M. Beaumont

N-44

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 46

LE GROUPE DE HANKEL

Pour compléter, sur le plan théorique, les résultats obtenus dans la Note 42, nous nous proposons ici de caractériser la structure algébrique de l'ensemble des transformations constitué par les montées et descentes, et les transformations de Hankel. Les conclusions seront les suivantes :

1 - L'ensemble des montées et descentes constitue un groupe abélien isomorphe au groupe des translations sur la droite euclidienne R_1.

2 - Le groupe des montées et descentes et l'ensemble des transformations de Hankel constitue un groupe (non abélien), ou groupe de Hankel, isomorphe au groupe des translations - symétrie sur R_1. Dans cet isomorphisme, les montées et descentes correspondent aux translations, et les transformations de Hankel aux symétries.

1°/- Le Groupe des montées et descentes isotropes.

L'opérateur de montée d'ordre μ, M_μ, a été défini dans la Note 42. Agissant sur une fonction, ou une distribution $f(r)$, appartenant à un espace de fonctions ou de distribution convenablement défini, il lui fait correspondre la fonction, ou la distribution $M_\mu f(r)$, appartenant au même espace, telle que :

$$(1)\quad M_\mu f(r) = \frac{2\pi^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \int_r^\infty f(u)\,[u^2 - r^2]^{\frac{\mu}{2}-1}\,u\,du$$

Il est commode d'effectuer le changement de variable

$$r = \sqrt{y}$$

et de poser

$$F_\lambda(y) = \frac{|y|^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \qquad \text{pour } y < 0$$

$$F_\lambda(y) = 0 \qquad \text{pour } y > 0$$

... / ...

Pour des valeurs de λ quelconques, la définition de F_λ doit être entendue au sens de la théorie des distributions. En notations convolutives, la définition (1) de l'opérateur M_μ peut s'écrire :

$$(3) \quad M_\mu f(\sqrt{y}) = \pi^{\frac{\mu}{2}} f(\sqrt{y}) * F_{\frac{\mu}{2}}(y)$$

Pour éviter de traîner des constantes inutiles, nous introduirons le nouvel opérateur I_λ défini par :

$$(4) \quad I_\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\lambda}{2}}} M_\lambda$$

C'est, dans toute la suite, cet opérateur I_λ qui sera désigné comme l'opérateur de montée. Le terme de montée, au sens strict, est réservé aux valeurs positives de λ, et le terme de descente aux valeurs négatives. La définition (3) s'écrit, pour I_λ :

$$(5) \quad I_\lambda f(\sqrt{y}) = 2^{-\frac{\lambda}{2}} f(\sqrt{y}) * F_{\frac{\lambda}{2}}(y)$$

<u>L'ensemble des I_λ constitue un groupe abélien I</u>, que nous appellerons groupe des montées et descentes isotropes. En effet, la convolution est commutative et associative, et les distributions F_α vérifient la relation de convolution

$$(6) \quad F_\alpha * F_\beta = F_{\alpha+\beta}$$

et, en particulier,

$$(7) \quad F_\alpha * F_{-\alpha} = F_0 = \delta(y)$$

où $\delta(y)$ est la mesure de Dirac. On déduit de (6) que le produit $I_\lambda I_\mu$ de deux montées d'ordre λ et μ est égal à la montée d'ordre $\lambda + \mu$:

$$(8) \quad I_\lambda I_\mu = I_{\lambda+\mu}$$

Il en découle que ce produit est commutatif :

$$I_\lambda I_\mu = I_{\lambda+\mu} = I_\mu I_\lambda$$

La formule (29) de la Note 42 donnant l'expression de la montée d'ordre μ à l'aide de la transformation de Hankel peut s'écrire :

$$(2\pi)^{\frac{\mu}{2}} \; I_{\mu} f = (2\pi)^{\mu-\lambda} \; F_{\lambda-\mu} \; F_{\lambda} f$$

D'où résulte l'égalité :

$$(13) \quad I_{\mu} = H_{\lambda-\mu} \; H_{\lambda}$$

Le cas particulier (12) correspond à $\mu = 0$, et s'écrit :

$$(14) \quad H_{\alpha} \; H_{\alpha} = I_0$$

Ainsi, le produit de deux transformations de Hankel est une montée, et nous avons la règle de calcul fondamentale :

$$(15) \quad H_{\alpha} H_{\beta} = I_{\beta-\alpha}$$

Considérons alors l'ensemble G des montées et des transformations de Hankel, et montrons que G est un groupe, que nous appellerons le groupe de Hankel.

En effet, tout d'abord le produit d'éléments de G est associatif, car, si P, Q et R sont trois éléments de G, on a :

$$\left[P(QR)\right] f = P \left[Q(Rf)\right] = (PQ)(Rf) = \left[(PQ)R\right] f$$

Montrons ensuite que le produit de deux éléments de G appartient à G. D'après (8) et (15), le produit de deux montées ou de deux transformations de Hankel est une montée, donc appartient à G. Il reste à examiner les produits du type IH ou HI. Multiplions (15) à droite par H_{β}, compte tenu de (14) :

$$H_{\alpha} = I_{\beta-\alpha} \; H_{\beta}$$

De même, en multipliant à gauche par H_{α}, il vient :

$$H_{\beta} = H_{\alpha} \, I_{\beta-\alpha}$$

En changeant les notations, on obtient les deux règles de calcul suivantes :

$$(16) \quad \begin{cases} I_{-\lambda} \; H_{\mu} = H_{\mu+\lambda} \\ H_{\lambda} \; I_{\mu} = H_{\mu+\lambda} \end{cases}$$

... / ...

et associatif :

$$(I_\lambda I_\mu) I_\nu = I_{\lambda+\mu} I_\nu = I_{\lambda+\mu+\nu} = I_\lambda I_{\mu+\nu} = I_\lambda(I_\mu I_\nu)$$

Enfin, il résulte de 7 que la montée d'ordre 0, I_0 est un élément neutre :

$$(9) \quad I_0 f = f$$

et que I_λ admet pour inverse $I_{-\lambda}$:

$$I_\lambda I_{-\lambda} = I_{-\lambda} I_\lambda = I_0$$

L'ensemble I constitue donc bien un groupe abélien. Considérons alors le groupe T des translations sur la droite euclidienne R_1, et notons T_λ la translation (vers la gauche) qui transforme l'abscisse x en $x-\lambda$. On a :

$$(10) \quad T_\lambda T_\mu = T_{\lambda+\mu}$$

La comparaison de (8) et (10) montre que l'application bijective $I_\lambda \longleftrightarrow T_\lambda$ du groupe des montées sur le groupe des translations est un isomorphisme.

D'où la conclusion : Le groupe abélien des montées isotropes est isomorphe au groupe des translations sur R_1.

2°/ - <u>Le groupe de Hankel.</u>

Nous écrirons ici la transformation de Hankel H_α sous la forme :

$$(11) \quad H_\alpha f = \rho^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty r^{\frac{\alpha}{2}} f(r) J_{\frac{\alpha}{2}-1}(\rho r)dr$$

de sorte que la formule de réciprocité s'écrit simplement :

$$(12) \quad H_\alpha H_\alpha f = f$$

L'opérateur H_α est lié à la transformation F_α introduite dans la Note 42 par :

$$H_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} F_\alpha$$

... / ...

avec, en particulier :

$$(17)\quad H_\mu\, I_\lambda\, H_\mu = I_{-\lambda}$$

On a ainsi montré que le produit de deux éléments de G est un élément de G, et, en outre, retrouvé sous forme purement algébrique la relation (44) de la Note 42 associant une montée d'ordre λ dans un clavier à la descente de même ordre dans le clavier réciproque.

Pour achever de montrer que G est un groupe, il suffit d'observer qu'il contient un élément neutre I_0, et que chaque élément possède un inverse défini par :

$$(18)\quad \begin{cases} H_\alpha\ H_\alpha = I_0 \\ I_\lambda\ I_{-\lambda} = I_0 \end{cases}$$

Dans le groupe G, l'ensemble des montées constitue un sous groupe distingué (ou invariant). C'est en effet un groupe, d'après la première partie, et de plus on a :

$$\begin{cases} I_{-\lambda}\, I_\mu\, I_\lambda = I_\mu \\ H_\lambda\ I_\mu\ H_\lambda = I_{-\mu} \end{cases}$$

Le groupe quotient $\frac{G}{I}$ est isomorphe au groupe additif des entiers modulo 2. En effet, il ne contient que les deux classes I et H avec les règles :

$$(19)\quad \begin{cases} I\,I = I \\ I\,H = H\,I = H \\ H\,H = I \end{cases}$$

Enfin, le groupe de Hankel G lui-même est isomorphe au groupe des symétries-translations sur R_1. En effet, désignons par $S_{2\beta}$ la symétrie autour du point d'abscisse β, et par T_α la translation de $-\alpha$. On a les règles suivantes, qui traduisent des propriétés géométriques élémentaires :

... / ...

$$
(20)\quad \begin{cases} T_\alpha \, T_\beta = T_{\alpha+\beta} \\ S_\alpha \, S_\beta = T_{\beta-\alpha} \\ S_\alpha \, T_\beta = T_{-\beta} S_\alpha = S_{\alpha+\beta} \end{cases}
$$

En comparant (20) à (8), (15) et (16), on voit que l'application bijective :

$$
S_\alpha \longleftrightarrow H_\alpha
$$

$$
T_\beta \longleftrightarrow I_\beta
$$

est bien un isomorphisme. Si le groupe de Hankel est considéré comme opérant sur l'axe des dimensions, une montée I_λ s'interprète comme une translation de $-\lambda$ sur cet axe, et une transformation de Hankel H_α comme une symétrie autour du point d'abscisse $\frac{\alpha}{2}$.

G. MATHERON.