'érosion qui a découpé les plateaux résiduels actuels, n'a pas modifié les corrélations primitives, ni par suite la variance qu'avait chaque panneau dans le gisement originel. On sait que cette formule de de WIJS, qui se déduit directement de la forme logarithmique du variogramme donne en général une bonne approximation de la variance d'un panneau. On trouve, numériquement :

$$\sigma^2 m = 4,15$$

- La valeur moyenne x du n_1 puits creusés dans un panneau quelconque a, dans ce panneau, une variance égale à la variance d'échantillonnage

$$\sigma^2_E = \frac{24,15 - 0,77 \log n_1}{n_1}$$

L'ensemble des valeurs de x constitue une population dont la variance (variance de x dans le gisement) est :

$$\sigma^2 x = \sigma^2 m + \sigma^2 E = \frac{4,15 + 24,15 - 0,77 \log n1}{n1}$$

- Les trois panneaux que l'on retiendra sont ceux qui correspondront aux trois plus fortes valeurs de x, soient x_1, x_2 et x_3. La moyenne arithmétique :

$$y = \frac{x1 + x2 + x3}{3}$$

de ces trois meilleurs valeurs, en tant qu'estimateur de la teneur des 280 millions de tonnes, possède les propriétés suivantes (cf, par exemple Cramer

- Valeur probable de y = (m étant la teneur moyenne de l'ensemble du gisement, supposée connue)

$$E(y) = m + 1.881\ \sigma x$$

- Valeur probable de la teneur réelle moyenne mp des trois panneaux choisis, y étant connu =

$$E(mp) = m + 1.881\ \frac{\sigma^2 n}{\sigma x}$$

- Variance d'échantillonnage fixant la précision avec laquelle mp est connue =

$$\frac{\sigma^2 E}{3}$$

.../

On note que la valeur probable de la teneur moyenne des trois panneaux choisis est 1.881 σ^2_E, toujours inférieure à la valeur probable 1.881 σ_m de la σ_x teneur moyenne des trois panneaux réellement les plus riches. La petite différence :

$$1.881 \left(\sigma_m - \frac{\sigma^2_m}{\sigma_x}\right)$$

provient du risque que nous courons toujours, à moins de creuser une infinité de puits, que les panneaux correspondent aux meilleures valeurs de l'échantillonnage ne soient pas les meilleurs panneaux possibles du gisement. La perte financière entraînée par une telle erreur a comme valeur probable, en comptant le point d'Al_2O_3 68 francs :

$$68 \times 240 \times 10^6 \quad 1.881 \left(6m - \frac{\sigma^2_m}{x}\right) - 3.06 \quad 10^{10} \left(\sigma_m - \frac{\sigma^2_m}{\sigma_x}\right.$$

On obtient ainsi des chiffres vertigineux (16 milliards de francs par point d'Al_2O_3) qui doivent être mis en balance avec le coût de la reconnaissance, soit à 200 000 francs par puits.

$$37,5\ n_1 \quad 200\ 000 \quad = 7,5 \quad 10^6 \quad n_1$$

On doit en principe rendre minimum la somme = valeur probable de la perte + prix de revient des puits, ce qui donne :

$$3,06 \quad 10^{10} \quad \frac{\sigma^2_m}{2\sigma^3_x} \quad \frac{24,92 - 0,77 \log n_1}{n_1^2} \quad = \quad 7,5 \quad 10^6$$

La résolution de cette équation conduit à la valeur $n_1 = 145$.

Cette valeur effarante (plus de 5.000 puits dans l'ensemble du gisement, maille de 166 m) est cependant la conséquence logique d'un mode de calcul qui consiste à mettre en balance la valeur du point gagné (16 milliards) et le coût des puits (200 000 francs par puits). L'énormité des sommes mises en jeu dans l'exploitation écrase, et rend en comparaison presque négligeable, le coût de la reconnaissance.

Cependant, une valeur aussi énorme de n_1 correspond à :

$$\sigma^2_E = 0,14 \qquad \sigma^2_x = 4,15 + 0,14 = 4,29$$

et la différence entre la teneur probable des trois panneaux choisis et celle des trois meilleurs panneaux réels est alors :

$$1.881 \left(\sigma_m - \frac{\sigma^2_m}{x}\right) = 0,035\ \%$$

autrement dit, de 3,5 centième de point. L'intuition suggère qu'une telle valeur n'est pas réaliste. Le centième de point n'a pas réellement la signification économique écrasante (160 millions de francs) que lui prêtent nos équations. Il y a à celà des tas de raisons, par exemple le fait que la teneur d'un lot de minerai à commercialiser n'est jamais connue avec une telle précision.

.../

C'est là un exemple intéressant d'inadequation de raisonnements logiques imputable à une excessive disparité des données économiques relatives à l'exploitation et à la recherche. Nous nous réservons d'approfondir par la suite ce genre de problème.

Pour l'instant, nous nous contenterons de considérations beaucoup plus pragmatiques. Nous estimerons, arbitrairement (mais il faut bien faire un choix) que l'on peut se permettre de perdre 1/2 point sur la meilleure valeur probable possible des trois panneaux, et nous déterminerons n_1 par la condition :

$$1.981 \left(\sigma m - \frac{\sigma^2 m}{\sigma x}\right) = 0,5$$

La résolution numérique de cette équation conduit à :

$$n_1 = 16$$

Autrement dit la maille de reconnaissance générale doit être prise égale à 500 m ou plus exactement, compte tenu des irrégularités des plateaux, on doit creuser, en première phase, 4 puits au kilomètre carré.

Si l'on accepte de perdre 1 point sur la meilleure valeur probable possible, on trouve alors $n_1 = 6,5$ ce qui correspond à une maille d'environ 800 m (soit, pour l'ensemble du gisement 240 puits au lieu de 600).

Il semble difficile d'accepter de perdre a priori plus d'un point d'Al_2O_3, et par conséquent de creuser moins de 1,5 puits au km2. Il semble inutile de vouloir réduire la perte à moins d'un demi-point, et par conséquent de creuser plus de 4 puits au km2. Nous remarquons que les deux mailles correspondantes - 500 et 800 m encadrent la maille effectivement choisie pour Haleo et Minim, qui est de 600 m. Une telle maille correspond sensiblement à une perte a priori de 0,66 % sur la meilleure teneur probable possible. En l'absence d'autres indications, nous pouvons dire qu'il n'est pas absurde de continuer avec une maille de 600 m qui correspond à 2,75 puits au km2 (soit $n_1 = 11$, et environ 400 puits pour l'ensemble du gisement).

b) Reconnaissance plus poussée des trois panneaux sélectionnés :

L'étude théorique - que nous ne pouvons reproduire ici - des conditions de la maximation de la valeur probable du bénéfice futur, à ce stade de la reconnaissance, montre que la valeur optimum du nombre n_2 de puits supplémentaires à creuser dans chacun des trois panneaux sélectionnés dépend au plus haut point del'écart entre la teneur probable de ces panneaux et la teneur limite d'exploitabilité.

.../

Cette valeur n_2 pourra donc être déterminée au mieux :

1/ Lorsque des études économiques précises auront déterminé la valeur de la teneur limite en $(Al_2O_3 - 3SiO_2)$ à 700 km de la côte.

2/ Après l'achèvement de la reconnaissance générale, la teneur probable des trois panneaux sélectionnés pouvant alors être estimée, d'après les résultats disponibles à ce moment.

Au stade actuel, ces données n'étant pas encore disponibles, nous pourrions tenter de déterminer n_2 s'il était nécessaire de fixer dès maintenant sa valeur, moyennant les hypothèses suivantes :

- On admet a priori que la teneur moyenne m (que nous ne connaissons pas) de l'ensemble du gisement est égale à la teneur limite d'exploitabilité (que nous ne connaissons pas non plus).

- Dans ces conditions, l'écart entre la valeur probavle actuellement (dans l'état actuel de nos connaissances) de la teneur moyenne des trois panneaux que nous sélectionnerons et la teneur-limite d'exploitabilité se trouve égale à :

$$1.881 \quad \frac{\sigma^2_m}{\sigma x}$$

Le calcul économique, conduit dans ces hypothèses, montre qu'il n'y a pas lieu, en principe, de prévoir actuellement de phase de reconnaissance détaillée, à partir du moment où la première phase a comporté au moins 6 puits par panneau. Ce résultat provisoire est avant tout lié au fait que nous prévoyons une teneur probable des panneaux supérieure de 3 à 4 points à la teneur-limite. Il est à ce titre révisible.

D'autre part, ici encore, la disparité entreles données économiques de l'exploitation et de la recherche fait sentir son effet. Il est hors de doute que, lorsque la décision d'exploiter sera virtuellement prise, personne n"ira lésiner sur les quelques millions nécessaires à une reconnaissance plis poussée des panneaux retenus. Si, en vérité, la décision d'exploiter est déjà prise, le résultat futur de l'exploitation n'est plus influencé par un progrès de notre information et à ce moment le coût d'une reconnaissance supplémentaire s'inscrit en déduction nette du bénéfice futur. Ces dépenses, cependant, sont presque négligeables vis à vis des données économiques de l'exploitation et, au niveau des impondérables, elles peuvent se mettre en balance avec le sentiment psychologique de sécurité, la possibilité de prévisions économiques plus exactes, etc ... tous avantages qu'apportera un supplément de recherche.

Nous prenons acte, ici encore, de l'échec provisoire des calculs optimum économiques lorsqu'il y a une trop grande disparité entre les données économiques à comparer. Nous espérons que l'affinement de la formulation du problème permettra à l'avenir, au prix sans doute d'une assez grande complexité du raisonnement, de franchir ce seuil et de résoudre de façon plus rigoureuse le problème fondamental de la recherche minière.

.../

Pour la question qui nous occupe, nous ne pouvons, dans l'état actuel de nos connaissances, que nous fixer un niveau de précision a priori.

Si nous désirons :

- n'avoir qu'une chance sur 10 de se tromper par excès de plus d'un demi-point,

- et 5 chances sur 1 000 de se tromper par excès de plus d'un point sur la teneur moyenne de l'ensemble des trois panneaux, nous devons prendre :

$$\sigma^2_E = \frac{24{,}15 - 0{,}77 \log n}{3\,n} = 0{,}152$$

On en tire :

$$\boxed{n = 46}$$

Il convient de creuser 46 puits dans chacun des panneaux. Il est permis d'inclure dans ces 46 puits ceux qui ont été implantés dans le panneau lors de la première phase.

RESUME.-

La reconnaissance doit être menée en deux phases, la première ayant pour but de sélectionner les trois meilleurs panneaux, la deuxième de reconnaître plus en détail les panneaux retenus.

Le gros danger, au niveau de la première phase, est de se tromper de panneau. Il peut fort bien arriver, en effet, que les trois panneaux ayant donné les meilleurs résultats à l'échantillonnage sommaire de la première phase ne soient pas les trois meilleurs panneaux réels. Cette possibilité se traduit, en langage de probabilité, par le fait que la valeur probable de la teneur moyenne des trois panneaux sélectionnés est inférieure à la valeur probable de la teneur moyenne des trois meilleurs panneaux réels.

Si l'on exige que cette différence soit égale à 1/2 point, il convient de faire 4 puits au km2, soit 600 puits au total.

Si l'on accepte que cette différence soit égale à 1 point, il suffit de 1,5 puits au km2, soit 225 puits au total.

La solution intermédiaire correspondant à la maille de 600 mètres adoptés pour les premiers travaux (2,75 puits au km2) donne une différence d'environ 0,7 point .

.../

Pour la deuxième phase, si l'on désire n'avoir qu'une chance sur 10 de se tromper par excès de plus d'un demi point et de 5 chances sur 1000 de plus d'un point sur la teneur moyenne des trois panneaux, il convient de reconnaître chaque panneau par 46 puits, en y comprenant ceux de la première phase On a également alors 1 chance sur 10 de se tromper de plus de 0,86 point par excès sur la teneur moyenne de chacun des panneaux.

Proposition de programme.

Il existe en fait des moyens d'améliorer notablement ce schéma un peu rigide, sans qu'il soit possible de chiffrer ces possibilités. Par exemple, le gros risque de la première phase étant de manquer les meilleurs panneaux réels, on peut penser que les trois meilleurs panneaux réels ont bien davantage de chance de figurer parmi les quatre ou cinq panneaux donnant les meilleurs résultats à l'échantillonnage, que de coïncider avec les trois premiers d'entre eux. On peut penser également que le meilleur panneau possible n'a pas de raison de coïncider exactement avec un panneau délimité par la maille théorique et suggérer par suite, en deuxième phase, de déborder un petit peu sur le pourtour des panneaux retenus.

On peut en conséquence proposer le schéma suivant :

- Reconnaissance générale à la maille la plus lâche compatible avec nos exigences, c'est-à-dire 1,5 puits au km2 (225 puits au total).

- Choix des 4 ou 5 panneaux de 5 km2 donnant les meilleurs résultats et reconnaissance détaillée de ces 4 ou 5 panneaux à la maille de 10 puits au km2 (200 ou 250 puits au total).

	Nombre de puits au km2	Maille approximative	Nombre total de puits	Prix de revient approximatif
Première phase (reconnaissance générale)	1,5	800 m	225	45 M
Deuxième phase (étude détaillée de 5 panneaux de 5 km2	10	300 m	250	50 M
TOTAL			475	95 M

Ce nombre de puits pourra sans doute être réduit en éliminant a priori les tchabals inférieurs par exemple à 50 hectares, présentant moins d'intérêt économique. A la deuxième phase, également, il peut se trouver qu'un ou plusieurs des cinq meilleurs panneaux correspondent à des plateaux de surface inférieure à 5 km2 (ou même à 4 km2), ce qui ne constituerait évidemment pas une raison pour les exclure a priori, le chiffre de 4 km2 étant purement indicatif.

.../

En dernier lieu, enfin, il est de toute évidence souhaitable que les puits de la première phase s'insérant dans la maille de la deuxième.

On peut, pour celà, porter à 900 m, soit 1,25 puits/km2 la maille de la première phase (187 puits au total au lieu de 225) et conserver la maille de 10 puits/km2 de la 2ème phase soit au contraire conserver 1,5 puits à la première phase, et abaisser à 6 puits/km2, soit 400 m la maille de la 2ème. On a, dans ce dernier cas, 2,5 chances sur cent de se tromper de plus d'un point par excès sur la teneur moyenne des trois panneaux.

	Première solution			
	Nombre de puits au km2	Maille approximative	Nombre total de puits	Prix de revient approximatif
Première phase	1,5	800	225	45 M
Deuxième phase	6	400	150	30 M
TOTAL			375	75 M
	Deuxième solution			
Première phase	1,25	900	187	37,4 M
Deuxième phase	10	300	250	50 M
TOTAL			437	87,4 M

La première solution doit être choisie si l'on estime avoir de fortes chances d'exploiter réellement un jour. La deuxième doit être retenue si l'on est beaucoup plus réservé à cet égard.

G. MATHERON.-

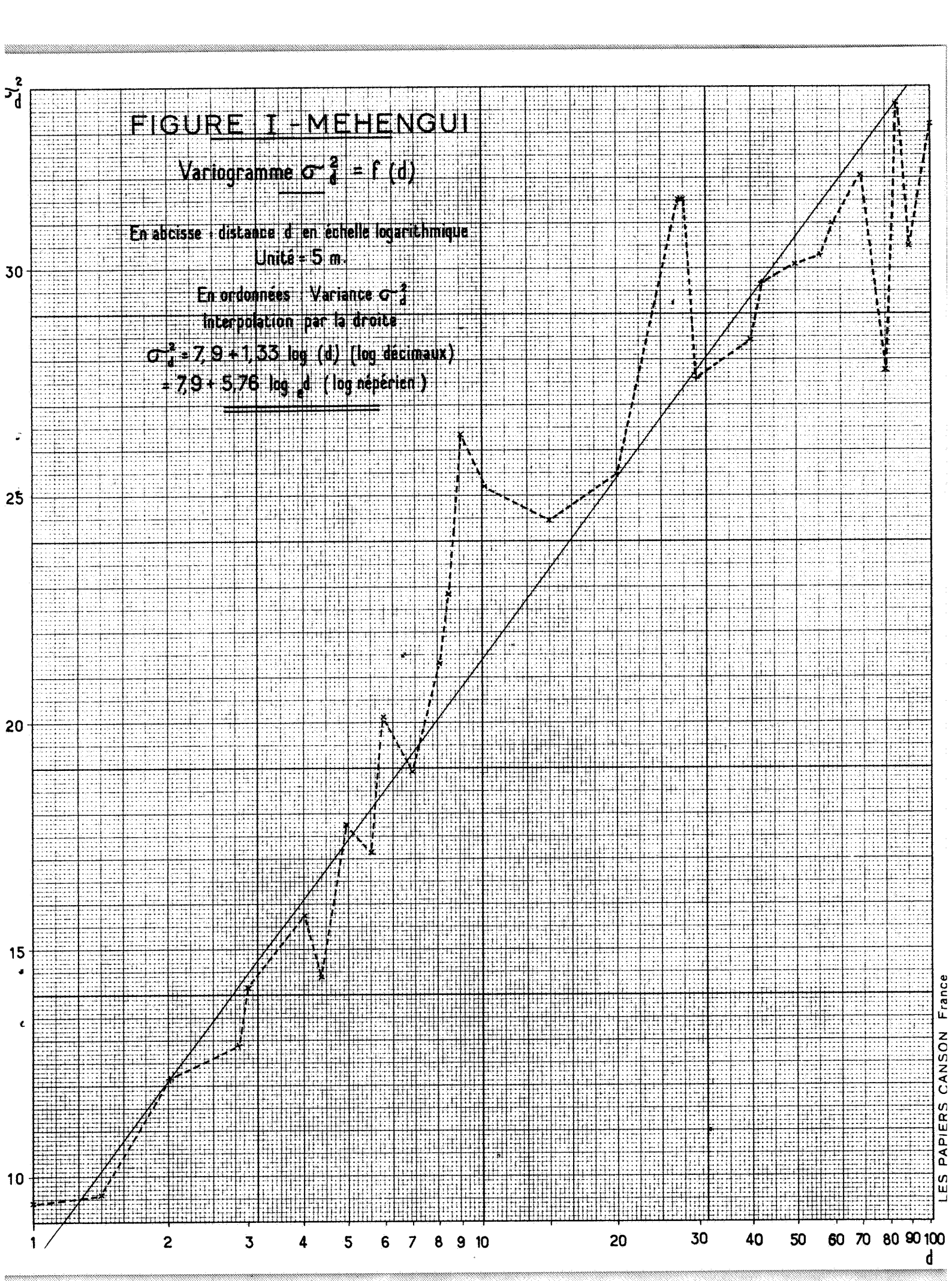
FIGURE I - MEHENGUI
Variogramme $\sigma^2_d = f(d)$
En abcisse : distance d en échelle logarithmique
Unité = 5 m.
En ordonnées : Variance σ^2_d
Interpolation par la droite
$\sigma^2_d = 7,9 + 1,33 \log (d)$ (log décimaux)
$= 7,9 + 5,76 \log_e d$ (log népérien)
γ_d^2
30
25
20
15
10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
d
LES PAPIERS CANSON France