

Note Géostatistique n° 36

Remarques sur les équations générales du Krigeage.

I. Les équations générales du Krigeage.

Enoncé sous sa forme la plus générale, le problème du Krigeage peut se formuler de la manière suivante : on a prélevé n échantillons $S_1, S_2, \dots, S_n$ dont les teneurs (connues) sont $x_1, x_2, \dots, x_n$. En déduire le meilleur estimateur linéaire z^+ , soit :

$$(1) \quad z^+ = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

de la teneur réelle z (inconnue) d'un panneau P , connaissant la forme, les dimensions et l'implantation relative de $P, S_1, S_2, \dots, S_n$. Le gisement est supposé homogène et doué d'une loi de dispersion intrinsèque $\gamma(r)$ permettant le calcul de toutes les variances et covariances des teneurs de $P, S_1, S_2, \dots, S_n$.

On sait que l'on peut toujours résoudre effectivement ce problème en déterminant les coefficients a_i de l'équation (1) par deux conditions. La première condition exprime que z^+ et z doivent avoir même valeur moyenne dans un grand gisement, et s'écrit :

$$(2) \quad \sum a_i = 1$$

La deuxième condition est une condition de variance minimum. Elle exprime que les a_i ont des valeurs telles - compte tenu de la condition impérative (1) - que la variance $D^2(z^+ - z)$ soit minimum. Or, d'après (1), cette variance a pour expression :

$$(3) \quad D^2(z^+ - z) = \sigma^2 z - 2 \sum_i a_i \sigma_{z x_i} + \sum_i \sum_j a_i a_j \sigma_{ij}$$

On a posé, pour abréger, $\sigma_{ij} = \sigma_{x_i x_j}$ pour la covariance des teneurs x_i .

et x_j des échantillons S_i et S_j . En particulier, on notera :

$$\sigma_{ii} = \sigma_{x_i x_i} = \sigma_{x_i}^2 = \text{Variance de } x_i$$

On exprime que cette variance est minima compte tenu de la condition de liaison (2) en écrivant les conditions du minimum de l'expression :

$$D^2 (z - z^*) - 2\lambda \sum_i a_i$$

le paramètre de Lagrange, λ , étant déterminé par la condition (2) elle-même. Il suffit donc d'annuler les dérivées partielles de cette expression vis-à-vis de chacun des a_i , et d'ajouter la condition (2) pour obtenir un système de $n+1$ équations linéaires permettant de calculer effectivement les $n+1$ inconnues a_i et λ . Ce système s'écrit :

$$(4) \quad \begin{cases} \sum_j a_j \sigma_{ij} = \sigma_{z x_i} + \lambda & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_j a_j = 1 \end{cases}$$

II. Forme tensorielle des équations du Krigeage.

Nous pouvons interpréter les x_i , que nous écrirons, dans ce paragraphe x^i , en plaçant l'indice i en position supérieure, comme les composantes contravariantes d'un vecteur "tenseur" X dans un espace à n dimensions. L'estimateur z^* de la formule (1) doit être considéré comme un scalaire. Autrement dit, les paramètres de Krigeage a_i doivent être interprétés comme les composantes covariantes d'un vecteur A . L'estimateur z^* n'est alors autre que le produit scalaire $\overline{AX}$

$$z^* = a_i x^i$$

Cela signifie que, si l'on effectue sur les x^i la substitution linéaire :

$$x^{j'} = A^{j'}_i x^i$$

les a_i doivent se transformer suivant la loi :

$$a_{j1} = A^i_{j1} a_i$$

de manière que le scalaire $z^* = a_i x^i = a_{j1} x^{j1}$ reste invariant.

Pour interpréter l'équation (3) et les relations (4), nous remarquerons que, si l'on désigne par m la teneur moyenne générale du grand gisement, il est loisible de remplacer x^i , z et z^* par $(x^i - m)$, $(z - m)$ et $(z^* - m)$. La condition (2) nous garantit que m n'intervient pas réellement, en particulier on peut supposer $m = 0$. Une covariance 6_{zxi} , considérée comme valeur moyenne d'un produit $(z - m)(x^i - m)$, se comporte dans une substitution linéaire comme la coordonnée contravariante d'un vecteur V ,

$$(4) \quad u^i = 6_{zx}^i$$

et de même, une covariance 6_{ij} , considérée comme valeur moyenne d'un produit $(x^i - m)(x^j - m)$ se comporte comme la composante doublement contravariante d'un tenseur R

$$(5) \quad R^{ij} = 6_{ij}$$

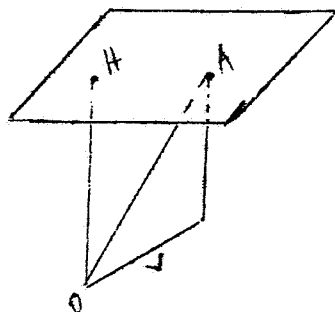
Pour interpréter la condition (2), on introduira le vecteur ayant - dans le système de coordonnées x^i - les composantes contravariantes $H^1 = H^2 \dots = H^{I^2} = 1$.

Le système (4) s'écrit alors :

$$(6) \quad \begin{cases} a_j R^{ij} = u^i + \lambda H^i \\ a_j H^j = 1 \end{cases}$$

Enfin, nous pouvons douer l'espace à n dimensions de la métrique définie par le tenseur fondamental $g^{ij} = R^{ij}$. Alors - dans cette métrique - l'expression $a_j R^{ij} = a_j g^{ij} = a^i$ représente la composante contravariante du vecteur A . Les équations (6) s'écrivent vectoriellement :

$$(7) \quad \begin{cases} \bar{A} = \bar{V} + \bar{H} \\ \bar{A} \bar{H} = 1 \end{cases}$$



La deuxième exprime que l'extrémité du vecteur A se déplace dans un plan perpendiculaire à H , et la première exprime que A est la projection sur ce plan du vecteur V . On a de plus - en multipliant par $\bar{H}$ la première équation :

$$(8) \quad \lambda H^2 = 1 - \bar{U} \bar{H}$$

De fait, la variance (3) se met sous la forme :

$$D^2 (z - z^*) = 6^2 z - V^2 + (A - V)^2$$

et prend sa valeur minimum, compte tenu de (2), lorsque A est la projection de V sur un tel plan. La solution du problème de Krigeage est alors donnée par les composantes covariantes du vecteur A, soit :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i = u_i + \lambda H_i = g_{ij} (u^j + \lambda H^j) \\ \lambda = \frac{1 - g_{ij} u^i H^j}{g_{ij} H^i H^j} \end{array} \right.$$

On en déduit facilement :

$$a_i = \frac{H_i + H^j (u_i H_j - U_j H_i)}{H_j H^j}$$

Ou, vectoriellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A} = \frac{1}{H^2} (\bar{H} + \bar{H}_1 (\bar{U}_1 \bar{H})) \\ \bar{A} = \bar{U} + \frac{\bar{H}}{H^2} - \frac{(\bar{U}\bar{H})}{H^2} \bar{H} \end{array} \right.$$

Au lieu du système x^i , on peut utiliser pour les coordonnées contravariantes un autre système de référence dans lequel le nième axe de coordonnées coïnciderait avec le vecteur H. Par exemple, on fera la substitution :

$$(9) \quad \begin{aligned} y^i &= x^i - \bar{x} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ y^n &= \bar{x} = \frac{x^1 + x^2 + \dots + x^n}{n} \end{aligned}$$

Dans ce système, les coordonnées de H sont $H^{1i} = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$ et $H^{1n} = 1$. La condition (2) s'écrit alors simplement :

$$a_n^1 = 1$$

Cela signifie que l'estimateur z^* prend la forme :

$$z^* = \bar{x} + \sum_{i=1}^{n-1} (x^i - \bar{x})$$

Dans ce système, les équations (8) deviennent :

$$\begin{cases} a_i^1 = u_i^1 & i = 1, 2 \dots n-1 \\ a_n^1 = 1 \end{cases}$$

et a_n^1 disparaît.

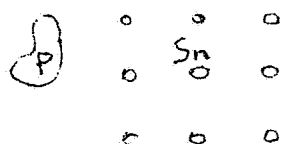
Quel que soit le système de coordonnées adoptées, on voit que le problème est résolu si l'on sait passer des coordonnées contravariantes u^i aux coordonnées covariantes u_i , c'est-à-dire si l'on connaît la matrice g_{ij} inverse de g^{ij} . Elle se calcule par la résolution du système linéaire :

$$(9) \quad g_{ij} g^{jk} = \sum_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

Le déterminant des g^{ij} n'est jamais nul. S'il était nul, en effet, il y aurait une relation linéaire fonctionnelle entre les tencurs x^i . La résolution de (9) est donc toujours possible. On remarquera que la solution g_{ij} est indépendante des u^i , c'est-à-dire des covariances ϕ_{zxi} . Cela signifie que les paramètres de Krigeage a_i s'expriment par des fonctions linéaires des covariances ϕ_{zx}^i , les coefficients de ces fonctions étant indépendants des ϕ_{zx}^i , et ne dépendant que des covariances des x^i et des x^j , c'est-à-dire de la disposition des n échantillons S_i entre eux. Les mêmes fonctions linéaires serviront à kriger un panneau quelconque à partir des n échantillons i . Nous en verrons un exemple au dernier paragraphe.

III. Forme pratique de ces équations.

En pratique, on partira du système (4) et on fera jouer un rôle particulier à l'échantillon n . On choisira, lorsque cela sera possible, un échantillon occupant une position privilégiée vis à vis



des $n-1$ autres - une position centrale par exemple comme sur le schéma ci contre. On écrira la condition (2) sous la forme :

$$(10) \quad a_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

et on éliminera partout a_n . A partir de maintenant, les indices $i, j \dots$ de nos formules ne prendront plus que

les valeurs 1, 2... n-1, et les sommes ne seront faites que de 1 à n-1. Les équations (4) s'écriront :

$$(11) \quad \begin{cases} \sum_j a_j \phi_{ij} + a_n \phi_{in} = \phi_{zxi} + \lambda & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ \sum_j a_j \phi_{nj} + a_n \phi_{nn} = \phi_{zxn} + \lambda & (i = n) \end{cases}$$

On soustrait la dernière équation (11) des (n-1) premières, de manière à éliminer λ , et on remplace a_n par sa valeur (10).

Si l'on pose :

$$(12) \quad \begin{cases} R_{ij} = \phi_{ij} - \phi_{nj} - \phi_{ni} + \phi_{nn} \\ N_i = \phi_{zxi} - \phi_{zxn} - \phi_{in} + \phi_{nn} \end{cases}$$

on obtient le système linéaire de n-1 équations à n-1 inconnues :

$$(13) \quad \sum_j a_j R_{ij} = N_i$$

dont la résolution, jointe à (10), fournit les paramètres de Krigeage. Si l'on remarque que la variance (3), après le remplacement de a_n par sa valeur (10), prend la forme :

$$(14) \quad D^2(z^* - z) = \phi_{zz}^2 - 2 \phi_{zxn} + \phi_{xn}^2 - 2 \sum_i a_i N_i + \sum_{ij} a_i a_j R_{ij}$$

on voit que, lorsque les paramètres de Krigeage a_i prennent les valeurs correspondant au système (13), la variance peut se calculer par la formule simple :

$$(15) \quad D^2(z^* - z) = \phi_{zz}^2 - 2 \phi_{zxn} + \phi_{xn}^2 - \sum_i a_i N_i$$

Cette expression - déjà rencontrée dans la Note 31 pour $n = 3$ - facilite grandement le calcul numérique de la variance de Krigeage.

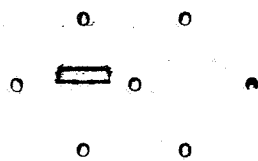
Enfin, on remarquera que le premier membre de (13) est indépendant des N_i . Il ne dépend que des covariances ϕ_{ij} des n échantillons entre eux - et non pas de leurs covariances avec le panneau z à estimer. La solution générale de (13) se met sous la forme :

$$(16) \quad a_j = \sum_i P_{ij} N_i$$

dans laquelle la matrice P_{ij} ne dépend que des n échantillons, et non pas du panneau : celui-ci n'intervient que par les N_i . La même matrice P_{ij} sert donc au Krigeage de n'importe quel panneau par les n échantillons donnés.

IV. Exemple.

Imaginons un gisement stratiforme, reconnu par sondages à maille hexagonale et destiné à être exploité en carrière. Pour maintenir



à peu près constante la teneur du minerai livré, on s'efforce d'exploiter simultanément deux ou plusieurs gradins de teneurs complémentaires. On a donc besoin, pour établir le programme d'exploitation, d'estimer à l'avance la teneur de parallélé-

pipède, correspondant aux futurs gradins et occupant une position quelconque vis à vis du réseau de sondage. On peut, par exemple, Kriger le gradin par les 7 sondages les plus proches. Comme, dans (16), les P_{ij} ne dépendent pas du gradin mais seulement de la disposition relative des 7 sondages, disposition qui ne varie pas, les P_{ij} sont calculés numériquement une fois pour toutes. Seuls les N_i , qui dépendent de la position du gradin vis à vis des 7 sondages, doivent faire l'objet d'une tabulation.

Les N_i dépendent de quatre paramètres :

- 2 pour la position du centre de gravité du gradin.
- 1 pour l'orientation du gradin vis à vis du réseau.
- 1 pour la longueur du gradin (celui-ci étant assimilé à un échantillon linéaire.)

En général, les deux derniers paramètres seront fixes pour une exploitation donnée, et il suffira d'établir une fois pour toutes les abaques à deux paramètres donnant les N_i en fonction de la position du centre du gradin. On utilisera, par exemple, la formule (8) de la note 29.

Il reste à calculer les termes de la matrice P_{ij} . Compte tenu des symétries de l'hexagone, montrons que les 21 termes de cette

matrice ne correspondent qu'à 4 termes réellement distincts. En effet, de la définition (12) et des symétries de l'hexagone, on déduit tout d'abord qu'il en est ainsi pour la matrice R_{ij} donnant le premier membre de (13), soit :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{12} = R_{23} = R_{34} = R_{45} = R_{56} = R_{61} \\ R_{13} = R_{24} = R_{35} = R_{46} = R_{51} = R_{62} \\ R_{14} = R_{25} = R_{36} \\ R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} = R_{55} = R_{66} \end{array} \right.$$

Si nous imaginons un panneau tel que tous les N_i soient nuls, à l'exception de N_1 l'équation (16) se réduit à :

$$a_j = P_{1j} N_1$$

Si l'on fait tourner ce panneau de 60° autour du centre, alors, par symétrie ternaire, tous les N_i sont nuls sauf N_2 qui prend la valeur N_1 relative à la première configuration. Mais, également par symétrie, on a aussi :

$$a_2^1 = a_1, a_3^1 = a_2 \dots a_6^1 = a_5 \quad a_1' = a_6, \text{ soit pour abréger } a_j' =$$

a_{j-1} . On a donc :

$$a_j' = P_{2j} N_2 = P_{2j} N_1 = a_{j-1} = P_{1, j-1} N_1$$

D'où l'on déduit :

$$P_{2j} = P_{1, j-1}$$

et, en réitérant cette rotation, on vérifie que les P_{ij} vérifient les mêmes relations (17) que les R_{ij} . Il suffit donc de calculer effectivement les quatre quantités P_{11} , P_{12} , P_{13} et P_{14} . Pour cela, nous écrirons les 6 équations (13) sous la forme suivante :

$$(18) \quad \begin{cases} R_{11} a_1 + R_{12} (a_2 + a_6) + R_{13} (a_3 + a_5) + R_{14} a_4 = N_1 \\ R_{11} a_2 + R_{12} (a_1 + a_3) + R_{13} (a_4 + a_6) + R_{14} a_5 = N_2 \\ R_{11} a_3 + R_{12} (a_2 + a_4) + R_{13} (a_5 + a_1) + R_{14} a_6 = N_3 \\ R_{11} a_4 + R_{12} (a_3 + a_5) + R_{13} (a_6 + a_2) + R_{14} a_1 = N_4 \\ R_{11} a_5 + R_{12} (a_4 + a_6) + R_{13} (a_1 + a_3) + R_{14} a_2 = N_5 \\ R_{11} a_6 + R_{12} (a_5 + a_1) + R_{13} (a_2 + a_4) + R_{14} a_3 = N_6 \end{cases}$$

Nous poserons :

$$(19) \quad \begin{cases} I = a_1 + a_3 + a_5 \\ P = a_2 + a_4 + a_6 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre les équations paires et impaires, on obtient le système :

$$(20) \quad \begin{cases} A I + B P = N_1 + N_3 + N_5 \\ B I + A P = N_2 + N_4 + N_6 \end{cases}$$

avec :

$$(21) \quad \begin{cases} A = R_{11} + 2 R_{13} \\ B = R_{14} + 2 R_{12} \end{cases}$$

Mais d'autre part (19) et (16) permettent d'écrire :

$$\begin{cases} I = \sum_j (P_{1j} + P_{3j} + P_{5j}) N_j \\ P = \sum_j (P_{2j} + P_{4j} + P_{6j}) N_j \end{cases}$$

En portant dans (20) et en identifiant les coefficients des N_j on obtient (compte tenu des symétries (17) pour les P_{ij} :

$$(22) \quad \begin{cases} A (P_{11} + 2 P_{13}) + B (P_{14} + 2 P_{12}) = 1 \\ A (P_{13} + 2 P_{12}) + B (P_{11} + 2 P_{13}) = 0 \end{cases}$$

D'où l'on tire :

$$(23) \quad \begin{cases} P_{11} + 2 P_{13} = \frac{A}{A^2 - B^2} \\ P_{14} + 2 P_{12} = \frac{B}{A^2 - B^2} \end{cases}$$

De même, en retranchant dans (18) la troisième équation de la première, et la 6ème de la quatrième, on obtient :

$$(24) \quad \begin{cases} C (a_1 - a_3) + D (a_6 - a_4) = N_1 - N_3 \\ C (a_6 - a_4) - D (a_1 - a_3) = N_4 - N_6 \end{cases}$$

avec :

$$(25) \quad \begin{cases} C = R_{11} - R_{13} \\ D = R_{12} - R_{14} \end{cases}$$

Si l'on remarque que l'on a :

$$\begin{cases} a_1 - a_3 = \sum_j (P_{1j} - P_{3j}) N_j \\ a_6 - a_4 = \sum_j (P_{6j} - P_{4j}) N_j \end{cases}$$

on obtient par identification dans (24) :

$$(26) \quad \begin{cases} P_{11} - P_{13} = \frac{C}{C^2 - D^2} \\ P_{14} - P_{12} = \frac{D}{C^2 - D^2} \end{cases}$$

Le système (23) (26) se résout aisément : on trouve :

$$(27) \quad \begin{cases} P_{11} = \frac{1}{3} \frac{A}{A^2 - B^2} + \frac{2}{3} \frac{C}{C^2 - D^2} \\ P_{13} = \frac{1}{3} \frac{A}{A^2 - B^2} - \frac{1}{3} \frac{C}{C^2 - D^2} \\ P_{12} = \frac{-B}{3(A^2 - B^2)} - \frac{D}{3(C^2 - D^2)} \\ P_{14} = -\frac{B}{3(A^2 - B^2)} + \frac{2D}{3(C^2 - D^2)} \end{cases}$$

Ces équations (27), jointes aux définitions (21) et (25) des ABCD

permettent de résoudre effectivement le krigeage, pourvu que les N_i soient connus. On prendra pour estimateur z^* l'expression (1) qui peut s'explicitier comme suit :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} z^* &= x_n \left[1 - (P_{I1} + 2 P_{I2} + 2 P_{I3} + P_{I4}) (N_I + N_2 + N_3 + N_4 \right. \\ &\quad \left. + N_5 + N_6) \right] + P_{II} (N_I X_I + N_2 X_2 + N_3 X_3 + N_4 X_4 + N_5 X_5 \\ &\quad + N_6 X_6) \\ &\quad + 2 P_{I2} (N_I X_2 + N_2 X_3 + N_3 X_4 + N_4 X_5 + N_5 X_6 + N_6 X_I) \\ &\quad + 2 P_{I3} (N_I X_3 + N_2 X_4 + N_3 X_5 + N_4 X_6 + N_5 X_I + N_6 X_2) \\ &\quad + P_{I4} (N_I X_4 + N_2 X_5 + N_3 X_6 + N_4 X_I + N_5 X_2 + N_6 X_3) \end{aligned} \right.$$

Ou mieux, en mettant les X_i en facteur :

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} z^* &= x_1 (N_I P_{II} + 2 N_6 P_{I2} + 2 N_5 P_{I3} + N_4 P_{I4}) \\ &\quad + X_2 (N_2 P_{II} + 2 N_I P_{I2} + 2 N_6 P_{I3} + N_5 P_{I4}) \\ &\quad + X_3 (N_3 P_{II} + 2 N_2 P_{I2} + 2 N_I P_{I3} + N_6 P_{I4}) \\ &\quad + X_4 (N_4 P_{II} + 2 N_3 P_{I2} + 2 N_2 P_{I3} + N_I P_{I4}) \\ &\quad + X_5 (N_5 P_{II} + 2 N_4 P_{I2} + 2 N_3 P_{I3} + N_2 P_{I4}) \\ &\quad + X_6 (N_6 P_{II} + 2 N_5 P_{I2} + 2 N_4 P_{I3} + N_3 P_{I4}) \\ &\quad + X_7 (1 - (P_{II} + 2 P_{I2} + 2 P_{I3} + P_{I4}) (N_I + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6)) \end{aligned} \right.$$

V-Deuxième Exemple : maille carrée.

Examinons le même problème dans le cas d'une maille carrée.

1	5	2
8	9	6
4	7	3

On cherchera d'estimer la teneur z d'un gradin quelconque à partir des teneurs des neuf sondages les plus proches, constituant un carré de 3 sur 3. Le problème est un tout petit peu plus difficile que pour la

maille hexagonale, puisque l'on a neuf sondages au lieu de sept et que les symétries sont moins parfaites. On peut néanmoins procéder assez facilement à l'inversion de la matrice des R_{ij} définis en (12).

Les $\frac{8 \times 9}{2} = 36$ R_{ij} , tout d'abord, se réduisent à huit termes distincts.

Il résulte, en effet, des symétries de la figure les relations suivantes:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} \\ R_{55} = R_{66} = R_{77} = R_{88} \\ R_{12} = R_{23} = R_{34} = R_{41} \\ R_{56} = R_{67} = R_{78} = R_{85} \\ R_{15} = R_{26} = R_{37} = R_{48} = R_{18} = R_{25} = R_{63} = R_{47} \\ R_{16} = R_{17} = R_{28} = R_{27} = R_{35} = R_{38} = R_{45} = R_{46} \\ R_{13} = R_{24} \\ R_{57} = R_{68} \end{array} \right.$$

On montre ensuite, comme dans le paragraphe précédent, que les P_{ij} obéissent aux mêmes relations (30) de symétrie que les R_{ij} , et n'admettent donc que 8 termes distincts. Il suffit d'imaginer un panneau tel que N_1 seul soit différent de 0, et d'imprimer à la figure des rotations de 90° , puis de recommencer le même raisonnement avec N_5 seul différent de 0. On écrit ensuite, explicitement, les 8 équations (13) en tenant compte de (30) : soit :

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{11}a_1 + R_{12}(a_2+a_4) + R_{13}a_3 + R_{15}(a_5+a_8) + R_{16}(a_6+a_7) = N_1 \\ R_{12}(a_1+a_3) + R_{11}a_2 + R_{13}a_4 + R_{15}(a_5+a_6) + R_{16}(a_7+a_8) = N_2 \\ R_{13}a_1 + R_{12}(a_2+a_4) + R_{11}a_3 + R_{16}(a_5+a_8) + R_{15}(a_6+a_7) = N_3 \\ R_{12}(a_1+a_3) + R_{13}a_2 + R_{11}a_4 + R_{16}(a_5+a_6) + R_{15}(a_7+a_8) = N_4 \\ R_{15}(a_1+a_2) + R_{16}(a_3+a_4) + R_{56}a_5 + R_{56}(a_6+a_8) + R_{57}a_7 = N_5 \\ R_{16}(a_1+a_4) + R_{15}(a_2+a_3) + R_{56}(a_5+a_7) + R_{55}a_6 + R_{57}a_8 = N_6 \\ R_{16}(a_1+a_2) + R_{15}(a_3+a_4) + R_{57}a_5 + R_{56}(a_6+a_8) + R_{55}a_7 = N_7 \\ R_{15}(a_1+a_4) + R_{16}(a_2+a_3) + R_{56}(a_5+a_7) + R_{57}a_6 + R_{55}a_8 = N_8 \end{array} \right.$$

La solution générale est de la forme (16), les P_{ij} vérifiant les relations de symétries (30). On ajoutera, tout d'abord, membre à membre les quatre premières et les quatre dernières équations (31). En posant :

$$(32) \quad \begin{cases} A = R_{II} + 2 R_{I2} + R_{I3} \\ B = 2 (R_{I5} + R_{I6}) \\ C = R_{55} + 2 R_{56} + R_{57} \end{cases}$$

on tombe sur le système :

$$\begin{cases} A (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + B (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) = N_I + N_2 + N_3 + N_4 \\ B (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + C (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) = N_5 + N_6 + N_7 + N_8 \end{cases}$$

qui se résout par les relations :

$$(33) \quad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{(N_I + N_2 + N_3 + N_4) C - (N_5 + N_6 + N_7 + N_8) B}{A C - B^2} \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \frac{(N_5 + N_6 + N_7 + N_8) A - (N_I + N_2 + N_3 + N_4) B}{A C - B^2} \end{cases}$$

On remplace ensuite les a_i par leur expression (16), compte tenu des relations de symétrie, et on identifie les coefficients des N_j . On obtient ainsi trois relations distinctes entre les P_{ij} :

$$(34) \quad \begin{cases} P_{II} + 2 P_{I2} + P_{I3} = \frac{C}{A C - B^2} \\ P_{55} + 2 P_{56} + P_{57} = \frac{A}{A C - B^2} \\ 2 (P_{I5} + P_{I6}) = - \frac{B}{A C - B^2} \end{cases}$$

En deuxième lieu, on forme les quatre sommes $N_I + N_3$, $N_2 + N_4$, $N_5 + N_7$ et $N_6 + N_8$, et les deux différences $N_I + N_3 - N_2 - N_4$ et $N_5 + N_7 - N_6 - N_8$.

En posant :

$$(35) \quad \begin{cases} V = R_{II} - 2 R_{I2} + R_{I3} \\ V = R_{55} - 2 R_{56} + R_{57} \end{cases}$$

On tombe sur le système suivant :

$$(36) \quad \begin{cases} V (a_1 + a_3 - a_2 - a_4) = N_1 + N_3 - N_2 - N_4 \\ V (a_5 + a_7 - a_6 - a_8) = N_5 + N_7 - N_6 - N_8 \end{cases}$$

On remplace alors dans (36) les a_j par leurs expressions (16), compte tenu de (30), ce qui fournit deux nouvelles relations distinctes entre les P_{ij} :

$$(37) \quad \begin{cases} P_{II} + P_{I3} - 2 P_{I2} = \frac{1}{V} \\ P_{55} + P_{57} - 2 P_{56} = \frac{1}{V} \end{cases}$$

En troisième lieu, enfin, on forme les différences $N_1 - N_3$, $N_2 - N_4$, $N_5 - N_7$ et $N_6 - N_8$. En posant :

$$(38) \quad \begin{cases} R_{I5} - R_{I6} = D \\ R_{55} - R_{57} = E \\ R_{II} - R_{I3} = F \end{cases}$$

on obtient le système suivant :

$$(39) \quad \begin{cases} F (a_1 - a_3) + D (a_5 + a_8 - a_6 - a_7) = N_1 - N_3 \\ F (a_2 - a_4) + D (a_5 + a_6 - a_7 - a_8) = N_2 - N_4 \\ D (a_1 + a_2 - a_3 - a_4) + E (a_5 - a_7) = N_5 - N_7 \\ D (a_1 + a_4 - a_2 - a_3) + E (a_6 - a_8) = N_6 - N_8 \end{cases}$$

On remplace ensuite dans (39) les a_i par leurs expressions (16), compte tenu de (30) et on identifie les coefficients de N_1 et N_5 , dans la première et la troisième : on tombe sur les quatre équations :

$$\begin{cases} F (P_{II} - P_{I3}) + 2D (P_{I5} - P_{I6}) = 1 \\ F (P_{I5} - P_{I6}) + D (P_{55} - P_{57}) = 0 \\ D (P_{II} - P_{I3}) + E (P_{I5} - P_{I6}) = 0 \\ 2D (P_{I5} - P_{I6}) + E (P_{55} - P_{57}) = 1 \end{cases}$$

De la première et de la troisième, on déduit :

$$(40) \quad \begin{cases} P_{II} - P_{I3} = -\frac{E}{2D^2 - EF} \\ P_{I5} - P_{I6} = \frac{D}{2D^2 - EF} \end{cases}$$

De la deuxième et de la quatrième, de même :

$$(4I) \quad \begin{cases} P_{55} - P_{57} = -\frac{F}{2D^2 - EF} \\ P_{I5} - P_{I6} = \frac{D}{2D^2 - EF} \end{cases}$$

Le système constitué par : (34), (37), (40) et (4I) permet le calcul effectif de tous les P_{ij} . On trouve ainsi :

$$(42) \quad \begin{cases} P_{II} = \frac{1}{4} \frac{C}{AC - B^2} + \frac{1}{4V} - \frac{E}{2(2D^2 - EF)} \\ P_{I2} = \frac{1}{4} \frac{C}{AC - B^2} - \frac{1}{4V} \\ P_{I3} = \frac{1}{4} \frac{C}{AC - B^2} + \frac{1}{4V} + \frac{E}{2(2D^2 - EF)} \\ P_{I5} = -\frac{1}{4} \frac{B}{AC - B^2} + \frac{1}{2} \frac{D}{2D^2 - EF} \\ P_{I6} = -\frac{1}{4} \frac{B}{AC - B^2} - \frac{1}{2} \frac{D}{2D^2 - EF} \\ P_{56} = \frac{1}{4} \frac{A}{AC - B^2} - \frac{1}{4V} \\ P_{55} = \frac{1}{4} \frac{A}{AC - B^2} + \frac{1}{4V} - \frac{1}{2} \frac{F}{2D^2 - EF} \\ P_{57} = \frac{1}{4} \frac{A}{AC - B^2} + \frac{1}{4V} + \frac{1}{2} \frac{F}{2D^2 - EF} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} A = R_{II} + 2R_{I2} + R_{I3} \\ B = 2(R_{I5} + R_{I6}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (43) \quad & C = R_{55} + 2 R_{56} + R_{57} \\
 & U = R_{II} - 2 R_{I2} + R_{I3} \\
 & V = R_{55} - 2 R_{56} + R_{57} \\
 & D = R_{I5} - R_{I6} \\
 & E = R_{55} - R_{57} \\
 & F = R_{II} - R_{I3}
 \end{aligned}$$

L'estimateur z^* de la teneur inconnue du panneau s'écrit alors explicitement :

$$\begin{aligned}
 (44) \quad z^* = & x_1 \left[P_{II} N_I + P_{I2} (N_2 + N_4) + P_{I3} N_3 + P_{I5} (N_5 + N_8) + P_{I6} (N_6 + N_7) \right] \\
 & + x_2 P_{II} N_2 + P_{I2} (N_3 + N_I) + P_{I3} N_4 + P_{I5} (N_6 + N_5) + P_{I6} (N_7 + N_8) \\
 & + x_3 P_{II} N_3 + P_{I2} (N_4 + N_2) + P_{I3} N_I + P_{I5} (N_7 + N_6) + P_{I6} (N_8 + N_5) \\
 & + x_4 P_{II} N_4 + P_{I2} (N_I + N_3) + P_{I3} N_2 + P_{I5} (N_8 + N_7) + P_{I6} (N_5 + N_6) \\
 & + x_5 P_{I5} (N_I + N_2) + P_{I6} (N_3 + N_4) + P_{55} N_5 + P_{56} (N_6 + N_8) + P_{57} N_7 \\
 & + x_6 P_{I5} (N_2 + N_3) + P_{I6} (N_4 + N_I) + P_{55} N_6 + P_{56} (N_7 + N_5) + P_{57} N_8 \\
 & + x_7 P_{I5} (N_3 + N_4) + P_{I6} (N_I + N_2) + P_{55} N_7 + P_{56} (N_8 + N_6) + P_{57} N_5 \\
 & + x_8 P_{I5} (N_4 + N_I) + P_{I6} (N_2 + N_3) + P_{55} N_8 + P_{56} (N_5 + N_7) + P_{57} N_6 \\
 & + x_9 \left[1 - (N_I + N_2 + N_3 + N_4) (P_{II} + 2P_{I2} + P_{I3} + 2P_{I5} + 2P_{I6}) - (N_5 + N_6 + N_7 + N_8) \right. \\
 & \quad \left. (P_{55} + 2P_{56} + P_{57} + 2P_{I5} + 2P_{I6}) \right]
 \end{aligned}$$

Tout comme dans le cas de l'hexagone, les P_{ij} , pour un gisement donné, seront calculés numériquement une fois pour toutes à l'aide de (42) et (43), tandis que les N_i devront faire l'objet d'une tabulation qui dépendra de deux paramètres si les gradins ont tous même dimension et même orientation.

---:---:---:---:---:---:---:---:---