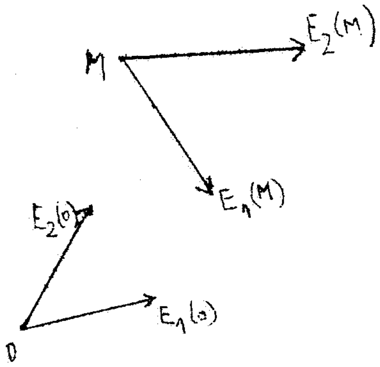
G. Matheron (1962)

NOTE N° 37

Remarques sur la méthode tellurique de prospection géophysique.

Cette note est une application du formalisme du calcul différentiel absolu à la méthode de prospection tellurique. Elle permet de manière particulièrement simple de mettre en évidence, outre le paramètre "aire" habituel, l'existence d'un vecteur divergence $\overline{D}$ tel qu'en tout point la divergence plane du vecteur champ électrique $\overline{E}$ soit égale au produit scalaire $\overline{D}\,\overline{E}$. Si, en particulier, le vecteur $\overline{E}$ est conservatif dans l'espace à 3 dimensions, le produit scalaire $\overline{D}\,\overline{E}$ changé de signe représente la dérivée de la composante verticale Oz.

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = - \overline{D}\,\overline{E}$$



On sait que la méthode tellurique repose sur la correspondance entre les vecteurs électriques E (O) et E (M) observés au même instant en un point O pris comme origine et en un point M variable sur la surface topographique. Cette correspondance est linéaire, de sorte que si $E_1(O)$, $E_1(M)$ et $E_2(O)$, $E_2(M)$ sont deux couples de vecteurs homologues en O et M, tout vecteur E(O) de la forme :

$$E(O) = \lambda_1 E_1 (O) + \lambda_2 E_2 (O)$$

a, en M, un homologue de mêmes composantes λ_1 et λ_2 vis à vis de $E_1(M)$ et $E_2(M)$, soit :

$$(1) \quad E (M) = \lambda_1 E_1 (M) + \lambda_2 E_2 (M)$$

Comme le champ électrique dérive d'un champ de force :

$$E = \overline{\text{grad}\ \phi}$$

on exprime simplement cette loi de correspondance en disant que, si ϕ^1 et ϕ^2 sont les potentiels dont dérivent $E_1(M)$ et $E_2(M)$, le potentiel ϕ représentant un régime quelconque sera de la forme :

$$(1)^1 \qquad \phi = \lambda_1 \phi^1 + \lambda_2 \phi^2 = \lambda_i \phi^i$$

Si les deux potentiels particuliers ϕ^1 et ϕ^2 sont connus en tout point, le potentiel le plus général sera toujours une combinaison linéaire de ces deux potentiels particuliers et sera entièrement déterminé par la connaissance des paramètres λi : les λi apparaissent comme les coordonnées de l'état du système. Cette interprétation devient très parlante si l'on adopte comme système de coordonnées curvilignes les deux fonctions $\phi^1(xy)$ et ϕ^2 (xy) représentant les deux potentiels particuliers.

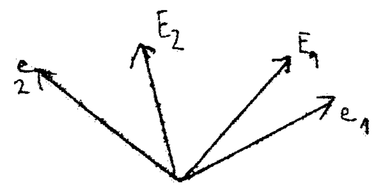
Dans le système de coordonnées ϕ^i, le repère naturel au point M est constitué par les deux vecteurs :

$$(2) \qquad e_i = \frac{\partial M}{\partial \phi^i}$$

On vérifiera facilement les relations suivantes :

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \phi_1} = \dfrac{1}{S} \dfrac{\partial \phi 2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \phi^1} = -\dfrac{1}{S} \dfrac{\partial \phi^2}{\partial x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \phi 2} = -\dfrac{1}{S} \dfrac{\partial \phi 1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \phi^2} = -\dfrac{1}{S} \dfrac{\partial \phi^1}{\partial x} \end{cases}$$

$$S = \frac{D\,(\phi^1 \phi^2)}{D(x,y)} = E_1, E_2$$



Géométriquement, ces relations expriment que e_2 se déduit de E_1 par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ et une division par S de sa mesure algébrique, tandis que e_1 se déduit de E_2 par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ et division par $-S = E_2, E_1$. La métrique est définie par :

$$g_{ij} = \overline{e_i}\,\overline{e_j}$$

Soit :

$$(4) \qquad g_{11} = \frac{E_2^{\,2}}{S^2} \qquad g_{22} = \frac{E_1^{\,2}}{S^2} \qquad g_{12} = -\frac{\overline{E_1}\,\overline{E_2}}{S^2}$$

Par inversion de g_{ij}, on obtient aisément les composantes controvariantes du tenseur fondamental : on trouve :

$$(5) \quad \begin{cases} g^{ij} = \bar{E}_i \ \bar{E}_j \\ g^{11} = E^2_1 \qquad g^{22} = E^2_2 \qquad g^{12} = \bar{E}_1 \ \bar{E}_2 \end{cases}$$

Les repères E_i et e_j sont complémentaires en ce sens qu'un vecteur ayant les composant s controvariantes u^k vis à vis de l'un deux a, vis à vis de l'autre, des composantes covariantes numériquement égales aux u^k. En particulier, le vecteur E(M) ayant, vis à vis des E_i, les composantes controvariantes λi, on voit que ces mêmes λi, représentent les composantes covariantes du champ dans le repère naturel e_i. On le vérifie immédiatement en prenant le gradient du potentiel $\phi = \lambda i \ \phi^i$, soit :

$$\partial_k \phi = \lambda_i \ \partial_k \ \phi^i$$

Comme $\partial_k \ \phi^i = \varepsilon^i_k = 1$ si $i = k$ et 0 si $i \neq k$, il reste :

$$(6) \qquad \partial_k \phi = \lambda_k$$

relation exprimant que le champ a bien pour composante covariante la coordonnée d'état λ_k.

Pour mettre en évidence les propriétés de la loi de correspondance (1), nous examinerons la variation d'un vecteur électrique E, donné par ses composantes covariantes $E_k = \lambda_k$ constantes, pour un petit déplacement donné par ses composantes contravariantes $d \ \phi^i$. Comme les E_k sont nuls, la différenciation covariante se réduit ici à :

$$(7) \qquad \nabla E_k = - \Gamma_j{}^{\ell}{}_k \ E_e \ d \ \phi^j$$

ou, sous forme de dérivation covariante :

$$(8) \qquad \nabla_j \ E_k = - \Gamma_j{}^{\ell}{}_k \ E_e$$

Le symbole $\Gamma_j{}^{\ell}{}_k$ représente le symbole de Christoffel de 2ème espèce.

On sait qu'en général ces symboles ne constituent pas les composantes d'un tenseur. Mais, du caractère tensoriel de l'équation (8), il résulte qu'il existe un tenseur du troisième ordre Γ, dont les composantes $\Gamma_j{}^{\ell}{}_k$, dans le système de coordonnées curvilignes $\phi^1\ \phi^2$, coïncident avec les symboles de Christoffel. Au reste, si, au lieu des potentiels ϕ^1 et ϕ'^2, l'équation (1)' montre que l'on passerait d'un système à l'autre par une substitution linéaire. Or, vis à vis des changements linéaires de coordonnées, les symboles de Christoffel se transforment comme les composantes d'un tenseur. Les composantes du tenseur Γ coïncident donc avec les symboles de Christoffel dans tous les systèmes de coordonnées $\phi'^1\ \phi'^2$.

Le tenseur Γ, indépendant des états électriques particuliers ϕ^1 et ϕ^2, est défini en chaque point M. Son étude constitue l'objet de la méthode tellurique. Les 8 composantes $\Gamma_j{}^k{}_\ell$ se réduisent, en réalité, à 6 par suite de la relation de symétrie :

(9) $$\Gamma_j{}^k{}_\ell = \Gamma_\ell{}^k{}_j$$

Comparée à (8), cette relation exprime l'égalité :

$$\nabla_j E_e - \nabla_e E_j = \text{rot } E = 0$$

et signifie que E est un gradient. Aucune autre relation n'est imposée a priori à ses composantes. Si la surface topographique est plane, l'espace des ϕ^i est euclidien, et par suite les $\Gamma_j{}^k{}_\ell$ doivent vérifier les conditions exprimant que le tenseur de courbure est nul. Ces conditions font intervenir les dérivées de $\Gamma_j{}^k{}_\ell$ et n'interviennent que pour les problèmes du 2ème ordre. Les propriétés du premier ordre - le paramètre aire et le vecteur divergence - seront établies pour une métrique quelconque, et subsisteront en particulier si l'espace des ϕ^i est riemannien, c'est-à-dire si la surface topographique est quelconque.

Par contraction, nous pouvons former, à partir des $\Gamma_i{}^j{}_k$, deux vecteurs distincts :

(10) $$\begin{cases} \theta_i = -\Gamma_i{}^k{}_k \\ D^j = -\Gamma^{k\,j}{}_k = -g^{kr}\,\Gamma_r{}^j{}_k \end{cases}$$

que nous allons interpréter.

I°/ Le vecteur Divergence.

La divergence du champ sur la surface topographique, c'est-à-dire dans le cas où cette surface est plane et se trouve rapportée à deux axes rectangulaires Ox Oy la quantité :

$$\mathrm{div}\ E = \frac{\partial Ex}{\partial x} + \frac{\partial Ey}{\partial y}$$

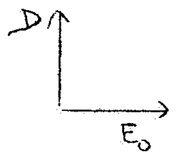
a, dans un système de coordonnées quelconques, la valeur :

$$\nabla_i\ E^i = g^{ik}\ \nabla_i\ E_k$$

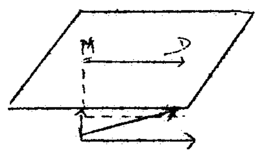
De l'équation (8), il résulte :

$$(11) \qquad \nabla_i E^i = - g^{ik}\ \Gamma_i{}^{\Gamma}{}_k E_e = D^e E_e$$

Cette égalité nous indique la signification du vecteur D^j considéré en (IO) : ce vecteur est tel que div E soit égal au produit scalaire E D de ce vecteur par le champ. En particulier si, en un point M, le champ E est perpendiculaire au vecteur D (M), il a en ce point une divergence

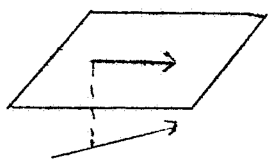


nulle. Si E est orienté selon le vecteur D, sa divergence, au contraire, prend une valeur maximum. Le champ des vecteurs D, et en particulier ses lignes de courant, reflète donc les propriétés intrinsèques du sous-sol. En particulier, si le champ électrique est conservatif, c'est-à-dire a une divergence nulle dans l'espace à 3 dimensions, le produit $\overline{D}\ \overline{E}$ changé de signe donne la dérivée $\frac{\partial Ez}{\partial z}$ de la composante verticale Ez du champ.



$$\frac{\partial Ez}{\partial z} = - E\ D = - E_e\ D^e$$

Si $\overline{E}$ est parallèle à $\overline{D}$ et de même sens, on voit, en se plaçant sur la perpendiculaire en M à la surface topographique à une profondeur dz, que les lignes de courant montent vers la surface, avec une pente :



$$m = - \frac{D^{e} E_{e}}{E^{e} E_{e}} \, d z = \frac{(D)}{(E)} \, d z$$

Si au contraire E est perpendiculaire à D, la pente est nulle et la ligne de courant reste parallèle à la surface topographique. Le vecteur D indique donc la direction des plus grandes résistivités. Ce vecteur ne dérive pas d'un potentiel scalaire au vecteur.

2°/ L'Aire et la Rotation.

L'équation (7), interprétée pour un déplacement spatial d M de composantes $d\,\phi^{i}$ indique que le tenseur du 2ème ordre :

$$(12) \qquad t^{i}{}_{k} = - d\,\phi^{j}\,\Gamma_{j}{}^{i}{}_{k}$$

représente la déformation subie dans ce déplacement par la figure géométrique constituée par deux vecteurs électriques. Cette déformation peut toujours être décomposée en une déformation pure, représentée par le tenseur symétrique :

$$(13) \qquad s_{ij} = \tfrac{1}{2} \left(t_{ij} + t_{ji} \right)$$

et une rotation, représentée par le tenseur antisymétrique :

$$(14) \qquad a_{ij} = \tfrac{1}{2} \left(t_{ij} - t_{ji} \right)$$

Du tenseur symétrique on déduit, par contraction, le scalaire dilatation θ, qui représente la variation relative de l'aire $\frac{dS}{S}$ du parallélogramme construit sur deux vecteurs électriques quelconques : on a ainsi :

$$(15) \qquad \theta = \frac{dS}{S} = - d\,\phi^{j}\,\Gamma_{j}{}^{i}{}_{i} = + d\,\phi^{j}\,\theta_{j}$$

La dilatation est égale au produit scalaire du vecteur θ introduit en (10) par le déplacement d M. Il résulte de (15) que ce vecteur est un gradient :

$$(16) \qquad \theta_{j} = \partial_{j} \log S$$

Du reste, on établit directement la relation :

$$\Gamma_j{}^i{}_i = \tfrac{1}{2}\partial_j \log (g)$$

(g) représentant le déterminant des g_{ij} qui, d'après (4), est égal à $\frac{1}{S_o^2}$, S_o représentant l'aire du parallélogramme particulier construit sur les deux vecteurs E_1 et E_2 correspondant aux potentiels ϕ^1 et ϕ^2 choisis comme coordonnées. On a donc :

$$\Theta_j = \partial_j \log S_o$$

ce qui n'est autre que (16) écrite pour l'aire particulière $E_1 \wedge E_2$. Ces différentes aires étant proportionnelles, on voit que le vecteur Θ dérive d'un potentiel log S défini à une constante près. S n'est autre que le paramètre aire classique, défini comme on sait à un facteur près .

Interprétons, maintenant, la rotation. De (12) et (14) on tire :

(17) $$a_{ij} = -\tfrac{1}{2}\, d\phi^k (\Gamma_{kij} - \Gamma_{kij}) = R_{kij}\, d\phi^k$$

Le tenseur du troisième ordre R_{kij} ainsi défini est antisymétrique relativement aux indices i et j. Il représente la rotation. On peut en déduire un vecteur R par contraction relativement à l'indice k et l'un des deux indices antisymétriques i et j. Prenons par exemple le vecteur :

(18) $$R_j = R_k{}^k{}_j = -\tfrac{1}{2}\Gamma_k{}^k{}_j + \tfrac{1}{2}\Gamma_k{}_j{}^k$$

On déduit immédiatement de (10) :

(19) $$2\, R_j = \Theta_j - D_j$$

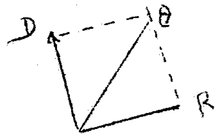
Le vecteur rotation est égal à la différence du vecteur dilatation Θ et du vecteur divergence D. Pour interpréter ce résultat, revenons au tenseur R_{kij}. Celui-ci, étant antisymétrique en i et j, n'admet que des composantes du type R_{k12}. En particulier, la rotation angulaire infiniment petite a_{12} a pour valeur :

$$a_{12} = R_{k12}\ d\ \phi^k$$

Elle est égale au produit scalaire du pseudo vecteur R_{k12} par le déplacement d ϕ^k. Mais les égalités (18) et (19) permettent de voir comment ce pseudo vecteur se déduit de $Rj = \Theta j - Dj$. En effet, si l'espace est rapporté localement à un système de coordonnées orthogonales, composantes covariantes et contravariantes coïncident. On a alors, compte tenu de l'antisymétrie en ij de R_{kij} :

$$\begin{cases} R_1 = R_{22I} = - R_{2I2} \\ R_2 = R_{II2} \end{cases}$$

Autrement dit le pseudo vecteur R_{k12} se déduit de $Rj = \Theta j - Dj$ par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$. Ainsi, la rotation est nulle lorsque le champ électrique a la direction du vecteur R, et prend une valeur maximum lorsqu'il lui est perpendiculaire. La rotation angulaire a_{12} est égale à :



$$a_{12} = R_{II2}\ d\ \phi^1 + R_{2I2}\ d\ \phi^2 = R_2\ d\phi^1 - R_1\ d\phi^2$$

c'est-à-dire, en rotation vectorielle ordinaire :

(20) $$a_{12} = d\ \overline{M} \wedge \overline{R}$$

Le vecteur $R = \Theta - D$ suffit donc bien à représenter la rotation. Les lignes de rotation nulle sont les lignes de courant du vecteur R.

Ainsi la méthode tellurique doit mettre en évidence, sur la surface topographique, trois champs de vecteurs :

- un vecteur dilatation Θ, qui dérive du potentiel log S (S étant l'aire)
- un vecteur divergence $\overline{D}$, tel que div $\mathbf{E} = \overline{D}\ \overline{E}$
- un vecteur rotation $\overline{R}$, tel que la rotation soit $d\overline{M} \wedge R$.

Ces trois vecteurs sont liés par la relation :

(2I) $$\overline{\Theta} = 2\ \overline{R} + \overline{D}$$

3°/ Composantes des 3 vecteurs en coordonnées orthogonales.

Si la surface topographique est plane, on peut la rapporter à deux axes orthogonaux Ox et Oy. Si elle est courbe, on peut toujours rapporter le voisinage d'un point M à deux axes orthogonaux du plan tangent en M à la surface topographique. Le champ des tenseurs telluriques T est supposé défini par la donnée, en tout point M, de deux vecteurs homologues $\bar{E}_1$ et $\bar{E}_2$. Le vecteur Θ s'obtient très facilement en prenant le gradient de log S, l'aire S étant définie par :

$$S = \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 = E_{1x} E_{2y} - E_{1y} E_{2x}$$

Pour avoir le vecteur $\bar{D}$, on considérera le vecteur électrique le plus général :

$$\bar{E} = \lambda_1 \bar{E}_1 + \lambda_2 \bar{E}_2$$

dont la divergence est :

$$\text{(22)} \qquad \text{div } E = \lambda_1 \text{ div } E_1 + \lambda_2 \text{ div } E_2$$

On identifiera avec la relation :

$$\text{div } E = \bar{D}\,\bar{E} = \lambda_1 \bar{D}\,\bar{E}_1 + \lambda_2 \bar{D}\,\bar{E}_2$$

d'où les deux relations :

$$\begin{cases} D_x E_{1x} + D_y E_{1y} = \text{div } E_1 = \Delta \phi_1 \\ D_x E_{2x} + D_y E_{2y} = \text{div } E_2 = \Delta \phi_2 \end{cases}$$

On en tire :

$$\text{(23)} \qquad \begin{cases} D_x = \dfrac{\Delta\phi 1}{S} E_{2y} - \dfrac{\Delta\phi 2}{S} E_{1y} \\ D_y = \dfrac{\Delta\phi 2}{S} E_{1x} - \dfrac{\Delta\phi 1}{S} E_{2x} \end{cases}$$

relations du reste évidentes, puisque l'équation :

$$\text{div } E = \lambda_i \Delta\phi^i = \lambda_i D^i$$

exprime que D admet les composantes controvariantes $\Delta\phi^i$ vis à vis des vecteurs e_1 et e_2, c'est-à-dire les composantes covariantes $\Delta\phi^i$ vis à vis de E_1 et E_2. Le vecteur rotation R se déduira ensuite de la relation(2I).

-:-:-:-:-:-:-:-:-