

DIRECTION DES ETUDES GENERALES

Département des Réserves

N-41

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 42

REPRESENTATION TRANSITIVE GLOBALE
D'UN PHENOMENE MINERALISATEUR

par G. MATHERON

- : -

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 42

Représentation transitive globale d'un phénomène minéralisateur

Dans la représentation transitive globale d'une variable régionalisée - on dira, plus brièvement, dans l'optique transitive - on renonce à l'hypothèse d'une loi de dispersion intrinsèque. On prend le phénomène physique étudié comme il se présente et, en particulier, on lui attribue une extension finie. La variable régionalisée ne prend des valeurs différentes de zéro qu'à l'intérieur d'un domaine borné (mais non nécessairement connexe). Ce domaine n'est autre que le champ géométrique réel de la variable : celle-ci est supposée identiquement nulle à l'extérieur. A la limite, on pourra admettre que ce domaine devienne infini, sous réserve que les intégrales utiles restent convergentes : on obtient alors un modèle de répartition zonale, où la minéralisation décroît, plus ou moins régulièrement, à partir d'un noyau riche. On notera qu'un tel modèle est profondément étranger aux schémas de dispersion intrinsèque.

Une deuxième caractéristique de la représentation transitive est de prendre en charge les phénomènes de bordure. Le gisement est conçu comme une pépite isolée au sein d'un univers vide. Mais ses frontières ne sont pas infranchissables, puisque la régionalisation règne dans l'espace entier, avec des valeurs nulles de la variable à l'extérieur des limites du phénomène réel. Toute intégration est étendue à l'infini et franchit les frontières. En particulier, si la variable est prise égale à 1 à l'intérieur du gisement et à zéro à l'extérieur, on obtient une représentation de l'effet de bordure à l'état pur, c'est-à-dire une formulation précise du problème géométrique. Ce prolongement à l'infini, par des valeurs nulles, du champ géométrique peut être considéré comme un cas limite de l'artifice de périodisation fictive, lorsque la période augmente indéfiniment. Les intégrales de Fourier remplaceront ici les séries de Fourier que nous avons utilisées par ailleurs. En contrepartie, la notion de valeur moyenne d'une variable régionalisée s'évanouit - puisque la régionalisation est diluée dans un champ infini. La théorie transitive s'intéressera à des intégrales, et non à des valeurs moyennes - à des quantités de minerai ou de métal, et non à des teneurs. De même, elle s'interdira l'étude locale de la minéra-

lisation et, en particulier, ne résoudra que les problèmes posés par l'estimation globale d'un gisement entier. Elle ne traitera ni le krigeage, ni l'estimation des panneaux, et considérera tout schéma de reconnaissance comme un schéma à champ fixe et implantation flottante.

En résumé, la représentation transitive globale peut être dite plus compréhensive que les schémas intrinsèques, en ce sens qu'elle s'affranchit de l'hypothèse d'une loi de dispersion absolue, rend compte de l'effet de bordure et formule d'une manière correcte l'estimation des tonnages de minerai ou de métal. Par contre elle peut être considérée comme plus restrictive en ce sens que les teneurs lui échappent et qu'elle ne permet ni krigeage, ni estimation locale. Représentations transitives et intrinsèques apparaissent comme complémentaires.

I.- LE SYMBOLISME TRANSITIF

1).- Covariogramme et transformée de Fourier.

Dans un espace à n dimensions, nous considérons une variable régionalisée à support ponctuel prenant la valeur $f(x)$ au point x de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. La variable $f(x)$ ne prend de valeurs différentes de 0 qu'à l'intérieur d'un domaine D . Nous parlons de domaine, et non plus de champ géométrique, pour indiquer que la régionalisation s'étend à l'espace entier, $f(x)$ étant nulle à l'extérieur de D . Le domaine D est supposé borné et, à cela près, quelconque. Dans certains cas, il pourra être infini, sous réserve que $f(x)$ vérifie des conditions convenables de sommabilité. Plus que comme une fonction, d'ailleurs, le symbolisme transitif traite la variable régionalisée $f(x)$ comme une fonctionnelle, c'est-à-dire comme une distribution. On remarquera que l'exploitant, pour des raisons pragmatiques, adopte spontanément le même point de vue. Il ne se soucie pas de la répartition dans l'espace des grains de stérile et de minerai. Ce qui l'intéresse, c'est de connaître, ou de prévoir, le résultat d'opérations technologiques bien définies (prélèvement d'échan-

... / ...

tillons, exploitation de panneaux) lorsqu'on les applique à l'espace où se distribue la minéralisation. Cependant, comme nous ne poursuivons pas un objectif abstrait, nous n'utiliserons pas explicitement les distributions, et nous établirons le symbolisme transitif dans le langage de la théorie ordinaire des fonctions

A la variable ponctuelle $f(x)$, nous associerons un covariogramme et une transformée de Fourier. Le covariogramme $g(h)$, tout d'abord, est défini, pour un argument vectoriel h de coordonnées $(h_1, h_2 \dots h_n)$, par l'expression :

$$(1) \quad g(h) = \int f(x) f(x+h) dx$$

L'intégrale est une intégrale multiple d'ordre n , étendue à l'espace entier, et dx est l'élément de volume $dx_1, dx_2, \dots dx_n$. Ce $g(h)$ transitif se distingue d'un covariogramme intrinsèque par deux traits caractéristiques. En premier lieu, il est donné comme l'intégrale du produit $f(x) f(x+h)$, et non comme sa valeur moyenne dans un champ géométrique. Si F et L sont les dimensions de la variable et des longueurs (au sens de l'analyse dimensionnelle) la dimension du $g(h)$ est $F^2 L^n$, et non pas F^2 . En deuxième lieu, la valeur moyenne de $f(x)$ - la teneur moyenne m - ne figure pas dans l'expression du $g(h)$. Il est commode (en changeant x en $-x$) de se représenter le $g(h)$ comme le produit de convolution de $f(x)$ par son transposé $\bar{f}(x) = f(-x)$, ce que nous écrirons symboliquement sous la forme :

$$(2) \quad g(h) = f * \bar{f}$$

La transformée de Fourier de $f(x)$ est définie, pour un argument vectoriel u de coordonnées $(u_1, u_2, \dots u_n)$, par l'expression classique :

$$(3) \quad \phi(u) = \int e^{iux} f(x) dx$$

où ux représente le produit scalaire $u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n$.

La transformation inverse :

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-iux} \phi(u) du$$

est toujours possible, au moins au sens de la théorie des distributions. ($f(x)$ est une distribution tempérée*). Compte tenu de l'équation (2) et de l'échange des

* L.SCHWARTZ - "Théorie des distributions". 1959 - Hermann - Paris.

produits convolutifs et multiplicatifs, on voit que la transformée de Fourier de $g(h)$ est égale au carré du module de $\phi(u)$:

$$(5) \int g(h) e^{iuh} dh = |\phi(u)|^2$$

Désignons par Q - quantité de métal* - l'intégrale de la variable régionalisée $f(x)$, étendue à tout l'espace :

$$(6) \quad Q = \int f(x) dx$$

En faisant $u = 0$ dans les équations (3) et (5), on voit immédiatement que l'intégrale de $g(h)$ étendue à tout l'espace, est égale au carré de la quantité de métal :

$$(7) \int g(h) dh = Q^2$$

Dans les schémas intrinsèques, la dispersion de la variable régionalisée était mesurée par une variance, égale à la valeur de $g(h)$ en $h = 0$. Dans la représentation transitive, le $g(0)$, que l'on peut appeler variance transitive, est défini comme l'intégrale du carré de la variable :

$$(8) \quad g(0) = \int f(x)^2 dx$$

En notation de produit scalaire, on écrira :

$$(9) \quad g(0) = f \cdot f$$

Et, par inversion de (5), on aura aussi :

$$(10) \quad g(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int |\phi(u)|^2 du$$

2).- Variable à support non ponctuel.

Donnons nous, en premier lieu, un support v , borné, de forme géométrique, de taille et d'orientation déterminée. La position de v dans l'espace est repérée par les coordonnées $(x_1, x_2 \dots x_n)$ de son centre de gravité x . On peut définir

... / ...

*

Q est effectivement une quantité de métal si $f(x)$ est une teneur volumétrique.

deux variables régionalisées de support v : la teneur moyenne $y(x)$, c'est-à-dire la valeur moyenne de $f(x)$ dans v , ou la quantité de métal $q(x)$, ou intégrale de $f(x)$ dans v .

$$(11) \quad y(x) = \frac{1}{v} \int_v f(x+h) dh$$

$$(12) \quad q(x) = \int_v f(x+h) dh$$

Dans cette écriture, l'intégration se fait relativement à l'argument vectoriel h dont l'extrémité balaye le volume v centré en $x = 0$. La définition (11) de la moyenne dans v n'a de sens que si le support est borné. La quantité de métal (12) est définie sur un support quelconque.

Plus généralement, on peut définir une teneur moyenne et une quantité de métal généralisée en se donnant une fonction de pondération $p(h)$, définie dans le support v centré à l'origine et nulle à l'extérieur :

On écrira, par exemple :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} y(x) = \frac{1}{p} \int_v f(x+h) p(h) dh \\ p = \int_v p(h) dh \end{array} \right.$$

De telles teneurs moyennes pondérées ont été utilisées, en schéma intrinsèque, dans la théorie du krigeage continu. Il est clair que la définition (11) est un cas particulier de (13), la fonction $p(h)$ étant définie par :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p(h) = 1 & \text{si } h \text{ appartient à } v. \\ p(h) = 0 & \text{si } h \text{ n'appartient pas à } v. \end{array} \right.$$

Pour développer le symbolisme transitif, nous mettrons la définition (13) sous la forme du produit de convolution de $f(x)$ par la transposée $p(x) = p(-x)$ de la fonction de pondération.

... / ...

$$(15) \begin{cases} y(x) = \frac{1}{p} f(x) * V_p(x) \\ q(x) = f(x) * V_p(x) \end{cases}$$

Lorsque la fonction de pondération $p(h)$ admet la définition (14), l'opération symbolisée en (15) représente le prélèvement d'un échantillon v (ou l'exploitation d'un panneau v). La fonction de pondération $p(h)$ sera dite aussi, en ce cas, fonction de prélèvement.

Le rapprochement de la définition (15) de $q(x)$ et de l'expression (2) du covariogramme montre que le $g(h)$ n'est pas autre chose que la quantité de métal généralisée associée à la fonction de pondération $p(h)$ identique à la variable régionalisée $f(h)$ elle-même. Une conséquence géométrique simple de cette remarque nous sera utile dans la suite. Si $f(x)$ est la variable ponctuelle géométrique associée à un volume V :

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \text{ appartient à } V. \\ f(x) = 0 & \text{si } x \text{ n'appartient pas à } V. \end{cases}$$

qui s'introduit naturellement dans l'étude du problème géométrique, cette variable $f(x)$ peut aussi s'interpréter comme la fonction $p(h)$ associée au prélèvement d'un échantillon égal au gisement V lui-même. Pour un argument vectoriel h , le covariogramme $g(h)$ n'est donc pas autre chose que le volume de l'intersection de V et de son translaté dans la translation h .

La règle d'échange des produits convolutifs et multiplicatifs donne immédiatement la transformée de Fourier d'une variable non ponctuelle.

Si $\eta(u)$ et $\overline{w}(u)$ sont les transformées de $y(x)$ et $p(h)$, on a :

$$(16) \quad \eta(u) = \frac{1}{p} \overline{w}(u) \phi(u)$$

De même, le covariogramme $G(h)$ de $y(x)$ peut se déduire de sa transformée de Fourier, qui est $[\eta(u)]^2$. On peut aussi utiliser les définitions (2) et (15),

... / ...

et écrire :

$$G(h) = \frac{1}{p^2} \int f(x) * \overset{V}{p}(x) \int * \int \overset{V}{f}(x) * p(x) \int$$

Compte tenu des propriétés d'associativité et de commutativité d'un produit de convolution, on voit que le $G(h)$ de la variable pondérée par $p(h)$ se déduit du $g(h)$ de la variable ponctuelle $f(x)$ par la relation :

$$(17) \quad G(h) = \frac{1}{p^2} g * (p * \overset{V}{p})$$

En particulier, si $p(h)$ est la fonction de prélèvement (14) associée à l'échantillon v , on voit que le covariogramme $G(h)$ des échantillons v n'est autre que la valeur moyenne du covariogramme ponctuel $g(u)$, lorsque les deux extrémités de l'argument vectoriel u décrivent séparément deux volumes v se déduisant l'un de l'autre dans la translation h .

De même, la variance transitive $G(0)$ de la variable non ponctuelle $y(x)$ est donnée par :

$$(18) \quad G(0) = \frac{1}{p^2} g.(p * \overset{V}{p})$$

Cette expression représente - comme dans la théorie des schémas intrinsèques - la valeur moyenne (pondérée par $p(h)$) du $g(h)$ ponctuel dans le volume v .

Notons enfin que la quantité de métal associée à $y(x)$ est égale à la quantité de métal Q associée à la variable ponctuelle $f(x)$. On a, en effet, compte tenu de (16) :

$$(19) \quad \int y(x) dx = \eta(0) = \frac{1}{p} \overline{w}(0) \phi(0) = Q = \int f(x) dx$$

puisque $\overline{w}(0)$ est égal à p , d'après la définition (13) de p , et $\phi(0)$ à Q , d'après l'équation (3).

... / ...

3).- Processus de montée et de descente.

Si l'échantillon v n'est pas borné, les teneurs moyennes $y(x)$ s'évanouissent, mais les quantités de métal $q(x)$, définies en (12), conservent leur signification. A la limite, le volume illimité v peut se réduire à une droite, un plan (ou un hyperplan si l'on a plus de trois dimensions), et rien n'empêche d'introduire les variables régionalisées à $n-1$, $n-2$... dimensions définies comme les quantités de métal portées par des droites, des plans ... parallèles. Pour préciser cette notion, désignons par $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, la valeur de la variable régionalisée f_n à n dimensions au point de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. La variable à $n-1$ dimensions définies par :

$$(20) \quad f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n$$

représente les quantités de métal portées par les droites parallèles à l'axe des x_n . De même, la variable à $(n-2)$ dimensions :

$$(21) \quad f_{n-2}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) dx_{n-1} dx_n$$

représente les quantités de métal portées par des plans parallèles aux axes des x_{n-1} et des x_n . L'opération (20), qui fait passer de f_n à f_{n-1} , sera désignée comme une montée d'ordre 1 le long de l'axe des x_n . L'opération (21), qui fait passer de f_n à f_{n-2} , sera de même désignée comme une montée d'ordre 2 le long du plan x_n, x_{n-1} . On définira de même, dans un espace à plus de trois dimensions, des montées d'ordre 3, 4, etc ... Pour obtenir une montée le long d'une droite ou d'un plan non parallèle à des axes de coordonnées, il suffira d'effectuer une rotation convenable des axes de coordonnées. Si l'on désigne par $\phi_n(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\phi_{n-1}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ et $\phi_{n-2}(u_1, u_2, \dots, u_{n-2})$ les transformées de Fourier de f_n , f_{n-1} , et f_{n-2} , les équations (20) et (21) deviennent immédiatement :

$$(22) \quad \begin{cases} \phi_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) = \phi_n(u_1, \dots, u_{n-1}, 0) \\ \phi_{n-2}(u_1, \dots, u_{n-2}) = \phi_n(u_1, \dots, u_{n-2}, 0, 0) \end{cases}$$

... / ...

L'opération de montée le long de l'axe x_n se traduit par l'annulation de la coordonnée u_n de la transformée de Fourier. Plus généralement, la montée le long d'une droite, d'un plan ... quelconques se traduirait par une, deux ... relations linéaires homogènes entre les U_i . Nous n'insisterons pas ici sur l'algèbre de la montée. Remarquons seulement que les montées le long de deux axes perpendiculaires sont des opérations commutatives et associatives, dont le produit donne la montée d'ordre deux dans le plan des deux axes.

L'opération inverse de la montée - ou descente - est liée étroitement au problème classique de Radon⁽¹⁾, qui consiste à déterminer une fonction, connaissant la valeur de son intégrale sur toutes les droites, ou tous les plans, de l'espace. Dans le paragraphe suivant, nous aborderons ce problème dans le cas particulier des schémas isotropes.

La montée prend une signification très concrète pour une variable $f_3(xyz)$ à trois dimensions représentant une teneur : l'axe des z étant supposé vertical, les quantités de métal :

$$f_2(xy) = \int f(xyz) dz$$

$$f_1(z) = \iint f(xyz) dx dy$$

représentent respectivement les accumulations des sondages verticaux et les quantités de métal au mètre d'approfondissement portées par les sections horizontales.

Examinons maintenant comment se répercute la montée sur le covariogramme. Soient g_n, g_{n-1}, g_{n-2} , les covariogrammes affectés aux variables régionalisées f_n, f_{n-1} et f_{n-2} . On écrira, en tenant compte successivement de la définition (1) du covariogramme g_{n-1} , de la définition (20) de la montée le long de l'axe des x_n , et en intervertissant l'ordre des intégrations ;

... / ...

(1) - Guelfand et Chilov - " les distributions " - Traduction française chez Dunod - 1962.

$$\begin{aligned} g_{n-1}(h_1 \dots h_{n-1}) &= \iint f_{n-1}(x_1 + h_1, \dots, x_{n-1} + h_{n-1}) f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= \int \dots \int dx_1 \dots dx_{n-1} \iint f_n(x_1 + h_1, \dots, x_{n-1} + h_{n-1}, x_n + \lambda) f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int \dots \int f_n(x_1 + h_1, \dots, x_{n-1} + h_{n-1}, x_n + \lambda) f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

On reconnaît, dans la dernière intégrale, l'expression de g_n .
On a donc :

$$(23) \quad g_{n-1}(h_1 \dots h_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(h_1 \dots h_{n-1}, \lambda) d\lambda$$

De la même façon, on trouve pour le g_{n-2} l'expression :

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{n-2}(h_1 \dots h_{n-2}) &= \iint g_n(h_1 \dots h_{n-2}, \lambda, \mu) d\lambda d\mu \\ &= \int g_{n-1}(h_1 \dots h_{n-2}, \lambda) d\lambda \end{aligned} \right.$$

Autrement dit, le covariogramme monte et descend de la même manière que la variable régionalisée à laquelle il est associé. Cela pouvait se voir plus simplement encore, à l'aide des relations (22), en remarquant que les transformées de Fourier de g_n, g_{n-1}, g_{n-2} sont $/\phi_n^2, / \phi_{n-1}^2, / \phi_{n-2}^2$

4.- Montée et Descente dans un clavier isotrope.

On dira qu'une variable régionalisée $f_n(x)$ obéit à un schéma transitiif isotrope si son covariogramme transitiif $g_n(h)$ ne dépend pas de la direction de l'argument vectoriel h , mais seulement de son module r :

$$r = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}$$

... / ...

On écrira alors $g_n(r)$ au lieu de $g_n(h)$. Les schémas isotropes, et ceux qui peuvent se ramener à un schéma isotrope par une affinité géométrique, seront seuls utilisés dans la plupart des applications pratiques. Ils présentent une propriété essentielle, qui est la régularisation à la montée du comportement des covariogrammes au voisinage de l'origine. Un terme linéaire en r donne, par montées successives, des termes en $r^2 \log r$ et r^3 . L'étude des schémas intrinsèques nous a habitués à l'idée que l'efficacité d'une maille de reconnaissance était liée à la régularité du comportement du covariogramme au voisinage de $r = 0$. De fait, on s'attend bien à ce que les tonnages de métal au mètre d'approfondissement donnent de meilleures indications que les accumulations de sondages verticaux, ces dernières étant elles-mêmes supérieures à des prélèvements ponctuels. En dehors du cas isotrope, cependant, on peut imaginer des schémas qui ne possèdent pas cette propriété. Par exemple, si le covariogramme à 3 dimensions est de la forme :

$$g_3(xyz) = g(x) g(y) g(z)$$

et si l'on pose :

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du$$

on obtient, par montées d'ordre 1 et 2, les covariogrammes :

$$\begin{cases} g_2(xy) = A g(x) g(y) \\ g_1(z) = A^2 g(z) \end{cases}$$

qui ont même comportement à l'origine que g_3 lui-même. En pareil cas, on parlera d'effet rectangulaire. Il n'est pas exclu que cet effet existe dans la nature sous forme plus ou moins atténuée. On s'en rend compte en imaginant le cas limite où l'on cherche à évaluer le volume d'un parallélépipède par des sondages parallèles aux arêtes ou des sections parallèles aux faces. Le covariogramme de la variable géométrique

... / ...

ponctuelle est du type $(1 - x) (1 - y) (1 - z)$, et donne, à la montée, $(1 - x) (1 - y)$ et $(1 - z)$. Nous pensons, cependant, que la plupart des phénomènes naturels peuvent être traités en schéma isotrope.

Les processus de montée et de descente en schéma isotrope peuvent être étudiés directement, à l'aide des équations (23) et (24), ou par l'intermédiaire de la transformation de Fourier et des équations (22). Examinons, tout d'abord, les possibilités de la transformation de Fourier. Le covariogramme $g_n(r)$ possédant la symétrie sphérique, il en est de même de sa transformée qui se met sous la forme $G(\rho)$, avec ici :

$$(25) \quad \rho = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

On sait que $G(\rho)$ admet l'expression classique suivante :

$$(26) \quad G(\rho) = F_n \sqrt{g_n(r)} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\rho^{n/2-1}} \int_0^\infty r^{n/2} g_n(r) J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r) dr$$

où $J_{\frac{n}{2}-1}$ représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre $\frac{n}{2} - 1$,

et F_n désigne l'opérateur de Fourier relatif à un espace à n dimensions.

Le processus de montée le long de l'axe des x_n , par exemple, se traduit, d'après les équations (22), par l'annulation de la coordonnée u_n de la transformée de Fourier du variogramme. Mais la transformée de g_{n-1} possède, elle aussi, la symétrie sphérique dans l'espace à $n - 1$ dimensions. L'équation (25) montre que cette transformée n'est autre que $G(\rho)$. Plus généralement, on voit qu'en schéma isotrope une montée ou une descente d'ordre quelconque, le long d'une droite, d'un plan, etc d'orientation quelconque laisse invariante la transformée $G(\rho)$ du covariogramme

$$(27) \quad G(\rho) = F_n \sqrt{g_n(r)} = F_{n-1} \sqrt{g_{n-1}(r)} = \dots = F_{n-k} \sqrt{g_{n-k}(r)}$$

... / ...

L'inversion de l'intégrale (26), par la transformation réciproque, donne immédiatement l'expression du covariogramme $g_{n-k}(r)$ obtenu par montée d'ordre k :

$$(28) \quad g_{n-k}(r) = \frac{(2\pi)^{-\frac{n-k}{2}}}{r^{\frac{n-k}{2}-1}} \int_0^{\infty} \rho^{\frac{n-k}{2}} G(\rho) J_{\frac{n-k}{2}-1}(\rho r) d\rho$$

La formule (28) donne la solution théorique du problème de montée et descente en schéma isotrope. Pour descendre, il suffit de donner à k une valeur entière négative. On peut également définir des montées et descentes d'ordre non entier en donnant à k des valeurs quelconques. Plus généralement, la donnée d'une fonction $G(\rho)$ permet de définir une famille ou clavier de covariogrammes $g_{\lambda}(r)$, dépendant continûment d'un paramètre λ

$$(29) \quad g_{\lambda}(r) = (2\pi)^{-\frac{\lambda}{2}} r^{\frac{\lambda}{2}-1} \int_0^{\infty} \rho^{\frac{\lambda}{2}} G(\rho) J_{\frac{\lambda}{2}-1}(\rho r) d\rho$$

Le jeu du processus de montée et de descente permet de décrire tout le clavier des g_{λ} , une montée d'ordre μ , par exemple, faisant passer de g_{λ} à $g_{\lambda-\mu}$

Remarquons bien que c'est la transformée de Fourier dans l'espace à $n-k$ dimensions - $F_{n-k} \int g_{n-k}(r)$ - de la fonction de $n-k$ variables

$g_{n-k} \int \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-k}^2}$ qui reste invariante. Si $g_{n-k}(r)$ est considérée comme fonction de la variable unique r , les formules (26), (28) ou (29) représentent des transformations de Hankel. La transformée de Fourier à une dimension d'un g_{λ} :

$$F_1 g_{\lambda}(r) = \int_0^{iur} g_{\lambda}(r)$$

ne reste pas invariante à la montée : Nous verrons qu'elle descend quand g_{λ} monte, et réciproquement.

... / ...

Ces remarques recevront des applications lors de l'étude des schémas transitifs particuliers.

Passons maintenant à l'étude directe du processus de montée et descente en schéma isotrope, à partir des équations (23) et (24). Les montées d'ordre 1 et 2 font passer de $g_n(r)$ à $g_{n-1}(r)$ et $g_{n-2}(r)$ par les transformations :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{n-1}(r) = 2 \int_0^{\infty} g_n \left[\sqrt{r^2 + x^2} \right] dx \\ g_{n-2}(r) = 2\pi \int_0^{\infty} g_n \left[\sqrt{r^2 + \rho^2} \right] \rho d\rho \end{array} \right.$$

La deuxième équation - par un changement de variable évident - se met sous la forme :

$$(31) \quad g_{n-2}(r) = 2\pi \int_r^{\infty} g_n(u) u du$$

qui montre que la montée d'ordre 2 (ou plus généralement toute montée d'ordre pair) est une opération élémentaire. Les montées d'ordre impair, au contraire, apparaissent comme moins aisées. Cette circonstance n'est pas fortuite. Prenons, en effet, comme nouvelle variable :

$$(32) \quad y = r^2$$

et considérons les $g_k(r)$ comme des fonctions de $y = r^2$:

$$(33) \quad g_k(r) = g_k(\sqrt{y})$$

Les deux équations (30) se mettent sous la forme :

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{n-1}(\sqrt{y}) = \int_y^{\infty} g_n(\sqrt{v}) \frac{dv}{\sqrt{v-y}} \\ g_{n-2}(\sqrt{y}) = \pi \int_y^{\infty} g_n(\sqrt{v}) dv \end{array} \right.$$

... / ...

La deuxième est une intégration ordinaire, tandis que la première se présente comme le produit de convolution :

$$g_{n-1}(\sqrt{y}) = g_n(\sqrt{y}) * T(y)$$

de $g_n(\sqrt{y})$ par la fonction T définie de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} T(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} & \text{pour } y < 0 \\ T(y) = 0 & \text{pour } y > 0 \end{array} \right.$$

Cette fonction $T(y)$ est très proche de l'opérateur, classique en théorie des distributions⁽¹⁾, de l'intégration d'ordre $1/2$. Pour obtenir l'intégration d'ordre $\frac{1}{2}$, il faudrait remplacer $T(y)$ par $\frac{1}{\sqrt{\pi}} T(-y)$, l'intégrale (34) étant

alors prise de 0 à y , et non plus de y à l'infini. Le produit d'un nombre pair d'intégration d'ordre $\frac{1}{2}$ étant une intégration d'ordre entier, il n'est pas étonnant que les montées d'ordre pair conduisent à des résultats simples. Introduisons les fonction $F_\lambda(y)$ définies par :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{ll} F_\lambda(y) = \frac{|y|^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} & \text{pour } y < 0 \\ F_\lambda(y) = 0 & \text{pour } y > 0 \end{array} \right.$$

On montre⁽²⁾, en théorie des distributions, que le produit de convolution de F_λ par F_μ est $F_{\lambda+\mu}$

$$(36) \quad F_\lambda * F_\mu = F_{\lambda+\mu}$$

(1) - Voir, par ex., L. SCHATZ, loc. cit.

(2) - Les relations que nous allons écrire ont un sens pour toutes les valeurs des paramètres $\lambda, \mu \dots$ etc ... si les g_n et les F_λ sont des distributions. Dans toutes les applications, les valeurs des paramètres seront telles qu'elles conservent leur sens si les g_n et les F_λ sont des fonctions.

La montée d'ordre 1 se représente donc par le produit de convolution :

$$g_{n-1} = \sqrt{\pi} g_n * F_{\frac{1}{2}}$$

et, plus généralement, la relation (36) permet d'écrire la montée d'ordre k sous la forme :

$$g_{n-k}(\sqrt{y}) = \pi^{k/2} g_n(\sqrt{y}) * F_{k/2}$$

Pour $k = 0$, on retrouve la fonction $g_n(\sqrt{y})$ elle-même⁽¹⁾ et pour k entier pair on est ramené à des intégrations ordinaires. Il n'est pas nécessaire, d'ailleurs, que n et k soient des entiers. On voit que tous les covariogrammes g_λ appartenant à un même clavier, tels que nous les avons définis en (29), peuvent se déduire de l'un quelconque d'entre eux par des processus de montée et descente représentés par des produits de convolution :

$$(37) \quad g_\lambda(\sqrt{y}) = \pi^{\mu/2} g_{\lambda+\mu} * F_{\frac{\mu}{2}}$$

ou, explicitement :

$$(38) \quad g_\lambda(\sqrt{y}) = \frac{\pi^{\mu/2}}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \int_y^\infty g_{\lambda+\mu}(\sqrt{v}) (v-y)^{\frac{\mu}{2}-1} dv$$

On peut aussi revenir à la variable $r = \sqrt{y}$. Il vient alors :

$$(39) \quad g_\lambda(r) = \frac{2\pi^{\mu/2}}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \int_r^\infty g_{\lambda+\mu}(u) (u^2 - r^2)^{\frac{\mu}{2}-1} u du$$

Dans un processus de descente (μ négatif), il pourrait arriver qu'une intégrale telle que (39) soit divergente. On pourra, en général, éviter le recours à la théorie des distributions, en descendant d'un entier pair $2k$ supérieur à μ (ce qui n'entraîne que des dérivations) et en effectuant ensuite une montée d'ordre positif ($2k - \mu$). Par exemple, la montée d'ordre 1 :

$$(40) \quad g_{n-1}(r) = 2 \int_r^\infty g_n(u) \frac{u}{\sqrt{u^2 - r^2}} du$$

... / ...

(1) - F_0 est la distribution de Dirac $\delta(y)$.

admet comme réciproque la descente d'ordre 1 :

$$(41) \quad g_n(r) = -\frac{1}{\pi} \int_x^\infty g_{n-1}'(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}$$

Cette relation s'interprète comme une descente d'ordre 2 - qui conduit à $g_{n+1} = -\frac{1}{2\pi u} g_{n-1}'(u)$ - suivie d'une remontée d'ordre 1.

Le rapprochement des expressions (39) et (29) d'un même g_λ permet d'associer à tout clavier un clavier réciproque. Considérons, en effet, la transformée de Hankel F_α de la fonction $g_\lambda(r)$:

$$(42) \quad F_\alpha g_\lambda(r) = \frac{(2\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}{u^{\frac{\alpha}{2}-1}} \int_0^\infty r^{\frac{\alpha}{2}} g_\lambda(r) J_{\frac{\alpha}{2}-1}(ur) dr$$

qui s'interprète, pour α entier, comme la transformée de Fourier dans un espace à α dimensions de la fonction $g_\lambda(r)$ à symétrie sphérique. On remplacera g_λ dans (42) par son expression (29), et on intervertira l'ordre des intégrations. On utilisera l'intégrale discontinue de Weber, qui donne la transformée de Hankel de

$$\begin{aligned} r^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{\frac{\alpha}{2}-1}(\rho r) : \\ \frac{(2\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}{u^{\frac{\alpha}{2}-1}} \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\alpha-\lambda}{2}\right) J_{\frac{\alpha}{2}-1}(ur) J_{\frac{\alpha}{2}-1}(\rho r) dr \\ = \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{\lambda-\alpha}{2})} \rho^{\frac{1-\lambda}{2}} (p^2 - u^2)^{\frac{\lambda-\alpha}{2}-1} \end{aligned}$$

pour $\rho > u$, le premier membre étant identiquement nul pour ρ inférieur à u .

On trouve ainsi :

$$(43) \quad (2\pi)^{\frac{\lambda-\alpha}{2}} F_\alpha g_\lambda(r) = \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{\lambda-\alpha}{2})} \int_u^\infty G(\rho) (\rho^2 - u^2)^{\frac{\lambda-\alpha}{2}-1} \rho d\rho$$

La comparaison avec l'équation (39) montre que le deuxième membre peut s'interpréter comme une montée d'ordre $\lambda - \alpha$ effectuée sur $G(\rho)$. Si $G(\rho)$ est

... / ...

considéré comme l'élément $G_0(\rho)$ d'un clavier $G_\lambda(\rho)$ défini par une relation du type (39), on voit que la relation (43) peut s'écrire sous la forme simple :

$$(44) \quad (2\pi)^{\lambda-\alpha} F_\alpha g_\lambda(x) = G_{\alpha-\lambda}(\rho)$$

et admet la réciproque :

$$(45) \quad g_{\alpha-\mu}(x) = (2\pi)^{\mu-\alpha} F_\alpha G_\mu(\rho)$$

Les claviers $g_\lambda(x)$ et $G_\mu(\rho)$ apparaissent ainsi comme réciproques. On voit sur (44) qu'une montée d'ordre ν sur g_λ , qui a pour effet de changer λ en $\lambda + \nu$, a pour réciproque - α restant constant - une descente de même ordre ν sur $G_{\alpha-\lambda}$, qui devient $G_{\alpha-\lambda-\nu}$. Pour $\alpha = \lambda$, on retrouve naturellement l'équation (27), qui exprime l'invariance de $F_\lambda g_\lambda$ par rapport à λ .

Nous verrons de nombreuses applications des processus de montée et de descente en schéma isotrope dans le chapitre II, qui sera consacré à l'étude de quelques claviers particuliers (claviers de Bessel, de Gauss, de Laguerre et clavier hypergéométrique).

5.)- Théorie de l'estimation en schéma transitif.

Nous revenons maintenant au cas d'un schéma transitif quelconque (isotrope ou non), de covariogramme $g_n(h) = g_n(h_1 \dots h_n)$, décrivant la répartition d'une variable régionalisée $f_n(x) = f_n(x_1 \dots x_n)$ dans un espace à n dimensions.

Tant qu'il n'interviendra pas de processus de montée et de descente, nous écrirons g et f au lieu de g_n et f_n , en sous-entendant l'indice n . On suppose que, pour évaluer la quantité de métal Q , c'est-à-dire l'intégrale de $f(x)$ définie en (6), l'on dispose d'un réseau de prélèvements ponctuels effectués, selon une maille régulière, aux noeuds d'un réseau construit sur un paral-

... / ...

lélépipède rectangle. La maille est définie par un vecteur a , dont les coordonnées $a_1, a_2 \dots a_n$, donnent les arêtes du parallélépipède. Le réseau de reconnaissance peut être, sans inconvénients, supposé infini, puisque la variable régionalisée ne prend de valeurs non nulles que dans un domaine borné. Si le vecteur $y = (y_1 y_2 \dots y_n)$ représente l'implantation de l'un quelconque des prélèvements, le résultat de la maille de reconnaissance s'exprime par la donnée des valeurs numériques de l'expression :

$$(46) \quad f(y_1 + p_1 a_1, y_2 + p_2 a_2 \dots y_n + p_n a_n) = f(y + pa)$$

pour tous les ensembles de valeurs entières $p = (p_1, p_2 \dots p_n)$ comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. (En réalité, seul un nombre fini de valeurs de $f(y + pa)$ sont différentes de zéro, puisque le domaine de la variable est borné). On estime la quantité de métal par la somme multiple, étendue à toutes les valeurs entières, positives ou négatives, des p_i , dont l'expression est :

$$(47) \quad Q^* = a_1 a_2 \dots a_n \sum_{p_1 p_2 \dots p_n} f(y_1 + p_1 a_1, \dots y_n + p_n a_n)$$

ou, symboliquement :

$$(47bis) \quad Q^*(y) = \int a \int^* \sum_p f(y + pa)$$

Il est manifeste que cet estimateur est une fonction périodique de l'argument vectoriel y , c'est-à-dire de l'implantation de l'un quelconque des prélèvements, le parallélépipède des périodes étant, justement, le parallélépipède de base du réseau, défini par le vecteur a . Pour tout ensemble de n entiers $k = (k_1, k_2 \dots k_n)$, on a :

$$(48) \quad Q^*(y + ka) = Q^*(y)$$

puisque'il est indifférent de prendre comme origine le prélèvement y ou le prélèvement $y + ka$. Il en résulte que le problème de l'estimation peut être traité

... / ...

té à partir de développements en série de Fourier. On représentera l'estimateur $Q^*(y)$ par le développement classique :

$$(49) \quad Q^*(y) = \sum_{p_1 \dots p_n} C_{p_1 \dots p_n} e^{2\pi i (p_1 \frac{y_1}{a_1} + \dots + p_n \frac{y_n}{a_n})}$$

les coefficients $C_{p_1 \dots p_n}$ étant donnés par :

$$(50) \quad C_{p_1 \dots p_n} = \frac{1}{a_1 \dots a_n} \int_P Q^*(y) e^{-2\pi i (p_1 \frac{y_1}{a_1} + \dots + p_n \frac{y_n}{a_n})} dy_1 \dots dy_n$$

Dans cette formule l'intégration est étendue au parallélépipède P des périodes défini par le vecteur a . Si l'on remplace $Q^*(y)$ par son expression (47), on fait apparaître l'intégrale de $f(y)$ étendue à tout l'espace :

$$C_{p_1 \dots p_n} = \int f(y_1 \dots y_n) e^{-2\pi i (p_1 \frac{y_1}{a_1} + \dots + p_n \frac{y_n}{a_n})} dy_1 \dots dy_n$$

En introduisant la conjuguée $\overline{\Phi}(u) = \overline{\Phi}(u_1 \dots u_n)$ de la transformée de Fourier de la variable régionalisée f , on obtient enfin l'expression suivante du coefficient :

$$(51) \quad C_{p_1 \dots p_n} = \overline{\Phi}\left(2\pi \frac{p_1}{a_1}, \dots, 2\pi \frac{p_n}{a_n}\right)$$

ou, symboliquement :

$$(52) \quad \begin{cases} Q^*(y) = \sum_p C_p e^{2\pi i p \frac{y}{a}} \\ C_p = \overline{\Phi}\left(2\pi \frac{p}{a}\right) \end{cases}$$

... / ...

En particulier, pour $p = 0$ (c'est-à-dire $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$), on a :

$$(53) \quad c_0 = \overline{\Phi}(0) = \int f(y) dy = Q$$

La précision de l'estimateur $Q^*(y)$ sera mesurée - exactement comme dans la théorie des schémas intrinsèques ou des schémas en série de Fourier - par une variance d'estimation σ_a^2 , définie comme la valeur moyenne de $[Q^*(y) - Q]^2$ dans le parallélépipède de base, construit sur le vecteur a :

$$(54) \quad \sigma_a^2 = \frac{1}{a_1 \dots a_n} \int_P [Q^*(y) - Q]^2 dy$$

Compte tenu de (52) et (53), cette intégrale se représente par une ~~double~~ multiple étendue à tous les ensembles p d'entiers, positifs ou négatifs, non tous nuls simultanément :

$$\sigma_a^2 = \sum_{p \neq 0} \left[\overline{\Phi} \left(2\pi \frac{p}{a} \right) \right]^2$$

Enfin, si l'on remarque que $|\overline{\Phi}(u)|^2$ n'est autre que la transformée de Fourier $G(u)$ du covariogramme $g(h)$, on obtient l'expression définitive :

$$(55) \quad \sigma_a^2 = \sum_{p \neq 0} G \left(2\pi \frac{p}{a} \right)$$

qui s'écrit explicitement :

$$\sigma_a^2 = \sum_{p_1 p_2 \dots p_n \neq 0} G \left(2\pi \frac{p_1}{a_1} \dots 2\pi \frac{p_n}{a_n} \right)$$

La variance d'estimation peut également être représentée à l'aide du covariogramme $g(h)$ lui-même, et non plus de sa transformée de Fourier $G(u)$. En effet, nous pouvons mettre l'équation (54) sous la forme :

$$\frac{2}{\sigma_a^2} = \frac{1}{a_1 \dots a_n} \int_P [Q^*(y)]^2 dy = Q^2$$

et remplacer, directement, $Q^*(y)$ par son expression (47). On obtient, pour $[Q^*(y)]^2$, une série multiple d'ordre $2n$:

$$[Q^*(y)]^2 = \sum_{p, q} (a_1 \dots a_n)^2 f(y + pa) f(y + qa)$$

Nous remplacerons q par $p + k$ avant d'intégrer dans le parallélépipède :

$$\int_P [Q^*(y)]^2 dy = (a_1 \dots a_n)^2 \int_P \sum_{p, k} f(y + pa) f(y + pa + ka) dy$$

La sommation sur les indices p permet de remplacer l'intégrale dans P par une intégrale étendue à tout l'espace - et on voit alors apparaître l'expression (1) du covariogramme

$$\int_P [Q^*(y)]^2 dy = (a_1 a_2 \dots a_n)^2 \sum_k g(ka)$$

D'où, finalement, l'expression suivante de la variance d'estimation :

$$(56) \quad \frac{2}{\sigma_a^2} = (a_1 a_2 \dots a_n) \sum_k g(ka) = Q^2$$

ou, explicitement :

$$(57) \quad \frac{2}{\sigma_a^2} = (a_1 a_2 \dots a_n) \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} g(k_1 a_1, \dots, k_n a_n) = Q^2$$

... / ...

L'équivalence des expressions (55) et (56) résulte de la formule sommatoire classique de Poisson. Dans les applications, on se servira de l'une ou de l'autre, selon leur plus ou moins grande simplicité.

D'après la formule (7), le carré Q^2 de la quantité de métal est égal à l'intégrale du $g(h)$ étendue à tout l'espace. Prise sous la forme (56) ou (57), la variance d'estimation σ_a^2 se présente comme la différence entre une valeur numériquement approchée et la valeur exacte de cette intégrale. Les différents $g(ka)$ peuvent être évalués, en pratique, à partir des données expérimentalement disponibles, qui sont les $f(y + pa)$:

$$g^*(ka) = (a_1 \dots a_n) \sum_p f(y + pa) f(y + pa + ka)$$

De même, pour évaluer Q , on se sert de l'estimateur $Q^*(y)$ défini en (47).

L'égalité :

$$[Q^*(y)]^2 = (a_1 \dots a_n) \sum_k g^*(ka)$$

montre que l'on n'a malheureusement pas d'autre moyen d'évaluer Q^2 , à partir des données expérimentales, que l'expression numériquement approchée elle-même - dont la différence avec la valeur exacte représente la variance d'estimation cherchée. L'examen de la formule (55) conduit à la même conclusion négative. Un réseau périodique de données expérimentales ne permet aucune estimation des composantes harmoniques dont les périodes sont des multiples de celles du réseau. Il est donc théoriquement impossible de déduire de ces mêmes observations expérimentales à la fois une estimation et la précision de cette estimation. En pratique, on lèvera la difficulté en se donnant a priori le covariogramme, sous la forme d'une expression mathématique dépendant d'un ou plusieurs paramètres, dont les valeurs numériques pourront être déterminées par ajustement

... / ...

sur les valeurs expérimentales. Les formules (55) et (56) permettront alors le calcul du $\hat{\sigma}_a^2$ par voie théorique. Mais, naturellement, le résultat ne vaudra que ce que vaudra le modèle mathématique, ou schéma, adopté pour le covariogramme. L'expérience seule pourra nous indiquer les schémas convenant aux différentes catégories de variables régionalisées. L'analyse géométrique, qui sera faite au paragraphe suivant, nous montrera, cependant, que la marge d'arbitraire n'est pas aussi large qu'on pourrait le craindre.

Une fois connu, ou choisi, le covariogramme ou sa transformée de Fourier, le calcul numérique effectif de la variance d'estimation par la formule (55) ou (56) reste assez laborieux. En pratique, on utilisera le plus souvent des méthodes d'approximation, dont on peut distinguer deux types.

Le premier type d'approximation a pour but de remplacer les séries multiples (55) ou (56) par plusieurs séries simples. Les données ponctuelles sont ordonnées en lignes, les lignes sont ordonnées en plans ... Comme direction de ligne, on choisit la direction a_i du réseau pour laquelle la covariance transitive $g(a_i)$ est maximum. Comme direction de plan, on choisit la direction a_j a_i déterminée par les deux directions de plus grandes covariances $g(a_i)$ et $g(a_j)$. La méthode d'approximation consiste à considérer comme indépendantes les erreurs commises en estimant l'accumulation réelle des lignes à partir des données ponctuelles, les poids de métal au mètre des sections à partir des accumulations réelles des lignes ..., la quantité de métal à partir des poids de métal réels des sections au mètre.

Considérons, par exemple, le problème à deux dimensions correspondant à la reconnaissance d'un gisement par des sondages implantés selon une maille rectangulaire $a_1 a_2$. Les données ponctuelles sont les accumulations $f_2(y_1 + k_1 a_1, y_2 + k_2 a_2)$ portées par les sondages. Supposons connu le covariogramme $g_2(h_1, h_2)$ et soit, par exemple :

$$g_2(a_1) > g_2(a_2)$$

... / ...

On groupe les sondages en lignes parallèles à la direction a_1 , et on cherche avec quelle précision le poids de métal au mètre d'allongement porté par une ligne peut être estimé à partir des accumulations f_2 des sondages. Le long d'une même ligne, les f_2 constituent une variation régionalisée à une seule dimension, à laquelle correspond un covariogramme particulier. Comme on ne s'intéresse pas aux lignes individuellement, mais à leur ensemble, il suffit de déterminer le covariogramme moyen. Si L est l'allongement (qui peut ne pas coïncider avec l'allongement réel du gisement), les lignes sont au nombre de $\frac{L}{a_2}$. Le covariogramme moyen dans les lignes est défini par :

$$g(h_1) = \frac{1}{L} g_2(h_1, 0)$$

La quantité de métal porté par la ligne moyenne est connue avec une variance d'estimation :

$$\frac{2}{\sigma_{a_1}^2} = \frac{a_1}{L} \sum_{k_1} g_2(k_1 a_1, 0) - \frac{1}{L} \int g_2(h_1, 0) dh_1$$

Chaque ligne commande une tranche d'épaisseur a_2 , et les lignes sont au nombre de L/a_2 . Il en résulte sur la quantité de métal Q du gisement une première variance, ou variance de ligne :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sigma_1^2} &= \frac{2}{a_2} \cdot \frac{L}{a_2} \cdot \frac{2}{\sigma_{a_1}^2} = L a_2 \frac{2}{\sigma_{a_1}^2} \\ &= a_1 a_2 \sum_k g_2(k a_1, 0) - a_2 \int g_2(h, 0) dh \end{aligned}$$

En deuxième lieu, les poids de métal portés par les lignes obéissent à une régionalisation à une dimension, décrite par le covariogramme qui se déduit de g_2 par une montée d'ordre 1 effectuée le long de la direction a_1 :

$$g_1(h_2) = \int g_2(h_1, h_2) dh_1$$

Si les vraies valeurs de ces poids étaient connues, elles permet-

... / ...

traient d'évaluer Q avec la variance d'estimation :

$$\frac{2}{6_2} = \frac{2}{6_{a_2}} = a_2 \sum_{k_2} g_1(k_2 a_2) - Q^2$$

On remarque que l'intégrale qui figure dans l'expression de $\frac{2}{6_1}$ n'est autre que $g_1(0)$. D'où, finalement :

$$(58) \quad \frac{2}{6_a} = \frac{2}{6_1} + \frac{2}{6_2} = a_1 a_2 \sum_k g_2(ka_1 0) + a_2 \sum_{k \neq 0} g_1(k a_2) - Q^2$$

Les deuxièmes méthodes d'approximation reposent sur la formule d'Euler Mac-Laurin. Dans un schéma à une seule dimension, en effet, la variance d'estimation :

$$\frac{2}{6_a} = a \sum_k g(ka) - \int g(x) dx$$

représente l'erreur commise dans le calcul numérique de l'intégrale du covariogramme. Si le $g(x)$ est continu de 0 à l'infini, et possède partout des dérivées continues d'ordre requis, on peut écrire :

$$(59) \quad \frac{2}{6_a} = 2 a \left[\frac{1}{2} g(0) + \sum_1^{\infty} g(ka) \right] - 2 \int_0^{\infty} g(x) dx$$

$$= - 2 a^2 B_1 g'(0) + 2 a^4 \frac{B_2}{2!} g'''(0) - \dots$$

Les $B_1, B_2 \dots$ sont les nombres de Bernouilli. Si le $g(x)$ comporte un terme linéaire à l'origine, et s'annule à l'infini ainsi que ses premières dérivées (ou bien s'annule en un point situé à distance finie, et possède en ce point un contact d'ordre élevé avec l'axe des x), on écrira, en première approximation :

$$(60) \quad \frac{2}{6_a} = - \frac{a^2}{6} g'(0)$$

La théorie intrinsèque des variances d'extension conduit à la même expression. Mais il arrivera que la formule d'Euler Mac-Laurin ne puisse pas

... / ...

être utilisée sous cette forme. Un $g(x)$ peut être très régulier à l'origine, et ne comporter que des termes d'ordre pair (e^{-x^2} par exemple), ou bien commencer par un terme d'ordre non entier (x^α ou $x^2 \log x$, par exemple). En deuxième lieu, un $g(x)$ peut s'évanouir à distance finie b sans avoir un contact d'ordre très élevé avec l'axe des x . Dans l'intervalle ouvert $(0, b)$, les $g(x)$ usuels présentent toujours les caractères de régularités requis. On est amené à distinguer trois composantes dans la variance d'estimation. Soit k le plus grand entier tel que ka (a étant la maille) soit inférieur à la portée b du covariogramme :

$$ka < b \leq (k+1)a$$

On écrira :

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sigma_a^2}{2} &= 2a \left[\frac{1}{2} g(0) + \frac{1}{2} g(a) \right] - 2 \int_0^a g(x) dx \\ &+ 2a \left[\frac{1}{2} g(a) + g(2a) + \dots + g[(k-1)a] + \frac{1}{2} g(ka) \right] - 2 \int_a^{ka} g(x) dx \\ &+ a g(ka) - 2 \int_{ka}^b g(x) dx \end{aligned} \right.$$

La deuxième composante peut être évaluée par la formule d'Euler Mac-Laurin.

La première doit être calculée directement.

Quant à la troisième, qui représente un véritable effet de bordure, elle ne pourra être calculée que dans la mesure où la valeur précise de b pourra être interpolée avec vraisemblance entre ka et $(k+1)a$. Cette source très réelle de difficulté pourra souvent être négligée, car le covariogramme expérimental sera souvent tangent en b à l'axe des x . Le troisième terme peut alors être négligé, et on obtient l'expression approchée :

$$\frac{\sigma_a^2}{2} = a \left[g(0) + g(a) \right] - 2 \int_0^a g(x) dx - 2a^2 B_1 g'(a) + 2a^4 \frac{B_2}{2!} g'''(a) - \dots$$

6.- Relation entre histogramme et variogramme (Variables géométriques).

Dans ce paragraphe, nous allons dégager quelques particularités du problème géométrique. Etant donné un volume V (convexe, ou non, connexe ou non, mais borné) dans l'espace à 3 dimensions, nous lui attacherons une variable géométrique ponctuelle $f(xyz)$, égale à 1 lorsque le point (xyz) est intérieur à V et à 0 lorsqu'il lui est extérieur.⁽¹⁾ A cette régionalisation est attaché un covariogramme $g_3(h) = g_3(h_1, h_2, h_3)$, dont nous avons vu la signification géométrique dans le premier paragraphe : $g_3(h)$ représente le volume de l'intersection de V avec son translaté dans la translation h . Dans le cas où le volume V est convexe, il existe une relation simple entre le covariogramme g_3 et l'histogramme des puissances de l'amas V . En effet, la dérivée $\frac{\partial g_3(h)}{\partial \alpha}$ du covariogramme dans la direction α du vecteur h représente alors - au signe près - l'aire de la projection, sur un plan P_α perpendiculaire à h , de la courbe d'intersection de V et de son translaté dans la translation h . C'est aussi l'aire occupée, dans le plan P_α , par les puissances supérieures à la longueur du vecteur h . Si nous désignons par $H_\alpha(h)$ la fonction de répartition (au sens statistique) des puissances parallèles à h , c'est-à-dire la proportion, parmi l'ensemble des puissances non nulles, de celles qui dépassent la longueur h , et si nous appelons S_α l'aire du contour apparent de V dans la direction α du vecteur h , on peut écrire :

$$(63) \quad \frac{\partial g_3(h)}{\partial \alpha} = - S_\alpha H_\alpha(h)$$

Si la répartition des puissances possède une densité de fréquence $p_\alpha(h) = - H'_\alpha(h)$, on a aussi :

$$(63)^{\text{bis}} \quad \frac{\partial g_3(h)}{\partial \alpha} = S_\alpha \int_h^\infty p_\alpha(h) dh$$

.....

... / ...

(1)- Dans le langage de la théorie des ensembles, on dirait que f est la fonction caractéristique de l'ensemble V .

La loi de distribution des puissances, $H_{\alpha}(h)$, prend une signification vectorielle et se relie au gradient du covariogramme. Inversement, la connaissance de l'histogramme $p(h)$ des puissances dans une direction, prise comme axe des x , permet de déterminer les valeurs $g(x, 00)$ du covariogramme dans cette direction, pourvu que l'aire S du contour apparent soit également connue. Cela résulte de l'intégration de (63), mais il est intéressant de donner une démonstration directe. On peut, en effet, écrire :

$$g(u, 00) = \iint dy dz \int f(x, y, z) f(x + u, y, z) dx$$

L'expression à intégrer en x est égale à :

$$\begin{cases} h - u & \text{pour } |u| < h \\ 0 & \text{pour } |u| > h \end{cases}$$

h représentant la puissance parallèlement à OX , considérée comme fonction de y et z . On peut alors écrire :

$$(64) \quad g(u, 00) = S \int_u^{\infty} (h - u) p(h) dh$$

avec, en particulier :

$$\frac{\partial^2 g(u, 0, 0)}{\partial u^2} = S p(u)$$

ce qui n'est autre chose que (63)^{Bis}. La relation (64) se met aussi sous la forme :

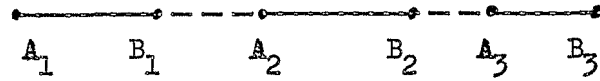
$$(65) \quad g(u, 00) = V - u S + S \int_0^u (u - h) p(h) dh$$

La dérivée du covariogramme, prise à l'origine dans une direction donnée, est égale au contour apparent de l'amas dans cette direction : Tout covariogramme géométrique, décrivant un amas convexe, est linéaire à l'origine.

... / ...

Si, maintenant, l'amas n'est pas convexe, certaines des traversées parallèles à Ox sont fragmentées en tronçons distincts $A_1 B_1$. L'intégrale en x,

qui se réduisait à $|h - u|$ dans le cas convexe, devient ici la somme algébrique des fonctions $(\ell - u)$



attachées aux :

$$\begin{aligned}
 & \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{segments} \quad A_i B_j \quad (j \geq i) \\
 & \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{"} \quad B_i A_j \quad (j > i) \\
 & - \frac{n(n-1)}{2} \quad A_i A_j \\
 & - \frac{n(n-1)}{2} \quad B_i B_j
 \end{aligned}$$

les deux premières catégories (d'une origine à une extrémité, ou d'une extrémité à une origine) sont affectées d'un signe +, et les deux autres (d'une origine à une autre, ou d'une extrémité à une autre) sont affectées d'un signe -. La somme algébrique des fonctions égales à :

$$\begin{aligned}
 \ell - u & \quad \text{pour} \quad u < \ell \\
 0 & \quad \text{pour} \quad u > \ell
 \end{aligned}$$

ℓ représentant la longueur des segments définis ci-dessus, peut se représenter par une ligne brisée. La formule (64) reste utilisable, à condition de prendre un histogramme $p(h)$ défini comme la somme algébrique des histogrammes relatifs aux quatre catégories de tronçons de puissances énumérées ci-dessus. Comme :

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$$

on voit que l'intégrale $\int p(h)dh$ n'est plus égale à l'unité, mais au rapport du

... / ...

nombre des tronçons au nombre des puissances (valeur moyenne du nombre n de tronçons portés par chaque puissance). Si S est le contour apparent, le produit de S par la valeur moyenne de n est égal à la demi variation diamétrale S_D , qui s'introduit dans l'étude du problème géométrique. Le $p(h)$, qui peut par ailleurs prendre des valeurs négatives, représente une généralisation de la notion d'histogramme. Par contre, la relation :

$$S \int hp(h)dh = V$$

est conservée, car on a, pour chaque traversée :

$$\sum_{ij} [A_i B_j + B_i A_j - A_i A_j - B_i B_j] = \sum_i A_i B_i$$

Cette relation permet de mettre (64) sous la forme :

$$(66) \quad g(x,00) = V - x S_D + S \int_0^x (x-h) p(h) dh$$

La non convexité de l'amas se manifeste par une pente à l'origine S_D , égale à la demi variation diamétrale et toujours supérieure au contour apparent. Cette pente peut devenir très forte (pratiquement infinie) si l'amas est hérissé de protubérances de tous les ordres de grandeurs (on parlera d'effet de protubérance), ou s'il n'est pas connexe. Les deux égalités :

$$(67) \quad \begin{cases} g(000) = V \\ \iiint g(xyz) dx dy dz = V^2 \end{cases}$$

restent, cependant, vérifiées. Le variogramme reste fini, et son comportement à l'origine pourra se manifester par un terme en $x \log x$ ou x^α , avec $0 < \alpha < 1$. Lorsque le volume V , disconnexe, est constitué d'un grand nombre de petites lentilles dispersées, on obtient le cas limite extrême correspondant à α très petit. La valeur à l'origine du covariogramme est alors très grande, et peut être considérée comme infinie. Ce cas limite, qui correspondrait à un comportement loga-

... / ...

rithmique, est sans doute un cas extrême. Il pourrait décrire la répartition d'une teneur ponctuelle, égale à +1 dans les grains de minerai et à 0 dans les grains de stérile. Il semble difficile de concevoir des variables géométriques dont le covariogramme posséderait un comportement plus irrégulier.

Dans le cas isotrope, ou si le covariogramme ne présente qu'une anisotropie géométrique que l'on peut facilement corriger, la relation (64) :

$$(68) \quad g_3(r) = S \int_r^{\infty} (h-r) p(h) dh$$

permet d'établir des relations remarquables entre les moments de la loi de dis-

$$m_n = \int_0^{\infty} h^n p(h) dh$$

tribution des puissances et les valeurs à l'origine des covariogrammes qui se déduisent de g_3 par montée. On trouve :

$$(69) \quad \begin{cases} g_3(0) = S m_1 = V \\ g_2(0) = S m_2 \\ g_1(0) = \frac{\pi}{3} S m_3 \\ g_0(0) = \frac{\pi}{3} S m_4 = V^2 \end{cases}$$

A titre d'exemple, considérons la sphère de diamètre unité. On a :

$$\begin{cases} p(h) = 2h & \text{pour } 0 < h < 1 \\ p(h) = 0 & \text{pour } h > 1 \end{cases}$$

La relation (68) donne :

$$g_3(r) = \frac{\pi}{6} \left[1 - \frac{3}{2} r + \frac{1}{2} r^3 \right]$$

... / ...

Plus généralement, prenons :

$$\begin{aligned} p(h) &= (\lambda + 1) h^\lambda && \text{pour } 0 < h < 1 \\ &= 0 && \text{pour } h > 1 \end{aligned}$$

On trouve :

$$(70) \quad g_3(r) = V \left[1 - \frac{\lambda + 2}{\lambda + 1} r + \frac{1}{\lambda + 1} r^{\lambda + 2} \right]$$

Avec :

$$m_n = \frac{\lambda + 1}{\lambda + n + 1}$$

Les relations (69) donnent :

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} \frac{\lambda + 2}{\lambda + 5} \\ S &= \frac{\pi}{3} \frac{(\lambda + 2)^2}{(\lambda + 1)(\lambda + 5)} \\ g_2(0) &= \frac{\lambda + 2}{\lambda + 3} V \\ g_1(0) &= \frac{\pi}{3} \frac{\lambda + 2}{\lambda + 4} V \end{aligned} \right.$$

Dans le cas limite où λ tend vers -1 , on obtient :

$$(72) \quad g_3(r) = V \left[1 + r \log r - r \right]$$

Nous étudierons dans la deuxième partie, sous le nom de claviers géométriques, les claviers engendrés par montée à partir de ces covariogrammes.

... / ...

II.- EXEMPLES DE CLAVIERS ISOTROPES

Nous allons maintenant passer en revue quelques claviers particuliers, qui pourront être utiles dans les applications. Les uns (claviers de Bessel, de Gauss et de Laguerre) seront du type infini ($g(r)$ s'annule à l'infini, ainsi que ses dérivées successives), les autres auront une portée finie (claviers géométriques et hypergéométriques). On peut, bien sûr, imaginer bien d'autres types de claviers. Ceux que nous avons retenus permettent de monter ou descendre avec une relative facilité.

1.- Les claviers de Bessel.

Nous dirons d'abord quelques mots du clavier construit sur les fonctions de Bessel de première espèce $J_\lambda(r)$. L'intégrale classique de Sonine :

$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(a\sqrt{t^2+z^2})}{(t^2+z^2)^{\mu/2}} t^{\nu-1} dt = \frac{\nu/2-1}{2} \frac{\Gamma(\nu/2)}{a^{\nu/2}} \frac{J_{\mu-\nu/2}(az)}{z^{\mu-\nu/2}}$$

se met, en posant :

$$u^2 = t^2 + z^2$$

sous la forme :

$$(73) \quad 2 \frac{\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_z^\infty \frac{J_\mu(au)}{u^\mu} (u^2 - z^2)^{\nu/2-1} u du = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\nu/2} \frac{J_{\mu-\nu/2}(az)}{z^{\mu-\nu/2}}$$

La comparaison avec (39) donne à cette équation le sens d'une montée d'ordre ν .

Les fonctions $A_\lambda \frac{J_\lambda(az)}{z^\lambda}$ (avec des constantes A_λ convenables) constituent un clavier, dans lequel une montée d'ordre ν se traduit par le changement de λ en $\lambda + \frac{\nu}{2}$. C'est le clavier de Bessel de première espèce. Le clavier réciproque est défini par des fonctions de la forme $B_\lambda \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\lambda$, pour lesquelles

... / ...

la montée d'ordre μ se traduit par un changement de λ en $\lambda + \frac{\mu}{2}$. Nous n'utiliserons ni l'un, ni l'autre de ces claviers dans les applications pratiques, en raison de la trop grande régularité de leur comportement au voisinage de l'origine.

Les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce $K_\lambda(x)$ se présentent, au contraire, sous un aspect plus adapté à un usage pratique. Toujours positives et décroissant, à l'infini, comme des exponentielles, ces fonctions présentent à l'origine une gamme de comportements beaucoup plus variés. La fonction :

$$(74) \quad g_n(r) = c^\mu r^\mu K_{-\mu}(cr),$$

a pour transformée de Hankel d'ordre n (1)

$$(75) \quad G(\rho) = (2\pi)^{n/2} \frac{\Gamma(\mu + \frac{n}{2})}{2^{1-\mu-\frac{n}{2}}} \frac{c^{2\mu}}{(c^2 + \rho^2)^{\mu + \frac{n}{2}}}$$

En appliquant la relation (28), et en inversant la transformée de Hankel de K_λ , on trouve immédiatement l'expression de la montée d'ordre k :

$$(76) \quad g_{n-k}(r) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{c^k} (cr)^{\mu + \frac{k}{2}} K_{-\mu - \frac{k}{2}}(cr)$$

La montée d'ordre k - et k peut être un nombre quelconque, entier, ou non, positif ou négatif - se traduit par le changement de μ en $\mu + \frac{k}{2}$. Interprétée par la relation (39), l'expression (76) de la montée d'ordre k conduit à l'équation :

... / ...

(1.-) Gelfand et Chilov - Loc. cit. pp. 282 et suiv.

$$(77) \quad \left\{ \begin{aligned} (Cx)^{\mu + \frac{k}{2}} K_{-\mu - \frac{k}{2}}(Cx) &= \frac{2^{1 - \frac{k}{2}} C^k}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_x^\infty (Cu)^\mu K_{-\mu}(Cu) (u^2 - x^2)^{\frac{k}{2} - 1} u du \\ &= \frac{2^{1 - \frac{k}{2}} (Cx)^{\mu + k}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_1^\infty v^\mu K_{-\mu}(Cvx) (v^2 - 1)^{\frac{k}{2} - 1} v dv \end{aligned} \right.$$

En particulier, si l'on fait $\mu = -\frac{1}{2}$, $k = 1$ et $C = 1$, et si l'on tient compte de la relation classique :

$$K_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$$

on obtient l'expression classique de la fonction d'ordre 0 :

$$K_0(x) = \int_1^\infty e^{-vx} \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

L'intérêt pratique du clavier de Bessel modifié provient de la grande variété des comportements à l'origine des $x^\mu K_\mu(x)$. On s'intéressera particulièrement aux valeurs entières et demi-entières de l'indice μ . Pour un indice n entier, on a le développement classique au voisinage de l'origine :

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} x^n K_{-n}(x) &= (-1)^{n+1} \left[\log \frac{x}{2} - C \right] \sum_{p=0}^\infty \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+p)}}{p!(n+p)!} + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{(n-p-1)!}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \\ &+ (-1)^n \sum_{p=1}^\infty \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+p)}}{p!(n+p)!} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+p} \right] \end{aligned} \right.$$

C'est la constante d'Euler ($C = 0,577216 \dots$)

... / ...

Pour un indice demi-entier, on obtient le produit d'une exponentielle par un polynôme :

$$x^{n+\frac{1}{2}} K_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sum_{p=0}^n \frac{x^{n-p}}{2^p} \frac{(n+p)!}{p!(n-p)!}$$

Pour les indices $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \dots$ décrits par montées successives, on a des covariogrammes qui se comportent à l'origine comme $\log x, x, x^2 \log x, x^2 \dots$ et montrent le phénomène habituel de régularisation à la montée. La fonction $K_0(x)$, en particulier, donne une version transitive du schéma de de Wijs. La fonction $\sqrt{x} K_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x}$ donne un schéma exponentiel, linéaire à l'origine, qui sera souvent utile.

Pour étalonner des covariogrammes expérimentaux, on aura besoin de connaître la valeur à l'origine des covariogrammes théoriques. La valeur de $x^\mu K_{-\mu}(x)$ en $x=0$ est $2^{\mu-1} \Gamma(\mu)$. Les valeurs à l'origine des covariogrammes, qui se déduisent par montées successives à partir du g_n de la formule (74), sont donc :

$$(79) \quad g_{n-k}(0) = \frac{\pi}{c^k} 2^{k/2} \frac{\mu+k-1}{2} \Gamma\left(\mu + \frac{k}{2}\right)$$

et vérifient les relations de récurrence :

$$(80) \quad g_{n-k-2}(0) = \frac{4\pi}{c^2} \left(\mu + \frac{k}{2}\right) g_{n-k}(0)$$

qui permettent le calcul facile des paramètres μ et c à partir des valeurs à l'origine des covariogrammes expérimentaux.

Le problème de l'estimation se présente de façon particulièrement simple dans les schémas de Bessel à une seule dimension. Pour une variable régionalisée à une dimension, de covariogramme :

$$(81) \quad g(x) = A(cx)^\lambda K_{-\lambda}(cx) \quad \dots / \dots$$

on calculera l'efficacité d'une maille a par la formule (57). La transformée de Fourier de $g(x)$ étant :

$$(82) \quad G(u) = A \sqrt{\pi} 2^\lambda \Gamma(\lambda + \frac{1}{2}) \frac{c^2}{(c^2 + u^2)^{\lambda + \frac{1}{2}}}$$

on calculera la variance d'estimation par :

$$\frac{2}{\sigma_a^2} = 2 \int_1^\infty G\left(\frac{2\pi n}{a}\right) = A \pi^{-2\lambda - \frac{1}{2}} 2^{-\lambda} c^{2\lambda} a^{2\lambda+1} \int_1^\infty \frac{1}{(n^2 + \frac{a^2 c^2}{4\pi^2})^{\lambda + \frac{1}{2}}}$$

Dans tous les cas utiles, $\frac{ac}{2\pi}$ sera inférieur à l'unité, car $\frac{1}{c}$ représente la portée du phénomène étudié, et la maille a est choisie plus petite. On peut utiliser un développement du type :

$$\int \frac{1}{(h + n^2)^\lambda} = S_{2\lambda} - \lambda h S_{2(\lambda+1)} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!} h^2 S_{2(\lambda+2)} - \dots$$

où S_λ est la fonction de Riemann

$$S_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$$

liée aux nombres de Bernouilli ($B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$...) dans le cas où

$\lambda = 2k$ est un entier pair, par la relation classique :

$$(83) \quad S_{2k} = \frac{2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_k$$

On obtient ainsi :

$$(84) \quad \frac{2}{\sigma_a^2} = \frac{A c^{2\lambda} a^{2\lambda+1}}{\pi^{2\lambda - \frac{1}{2}} 2^\lambda} \left[S_{2\lambda+1} - (\lambda + \frac{1}{2}) \frac{a^2 c^2}{4\pi^2} S_{2\lambda+3} + \frac{1}{2} (\lambda + \frac{1}{2}) (\lambda + \frac{3}{2}) \left(\frac{a^2 c^2}{4\pi^2} \right)^2 S_{2\lambda+5} \dots \right]$$

On pourra très souvent se contenter du premier terme :

... / ...

$$(85) \quad \frac{2}{a} = \frac{\frac{A C}{\pi} \frac{2\lambda}{2\lambda-1} \frac{2\lambda+1}{2\lambda}}{S_2 \lambda+1}$$

Pour les indices $\lambda = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \dots$ qui se déduisent par montées successives, la variance d'estimation est en a^2, a^3, a^4 . On retrouve le phénomène familier qui associe des variances en $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^4} \dots$ à des variogrammes commençant par des termes en $x, x^2 \log x, x^2 \dots$

Le réciproque du clavier de Bessel est constitué par des fonctions du type $\frac{A \lambda}{(a^2 + r^2)^\lambda}$, pour lesquelles une montée d'ordre λ change l'indice λ en $\lambda - \frac{\lambda}{2}$

Trop régulière à l'origine, et décroissant trop lentement à l'infini, ces fonctions seront rarement utiles en pratique.

2.- Claviers et représentations de Gauss.

L'exponentielle gaussienne :

$$(86) \quad g_n(r) = e^{-ar^2} = e^{-a(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

est la seule fonction qui vérifie la relation fonctionnelle

$$f(r) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)$$

Elle fournit le seul exemple de covariogramme isotrope présentant, à la montée, l'effet rectangulaire à l'état pur. On vérifie immédiatement qu'une montée d'ordre quelconque λ conserve la forme de l'exponentielle gaussienne. Sous la forme (38), la montée s'écrit :

$$g_{n-\lambda}(r) = \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\lambda/2)} \int_{r^2}^{\infty} e^{-av} (v - r^2)^{\frac{\lambda}{2}-1} dv$$

... / ...

En posant $v = u + r^2$, il vient tout de suite :

$$(87) \quad g_{n-\lambda}(r) = \frac{\pi^{\lambda/2}}{a^{\lambda/2}} e^{-ar^2}$$

La montée d'ordre λ se traduit par le facteur $(\frac{\pi}{a})^{\lambda/2}$. Comme la transformée de Fourier d'une exponentielle gaussienne est encore une exponentielle gaussienne, on doit s'attendre à ce que le clavier réciproque soit encore un clavier de Gauss. Et, en effet, d'après une intégrale classique de Weber, on a :

$$(88) \quad F_{\lambda} e^{-ar^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\lambda/2} e^{-p^2/4a}$$

On vérifiera facilement sur cette expression la loi générale (44) exprimant la réciprocité de la montée et de la descente.

Le clavier gaussien sera rarement utilisé dans les applications pratiques, en raison de la trop grande régularité à l'origine des exponentielles de Gauss. Mais les expressions particulièrement simples de la montée et de la transformation de Hankel - équation (87) et (88) - conduiront parfois à utiliser, pour certains claviers, des représentations de Gauss. Supposons que l'élément $g_n(r)$ d'un clavier admette une représentation intégrale de la forme :

$$(89) \quad g_n(r) = \int_0^{\infty} e^{-ur^2} f(u) du$$

Compte tenu de (87), la montée d'ordre λ se mettra sous la forme :

$$(90) \quad g_{n-\lambda}(r) = \pi^{\lambda/2} \int_0^{\infty} e^{-ur^2} \frac{f(u)}{u^{\lambda/2}} du$$

qui est aussi une représentation de Gauss de l'élément $g_{n-\lambda}$. La transformation de Hankel, d'après (88), s'écrira, de son côté :

... / ...

$$(91) \quad F_{\alpha} g_{n-\lambda}(r) = \pi^{\frac{\lambda+\alpha}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4u}} \frac{f(u) du}{u^{\frac{\alpha+\lambda}{2}}}$$

En changeant u en $1/4v$, on obtient encore une représentation de Gauss:

$$(92) \quad F_{\alpha} g_{n-\lambda}(r) = 2^{\alpha+\lambda-2} \pi^{\frac{\lambda+\alpha}{2}} \int_0^{\infty} e^{-v r^2} f\left(\frac{1}{4v}\right) v^{\frac{\alpha+\lambda-2}{2}} dv$$

A titre d'illustration, prenons, dans (89), la fonction :

$$f(u) = \frac{c^{2\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u^{\beta-1} e^{-c^2 u}$$

On voit facilement que le $g_n(r)$ de l'équation (89) est égal à :

$$g_n(r) = \frac{c^{2\beta-1}}{(r^2 + c^2)^{\beta}}$$

La formule (90) conduit à une représentation de Gauss du réciproque du carré de Bessel de 2ème espèce. En appliquant la transformation de Hankel sous la forme (92), on doit en déduire une représentation du carré de Bessel lui-même. Pour $\alpha = 1$, par exemple, on a directement :

$$F_1 \left[\frac{c^{2\beta-1}}{(c^2 + r^2)^{\beta}} \right] = \frac{2^{1-\beta} \sqrt{2\pi}}{\Gamma(\beta)} (c\rho)^{\beta-\frac{1}{2}} K_{-\beta+\frac{1}{2}}(c\rho)$$

et, sous la forme (92) :

$$F_1 [g_n(r)] = 2^{1-2\beta} \frac{\sqrt{\pi} c^{2\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} e^{-v r^2} e^{-\frac{c^2}{4v}} \frac{dv}{v^{\beta+\frac{1}{2}}}$$

... / ...

En posant $\mu = \beta - \frac{1}{2}$ et en changeant ρ en x , la comparaison de ces deux équations donne la représentation de Gauss du clavier de Bessel :

$$(93) \quad (cx)^{\mu} K_{-\mu}(cx) = c^{\frac{2\mu-1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-vx} x^2 - \frac{q^2}{4v} \frac{dv}{v^{\mu+1}}$$

L'application de la montée, sous la forme (90), redonne la formule (76) (La formule (93) est connue dans la théorie classique des fonctions de Bessel comme une représentation de Sonine - Schläfli).

Comme deuxième application de la représentation de Gauss, nous donnons, dans le paragraphe suivant, le clavier de Laguerre de première espèce.

3.- Les claviers de Laguerre

Pour définir le clavier de Laguerre de première espèce, nous partirons de l'expression classique de la fonction hypergéométrique dégénérée, ou fonction de Laguerre :

$$(94) \quad F(\alpha, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!}$$

qui constitue la solution analytique au voisinage de l'origine de l'équation différentielle :

$$(95) \quad xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0$$

et admet la représentation intégrale (1)

$$(96) \quad F(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 e^{-tx} t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt \quad \dots / \dots$$

(1) - Une telle intégrale ne converge, au sens usuel, que moyennant des conditions restrictives sur α et γ . La théorie des distributions permet de s'affranchir de ces restrictions.

Le clavier de Laguerre de première espèce se définit à partir de la fonction :

$$(97) \quad g_n(r) = F(\alpha, \gamma, -r^2)$$

La formule (96) permet d'exprimer le $g_n(r)$ sous la forme d'une représentation de Gauss :

$$(98) \quad g_n(r) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 e^{-ur^2} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} du$$

Par une application immédiate de la formule (90), on voit que la montée d'ordre

λ conduit à un $g_{n-\lambda}$ de la forme :

$$(99) \quad g_{n-\lambda}(r) = \frac{\pi^{\lambda/2} \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 e^{-ur^2} u^{\alpha-\frac{\lambda}{2}-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} du$$

ce qui peut s'écrire aussi :

$$(100) \quad g_{n-\lambda}(r) = \pi^{\lambda/2} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\frac{\lambda}{2})} \frac{\Gamma(\alpha-\lambda/2)}{\Gamma(\alpha)} F(\alpha-\frac{\lambda}{2}, \gamma-\frac{\lambda}{2}, -r^2)$$

Ainsi, à un facteur près, la montée d'ordre λ donne la fonction de Laguerre d'indices $\alpha - \frac{\lambda}{2}$ et $\gamma - \frac{\lambda}{2}$. Ces fonctions sont trop régulières à l'origine pour être utiles dans les applications pratiques. Par contre, le clavier réciproque, ou clavier de Laguerre de deuxième espèce, présentera souvent beaucoup plus d'intérêt. Pour le définir, nous appliquerons au $g_n(r)$ donné en (98) la transformation de Hankel d'ordre μ mise sous la forme (92).

$$(101) \quad F_{\mu} g_n(r) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma-\alpha)} 2^{\mu-2} \pi^{\mu/2} \int_1^{\infty} e^{-\frac{ux^2}{4}} u^{\frac{\mu}{2}} (u-1)^{\gamma-\alpha-1} du$$

En particulier, pour $\mu = 0$, on obtient, en changeant u en $1+u$:

... / ...

$$F_0 \quad g_n(r) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha)} \frac{2(\delta-\alpha-1)}{2} \frac{2(\alpha-\delta)}{x} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

En modifiant les notations, nous définirons le clavier de Laguerre de deuxième espèce comme le clavier engendré par montée et descente à partir de :

$$(102) \quad g_n(r) = \frac{e^{-r^2}}{r^a} = \frac{1}{\Gamma(\frac{a}{2})} \int_1^\infty e^{-ur^2} (u-1)^{-1+\frac{a}{2}} du$$

On écrira aussi $g_{n,a}(r)$, pour rappeler que la fonction g_n dépend du paramètre a .

La montée d'ordre λ peut être effectuée directement, ou à partir de la représentation de Gauss. Par la deuxième méthode, et compte tenu de (90), on trouve :

$$(103) \quad g_{n-\lambda,a}(r) = \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\frac{a}{2})} \int_1^\infty e^{-ur^2} (u-1)^{-1+\frac{a}{2}} u^{-\lambda/2} du$$

Par la première méthode, et l'équation (39), on obtient :

$$g_{n-\lambda,a}(r) = \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \int_{r^2}^\infty e^{-u} (u-r^2)^{\frac{\lambda}{2}-1} u^{-\frac{a}{2}} du$$

En remplaçant u par $r^2 v$, cette expression devient :

$$(104) \quad g_{n-\lambda,a}(r) = \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\lambda/2)} r^{\lambda-a} \int_1^\infty e^{-vr^2} (v-1)^{-1+\frac{\lambda}{2}} v^{-\frac{a}{2}} dv$$

La comparaison de (103) et (104) conduit à la formule de transformation :

$$(105) \quad g_{n-\lambda,a}(r) = \pi^{\frac{\lambda-a}{2}} r^{\lambda-a} g_{n-a,\lambda}(r)$$

Pour justifier la dénomination de clavier de Laguerre de deuxième espèce, nous al-

... / ...

lons montrer que les $g_n = \lambda$ sont liés aux deuxièmes solutions d'une équation différentielle du type (95) - c'est-à-dire les solutions qui ne sont pas analytiques au voisinage de l'origine. Nous posons $r^2 = x$, et, considérant l'expression (103), nous cherchons si :

$$y = \int_1^{\infty} e^{-ux} (u-1)^{-1+\frac{a}{2}} u^{-\frac{\lambda}{2}} du$$

peut vérifier une équation du type :

$$xy'' + (Ax + B) y' + cy = 0$$

qui s'écrit aussi, sous forme intégrale :

$$\int_1^{\infty} e^{-ux} (u-1)^{-1+\frac{a}{2}} u^{-\frac{\lambda}{2}} [xu^2 - (Ax + B)u + c] du$$

En identifiant l'argument de l'intégrale à la dérivée de :

$$V(u) = e^{-ux} (u-1)^{\frac{a}{2}} u^{1-\frac{\lambda}{2}}$$

on voit que y vérifie, en effet, l'équation différentielle :

$$(106) \quad xy'' + (x + 1 + \frac{a-\lambda}{2}) y' + (1 - \frac{\lambda}{2}) y = 0$$

Il faut, en principe, supposer a positif. Mais les résultats auxquels nous parviendrons se présenteront sous forme de fonctions entières en a et λ . Par prolongement analytique, ils subsisteront pour des valeurs quelconques de ces paramètres. La solution générale de l'équation (106) est de la forme :

$$(107) \quad y = A F(1 - \frac{\lambda}{2}, 1 + \frac{a-\lambda}{2}, -x) + B x^{\frac{\lambda-a}{2}} F(1 - \frac{a}{2}, 1 + \frac{\lambda-a}{2}, -x)$$

... / ...

En remplaçant x par r^2 , on voit que le $g_{n=\lambda}(r)$ s'obtient effectivement à partir des fonctions de Laguerre. Il reste à déterminer les constantes A et B. Pour déterminer A, on fera $x = 0$, d'où (pour $\lambda > a$) :

$$y(0) = A.$$

Par intégration directe, avec $r = 0$, l'équation (103) donne :

$$(108) \quad A = \pi^{\lambda/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}.$$

Pour $\lambda < a$, ce résultat subsiste par prolongement analytique, sauf si $\frac{\lambda-a}{2}$ est un entier négatif. De même, B s'obtiendra en prenant la valeur, en $x = 0$, de $x^{\frac{a-\lambda}{2}} y$ (pour $a > \lambda$). L'expression (104) où l'on fait $r^2 = 0$, donne directement :

$$(109) \quad B = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{a-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Pour $a < \lambda$, ce résultat subsiste par prolongement analytique, sauf si $\frac{a-\lambda}{2}$ est un entier négatif. Finalement, la montée d'ordre λ se représentera par l'équation :

$$(110) \quad g_{n=\lambda,a}(r) = \frac{\pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} F\left(1 - \frac{\lambda}{2}, 1 + \frac{a-\lambda}{2}, -r^2\right) + \frac{\pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(\frac{a-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} r^{\lambda-a} F\left(1 - \frac{a}{2}, 1 + \frac{\lambda-a}{2}, -r^2\right)$$

Les fonctions de Laguerre pourront être représentées par leurs développements analytiques (94). Lorsque $\lambda - a$ est un entier pair, ces développements donneront encore le $g_{n=\lambda}$, grâce à un raisonnement à la limite, qui fera apparaître des

... / ...

termes logarithmiques. Les cas les plus utiles en pratique seront obtenus pour $\lambda = a, a + 1, a + 2$ et $a + 3$. Il leur correspond des covariogrammes dont les comportements à l'origine sont en $\log x, x, x^2 \log x$ et x^2 , conformément au phénomène habituel de régularisation à la montée.

Un cas particulier remarquable est observé pour $a = 1$. On a alors, pour $\lambda = 1$:

$$\xi_{n-1,1}(r) = \int_1^\infty e^{-ur^2} \frac{du}{\sqrt{u(u-1)}}$$

Soit, en posant $u = \frac{1+v}{2}$

$$(111) \quad \xi_{n-1,1}(r) = e^{-r^2/2} \int_1^\infty e^{-v \frac{r^2}{2}} \frac{dv}{\sqrt{(v^2-1)}} = e^{-\frac{r^2}{2}} K_0\left(\frac{r^2}{2}\right)$$

De même, pour $\lambda = 2$, on a, compte tenu de (104)

$$\xi_{n-2,1}(r) = \pi r \int_1^\infty e^{-vr^2} \frac{dv}{\sqrt{v}}$$

En posant $v = \frac{u^2}{2r^2}$, on fait apparaître l'intégrale de Gauss,

$$(112) \quad \xi_{n-2,1}(r) = \pi \sqrt{2} \int_{r\sqrt{2}}^\infty e^{-u^2/2} du = 2 \pi^{3/2} G(r\sqrt{2})$$

Un autre cas particulier remarquable, sur lequel nous n'insisterons pas, s'obtient en faisant tendre λ et a vers l'infini, de telle manière que $\lambda - a$ reste constant. On retrouve alors le clavier de Bessel de 2ème espèce, étudié au paragraphe 1.

... / ...

4.- Le clavier Hypergéométrique de première espèce.

La fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est définie par le développement :

$$(113) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!}.$$

Elle constitue la solution régulière au voisinage de l'origine de l'équation différentielle de Gauss :

$$(114) \quad x(1-x) y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x] y' - \alpha\beta y = 0$$

et admet la représentation intégrale ⁽¹⁾

$$(115) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} du$$

et la formule de transformation :

$$(116) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$$

On peut définir un clavier hypergéométrique de première espèce à partir d'une fonction $g_n(r)$ définie par :

$$(117) \quad g_n(r) = F(\alpha, \beta, \gamma, -r^2)$$

Pour effectuer la montée d'ordre λ , on prendra la fonction hypergéométrique
... / ...

- (1) - Cette intégrale ne converge que si les parties réelles de β et $\gamma-\beta$ sont positives. La théorie des distributions donne un sens à la représentation (115) même si cette condition n'est pas vérifiée. D'une façon plus élémentaire, l'unicité des prolongements analytiques permet d'étendre à toutes les valeurs des paramètres les résultats obtenus pour des domaines de variation bornés.

sous la forme intégrale (115). En permutant montée et intégration, on est conduit à effectuer la montée sur le terme $(1 + ur^2)^{-\alpha}$. On trouve facilement :

$$\frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\lambda/2)} \int_{r^2}^{\infty} (1+uv)^{-\alpha} (v-r^2)^{\frac{\lambda}{2}-1} dv = \pi^{\lambda/2} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\alpha)} u^{-\lambda/2} (1+ur^2)^{\frac{\lambda}{2}-\alpha}$$

En remplaçant, dans l'intégrale (115), le terme $(1 - xu)^{-\alpha}$ par cette expression, il vient :

$$(118) \quad g_{n=\lambda}(r) = \pi^{\lambda/2} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \frac{\lambda}{2})} \frac{\Gamma(\beta - \lambda/2)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha - \lambda/2)}{\Gamma(\alpha)} F(\alpha - \frac{\lambda}{2}, \beta - \frac{\lambda}{2}, \gamma - \frac{\lambda}{2}, -r^2)$$

Cette relation, qui généralise l'équation (100), montre qu'en clavier hypergéométrique de première espèce, la montée d'ordre λ s'effectue - à un facteur près, en remplaçant α, β , et γ par $\alpha - \frac{\lambda}{2}$, $\beta - \frac{\lambda}{2}$ et $\gamma - \frac{\lambda}{2}$. En pratique, les fonctions (118) sont trop régulières à l'origine pour être utilisées dans les applications.

Le clavier réciproque, construit sur les transformées de Hankel des $g_{n=\lambda}$, offrira une gamme de comportements à l'origine plus intéressante. Mais les expressions obtenues sont relativement compliquées. A la différence de ce que nous avons observé dans le cas des fonctions de Laguerre, le réciproque du clavier hypergéométrique n'est pas lui-même hypergéométrique.

En posant $u = \frac{1}{v^2}$, le $g_n(r)$ peut s'écrire :

$$g_n(r) = \frac{2 \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \beta)} \int_1^{\infty} \frac{1 + 2(\alpha - \gamma)}{v} (v^2 - 1)^{\gamma - \beta - 1} (v^2 + r^2)^{-\alpha} dv$$

On appliquera la transformation de Hankel d'ordre μ . Comme :

$$F_{\mu}(v^2 + r^2)^{-\alpha} = \frac{2^{1 + \frac{\mu}{2} - \alpha} \pi^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\alpha)} v^{\mu/2 - \alpha} \rho^{\alpha - \mu/2} K_{\mu/2 - \alpha}(v\rho)$$

... / ...

le clavier réciproque admet la représentation intégrale suivante :

$$(119) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{\frac{M}{2}} \xi_n(r) &= A r^{\alpha - \frac{M}{2}} \int_1^{\infty} \frac{1 + \frac{M}{2} + \alpha - 2\gamma}{v} (v^2 - 1)^{\gamma - \beta - 1} K_{\frac{M}{2} - \alpha}(\rho v) dv \\ A &= \frac{\Gamma(\gamma) 2^{2 - \alpha + M/2} \pi^{M/2}}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \beta) \Gamma(\alpha)} \end{aligned} \right.$$

Cette relation constitue une généralisation de (77). Pour la valeur particulière $M = 2\alpha - 1$, la fonction de Bessel $K_{\frac{1}{2}}$ s'exprime à l'aide d'une exponentielle. On trouve :

$$F_{2\alpha - 1} \xi_n(r) = A \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\infty} \frac{2(\alpha - \gamma)}{v} (v^2 - 1)^{\gamma - \beta - 1} e^{-\rho v} dv$$

Ce clavier constitue une généralisation du clavier de Bessel de deuxième espèce.

5.- Clavier Hypergéométrique de deuxième espèce.

Pour définir un clavier hypergéométrique de deuxième espèce, on prendra, par analogie avec (102), une fonction de départ $\xi_n(r)$ définie par :

$$(120) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_n(r) &= r^{-a} (1 - r^2)^{b/2} && \text{pour } r < 1 \\ \xi_n(r) &= 0 && \text{pour } r > 1 \end{aligned} \right.$$

La portée du covariogramme est prise, implicitement, comme unité de longueur. Pour r supérieur à 1, tous les covariogrammes sont nuls. On écrira

... / ...

aussi $\xi_{n,a,b}(r)$, pour rappeler qu'une telle fonction dépend des deux paramètres a et b . La montée d'ordre λ s'écrit ici :

$$(121) \quad \xi_{n-\lambda,a,b}(r) = \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\lambda/2)} \int_{r^2}^1 u^{-\frac{a}{2}} (1-u)^{\frac{b}{2}} (u-r^2)^{\frac{\lambda}{2}-1} du$$

Effectuons le changement de variable $u = 1 - (1-r^2)v$. Il vient :

$$(122) \quad \xi_{n-\lambda,a,b}(r) = \frac{\pi^{\lambda/2} (1-r^2)^{\frac{b+\lambda}{2}}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \int_0^1 [1 - (1-r^2)v]^{-a/2} v^{b/2} (1-v)^{\lambda/2-1} dv$$

Il suffit de comparer (122) et (115) pour obtenir :

$$(123) \quad \xi_{n-\lambda,a,b}(r) = \frac{\pi^{\lambda/2} \Gamma(1+\frac{b}{2})}{\Gamma(1+\frac{b+\lambda}{2})} (1-r^2)^{\frac{b+\lambda}{2}} F\left[\frac{a}{2}, 1+\frac{b}{2}, 1+\frac{b+\lambda}{2}, 1-r^2\right]$$

Le changement de variable $u = \frac{x^2}{v}$, effectué dans (121), conduit à une autre expression :

$$(124) \quad \xi_{n-\lambda,a,b}(r) = \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\lambda/2)} r^{\lambda-a} \int_{r^2}^1 v^{-1+\frac{a-\lambda-b}{2}} (v-r^2)^{b/2} (1-v)^{\lambda/2-1} dv$$

d'où l'on tire une formule de transformation :

$$(124) \quad \xi_{n-\lambda,a,b}(r) = \frac{\pi^{\frac{\lambda-b}{2}-1} \Gamma(1+b/2)}{\Gamma(\lambda/2)} r^{\lambda-a} \xi_{n-b-2, 1+\frac{\lambda+b-a}{2}, \lambda-2}(r)$$

que l'on peut obtenir aussi en appliquant (116) à (123).

... / ...

Pour obtenir un développement de (123) au voisinage de l'origine, on utilisera les propriétés classiques de permutation des solutions de l'équation (114). D'une façon générale, on voit, en changeant x en $1 - x$, que $F(\alpha, \beta, \gamma, 1 - x)$ est solution d'une équation de Gauss de paramètre α, β , et $\alpha + \beta - \gamma + 1$, ce qui s'écrit :

$$(125) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1 - x) = A F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, x) + B x^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, 1 + \gamma - \alpha - \beta, x)$$

On détermine la constante A en faisant $x = 0$:

$$A = F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}$$

Cette relation, obtenue pour $\gamma - \alpha - \beta > 0$, reste vraie pour des valeurs quelconques des paramètres, par suite de l'unicité des prolongements analytiques. Pour déterminer B , on multipliera les deux membres de (125) par $x^{\alpha + \beta - \gamma}$, et on utilisera la formule de transformation (116) sous la forme :

$$x^{\alpha + \beta - \gamma} F(\alpha, \beta, \gamma, 1 - x) = F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, 1 - x)$$

En faisant $x = 0$, on obtient :

$$B = F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}$$

Cette relation, obtenue pour $\alpha + \beta - \gamma > 0$, reste vraie pour des valeurs quelconques des paramètres, par suite de l'unicité des prolongements analytiques. Compte tenu de (125), et des valeurs trouvées pour A et B , le $g_{n-\lambda}$ écrit en (123) admet une deuxième expression :

... / ...

$$(126) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{n-\lambda, a, b}(r) &= \frac{\pi^{\lambda/2} \Gamma(1+b/2) \Gamma(\frac{\lambda-a}{2})}{\Gamma(1+\frac{\lambda+b-a}{2}) \Gamma(\frac{\lambda}{2})} (1-r^2)^{\frac{b+\lambda}{2}} F \left[\frac{a}{2}, 1+\frac{b}{2}, 1+\frac{a-\lambda}{2}, r^2 \right] \\ &+ \frac{\pi^{\lambda/2} \Gamma(\frac{a-\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})} (1-r^2)^{\frac{b+\lambda}{2}} r^{\lambda-a} F \left[\frac{\lambda}{2}, 1+\frac{b+\lambda-a}{2}, 1+\frac{\lambda-a}{2}, r^2 \right] \end{aligned} \right.$$

Lorsque $\lambda - a$ est un entier pair, on montre, par un raisonnement à la limite, que ces développements restent utilisables, et font apparaître des termes logarithmiques. Pour $\lambda = a, a+1, a+2, a+3$, on retrouve la séquence habituelle $\log r, r, r^2 \log r$, et r^2 .

Enfin, la formule de transformation (116), appliquée séparément à chacune des composantes du 2ème membre de (126), conduit à une troisième expression du $g_{n-\lambda}(r)$. On trouve :

$$(127) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{n-\lambda, a, b}(r) &= \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(1+\frac{b}{2}) \Gamma(\frac{\lambda-a}{2})}{\Gamma(1+\frac{b+\lambda-a}{2}) \Gamma(\frac{\lambda}{2})} F(1-\frac{\lambda}{2}, \frac{a-b-\lambda}{2}, 1+\frac{a-\lambda}{2}, r^2) \\ &+ \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(\frac{a-\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})} r^{-a+\lambda} F(1-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, 1+\frac{\lambda-a}{2}, r^2) \end{aligned} \right.$$

Comme exemple d'application, nous examinerons plus en détail le cas particulier $b = 0$. Il reste $g_n(r) = r^{-a}$. Les résultats obtenus pour la montée de r^{-a} seront utilisés dans le paragraphe suivant. On voit, sur le développement

... / ...

(113), que, pour $\beta = 0$, la fonction hypergéométrique se réduit à la constante unité. Pour $b = 0$, l'expression (127) de la montée d'ordre λ devient donc :

$$(128) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{n-\lambda, a, 0}(x) &= \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \frac{2}{\lambda-a} F\left(1 - \frac{\lambda}{2}, \frac{a-\lambda}{2}, 1 + \frac{a-\lambda}{2}, x^2\right) \\ &+ \frac{\pi^{\lambda/2} \Gamma(\frac{a-\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})} x^{\lambda-a} \end{aligned} \right.$$

La partie non régulière à l'origine se réduit à un terme monome $x^{\lambda-a}$. En explicitant le développement de la fonction hypergéométrique, on met (128) sous la forme suivante :

$$(129) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{n-\lambda, a, 0}(x) &= \frac{\pi^{\lambda/2} \Gamma(\frac{a-\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})} x^{\lambda-a} \\ &+ \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\lambda/2)} \left[\frac{2}{\lambda-a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\frac{\lambda}{2})(2-\frac{\lambda}{2}) \dots (n-\frac{\lambda}{2})}{n + \frac{a-\lambda}{2}} \frac{x^{2n}}{n!} \right] \end{aligned} \right.$$

Pour $\lambda = 2k$, entier pair, cette expression se réduit à un polynome, dont l'expression peut s'obtenir aussi par des intégrations élémentaires. Pour $\lambda = 2$, on trouve, par exemple :

$$\varepsilon_{n-2}(x) = \frac{2\pi}{a-2} (x^{2-a} - 1)$$

Lorsque $\lambda - a$ est un entier pair, on doit voir apparaître des termes logarithmiques. Compte tenu de ce que $\varepsilon_{n-\lambda}(x)$ s'annule en $x = 1$, on peut écrire :

... / ...

$$(130) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{n-\lambda}(x) &= \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\lambda/2)} x^{\lambda-a} \left[\frac{2}{a-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\lambda/2)(2-\lambda/2)\dots(n-\lambda/2)}{(n + \frac{a-\lambda}{2}) n!} \right] \\ &- \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \left[\frac{2}{a-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\lambda/2)\dots(n-\lambda/2)}{n + \frac{a-\lambda}{2}} \frac{x^{2n}}{n!} \right] \end{aligned} \right.$$

Pour étudier le cas $\lambda - a = 0$, on pose $\lambda - a = \xi$, et on étudie à part les termes en $\frac{2}{a-\lambda}$:

$$\frac{2}{\lambda-a} (1 - x^{\lambda-a}) = \frac{2}{\xi} (1 - x^{\xi}) \rightarrow -2 \log x$$

D'où, pour $\lambda - a = 0$, l'expression suivante, qui comporte un terme en $\log x$:

$$(131) \quad g_{n-a, a, 0}(x) = \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \left[-2 \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\lambda/2)(2-\lambda/2)\dots(n-\lambda/2)}{n n!} (x^{2n} - 1) \right]$$

Plus généralement, pour $\lambda - a = 2k$, entier pair, on posera $\lambda - a = 2k + \xi$, et on traitera à part les termes d'ordre k des deux séries infinies :

$$\frac{(1-\lambda/2)\dots(k-\lambda/2)}{k! (k + \frac{a-\lambda}{2})} \left[x^{2k} - x^{\lambda-a} \right] = \frac{2(1-\lambda/2)\dots(k-\lambda/2)}{k! \xi} x^{2k} (x^{\xi} - 1)$$

$$\rightarrow 2 \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \dots \left(k - \frac{\lambda}{2}\right) \frac{x^{2k}}{k!} \log x$$

... / ...

D'où le résultat cherché :

$$(132) \quad g_{n-a-2k, q, 0}(x) = \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \left[2(1-\frac{\lambda}{2}) \cdots (k-\frac{\lambda}{2}) \frac{x^{2k}}{k!} \log x + \sum_{n \neq k}^{\infty} \frac{(1-\frac{\lambda}{2}) \cdots (n-\frac{\lambda}{2})}{(n-k) n!} (x^{2n} - 2k) \right]$$

On pourra aussi utiliser les formules (126), qui donnent :

$$(133) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{n-\lambda, a, 0}(x) &= \pi^{\lambda/2} \frac{\Gamma(\frac{a-\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} x^{\lambda-a} \\ &+ \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \frac{2}{(\lambda-a)} (1-x^2)^{\lambda/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{a}{2}(1+\frac{a}{2}) \cdots (n-1+\frac{a}{2})}{(1+\frac{a-\lambda}{2})(2+\frac{a-\lambda}{2}) \cdots (n+\frac{a-\lambda}{2})} x^{2n} \right] \end{aligned} \right.$$

Si a est un entier pair négatif, l'expression entre crochet, dans le second membre, se réduit à un polynôme. Enfin, pour les valeurs de x voisines de l'unité, on pourra utiliser directement la formule (123), qui donne, avec $b = 0$:

$$(134) \quad g_{n-\lambda, a, 0}(x) = \frac{2}{\lambda} \frac{\pi^{\lambda/2}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} (1-x^2)^{\lambda/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{a}{2}(1+\frac{a}{2}) \cdots (n-1+\frac{a}{2})}{(1+\frac{\lambda}{2})(2+\frac{\lambda}{2}) \cdots (n+\frac{\lambda}{2})} (1-x^2)^n \right]$$

Comme les montées d'ordre entier pair se ramènent à des intégrations élémentaires, on utilisera surtout, dans les applications pratiques, la formule de la montée d'ordre $\lambda = 1$, que nous allons examiner plus en détail. Dans le cas général, où a n'est pas un entier, la formule (129) donne :

$$(135) \quad g_{n-1, a, 0}(x) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{a-1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})} x^{1-a} + \frac{2}{1-a} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{x^{2n}}{n + \frac{a-1}{2}}$$

... / ...

Les coefficients C_n

$$(136) \quad C_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n n!}$$

sont ceux du développement de $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$. Si a est un entier pair, ce développement reste utilisable. Il sera parfois préférable d'utiliser (133), en particulier si $a = -2k$ est un entier pair négatif : g_{n-1} est alors le produit d'un polynôme par $\sqrt{1-x^2}$. Pour a entier impair, et négatif, on peut utiliser la formule (132). Il sera souvent plus commode de faire une intégration directe. Par exemple, pour $a = -1$, on a :

$$(137) \quad g_{n-1, -1, 0}(x) = 2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + u^2)^{\frac{1}{2}} du = \sqrt{1-x^2} + x^2 \log \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$$

Pour $a = -(2k+1)$, une intégration par parties donne la formule de récurrence :

$$(138) \quad 2(k+1) I_{2k+1} = 2 \sqrt{1-x^2} + (2k+1) I_{2k-1}$$

On a écrit I_{2k+1} pour $g_{n-1, -2k-1, 0}(x)$.

On aura parfois besoin aussi d'effectuer la montée d'ordre 1 sur des termes de la forme $x^{-a} \log x$. Leur expression s'obtient en dérivant (135) par rapport au paramètre a . Si nous écrivons (135) sous la forme :

$$g_{n-1, a} = \frac{2}{1-a} - \int C_n \frac{x^{2n}}{n + \frac{a-1}{2}} - x^{1-a} \left[\frac{2}{1-a} - \int \frac{C_n}{n + \frac{a-1}{2}} \right]$$

... / ...

le résultat L_a de la montée sur $x^{-a} \log x$ a pour expression :

$$(139) \quad \left\{ \begin{aligned} L_a(x) &= -\frac{\partial}{\partial a} \varepsilon_{n=1,a}(x) \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{a-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} x^{1-a} \log x + x^{1-a} \left[\frac{2}{(1-a)^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\left(n + \frac{a-1}{2}\right)^2} \right] \\ &\quad - \frac{2}{(1-a)^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n x^{2n}}{\left(n + \frac{a-1}{2}\right)^2} \end{aligned} \right.$$

Pour a entier pair négatif, ce développement reste valable : le terme logarithmique disparaît, puisque $\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)$ est infini, et il reste une série entière paire, et un terme impair unique en x^{1-a} . Pour a entier impair négatif, on trouve, par passage à la limite, des termes en $(\log x)^2$. En particulier, pour $a = -1$, la montée de $x \log x$ donne :

$$(140) \quad \left\{ \begin{aligned} L_{-1}(x) &= -\frac{1}{2} x^2 (\log x)^2 + x^2 \log x \left[-1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n-1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} x^2 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{(n-1)^2} \right] - \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{(n-1)^2} \right] x^{2n} \end{aligned} \right.$$

Par des calculs directs, on trouve :

$$\left\{ \begin{aligned} -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n-1} &= \log 2 - \frac{1}{2} \\ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{(n-1)^2} &= \frac{1}{2} + \log 2 - \log^2 2 + \frac{\pi^2}{12} = 1,5351595 \dots \end{aligned} \right.$$

... / ...

[Pour sommer ces séries, on part de l'égalité :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+x} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(\frac{1}{2}+x)}$$

on pose $x = -1 + \xi$, et on cherche le développement de $f(x) = \frac{1}{2\xi}$ quand ξ tend vers 0. On écrit :

$$\log f(x) = \frac{1}{2} \log \pi + \log \frac{\xi - \frac{1}{2}}{\xi(\xi-1)} + \log \Gamma(1+\xi) - \log \Gamma(\frac{1}{2}+\xi)$$

En prenant $H(x) = \frac{d}{dx} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

$$\log f(x) = \log \frac{1-2\xi}{2\xi(1-\xi)} + \xi \left[\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \right] + \frac{\xi^2}{2} \left[H(1) - H(\frac{1}{2}) \right]$$

D'autre part, en dérivant la relation classique :

$$\Gamma(2x) = \Gamma(x) \Gamma(x + \frac{1}{2}) \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2x-1}$$

on trouve :

$$2 \frac{\Gamma'(2x)}{\Gamma(2x)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{\Gamma'(x + \frac{1}{2})}{\Gamma(x + \frac{1}{2})} + 2 \log 2$$

$$4 H(2x) = H(x) + H(x + \frac{1}{2})$$

et, pour $x = \frac{1}{2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - 2 \log 2 = C - 2 \log 2 \\ \\ H(\frac{1}{2}) = 3 H(1) = \frac{\pi^2}{2} \end{array} \right.$$

... / ...

D'où la méthode de sommation. Du développement :

$$f(x) - \frac{1}{2\xi} = \log 2 - \frac{1}{2} + \xi \left[\log 2 - \log 2 - \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{12} \right] \dots$$

on tire la somme des deux séries, en égalant la première au terme constant, et la deuxième au terme en ξ changé de signe]

6.- Le clavier géométrique.

Le clavier hypergéométrique dépend de trois paramètres essentiels et de deux paramètres de position (un paramètre d'échelle, et un facteur constant), soit au total 5 paramètres. C'est, en principe, une circonstance favorable, puisque l'ajustement de 5 paramètres permet de représenter à peu près n'importe quelle courbe expérimentale. En pratique, cette abondance risque d'être une gêne, si les données expérimentales ne sont pas assez détaillées pour permettre un ajustement significatif de paramètres aussi nombreux. On est conduit à chercher un clavier plus simple, dépendant par exemple d'un seul paramètre essentiel et de deux paramètres de position. Le clavier géométrique, introduit au paragraphe 6 du premier chapitre, sera souvent utile. Il est défini par :

$$(141) \quad g_3(r) = V \left[1 - \frac{\lambda}{\lambda - 1} r + \frac{1}{\lambda - 1} r^\lambda \right]$$

L'élément g_3 est supposé linéaire à l'origine (hypothèse convenable pour le problème géométrique). Dans d'autres cas, c'est au $g_2(r)$ que l'on affectera l'expression (141). Dans le cas limite $\lambda = 1$, il reste :

$$g_3(r) = V \left[1 + r \log r - r \right]$$

La montée d'ordre 1 donne $g_2(r)$. Elle s'effectue terme à terme, en utilisant les relations (135) et suivantes. Désignons par $I_{\alpha}(x)$ le résultat de la montée d'ordre α /...

dre 1 effectuée sur r^α :

$$(142) \quad I_\alpha(x) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(-\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} x^{1+\alpha} + \frac{2}{1+\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n x^{2n}}{n - \frac{1+\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(-\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} x^{1+\alpha} + \frac{2}{1+\alpha} \sqrt{1-x^2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{\alpha}{2}) \dots (n-1-\frac{\alpha}{2})}{(1-\frac{1+\alpha}{2}) \dots (n-\frac{1+\alpha}{2})} x^{2n} \right]$$

Pour α entier impair, le résultat peut être calculé directement par les formules de récurrence (137) et (138). Pour le terme $r \log r$, on utilisera (140).

On a ainsi :

$$(143) \quad g_2(x) = v \left[I_0(x) - \frac{\lambda}{\lambda-1} I_1(x) + \frac{1}{\lambda-1} I_\lambda(x) \right]$$

La montée d'ordre 2 donne un nouveau polynome :

$$(144) \quad g_1(h) = v \frac{\pi}{3} \frac{\lambda}{\lambda+2} \left[1 - \frac{3(\lambda+2)}{\lambda} h^2 + 2 \frac{\lambda+2}{\lambda-1} h^3 - \frac{6}{\lambda(\lambda-1)} h^{\lambda+2} \right]$$

et, dans le cas limite $\lambda = 1$

$$(145) \quad g_1(h) = \frac{\pi}{9} v \left[1 - 9 h^2 - 6 h^3 \log h + 8 h^3 \right]$$

Pour les ajustements pratiques, on utilisera souvent les valeurs à l'origine :

$$(146) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_3(0) = v \\ g_2(0) = \frac{\lambda}{\lambda+1} v \\ g_1(0) = \frac{\pi}{3} \frac{\lambda}{\lambda+2} v \\ g_0(0) = \frac{\pi}{3} \frac{\lambda}{\lambda+3} v = v^2 \end{array} \right.$$

... / ...

La valeur à l'origine du covariogramme obtenu par une montée d'ordre μ est donnée par la formule générale :

$$(147) \quad \xi_{3-\mu}(0) = \frac{\pi^{\mu/2}}{\Gamma(\mu/2)} \frac{2\lambda}{\mu(\mu+1)(\lambda+\mu)} \quad V$$

7.- Le clavier sphérique.

Nous appellerons clavier sphérique le sous-clavier, extrait du clavier hypergéométrique de deuxième espèce, obtenu en faisant $a=1$ dans l'équation (127), c'est-à-dire engendré par les processus habituels de montée effectués sur l'expression $\frac{(1-r^2)^{b/2}}{r}$. Ce clavier est lié de façon étroite à la géométrie des hypersphères dans des espaces à un nombre quelconque de dimensions. Examinons, en premier lieu, le cas de la sphère à 3 dimensions. La variable géométrique (égale à $+1$ à l'intérieur de la sphère de diamètre 1, et à 0 à l'extérieur) admet le covariogramme :

$$(148) \quad g(h) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} h (1 - \frac{1}{3} h^2) = \frac{1}{8} \xi_{n-2,1,2}(h).$$

Le $\xi_{n-2,1,2}(h)$ est défini en (127), avec $\lambda=2$, $a=1$, $b=2$. Il représente la fonction, linéaire à l'origine, obtenue par une montée d'ordre 2 effectuée sur $\frac{1-r^2}{r}$. De même, dans un espace à 2 dimensions, le covariogramme $g(h)$ de la variable égale à $+1$ dans le cercle de diamètre unité, et à 0 à l'extérieur, représente l'aire de l'intersection du cercle et de son translaté par h , et a pour expression :

$$(149) \quad g(h) = \frac{1}{2} \left[\text{Arc cos } h - h \sqrt{1-h^2} \right] = \frac{\pi}{4} - h F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, h^2\right) \\ = \frac{1}{2\pi} \xi_{n-2,1,1}(h)$$

... / ...

Il est obtenu par une montée d'ordre 2 effectuée sur $\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}$. Dans un espace à une seule dimension, la sphère de diamètre unité - ou segment de longueur 1 - définit une variable géométrique ponctuelle de covariogramme.

$$(150) \quad g(h) = 1 - h = \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{n=2,1,0}(h)$$

Ces résultats se généralisent à un nombre quelconque μ (non nécessairement entier) de dimensions. Dans l'espace à μ dimensions, l'hypersphère de diamètre a a pour volume :

$$(151) \quad V_{\mu} = \frac{2^{-\mu} \pi^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(1+\frac{\mu}{2})}$$

Le variogramme $g_{\mu}(h)$ de la variable géométrique (égale à +1 à l'intérieur de l'hypersphère de diamètre unité, et à 0 à l'extérieur) représente le volume de l'intersection de l'hypersphère et de sa translatée par h . La dérivée changée de signe, $-g'_{\mu}(h)$, est le contour apparent de cette intersection, c'est-à-dire le volume de l'hypersphère à $\mu-1$ dimensions de diamètre $\sqrt{1-h^2}$. D'après (151), on a donc :

$$(152) \quad -g'_{\mu}(h) = \frac{2^{1-\mu} \pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1+\mu}{2})} (1-h^2)^{\frac{\mu-1}{2}}$$

En intégrant, et compte tenu du fait que $g(h)$ s'annule pour $h=1$, on obtient :

$$(153) \quad g_{\mu}(h) = \frac{2^{1-\mu} \pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1+\mu}{2})} \int_h^1 (1-h^2)^{\frac{\mu-1}{2}} dh$$

Cette relation représente - à un facteur près - la montée d'ordre 2 effectuée sur $\frac{(1-r^2)^{\frac{\mu-1}{2}}}{r}$. Le $g_{\mu}(h)$ est du type (127), avec $\lambda = 2$, $a = 1$,

... / ...

$b = \mu - 1$. On trouve, exactement :

$$(154) \quad g_{\mu}(h) = \frac{2^{-\mu} \pi^{\frac{\mu-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right)} g_{n-2,1,\mu-1}(h)$$

Les trois relations (148), (149) et (150) correspondent aux cas particuliers $\mu = 3, 2$ et 1 . Compte tenu de (127), on explicite cette relation sous la forme :

$$(155) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{\mu}(h) &= \frac{2^{-\mu} \pi^{\mu/2}}{\Gamma\left(1+\frac{\mu}{2}\right)} - \frac{2^{1-\mu} \pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right)} h F\left(\frac{1}{2}, \frac{1-\mu}{2}, \frac{3}{2}, h^2\right) \\ &= V_{\mu} - V_{\mu-1} h F\left(\frac{1}{2}, \frac{1-\mu}{2}, \frac{3}{2}, h^2\right) \end{aligned} \right.$$

Les deux constantes V_{μ} et $V_{\mu-1}$ représentent les volumes des hypersphères de diamètre unité dans les espaces à μ et $\mu - 1$ dimensions. $V_{\mu-1}$ peut être aussi considéré comme le contour apparent de l'hypersphère à μ dimensions. On retrouve le résultat établi en (65). La relation générale entre le covariogramme $g(h)$ de la variable géométrique ponctuelle et l'histogramme (densité de fréquence) statistique de puissance $f(h)$:

$$f(h) = g''(h)$$

donne ici - compte tenu de (152) :

$$(156) \quad f(h) = A h(1-h^2)^{\frac{\mu-3}{2}}$$

A étant une constante de normalisation. Une telle loi de probabilité est analogue à la loi définie par la fonction eulérienne Beta incomplète. Mais elle ne dépend que d'un paramètre μ (le nombre des dimensions de l'hypersphère !) et présente une pente finie à l'origine.