



MOTE GEOSTATISTIQUE

N° 43

COUPURES OPTIMALES ET PARADOXES DE L'ACTUALISATION

- o -

par G.MATHERON et Ph. FORMERY

Janvier 1963.

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 43

Coupures optimales et paradoxes de l'actualisation

1./ Introduction

Cette Note, qui doit être considérée comme un complément de la Note n°41, se propose d'étudier d'une manière plus approfondie la détermination de la coupure optimale. Dans la Note n° 41, on avait admis implicitement l'homogénéité de la relation tonnage-teneur, c'est-à-dire supposé qu'à une coupure x donnée correspondait une teneur moyenne uniforme des différents panneaux du gisement. Cette hypothèse impliquait une teneur constante pour le minerai livré à l'usine de traitement. En fait, la teneur du produit traité peut varier dans le temps. Les fluctuations quotidiennes, ou même mensuelles n'entraînent sans doute pas de conséquences importantes, mais il n'en est certainement pas de même, si l'on actualise, de la dérive annuelle. Ainsi, lorsque la relation tonnage-teneur n'est pas homogène - c'est-à-dire lorsque la teneur moyenne correspondant à une coupure donnée varie d'une zone à l'autre dans l'espace du gisement - l'ordre dans lequel on prend les différents panneaux n'est pas indifférent: Si l'on actualise, on a intérêt à exploiter, en premier lieu, les panneaux les plus riches. A la limite, le mineur devrait se livrer à un véritable travail de taupe, qui constituerait en réalité un sabotage du gisement, l'enlèvement prématuré de certains panneaux riches compromettant l'accessibilité des zones voisines. Il reste vrai, cependant, que chaque fois que le mineur a le choix - c'est-à-dire chaque fois qu'il peut le faire sans nuire à l'exploitabilité technique du gisement - de deux panneaux l'un riche et l'autre pauvre, il enlève d'abord le riche. Cette règle est souvent mise en échec par des contraintes commerciales, qui imposent au mineur de livrer une production de caractéristiques aussi constantes que possible : en pareil cas, il exploite simultanément plusieurs panneaux, riches, moyens et pauvres, et mélange judicieusement leurs produits (et cela pose, en général, un difficile problème d'homogénéisation).

... / ...

Mais il y a plus. La Note n° 41 admettait implicitement que l'optimum correspondait à une coupure constante dans le temps. Il en est bien ainsi en l'absence d'actualisation : et, comme, précisément, nous avons montré la nécessité de ne pas actualiser, tous les résultats obtenus subsistent intégralement. Il est cependant instructif de montrer à quelles anomalies conduirait l'actualisation. On trouve, en actualisant, que la teneur de coupure doit être prise constamment décroissante dans le cours de l'exploitation, la valeur terminale, atteinte au moment où l'on sort la dernière tonne de la mine coïncidant avec la coupure marginaliste non actualisée $\frac{P}{b}$. L'ordre de grandeur de cette dérive est très important, et conduit à un écrémage inadmissible. Nous pensons que la mise en évidence de ces conséquences malthusiennes de l'actualisation constitue une preuve supplémentaire, par l'absurde, de la nécessité de déterminer les optima techniques à $i = 0$.

Dans un premier paragraphe, nous définirons les notions et les notations utilisées. Nous examinerons ensuite l'influence de la variabilité de la relation tonnage-teneur sur le choix d'une coupure x que l'on s'impose de maintenir constante pendant toute l'exploitation, puis nous aborderons le problème général de la détermination d'une coupure variable dans le temps. Afin d'obtenir des ordres de grandeur numériques, nous étudierons plus complètement certains cas particuliers. Pour terminer, nous examinerons rapidement ce que donnerait le critère strictement capitalistique qui consiste à maximiser le rendement $\frac{B_i}{I}$ de chaque action.

2/- Concepts et Notations utilisés.

Afin de ne pas compliquer un problème relativement difficile, nous n'examinerons pas l'influence de l'ordre dans lequel on décide d'enlever les différents panneaux du gisement. Plus exactement, nous admettrons que cet ordre est imposé par des impératifs techniques, et peut être représenté par un paramètre descriptif h . Par exemple, h pourra représenter l'approfondissement d'une carrière, ou la cote d'une tranche horizontale. Le paramètre h variera de la valeur 0, correspondant au début de l'exploitation, à une valeur H qui en marquera la fin. La tranche de gisement comprise entre h et $h + dh$ est décrite par une relation tonnage-teneur différentielle.

$$T(x, h)dh$$

qui représente le tonnage de minerai contenu dans la tranche pour une teneur de

... / ...

coupure x donnée. Ce tonnage différentiel dépend non seulement de x , mais aussi de h . Si la teneur de coupure est fixée à une valeur uniforme x pour toutes les tranches, le tonnage exploité entre les cotes 0 et h sera désigné par $\theta(x, h)$:

$$(1) \theta(x, h) = \int_0^h T(x, h) dh$$

Si la coupure est variable, c'est-à-dire si la tranche $(h, h + dh)$ est coupée à la teneur $x(h)$, on doit écrire :

$$(2) \theta(h) = \int_0^h T[x(h), h] dh$$

et le tonnage $\theta(h)$ dépend de toutes les valeurs prises par la coupure $x(h)$ entre 0 et h .

La teneur moyenne $m(x, h)$ de la tranche $(h, h+dh)$ coupée à la teneur x est donnée par :

$$(3) m(x, h) T(x, h) = - \int_x^\infty \frac{\partial T}{\partial x} x dx$$

On en déduit, en dérivant en x :

$$(4) \frac{\partial m T}{\partial x} = x \frac{\partial T}{\partial x}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(5) (m - x) \frac{\partial \log T}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0$$

Pour que les différentes tranches aient même teneur moyenne $m(x, h)$ à coupure x donnée, la relation tonnage-teneur doit vérifier la condition :

$$\frac{\partial m}{\partial h} = 0$$

Si cette relation est vérifiée, on obtient, en dérivant (5) en h :

$$\frac{\partial^2 \log T}{\partial x \partial h} = 0$$

Cette équation aux dérivées partielles montre que le tonnage $T(x, h)$ doit être de la forme :

$$(6) T(x, h) = f(x) g(h)$$

... / ...

Il apparaît comme le produit de deux fonctions l'une de x , l'autre de h . L'essentiel de la relation tonnage-teneur est contenu dans la seule fonction $f(x)$, qui est la même pour toutes les tranches. La fonction $g(h)$ est un simple facteur de dimensionnement. Une fonction $T(x,h)$ de cette forme sera dite homogène (par rapport aux tranches). On vérifie facilement qu'une fonction $T(x,h)$ homogène conduit effectivement à une teneur $m(h,x)$ indépendante de h . En dehors de ce cas particulier, $m(h,x)$ dépend de h .

Le temps τ est lié au paramètre descriptif h par l'intermédiaire de la cadence d'exploitation t (tonnage produit par unité de temps). Si l'on prend comme origine des temps $\tau = 0$ le début de l'exploitation, on a :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{\theta}{t} \\ d\tau = \frac{T}{t} dh \end{array} \right.$$

le tonnage cumulé θ étant défini en (1) ou en (2), suivant le cas.

Les paramètres économiques utilisés ont la même définition et sont représentés par les mêmes notations que dans la Note 41 :

- t , cadence annuelle d'exploitation,
- b , valeur du point de métal supplémentaire contenu dans la tonne de minerai.
- p , prix de revient (exploitation et traitement) à la tonne de minerai.
- $\dot{I}$, investissement.
- B_i , bénéfice actualisé au taux i .

$\dot{I}$ est considéré comme une fonction $\dot{I}(t)$ de la seule cadence d'exploitation. Par contre, p sera, en général, une fonction $p(h,t)$ de la cadence et du paramètre descriptif h : il sera possible, de cette manière, de tenir compte d'une éventuelle variation des prix de revient en fonction, par exemple, de l'approfondissement :

... / ...

Le bénéfice actualisé est défini par :

$$B_i = \int_0^N (bm - p)t e^{-i\tau} d\tau - \dot{I}(t)$$

N représentant la durée de vie de l'exploitation. Dans ce qui suit, nous prenons comme critère d'optimum la maximisation de B_i . Nous examinerons dans le dernier paragraphe ce que donnerait le critère capitalistique, où l'on maxime le rendement des investissements $\frac{B_i}{\dot{I}}$.

3./- Optimum pour une coupure x uniforme.

Cherchons, en premier lieu, les conditions de l'optimum lorsque l'on s'impose de couper toutes les tranches à une même teneur x . Le tonnage cumulé θ est défini par l'expression (1), où x est un paramètre numériquement fixé. Les deux paramètres du problème, x et t , doivent être déterminés de manière à optimiser le bénéfice actualisé B_i . Le facteur d'actualisation se met, d'après (7), sous la forme :

$$(8) \quad e^{-i\tau} d\tau = \frac{T}{t} e^{-i \frac{\theta}{t}} dh$$

D'où l'expression du bénéfice actualisé :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} B_i &= \int_0^N (bm - p)t e^{-i\tau} d\tau - \dot{I}(t) \\ &= \int_0^H bm T e^{-i \frac{\theta}{t}} dh - pt \frac{1 - e^{-iN}}{i} - \dot{I}(t) \end{aligned} \right.$$

La durée de vie N de la mine est ici donnée par :

$$(10) \quad N = \frac{\theta(x, H)}{t}$$

On écrit les conditions de l'optimum en annulant les dérivées de B_i en x et en t . Examinons tout d'abord l'équation de coupure

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} = 0$$

... / ...

Compte tenu de la relation (4), on trouve :

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} = b \int_0^H x \frac{\partial T}{\partial x} e^{-i \frac{\theta}{t}} dh - \frac{bi}{t} \int_0^H mT \frac{\partial \theta}{\partial x} e^{-i \frac{\theta}{t}} dh - p \frac{\partial \theta(x, H)}{\partial x} e^{-i \theta'(x, H)}$$

Pour simplifier la première intégrale, nous remarquerons que l'on a, d'après (1) :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial h}$$

et nous ferons une intégration par parties :

$$\int_0^H x \frac{\partial T}{\partial x} e^{-i \frac{\theta}{t}} dh = \left[x \frac{\partial \theta}{\partial x} e^{-i \frac{\theta}{t}} \right]_0^H + \frac{i}{t} \int_0^H x \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial h} e^{-i \frac{\theta}{t}} dh$$

De (1) résulte que le terme intégré s'annule pour la limite inférieure $h = 0$, et que la dérivée $\frac{\partial \theta}{\partial h}$ n'est autre que T . L'expression précédente s'écrit donc :

$$x \frac{\partial \theta(x, H)}{\partial x} e^{-i \frac{\theta(x, H)}{t}} + \frac{i}{t} \int_0^H x T \frac{\partial \theta}{\partial x} e^{-i \frac{\theta}{t}} dh$$

On en tire :

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} = (bx - p) \frac{\partial \theta(x, H)}{\partial x} e^{-i \frac{\theta(x, H)}{t}} - \frac{bi}{t} \int_0^H (m - x) T \frac{\partial \theta}{\partial x} e^{-i \frac{\theta}{t}} dh$$

L'équation de coupure $\frac{\partial B}{\partial x} = 0$ prend la forme :

$$(11) \quad x = \frac{p}{b} + i \frac{e}{t} \frac{\theta(x, H)}{\partial x} \int_0^H (m - x) T \frac{\partial \theta}{\partial x} e^{-i \frac{\theta}{t}} dh$$

La forme même de cette équation montre que, pour i non nul, la teneur de coupure est obligatoirement supérieure à $\frac{p}{b}$: l'actualisation conduit à l'écramage. Dans le cas particulier d'une relation tonnage-teneur homogène, c'est-à-dire de la forme (6),

... / ...

on a, en désignant par $G(h)$ l'intégrale de $g(h)$:

$$\theta(x, h) = f(x) G(h)$$

tandis que m ne dépend plus de h . En désignant par N la durée de vie définie en (10), le terme correctif de l'équation (11) prend alors la forme :

$$(12) \quad \frac{i(m-x)}{t f' G(H)} e^{iN} \int_0^{G(H)} f(x) f'(x) G(h) e^{-i \frac{f(x) G(h)}{t}} d G(h) \\ = (m-x) \frac{(e^{iN} - 1 - iN)}{iN}$$

Cette expression a été obtenue directement dans la Note n°41. Deux conclusions se dégagent :

1°/- Si l'on n'actualise pas ($i = 0$), l'équation (11) se réduit à $x = \frac{p}{b}$ et représente la coupure marginaliste classique : ce résultat reste vrai même si la relation tonnage-teneur n'est pas homogène. Les raisonnements généraux faits dans la Note 41 ayant montré que l'optimisation devait se faire à $i = 0$, les résultats obtenus ne sont pas affectés par une hétérogénéité de la relation tonnage-teneur.

2°/- Si l'on actualise, le terme correctif de l'équation (11) est affecté, dans sa valeur numérique, par une telle relation. Mais sa signification qualitative, et son ordre de grandeur restent les mêmes. En particulier, il est toujours positif : il peut, du reste, se mettre sous la forme (12), à condition de remplacer la vraie teneur moyenne m par une moyenne convenablement pondérée.

La deuxième équation de l'optimum, $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$, donnerait lieu à des remarques analogues et s'écrirait :

$$(13) \quad \frac{i b}{t^2} \int_0^H \theta e^{-i \frac{\theta}{t}} dh = \frac{\partial}{\partial t} \left[p t \frac{1 - e^{-i \frac{\theta(x,H)}{t}}}{i} \right] + \dot{I}'(t)$$

... / ...

4.- Optimum pour une coupure $x(h)$ variable

Puisque les tranches n'ont pas toutes les mêmes caractéristiques, il peut y avoir un intérêt non négligeable à modifier la teneur de coupure x , de manière à l'adapter constamment aux caractéristiques de la tranche en cours d'exploitation. Le problème, qui relève du calcul des variations, consiste à déterminer la fonction $x(h)$ qui optimise le bénéfice B_i . A l'optimum, une variation $\delta x(h)$ de cette fonction doit entraîner une variation nulle du bénéfice, $\delta B_i = 0$.

Ecrivons ce bénéfice :

$$(14) \quad B_i = \int_0^H (bm - p)T e^{-i \frac{\theta}{t}} dh - i$$

Ici, T est mis pour $T[x(h), h]$, et θ a l'expression (2). Pour calculer la variation δB_i , nous devons exprimer les variations des différentes fonctions qui figurent sous le signe somme. On a, tout d'abord :

$$(15) \quad \delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \delta x$$

La variation du produit mT se déduit directement, pour une valeur donnée de h , de l'équation (3) :

$$(16) \quad \delta(mT) = x \frac{\partial T}{\partial x} \delta x = x \delta T$$

La variation de θ , conformément à (2), fait intervenir toutes les valeurs prises par x entre 0 et h :

$$(17) \quad \delta \theta = \int_0^h \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta x dh = \int_0^h \delta T dh$$

En particulier, on a :

$$(18) \quad \frac{d}{dh} \delta \theta = \delta T$$

On obtient ainsi la variation du bénéfice :

$$(19) \quad \delta B_i = \int_0^H (bx - p) e^{-i \frac{\theta}{t}} \delta T dh - \frac{i}{t} \int_0^H (bm - p)T e^{-i \frac{\theta}{t}} \delta \theta dh$$

... / ...

Grâce à la relation (18), la deuxième intégrale peut se simplifier. Considérons la fonction de h :

$$(20) \quad A(h) = b \left\{ m[x(h), h] - p \right\} T[x(h), h] e^{-i \frac{\theta(x(h), h)}{t}}$$

et posons :

$$(21) \quad C(h) = \int_0^h A(h) dh$$

En faisant une intégration par parties, il vient :

$$\int_0^H A(h) \delta \theta dh = \left[C(h) \delta \theta \right]_0^H - \int_0^H C(h) \delta T dh$$

D'où la variation (19) :

$$\delta B_i = \int_0^H \left[(bx - p) e^{-i \frac{\theta}{t}} + \frac{i}{t} C(h) \right] \delta T dh - \frac{i}{t} \left[C(h) \delta \theta \right]_0^H$$

Le terme tout intégré s'annule pour la limite inférieure $h = 0$, puisque, d'après (17), $\delta \theta(0) = 0$. Il se réduit donc à :

$$- \frac{i}{t} C(H) \delta \theta(H) = - \frac{i}{t} C(H) \int_0^H \delta T dh$$

Finalement, on a :

$$\delta B_i = \int_0^H \left\{ (bx - p) e^{-i \frac{\theta}{t}} + \frac{i}{t} [C(h) - C(H)] \right\} \delta T dh$$

Cette variation devant être nulle, quelle que soit la variation arbitraire $\delta T(h)$, l'argument de l'intégrale doit être nul : on obtient ainsi l'équation de l'optimum pour la fonction $x(h)$, qui s'écrit :

$$(22) \quad (bx - p) e^{-i \frac{\theta}{t}} + \frac{i}{t} [C(h) - C(H)] = 0$$

Compte tenu de (20) et (21), cette équation, qui est une équation intégrale, se met sous la forme :

... / ...

$$(22)\text{bis} \quad x(h) = \frac{p}{b} + i \frac{e}{t} \int_h^H (m - \frac{p}{b}) T e^{-i \frac{\theta(h)}{t}} dh$$

On prendra bien garde que $T[x(h), h]$ et θ défini par son expression (2) dépendent de h directement et par l'intermédiaire de la fonction inconnue $x(h)$. L'équation (22)bis est difficile à résoudre directement. Mais sa forme même se prête très bien à un calcul d'approximations successives. Deux conclusions, ici encore, se dégagent :

1°/- Si on n'actualise pas ($i = 0$) et si p est indépendant de h , on retrouve la coupure marginaliste $x = \frac{p}{b}$: la coupure est indépendante de h . Il en résulte que, pour $i = 0$, les résultats de la Note 41 subsistent intégralement. Par contre, si p dépend de h , la coupure $\frac{p(h)}{b}$ s'adapte aux caractéristiques locales du gisement. Elle est toujours égale au rapport du prix de revient local $p(h)$ à la valeur b du point supplémentaire, conformément à la règle marginaliste.

2°/- Si l'on actualise, l'équation intégrale montre que la coupure est majorée d'un terme correctif toujours positif. Mais ce terme est variable, c'est une fonction de h . Il se présente sous la forme d'une intégrale prise entre h et H . Il en résulte, en particulier, que ce terme (1)* décroît quand h augmente, et s'annule en $h = H$. : Ainsi, la teneur de coupure $x(h)$ décroît constamment au cours de l'exploitation, jusqu'à coïncider avec la coupure marginaliste $\frac{p}{b}$ au moment où l'on enlève la dernière tonne de minerai. Il en est ainsi même dans le cas où la relation tonnage-teneur est homogène relativement aux tranches. Le fait que $T(x, h)$ soit de la forme (6) n'introduit pas de simplification majeure.

L'équation (22) donne, par dérivation totale en h , une équation plus simple :

$$(23) \quad e^{-i \frac{\theta}{t}} \left[b \frac{d}{dh} \left(x - \frac{p}{b} \right) - \frac{i}{t} (bx - p) \frac{d\theta}{dh} \right] + \frac{i}{t} \frac{dC(h)}{dh} = 0$$

(1)* La présence du terme exponentiel devant l'intégrale introduit une petite difficulté : l'équation (24) montre cependant que sa dérivée est toujours négative, donc que le terme correctif est toujours décroissant.

Les dérivées de θ et C se déduisent de (2) et (21)

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dh} = T \\ \frac{dC}{dh} = A(h) = (bm - p)T e^{-i \frac{\theta}{T}} \end{cases}$$

En substituant dans (23), l'exponentielle s'élimine, et il vient :

$$(24) \quad \frac{d}{dh} \left(x - \frac{p}{b} \right) + i \frac{T}{t} (m - x) = 0$$

Pour $i = 0$, on retrouve, naturellement $x - \frac{p}{b} = \text{Cste}$. L'équation différentielle ainsi obtenue n'est équivalente à l'équation intégrale (22) qu'à une constante près, constante que l'on détermine par la condition supplémentaire :

$$(25) \quad x(H) = \frac{p(H, t)}{b}$$

Dans le cas où p ne dépend pas de h , les données économiques p et b disparaissent complètement de l'équation (24). Si l'on tient compte de la relation (7) entre tonnage exploité et temps τ , on voit que la dérive dans le temps obéit à l'équation :

$$\frac{d}{d\tau} \left(x - \frac{p}{b} \right) + i(m - x) = 0$$

où p est une fonction de τ par l'intermédiaire de h . Si le prix de revient p peut être considéré comme uniforme dans le gisement (indépendant de h), il reste l'équation de dérive très simple :

$$(26) \quad \frac{dx}{d\tau} + i(m - x) = 0$$

On prendra bien garde qu'une équation telle que (24) doit s'écrire, explicitement :

$$\frac{dx}{dh} - \frac{\partial p(h, t)}{b \partial h} - \frac{i}{t} \int_{x(h)}^u \frac{\partial T(u, h)}{\partial u} du - \frac{i}{t} T[x(h), h] x(h) = 0$$

... / ...

5.- Cas particulier d'une relation Tonnage-teneur homogène.

Même dans ce cas particulier, l'actualisation conduit à une teneur de coupe variable. Si la relation tonnage-teneur différentielle est de la forme :

$$(27) \quad T(x, h)dh = f(x) g(h) dh$$

où la fonction $g(h)$ est un simple facteur de dimensionnement, il est commode d'introduire un nouveau paramètre :

$$(28) \quad \lambda = \frac{\int_0^h g(h)dh}{\int_0^H g(h)dh}$$

λ varie de 0 à 1 du début à la fin de l'exploitation. Il représente, à chaque instant, la fraction du tonnage géologique total (coupé à $x = 0$) compromise par l'exploitation. Si l'on remplace h par ce nouveau paramètre, la relation (27) se met sous la forme.

$$(29) \quad T(x, \lambda) d\lambda = T(x) d\lambda$$

avec

$$T(x) = f(x) \int_0^H g(h)dh$$

Nous supposons, de plus, que p est indépendant de h , ou de λ , et ne dépend que de la cadence t . L'équation (24) s'écrit alors :

$$(30) \quad \frac{dx}{d\lambda} + i \frac{T(x)}{t} (m - x) = 0$$

Pour simplifier cette équation, nous remarquerons que $T(x)$ n'est autre que la relation tonnage-teneur globale (relative au gisement entier), de sorte qu'ici la relation (4) s'écrit :

$$d(mT) = x dT$$

De cette relation entre différentielles totales, on déduit immédiatement :

$$dT(m-x) = x dT - d(xT) = -T dx$$

... / ...

D'où, en multipliant (30) par $T(x)$, l'équation différentielle suivante :

$$d T(m-x) = i T(m-x) \frac{T}{t} d\lambda$$

Mais comme le temps $\mathcal{T}$ est lié à T et λ par la relation :

$$d \mathcal{T} = \frac{T}{t} d\lambda$$

on obtient l'équation de dérive sous la forme :

$$d T(m-x) = i T(m-x) d \mathcal{T}$$

qui s'intègre immédiatement :

$$(31) \quad \log [T(x)(m-x)] = i \mathcal{T} + \text{Cste}$$

Pour déterminer la constante, on doit écrire qu'au temps $\mathcal{T} = N$, qui marque la fin de l'exploitation, on a :

$$(32) \quad x(N) = \frac{p}{b}$$

Ce temps $\mathcal{T} = N$ est lui-même déterminé en écrivant que $\lambda = 1$ pour $\mathcal{T} = N$, ce qui donne :

$$(33) \quad \int_0^N \frac{d\mathcal{T}}{T} = \frac{1}{t}$$

La résolution explicite du système (31), (32), (33) permet d'exprimer la teneur de coupure en fonction du temps $x(\mathcal{T})$. Le tonnage de minerai Nt , le tonnage de métal Q et la teneur résultante s'en déduisent aisément.

A titre d'illustration, supposons que la relation tonnage-teneur obéisse à la loi de LASKY :

$$(34) \quad m = \alpha - \beta \log T$$

qui s'écrit aussi :

$$(35) \quad T(x) = T_0 e^{-\frac{x}{\beta}}$$

... / ...

Sous cette forme, le coefficient :

$$T_0 = T(0) = e^{\frac{\alpha - \beta}{\beta}}$$

représente le tonnage géologique total (coupé à $x = 0$).

Teneur moyenne $m(x)$ et teneur de coupure x sont liées par la relation :

$$(36) \quad m - x = \beta$$

En portant (36) dans l'équation intégrée (31), ou, directement, dans l'équation différentielle (26) de la dérive, on obtient :

$$(37) \quad x = C - i\beta\tau$$

La teneur de coupure dérive linéairement dans le temps. Ce résultat remarquable est évidemment lié à la propriété (36), caractéristique de la loi de LASKY. Naturellement aussi, pour $i = 0$, c'est-à-dire si l'on n'actualise pas, on retrouve $x = C = C_{ste}$. Pour déterminer cette constante, on doit tenir compte des deux conditions (32) et (33). La première de ces conditions donne C , c'est-à-dire la valeur de la coupure initiale $x(0)$ au temps $\tau = 0$, en fonction de la coupure terminale $x(N) = \frac{p}{b}$ et de la durée de vie N de la mine :

$$(38) \quad x(0) = C = \frac{p}{b} + i\beta N$$

La deuxième condition, compte tenu de (35), s'écrit :

$$\frac{e^{\frac{C}{\beta}}}{T_0} \int_0^N e^{-i\tau} i\tau = \frac{1}{t}$$

On en déduit la durée de vie N par l'équation :

$$\frac{e^{iN} - 1}{i} = \frac{T_0}{t} e^{-\frac{p}{b\beta}} = N_0$$

Dans cette relation, le deuxième membre N_0 admet une interprétation très simple :

Si l'on n'actualisait pas, la teneur de coupure serait constante et égale à $\frac{p}{b}$.

... / ...

La relation (35) indique alors que la durée de vie de la mine, exploitée avec cette coupure constante $\frac{p}{b}$ et la cadence t est précisément égale à N_0 : N_0 est donc la durée de vie correspondant à $i = 0$. La durée de vie N pour un taux i non nul s'en déduit immédiatement :

$$(39) \quad N = \frac{1}{i} \log [1 + i N_0]$$

N est, bien entendu, une fonction décroissante de i . Avec les valeurs ainsi calculées de N et $C = x(0)$, la teneur de coupure à un instant τ quelconque, et la teneur moyenne du minerai sorti à cet instant, sont de la forme :

$$(40) \quad \begin{cases} x(\tau) = \frac{p}{b} + i\beta (N - \tau) = x_0 + i\beta (N - \tau) \\ m(\tau) = \beta + \frac{p}{b} + i\beta (N - \tau) = \beta + x_0 + i\beta (N - \tau) \end{cases}$$

On a posé $x_0 = \frac{p}{b}$ pour souligner que ce paramètre représente la coupure constante dans le temps que l'on adopte si l'on n'actualise pas. Le tonnage de minerai extrait au total de la mine sera Nt , tandis que le tonnage de métal correspondant, désigné par Q_i si le taux d'actualisation est i , est donné par :

$$Q_i = \int_0^N t m(\tau) d\tau = t N \left[\beta + x_0 + \frac{1}{2} i\beta N \right]$$

En l'absence d'actualisation, on aurait :

$$Q_0 = t N_0 (\beta + x_0)$$

Il est commode de caractériser l'écrémage lié à l'actualisation par le rapport $\frac{Q_i}{Q_0}$ de ces deux quantités de métal. Si l'on note que :

$$\beta + x_0 = m_0$$

m_0 correspondant à la teneur moyenne du gisement coupé à $x_0 = \frac{p}{b}$, c'est-à-dire à la teneur moyenne d'une exploitation non actualisée, on trouve :

$$(41) \quad \frac{Q_i}{Q_0} = \frac{\log (1 + i N_0)}{i N_0} \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_0}{m_0} \right) \log (1 + i N_0) \right]$$

... / ...

Les logarithmes sont des logarithmes népériens. Cette formule remarquable montre que l'écrémage dû à l'actualisation ne dépend que de deux caractéristiques de l'exploitation dimensionnée à $i = 0$: sa durée de vie N_0 , et son rapport de coupure $\frac{x_0}{m_0}$. Si le produit $i N_0$ est petit, on peut utiliser le développement limité suivant :

$$\frac{Q_i}{Q_0} = 1 - \frac{1}{2} \frac{x_0}{m_0} i N_0 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \frac{x_0}{m_0} \right) (i N_0)^2 - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \frac{x_0}{m_0} \right) (i N_0)^3 + \dots$$

Mais il sera le plus souvent préférable d'utiliser directement l'expression (41). Sur les exemples numériques, on s'aperçoit que la perte de métal entraînée par l'actualisation est très importante. Pour un petit gisement, dont la durée de vie serait $N_0 = 16,6$, un taux modéré $i = 6 \%$ et un rapport de coupure usuel $\frac{x_0}{m_0} = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$\frac{Q_i}{Q_0} = \log 2 \left[1 + \frac{1}{4} \log 2 \right] = 0.81$$

L'actualisation, pourtant modérée, conduit à perdre 19 % du métal. Pour un gisement plus gros, exploitable en 50 ans, et les mêmes valeurs $i = 6 \%$ et $\frac{x_0}{m_0} = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$\frac{Q_i}{Q_0} = \frac{\log^4}{3} \left[1 + \frac{1}{4} \log 4 \right] = 0.62$$

L'écrémage dû à l'actualisation conduit ici à la perte de 38 % du métal récupérable Q_0 . Pour interpréter ce résultat, il faut bien se souvenir que la teneur de coupure réellement pratiquée par les exploitants est toujours $x_0 = \frac{p}{b}$, de sorte que le tonnage effectivement récupéré est toujours Q_0 .

6.- Examen du critère capitalistique.

Il est entendu que l'équation (41) réalise la comparaison des deux exploitations actualisée et non actualisée lorsque la cadence t est fixée. En réalité, la cadence d'exploitation t doit elle aussi être optimisée, et les deux cadences t_0 et t_i pourront différer plus ou moins selon le critère utilisé. Si l'on prend comme critère le bénéfice actualisé B_i précédemment défini, on doit résoudre le système constitué par l'équation intégrale (22) et l'équation de la cadence

$$(42) \quad \frac{\partial B_i}{\partial t} = 0$$

... / ...

On apporte ainsi un correctif partiel à la conclusion du paragraphe précédent. Si l'on prend comme solution de référence la solution obtenue sans actualisation, le critère du bénéfice actualisé B_1 introduit deux écarts de sens contraire, qui se neutralisent partiellement : relativement à la teneur de coupure, le critère est malthusien, et conduit à un écrémage, puisque la coupure est supérieure à $\frac{p}{b}$ (eq.22). Mais, relativement à la cadence, l'équation (42) manifeste un effet inverse : elle conduit à majorer fortement t . Comme t est majoré, le prix de revient $p(t)$ est diminué, de sorte que la teneur de coupure donnée en (22) n'est pas aussi élevée qu'on aurait pu le craindre. Cette interaction des équations (22) et (42) conduit donc à atténuer à la fois l'écrémage et l'accélération de la cadence (sans, naturellement, les éliminer complètement). L'écrémage, en particulier, sera moins grave que ne l'indique l'équation (41), tout en restant sérieux.

Examinons maintenant un deuxième critère - le critère capitalistique - qui consiste à rendre maximum, non plus le bénéfice actualisé B_1 , mais le rapport $\frac{B_1}{I}$ de ce bénéfice aux investissements I - c'est-à-dire le rendement du capital investi. En fait, les économistes - comme J. LESOURNE, dans "Technique économique de gestion industrielle", Paris, Dunod - indiquent que les rapports, tels que $\frac{B_1}{I}$ constituent toujours de mauvais critères économiques. Cependant, le critère capitalistique ayant été récemment proposé par la S E M A, il ne nous paraît pas inutile de montrer que la remarque générale de J. LESOURNE se vérifie très bien dans le cas particulier des exploitations minières.

Comme les investissements ne dépendent que de la cadence, le critère capitalistique conduit à la même équation de coupure que le premier critère, c'est-à-dire à l'équation intégrale (22), ou aux diverses équations différentielles qui s'en déduisent. Par contre l'équation (42) de la cadence doit être remplacée par :

$$(43) \quad \frac{1}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial t} = \frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$$

Le correctif ainsi apporté est de caractère malthusien, en ce sens qu'il conduit à des cadences t plus faibles que (42). Or, relativement à la solution de référence obtenue à $i = 0$, l'équation (42) exagérait les cadences. Il y a donc superposition de deux effets de sens contraire, et possibilité de compensation partielle. De fait, dans le cas d'un gros gisement, la S E M A a ainsi obtenu une cadence assez

proche de la solution de référence. Cette compensation n'a aucune raison, d'ailleurs, d'être parfaite. En particulier, pour les petits gisements, la tendance malthusienne l'emporte : on s'aperçoit, sur des exemples numériques, que le critère capitalistique conduit à des cadences exagérément faibles en comparaison de la pratique réelle.

Mais cette compensation n'affecte que la cadence, et nullement la teneur de coupure. Dans la mesure même où le critère capitalistique conduit à des cadences d'exploitation du même ordre de grandeur que la solution de référence, l'équation (41) représente effectivement le rapport d'écrémage, le correctif dû à l'augmentation de la cadence ayant été éliminé. Le critère capitalistique va donc conduire à la perte de quantités de métal récupérable, qui pourront être de l'ordre de 20 % ou 40 %, comme nous l'avons vu.

Exemple numérique

A titre de comparaison, appliquons le critère capitalistique au gisement étudié dans la quatrième partie de la Note 41. Il s'agit d'un gisement où la relation tonnage-teneur est représentable par la loi de LASKY et peut être considérée comme homogène. Nous admettons, de plus, que le prix de revient $p(t)$ ne dépend que de la cadence t . D'après les résultats du paragraphe précédent, la coupure optimale $x(\tau)$ correspondant à une cadence t donnée est :

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} x(\tau) &= \frac{p(t)}{b} + i\beta(N - \tau) \\ N &= \frac{1}{i} \log(1 + iN_0) = \frac{1}{i} \log \left[1 + i \frac{T_0}{t} e^{-\frac{p(t)}{\beta}} \right] \end{aligned} \right.$$

Le bénéfice actualisé - optimisé, relativement à la coupure, pour le critère B_i ou $\frac{B_i}{i}$, mais non optimisé relativement à la cadence - admet l'expression suivante :

$$B_i = \int_0^N t(bm - p) e^{-i\tau} d\tau - I$$

où m est égal à $\beta + x(\tau)$. On trouve :

$$B_i = tb\beta(1 + iN) \frac{1 - e^{-iN}}{i} - i\beta bt \int_0^N \tau e^{-i\tau} d\tau - i \dots / \dots$$

et, finalement :

$$(45) \quad B_i = b \beta N t - \dot{I}$$

L'application du critère capitalistique conduit à maximiser $\frac{Nt}{\dot{I}}$ relativement à t .

Il convient donc de résoudre en t l'équation suivante :

$$\frac{1}{Nt} \frac{\partial Nt}{\partial t} = \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial t}$$

que l'on écrira plutôt sous la forme :

$$(46) \quad \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial t} - \frac{1}{t}$$

Il est commode d'introduire la fonction auxiliaire de t

$$N_0(t) = \frac{T_0}{t} e^{-\frac{p(t)}{b\beta}}$$

qui représente la durée de l'exploitation non actualisée. L'équation (46), compte tenu de (44) peut alors s'écrire :

$$(47) \quad - \frac{i N_0}{(1 + iN_0) \log(1 + iN_0)} \left[1 + \frac{t}{b\beta} \frac{dp}{dt} \right] = \frac{t}{I} \frac{dI}{dt} - 1$$

Si l'on prend, comme dans la Note 41 :

$$\begin{cases} I(t) = C_1 t^\gamma \\ p(t) = a_0 + \frac{a_1}{t} \end{cases}$$

L'équation (47) prend la forme :

$$\frac{i N_0}{(1 + iN_0) \log(1 + iN_0)} \left(1 - \frac{a_1}{b\beta t} \right) = 1 - \gamma$$

... / ...

Pour un calcul numérique, on posera :

$$A(t) = \frac{i N_0}{(1+iN_0)\log(1+iN_0)}$$

et on devra résoudre, par approximations successives, l'équation :

$$t = \frac{a_1}{b\beta} \frac{A}{\gamma + A - 1}$$

Pour $i = 0$, on a $A = 1$ et $t = \frac{a_1}{b\beta\gamma}$: cette valeur pourra être prise comme approximation initiale. Elle correspond, du reste, à la cadence que donnerait le critère capitalistique appliqué avec $i = 0$.

Avec les données numériques du gisement traité dans la Note 41, (4^{ème} partie), le critère capitalistique (avec $i = 8\%$) conduit aux résultats suivants, que l'on comparera à ceux que l'on obtient en maximisant le bénéfice non actualisé.

	<u>Bénéfice non actualisé</u>	<u>Critère capitalistique</u>	<u>Optimisation du Bénéfice actualisé</u>
Tonnage de minerai extrait	464.600 Tonnes	221.000 tonnes	391.400
Cadence annuelle	49.000 -	20.200 -	69.900
Durée de vie	9,49 années	10,95 années	5,60
Teneur de coupure initiale	0,547 %	1,325 %	0,807
Coupure terminale	0,547 %	0,744 %	0,505
Tonnage de métal extrait (compte tenu du rendement chimique)	4.687 tonnes	3.206 tonnes	4.333
Teneur moyenne du minerai sorti	1,221 %	1,712 %	1,330 %
Investissements I	8.256.000 NF.	4.560.000 NF	10.470.000
Dépenses d'exploitation à la tonne (après déduction du terme de pénalisation du rendement, cf. Note 41, page 68).	38,0 NF	54,9 NF	34,4 NF
Bénéfice non actualisé	18.361.000 NF	13.640.000 NF	16.976.000
Bénéfice actualisé ($i = 8\%$)	10.394.000 NF	7.890.000 NF	11.953.000

... / ...

Ces résultats mettent bien en évidence le caractère malthusien du critère capitaliste. Sur 4.687 tonnes de métal exploitable, ce critère conduit à n'en retirer que 3.206 : on perd ainsi 1.481 tonnes de métal, ce qui correspond à un écrémage de 32 % du métal exploitable.

A titre de comparaison, nous avons indiqué, dans la dernière colonne du tableau, les résultats issus du critère d'optimisation du bénéfice actualisé.

Conservant les hypothèses et les notations adoptées pour l'exemple numérique d'application du critère capitaliste, le calcul se présente d'une façon tout à fait analogue. L'équation d'optimisation du bénéfice actualisé relativement à la cadence est un peu différente :

avec : $B_i = b\beta Nt - \dot{I}$

l'équation $\frac{\partial B_i}{\partial t} = 0$ s'écrit :

$$(48) \quad N + t \frac{dN}{dt} - \frac{1}{b\beta} \frac{d\dot{I}}{dt} = 0$$

Or,

$$N = \frac{1}{i} \log(1 + i N_0) \quad \text{et} \quad N_0 = \frac{T_0}{t} e^{-\frac{p}{b\beta}}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{1 + i N_0} \frac{dN_0}{dt} = \frac{N_0}{1 + i N_0} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{b\beta} \frac{dp}{dt} \right)$$

l'équation (48) prend la forme :

$$(49) \quad \frac{1}{i} \log(1 + i N_0) - \frac{1}{b\beta} \frac{d\dot{I}}{dt} - \frac{N_0}{1 + i N_0} \left(1 + \frac{t}{b\beta} \frac{dp}{dt} \right) = 0$$

et remplaçant N_0 par son expression en t :

$$\left(1 + \frac{t e^{\frac{p(t)}{b\beta}}}{i T_0} \right) \left[\log\left(1 + \frac{i T_0}{t} e^{-\frac{p(t)}{b\beta}} \right) - \frac{1}{b\beta} \frac{d\dot{I}}{dt} \right] - \left(1 + \frac{t}{b\beta} \frac{dp}{dt} \right) = 0$$

Il est aisé de résoudre cette équation en t en encadrant la racine par des valeurs de t de plus en plus rapprochées.

... / ...

En particulier - si l'on prend comme dans l'exemple d'application issu d'un projet réel d'exploitation traité au Chapitre IV de la Note 41 - pour fonctions $p(t)$ et $\dot{i}(t)$

$$\begin{cases} p(t) = a_0 + \frac{a_1}{t} \\ \dot{i}(t) = c_1 t^\gamma \end{cases}$$

et notant que T_0 peut être évalué simplement par $e^{\frac{\alpha - \beta}{\beta}}$, et en posant :

$$k = i T_0 e^{-\frac{a_0}{b\beta}} = i e^{\frac{b(\alpha - \beta) - a_0}{b\beta}}$$

l'équation de définition de la cadence optimum devient :

$$(50) \left(1 + \frac{t e^{\frac{a_1}{b\beta t}}}{k}\right) \left[\log\left(1 + \frac{k e^{-\frac{a_1}{b\beta t}}}{t}\right) - \frac{i\gamma c_1}{b\beta} t^{\gamma-1} \right] + \frac{a_1}{b\beta t} - 1 = 0$$

Avec les valeurs numériques de l'exemple du chapitre IV de la note 41, on obtient une cadence annuelle de 69.900 tonnes. La connaissance de t , jointe aux éléments que l'on peut déduire de l'équation (40) d'optimisation de la fonction teneur de coupure, permet de calculer les divers paramètres qui sont présentés dans la dernière colonne du tableau. Les paramètres sont d'ailleurs très voisins de ceux obtenus au chapitre IV où la teneur de coupure était supposée constante au cours de l'exploitation.