

BUREAU DE RECHERCHES
ET D'ENSEIGNEMENT
Département de Géologie
Géostatistique
NOTE GÉOSTATISTIQUE N° 12
Juin 1963



LES SCHEMAS STOCHASTIQUES INTRINSEQUES
ET LEURS RELATIONS AVEC LES SCHEMAS TRANSITIFS



Table des Matières

	<u>Pages</u>
1.- <u>DEFINITION DES SCHEMAS STOCHASTIQUES INTRINSEQUES.</u>	1
1.1 - Moments d'ordre 1 et dérive linéaire	3
1.2 - Moments d'ordre 2, et loi de dispersion intrinsèque	4
1.3 - Propriétés de la fonction intrinsèque	5
2.- <u>THEORIE DES VARIANCES D'ESTIMATION</u>	9
2.1 - Définition de la variance d'estimation	10
2.2 - Variance de v dans V	13
2.3 - Exemple : fonction intrinsèque homogène	16
3.- <u>RELATIONS ENTRE SCHEMAS INTRINSEQUES ET TRANSITIFS.</u>	17
3.1 - Définition et algorithmes	18
3.2 - Relation entre $\gamma(h)$ et $g(h)$	20
3.3 - Remarques complémentaires	23
4.- <u>REPRESENTATION TRANSITIVE DES COVARIATIONS REGIONALISEES</u>	24
4.1 - Matrice de covariation transitive	25
4.2 - Les covariances d'estimation	26
4.3 - Condition d'indépendance interne	27
4.4 - Corrélacion entre une variable et son champ géométrique	29
4.5 - Le paradoxe de Chayes en transitif	31
5.- <u>THEORIE DES COREGIONALISATIONS INTRINSEQUES.</u>	34
5.1 - Définition des corégionalisations intrinsèques	35
5.2 - Propriétés de la matrice de covariation intrinsèque	36
5.3 - Covariances d'estimation, et covariances de variables non ponctuelles...	40
5.4 - L'indépendance intrinsèque	41
5.5 - Le paradoxe de Chayes en intrinsèque	44
6.- <u>THEORIE DE LA MONTÉE INTRINSEQUE</u>	46
6.1 - La montée sous puissance constante	47
6.2 - Montée droite sous puissance constante de r^λ	49
6.3 - Les formules du rectangle pour r^λ	53

Table des Matières (suite)

II.-

	<u>Pages</u>
7.- <u>CALCUL DES VARIANCES D'ESTIMATION INTRINSEQUES</u>	57
7.1 - Formule générale des mailles régulières	57
7.2 - Calcul des variances d'estimation à 1 dimension	60
7.3 - Etablissement de la règle de correspondance	66
7.4 - Mailles aléatoires et aléatoires stratifiées	70
8.- <u>LES FLUCTUATIONS DES MOMENTS D'ORDRE 2, ET LEUR ESTIMATION</u>	73
8.1 - Le variogramme second	73
8.2 - Fluctuation du variogramme local	75
8.3 - Fluctuation du variogramme x^λ à une dimension	77
8.4 - L'estimation du variogramme local	80
8.5.- Fluctuation de la variance locale	81
8.6 - L'estimation de la variance locale : le biais	84
8.7 - L'estimation de la variance locale : la dispersion	87

— : —

LES SCHEMAS STOCHASTIQUES INTRINSEQUES
ET LEURS RELATIONS AVEC LES SCHEMAS TRANSITIFS

Cette Note se propose de formuler la théorie des schémas géostatistiques à loi de dispersion intrinsèque en termes de processus stochastiques. Une telle formulation n'est pas obligatoire, mais elle a l'avantage de rattacher les concepts de la géostatistique à des théories plus classiques. L'hypothèse d'une loi de dispersion intrinsèque se traduit, dans cette formulation, par l'hypothèse que les accroissements, $\xi_{i,j}$ de la variable régionalisée entre deux points M_i et M_j de l'espace constituent un processus stochastique stationnaire. Bien qu'une telle hypothèse implique en apparence une référence aux lois de probabilités des $\xi_{i,j}$ liés les uns par les autres, le développement de la théorie ne fait intervenir que la fonction de corrélation, et ne fait pas réellement appel au contenu probabiliste de l'hypothèse. La même circonstance se produit, d'ailleurs, dans la théorie stochastique des processus stationnaires du second ordre, et ce fait confirme bien qu'il est possible de construire une théorie indépendante de tout modèle probabiliste.

1.- Définition des schémas stochastiques intrinsèques.

Nous appellerons schéma à loi de dispersion intrinsèque - ou, plus brièvement, schéma intrinsèque - un processus stochastique à accroissements stationnaires défini dans un espace à plusieurs dimensions. Chaque réalisation d'un tel processus engendre une variation régionalisée.

Précisons cette définition. Soient $y_i, y_j \dots$ les valeurs prises par une variable régionalisée à support ponctuel aux points $M_i, M_j \dots$. Des lois de probabilité a priori des y_i eux-mêmes, nous ne dirons rien. Dans le cas le plus

... / ...

général, elles ne sont pas définissables. Par contre, nous nous intéresserons aux accroissements

$$(1) \quad \varepsilon_{ij} = y_j - y_i$$

définis comme la différence des valeurs prises par la variable régionalisée aux points M_i et M_j . En tant que processus stochastique, le schéma est défini par la donnée de la loi de distribution (au sens probabiliste) simultanée

$F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \dots; M_i, M_j, M_k, M_l, \dots)$ d'un nombre quelconque d'accroissements $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \dots$. Cette loi dépend en général des coordonnées des points $M_i, M_j, M_k,$

M_l, \dots . Le processus sera dit à accroissements stationnaires si cette loi ne dépend que de la géométrie relative des points M_i, M_j, M_k, M_l , c'est-à-dire uniquement des vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{ij} = M_i M_j \\ h_{ik} = M_i M_k \\ h_{il} = M_i M_l \\ \dots \end{array} \right.$$

Une translation d'ensemble des points $M_i, M_j, M_k, M_l, \dots$ laisse invariante la loi de distribution des ε_{ij} , de sorte que le processus est homogène dans l'espace. De plus, la loi F est indépendante de la valeur y_i de l'une quelconque des variables elles-mêmes. Lorsque ces deux propriétés sont vérifiées, on dit que F possède le caractère intrinsèque. Si cette propriété intrinsèque est vérifiée non pas par la loi $F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \dots)$, mais seulement par ses moments d'ordre 1 et 2, nous disons que nous avons affaire à un processus à accroissements stationnaires d'ordre 2, ou schéma intrinsèque sensu lato. Tout ce qui suit - à l'exception des paragraphes consacrés à l'estimation des variances et des variogrammes - concerne les schémas intrinsèques sensu lato.

Passons maintenant à l'examen de la loi de distribution $F(\varepsilon_{ij}, M_i, M_j)$ d'un seul accroissement ε_{ij} - ou plutôt de ses moments d'ordre 1 et 2 qui seuls nous intéressent vraiment.

1. - 1- Moments d'ordre 1 et dérive linéaire.

Désignons par δ_{ij} la valeur probable (a priori) de l'accroissement ξ_{ij} . Par hypothèse, elle ne dépend que du vecteur $h_{ij} = M_i M_j$.

$$E(\xi_{ij}) = \delta_{ij} = \delta(h_{ij})$$

Mais de la définition (1) des accroissements résultent des relations de fermeture, sur lesquelles nous reviendrons en 1-2, et que l'on peut écrire :

$$\xi_{ij} + \xi_{jk} = \xi_{ik}$$

soit, en passant aux valeurs probables :

$$\delta(h_{ij}) + \delta(h_{jk}) = \delta(h_{ik})$$

On en déduit que la fonction scalaire $\delta(h)$ est une forme linéaire relativement à son argument vectoriel h ; autrement dit, il existe un vecteur δ tel que $\delta(h)$ soit égal au produit scalaire δh

$$(2) \quad \delta(h) = \bar{h} \bar{\delta}$$

Le moment du premier ordre traduit donc, en schéma intrinsèque, l'existence d'une dérive linéaire de la variable régionalisée $f(M)$. Il suffit, pour éliminer cette dérive, de remplacer $f(M)$ par $f(M) - \overline{OM} \bar{\delta}$, l'origine O étant prise arbitrairement. L'accroissement

$$\xi_{ij} = y_j - y_i$$

est alors, en effet, remplacé par $\xi_{ij} - \overline{M_i M_j} \bar{\delta}$. Nous supposons donc, dans toute la suite, que les moments d'ordre 1 sont nuls :

$$(3) \quad E(\xi_{ij}) = 0$$

1. - 2 - Moments d'ordre 2. et loi de dispersion intrinsèque.

Par hypothèse, le moment d'ordre 2 $E(\varepsilon_{ij}^2)$ - qui n'est autre que la variance $D^2(\varepsilon_{ij})$ en vertu de (3) - est une fonction du seul argument vectoriel $h_{ij} = \overline{M_i M_j}$. Nous poserons, par définition :

$$(4) \quad \gamma(h_{ij}) = \gamma_{ij} = \frac{1}{2} D^2(\varepsilon_{ij})$$

La fonction $\gamma(h)$ égale à la demi-variance de l'accroissement ε_{ij} s'appelle fonction de dispersion intrinsèque ou demi-variogramme. Elle joue dans la théorie des processus à accroissements stationnaires le même rôle que la fonction d'autocorrélation pour les processus stationnaires.

La donnée de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$ suffit pour définir tous les moments d'ordre deux. En effet, la définition (1) d'un accroissement entraîne, pour toute suite d'indices $i j k \mathcal{L} \dots$ des relations de fermeture de la forme :

$$(5) \quad \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{li} = 0$$

Pour trois indices $i j k$ seulement, la relation de fermeture s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ik}$$

Prenons la variance des deux membres, en posant, pour simplifier l'écriture :

$$E(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk}) = E(ij, jk) = -E(ji, jk)$$

Compte tenu de 4, il vient :

$$(6) \quad E(ji, jk) = \gamma_{ij} + \gamma_{jk} - \gamma_{ik}$$

De même, pour 4 indices $i j k$ et \mathcal{L} , en écrivant :

$$\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{il}$$

et en prenant la variance des deux membres, il vient :

$$Y_{ij} + Y_{jk} + Y_{kl} + E(ij, jk) + E(jk, kl) + E(ij, kl) = Y_{il}$$

Compte tenu de la relation (6) déjà obtenue, on trouve facilement :

$$(7) \quad E(ij, kl) = Y_{il} + Y_{jk} - Y_{ik} - Y_{jl}$$

Cette relation permet de calculer tous les moments d'ordre deux à l'aide de la seule fonction $\gamma(h)$, ainsi que nous l'avions annoncé.

1.- 3 - Propriétés de la fonction intrinsèque.

La fonction intrinsèque $\gamma(h)$ ne peut pas être absolument quelconque. De la définition (4), en effet, résulte tout d'abord les conditions

$$(5) \quad \begin{cases} \gamma(0) = 0 \\ \gamma(h) = \gamma(-h) \\ \gamma(h) \geq 0 \end{cases}$$

Ces conditions n'impliquent pas, d'ailleurs, la continuité de la fonction $\gamma(h)$ en $h = 0$.

Le cas où l'on a :

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \gamma(h) = C > 0$$

correspond, on le sait, à un effet de pépite de constante C . Plus généralement, la fonction $\gamma(h)$ doit être telle que toutes les variances dont elle permet le calcul reçoivent une expression positive. Considérons, par exemple, une combinaison linéaire d'accroissements

$$(6) \quad H(\lambda_k, \varepsilon_{i_k j_k}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varepsilon_{i_k j_k}$$

Les λ_k sont des constantes réelles, et les accroissements

$$\varepsilon_{i_k j_k} = f(P_k) - f(M_k)$$

sont définis pour un ensemble de $2n$ points M_k et P_l dont la géométrie relative est invariante ($M_k P_l = C^{ste}$). Prenant une origine O arbitraire, nous poserons dans ce paragraphe :

$$\begin{cases} x_k = OM_k \\ y_l = OP_l \end{cases}$$

La variance $D^2(H)$ de la forme linéaire H a pour expression (d'après 7) :

$$\begin{aligned} D^2(H) &= \sum_{k,l} \lambda_k \lambda_l E(i_k j_k, i_l j_l) \\ &= \sum_{k,l} \lambda_k \lambda_l \left[\gamma_{i_k j_l} + \gamma_{j_k i_l} - \gamma_{i_k i_l} - \gamma_{j_k j_l} \right] \end{aligned}$$

Soit :

$$(7) \quad D^2(H) = \sum_{k,l} \lambda_k \lambda_l \left[\gamma(y_l - x_k) + \gamma(x_l - y_k) - \gamma(x_l - x_k) - \gamma(y_l - y_k) \right]$$

Cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que l'expression (7) soit positive quels que soient les coefficients λ_k et les points M_k, P_l . Dans le cas particulier où les P_k sont les translatés des M_k dans une même translation \mathcal{C} , soit

$$M_l P_l = y_l - x_l = \mathcal{C}$$

l'expression (7) se réduit à :

$$S^2 = \sum_{k,l} \lambda_l \lambda_k \left[\gamma(x_l - x_k + \mathcal{C}) + \gamma(x_l - x_k - \mathcal{C}) - 2 \gamma(x_l - x_k) \right]$$

Il est équivalent de dire que S^2 doit être positif, quels que soient les λ_k et les x_k , ou de dire que la fonction :

$$r(h, \mathcal{C}) = \gamma(h + \mathcal{C}) + \gamma(h - \mathcal{C}) - 2 \gamma(h)$$

doit être de type positif (relativement à son argument vectoriel h). On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution soit de type positif est qu'elle ait pour transformée de Fourier une mesure positive à croissance lente (théorème de Bochner)^{(1)*}. Si, de plus, cette mesure est sommable, la distribution est une fonction continue (ou, plus exactement, ne diffère d'une fonction.

(1) L. Schwartz⁰⁰ Théorie des Distributions⁰⁰ Tome II, Hermann, Paris, pp. 132 et suiv.

continue que sur un ensemble de mesure nulle) et réciproquement. Dans le cas présent, cette mesure est certainement sommable, puisque

$$\Gamma(0, \mathcal{U}) = 2 \gamma(\mathcal{U})$$

est défini. Il en résulte que la fonction ^{(1)*} intrinsèque $\gamma(\mathcal{U})$ ne diffère d'une fonction continue que sur un ensemble de mesure nulle : En pratique, nous identifierons toujours $\gamma(h)$ avec cette fonction continue, sauf au point $h = 0$ où l'on doit nécessairement avoir $\gamma(0) = 0$. Ainsi, $\gamma(h)$ sera toujours une fonction continue, sauf en cas d'effet de pépite : dans ce cas, elle ne différera d'une fonction continue qu'au point $h = 0$.

Désignons par $\phi(u)$ la transformée de Fourier de $\gamma(h)$, qui est, dans le cas général, une distribution tempérée. La transformée de Fourier de $\Gamma(h, \mathcal{U})$ (relativement au vecteur h) est égale à la distribution

$$(e^{iu\mathcal{U}} + e^{-iu\mathcal{U}} - 2) \phi(u) = -2(1 - \cos u\mathcal{U}) \phi(u)$$

D'après le théorème de Bochner, cette distribution (relativement au vecteur u) doit être une mesure positive. Cette condition, devant être vérifiée quel que soit le vecteur \mathcal{U} , entraîne que $-(u\mathcal{U})^2 \phi(u)$ doit être également une mesure positive, et, réciproquement, si le produit de $-\phi(u)$ par le carré d'une forme linéaire quelconque est une mesure positive, il en est de même de $-(1 - \cos u\mathcal{U}) \phi(u)$.

Ainsi, pour que S^2 soit toujours positif, il faut et il suffit que $-(u\mathcal{U})^2 \phi(u)$ soit une mesure positive. Dans la transformation inverse de Fourier, $-(u\mathcal{U})^2$ s'échange avec l'opérateur de dérivation seconde dans la direction du vecteur \mathcal{U} . Le théorème de Bochner nous permet de formuler la condition sous une forme équivalente : pour que S^2 soit toujours positive, il faut et il suffit que la dérivée seconde de $\gamma(h)$ prise dans une direction \mathcal{U} :

(1)* Il en résulte aussi l'inégalité $\Gamma(h, \mathcal{U}) \leq \Gamma(0, \mathcal{U})$, c'est-à-dire

$$\gamma(h + \mathcal{U}) + \gamma(h - \mathcal{U}) \leq 2[\gamma(h) + \gamma(\mathcal{U})]$$

$$\sum_{ij} \nu_i \nu_j \frac{\partial^2 \gamma(h)}{\partial h_i \partial h_j}$$

soit une distribution de type positif, quelle que soit la direction ν (la dérivation doit être prise, ici, au sens de la théorie des distributions : en cas de discontinuité, elle fait apparaître des mesures de Dirac).

La condition obtenue est nécessaire pour que $D^2(H)$ de l'équation (7) soit positif (S^2 est un cas particulier de $D^2(H)$ - Montrons qu'elle est suffisante. Pour cela, exprimons la variance (7) à l'aide de la transformée de Fourier $\phi(u)$ de $\gamma(h)$

$$\begin{aligned} D^2(H) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum \lambda_k \lambda_l \int \left[e^{-iu(y_l - x_k)} + e^{-iu(x_l - y_k)} - e^{-iu(x_l - x_k)} - e^{-iu(y_l - y_k)} \right] \phi(u) du \\ &= - \frac{1}{(2\pi)^n} \int \left[\sum \lambda_p (e^{-iuy_p} - e^{-iux_p}) \right] \left[\sum_k \lambda_k (e^{iuy_k} - e^{iux_k}) \right] \phi(u) du \end{aligned}$$

Sous le signe d'intégration, les deux crochets, conjugués l'un de l'autre, ont un produit réel positif, dont la partie principale en u est le carré de la forme linéaire

$$Q = \sum u(y_p - x_p) \lambda_p$$

Par suite, la fonction

$$R(u) = \frac{1}{Q^2} \left[\sum \lambda_p (e^{-iuy_p} - e^{-iux_p}) \right] \left[\sum \lambda_p (e^{iuy_p} - e^{iux_p}) \right]$$

est partout définie et positive. Comme enfin - par hypothèse - $Q^2 \phi(u)$ est une mesure positive, il est clair que l'expression

$$D^2(H) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int R(u) \left[- Q^2 \phi(u) \right] du$$

est toujours positive.

Exemple -

Supposons que $\gamma(h)$ soit de la forme $A r^\lambda$ dans un espace à n dimension, avec $r = |h|$. Sa transformée de Fourier, qui ne dépend que de $\rho = |u|$, est la distribution :

$$\phi(\rho) = 2^{\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}} A \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} \rho^{-\lambda-n}$$

Pour que le produit de $-\phi(\rho)$ par le carré d'une forme linéaire en u soit une mesure positive, il faut et il suffit (1)* que λ soit inférieur à 2.

$$\lambda < 2$$

En effet, le produit de $\phi(\rho)$ par le carré d'une forme linéaire est alors sommable dans tout volume fini contenant l'origine. (2)* Comme la transformation de Fourier échange les propriétés de $\phi(\rho)$ à l'origine avec celle de $\gamma(r)$ à l'infini, on en déduit, plus généralement, qu'une fonction intrinsèque isotrope $\gamma(r)$ doit croître à l'infini moins vite que r^2 .

2.- Théorie des variances d'estimation

Nous allons maintenant passer à la théorie des variables à support non ponctuel. Nous définirons d'abord des valeurs moyennes sur un ensemble fini de points M_i , à l'aide de sommes discrètes. Le passage aux intégrales stochastiques,

(1)* La constante A devant avoir le signe opposé à celui de $\frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}$

(2)* Dans le cas de la fonction de Wljsienne $\gamma(r) = \log r$, $\phi(\rho)$ est de la forme $A(-\frac{1}{\rho^n} + B\delta)$ où δ est la fonction de Dirac (Schwartz, loc.cit, p.114). Comme $-(u\mathcal{U})^2\delta \equiv 0$, il reste $-(u\mathcal{U})^2\phi(\rho) = A\frac{(u\mathcal{U})^2}{\rho^n}$ avec $A > 0$, et la condition est bien remplie.

et aux valeurs moyennes dans des volumes de mesure non nulle sera justifié par la théorie de la convergence en moyenne quadratique. Nous nous apercevrons que la notion première est celle de variance d'estimation d'un volume V par un volume v , valeur probable du carré de la différence des teneurs de v_1 et de V_2 , et non plus la notion usuelle de variance de v dans V . La variance d'estimation dépend, naturellement, des positions relatives de v et V , et cela même dans le cas où v est intérieur à V . Du reste, le variogramme défini en (4) peut déjà être interprété comme la variance d'estimation des deux variables ponctuelles y_i et y_j l'une par l'autre : La variance d'estimation apparaît comme la généralisation naturelle de la notion de variogramme.

2.- 1.- Définition de la variance d'estimation

Etant donnés deux ensembles de points M_i et M_j , au nombre de N_i et N_j respectivement, introduisons les valeurs moyennes y et z de la variable $f(M)$ sur chacun de ses deux ensembles

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{N_i} \sum_{i \in I} y_i \\ z = \frac{1}{N_j} \sum_{j \in J} y_j \end{array} \right.$$

Une variable régionalisée telle que y , considérée comme ayant un support ponctuel (par exemple le centre de gravité G_i des points M_i) peut être sans difficulté décrite à l'aide d'un processus stochastique à accroissements stationnaires. Plus généralement, considérons la différence $(y - z)$. De la relation

$$\begin{aligned} y_i &= y_j + \varepsilon_{ji} \\ &= z + \frac{1}{N_j} \sum_{j \in J} \varepsilon_{ji} \end{aligned}$$

on tire immédiatement :

$$(9) \quad y - z = \frac{1}{N_i N_j} \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \varepsilon_{ji}$$

Toutes les différences de ce type sont données par des combinaisons linéaires d'accroissements ε_{ij} en nombre fini, et peuvent donc être décrites à l'aide de processus stationnaires. Calculons la valeur probable et la variance de $(y - z)$. De (3) résulte, en premier lieu :

$$(10) \quad E(y - z) = 0$$

La variance $D^2(y - z) = E (y - z)^2$, que nous appellerons variance d'estimation de y par z (ou de l'ensemble I par l'ensemble J), de son côté, est donnée par :

$$\begin{aligned} D^2(y-z) &= \frac{1}{(N_i N_j)^2} E \left[\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \varepsilon_{ji} \right]^2 \\ &= \frac{1}{(N_i N_j)^2} \sum_{\substack{i, u \in I \\ j, s \in J}} E(ji, su) \end{aligned}$$

Soit, en utilisant (7)

$$D^2(y - z) = \frac{1}{(N_i N_j)^2} \sum_{\substack{i, u \in I \\ j, s \in J}} \left[Y_{ju} + Y_{is} - Y_{js} - Y_{iu} \right]$$

En séparant chacun des termes du crochet, on obtient, après des simplifications évidentes, l'expression suivante :

$$(11) \quad D^2(y-z) = \frac{2}{N_i N_j} \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} Y_{ij} - \frac{1}{N_j^2} \sum_{j, s \in J} Y_{js} - \frac{1}{N_i^2} \sum_{i, u \in I} Y_{iu}$$

Plus généralement, outre les deux variables y et z , introduisons deux autres variables x et t définies sur deux autres ensembles K et L de points M_k et N_l , et introduisons la covariance d'estimation $E(y-z)(x-t)$. On trouve

$$E \left[(y-z)(x-t) \right] = \frac{1}{N_i N_j N_k N_l} \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J \\ k \in K \\ l \in L}} E(ji, lk)$$

La relation (7) donne, de la même manière

$$(12) \quad E \left[(y-z)(x-t) \right] = \frac{1}{N_j N_k} \sum_{jk} \gamma_{jk} + \frac{1}{N_i N_l} \sum_{il} \gamma_{il} - \frac{1}{N_j N_l} \sum \gamma_{jl} - \frac{1}{N_i N_k} \sum \gamma_{ik}$$

Supposons, maintenant, que chacun des points M_i soit pris à l'intérieur de N_i petits volumes jointifs égaux dont la réunion constitue un volume V_i . Si l'on fait tendre - pour un volume V_i invariable - le nombre N_i des petits volumes jointifs vers l'infini, les sommes discrètes vont tendre vers des intégrales. L'accroissement $y - z$, défini en (9), en particulier, devient formellement :

$$(13) \quad y - z = \frac{1}{V_i V_j} \int_{V_i} \int_{V_j} \varepsilon_{ji} \, dM_i \, dM_j$$

et la variance de $(y - z)$, définie en (11) donne de même :

$$(14) \quad D^2(y-z) = \frac{2}{V_i V_j} \int_{V_i} \int_{V_j} \gamma(M_i, M_j) \, dM_i \, dM_j - \frac{2}{V_i^2} \int_{V_i} \int_{V_i} \gamma(M_i, M_i) \, dM_i \, dM_i \\ - \frac{2}{V_j^2} \int_{V_j} \int_{V_j} \gamma(M_j, M_j) \, dM_j \, dM_j$$

Or l'expression (14) est parfaitement définie. On sait que c'est là, en théorie des processus stochastiques stationnaires, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale stochastique (13) soit définie (au sens de la convergence en moyenne quadratique). Le passage des sommes discrètes aux intégrales est ainsi justifié. La variance (14) est la variance d'estimation du volume V_i par le volume V_j . De la même manière (12) donne, à la limite, la covariance des estimations de V_i par V_j et de V_k par V_l :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} E \left[(y-z)(x-t) \right] &= \frac{1}{V_j V_k} \int_{V_j} \int_{V_k} \gamma(M_j, M_k) \, dM_j \, dM_k + \frac{1}{V_i V_l} \int_{V_i} \int_{V_l} \gamma(M_i, M_l) \, dM_i \, dM_l \\ &- \frac{1}{V_j V_l} \int_{V_j} \int_{V_l} \gamma(M_j, M_l) \, dM_j \, dM_l - \frac{1}{V_i V_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \gamma(M_i, M_k) \, dM_i \, dM_k \end{aligned} \right.$$

Naturellement, on peut aussi avoir des cas intermédiaires, avec un volume V_i et un ensemble fini de points M_j : la formule (14) prend un aspect mixte, où figurent à la fois des intégrations dans V_i et des sommations sur l'ensemble M_j . En particulier, on peut avoir à estimer la valeur moyenne z de la variable dans un volume V_j à l'aide de sa valeur y_i en un point M_i (occupant une implantation définie vis-à-vis de V_j). Dans ce cas, la formule (14) devient :

$$(16) \quad D^2(y_i - z) = \frac{2}{V_j} \int_{V_j} \gamma(M_i M_j) dM_j - \frac{1}{V_j^2} \int_{V_j} \int_{V_j} \gamma(M_j M'_j) dM_j dM'_j$$

2-2 - Variance de v dans V

La variance d'estimation d'un volume v par un volume V est définie sans ambiguïté par la relation (14). Elle dépend de la position de v dans V , et cela même si v est intérieur à V . Au contraire, la notion de prime abord plus naturelle de variance à l'intérieur de V n'est définissable de manière univoque que pour une variable à support ponctuel. Considérons, tout d'abord, la variable y_i en un point M_i intérieur à V . L'intégrale (13) s'écrit ici :

$$y_i - z = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ji} dM_j$$

La variance (locale) $S^2(V)$ de y_i dans V doit être définie comme l'intégrale stochastique :

$$S^2 = \frac{1}{V} \int_V (y_i - z)^2 dM_i = \frac{1}{V^3} \int_V \int_V \int_V \varepsilon_{ji} \varepsilon_{ki} dM_i dM_j dM_k$$

La valeur probable de cette variance $E(S^2) = \sigma^2(V)$ se déduit de (6). On trouve immédiatement :

$$(17) \quad \sigma^2(V) = E(S^2) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(MM') dM dM'$$

et on vérifie que cette formule peut aussi s'obtenir en prenant la valeur moyenne de la variance d'estimation (16) de V par M_i lorsque M_i décrit V . C'est aussi, si l'on veut, la variance de l'estimation de V par un point M_i tiré au sort dans V , selon un procédé de tirage qui donne une chance égale à tous les points de V . Ainsi une variance ponctuelle apparaît comme une variance d'estimation "moyenne". Dans le cas d'une variable y à support non ponctuel v , la notion de variance est inévitablement ambiguë. En effet, par suite d'interférences aux bordures, l'ensemble des volumes v intérieurs à V possède une moyenne dans V qui ne coïncide pas, en général, avec z . On se rend compte facilement que, pour un volume v de l'ordre de

la moitié ou des 3/4 de V, cette circonstance enlève à peu près toute signification au concept de variance de v dans V. Il y a cependant deux cas où le concept peut être défini, soit d'une manière rigoureuse, soit d'une manière approchée.

Le premier cas est celui où le volume V est constitué par la juxtaposition de n volumes v_i , tous égaux entre eux et translattés les uns des autres (ce seront, par exemple, des parallélépipèdes). Si les z_i sont les teneurs moyennes des v_i , on a rigoureusement

$$\frac{1}{n} \sum_i z_i = z$$

et la variance des v_i dans V est définie sans ambiguïté comme la variance de la population finie des z_i :

$$S^2 (v_i | V) = \frac{1}{n} \sum_i (z_i - z)^2$$

La valeur probable de S^2 est alors :

$$\sigma^2 (v_i | V) = E(S^2) = \frac{1}{n} \sum_i D^2(z_i - z)$$

Mais la variance d'estimation $D^2(z_i - z)$ de V par un v_i particulier est donnée en (14). Si l'on remarque que, pour une fonction $\phi(M)$ quelconque, la somme des intégrales de ϕ dans chacun des v_i est égale à l'intégrale dans V, il vient :

$$\frac{1}{nv} \sum_i \int_{v_i} \phi(M) dM = \frac{1}{V} \int_V \phi(M) dM$$

Appliquée à la variance d'estimation (14), cette relation va donner :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_i D^2(z_i - z) &= \frac{2}{V} \int_V dM \frac{1}{n} \sum_i \int_{v_i} \gamma(M, M_i) dM_i - \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(M, M') dM dM' \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_i \frac{1}{v_i} \int_{v_i} \int_{v_i} \gamma(M_i, M'_i) dM_i dM'_i \\ &= \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(M, M') dM dM' - \frac{1}{V^2} \sum_i \int_{v_i} \int_{v_i} \gamma(M_i, M'_i) dM_i dM'_i \end{aligned}$$

On retrouve ainsi, dans le cas particulier où V est constitué par un empilement de "briques" toutes égales à v , la formule synthétique habituelle

$$(18) \quad \sigma^2(v|V) = \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(MM') dM dM' - \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(MM') dM dM'$$

Le deuxième cas particulier est celui où le volume v est petit, dans toutes ses dimensions, vis-à-vis de V . Il est clair qu'en ce cas les interférences qui se produisent aux frontières n'ont plus d'influence sensible. Cette circonstance justifie la notion apparemment intuitive (mais d'origine purement expérimentale) de variance d'un petit échantillon dans un gisement. La moyenne des v dans V est alors pratiquement égale à z . Dans l'expression (14) de la variance d'estimation de V par un v_i donné, on peut remplacer l'intégrale double

$$\frac{2}{v_i V} \iint_{V v_i} \gamma(MM_i) dM dM_i \quad \text{par} \quad \frac{2}{V} \int_V \gamma(G_i M) dM, \quad \text{où } G_i \text{ figure le centre}$$

de gravité de v_i . La variance d'estimation moyenne $\sigma^2(v|V)$ s'obtient en faisant décrire à G_i toutes les positions possibles dans V (les effets de frontières étant négligés). On retombe alors sur la même formule qu'en (18).

Ainsi, dans les deux cas où la variance est définie (partition stricte, ou v petit devant V) Elle est donnée par la même formule (18), d'où l'on déduit la relation d'additivité habituelle (formule de Krige) :

$$(19) \quad \sigma^2(v|V') = \sigma^2(v|V) + \sigma^2(V|V')$$

Cette relation, qui n'a de sens que si v et V sont intérieurs à V et V' , et si v et V et V et V' vérifient l'une ou l'autre des deux hypothèses requises, peut être utilisée formellement pour définir la variance d'un volume v quelconque dans un volume V quelconque. Prenons, en effet, un volume V' très grand, de manière que les deux variances $\sigma^2(v|V')$ et $\sigma^2(V|V')$ aient un sens. Nous poserons, alors, par définition :

$$(20) \quad \sigma^2(v|V) = \sigma^2(v|V') - \sigma^2(V|V')$$

On vérifie immédiatement que la définition (20) conduit à la même formule (18).

On définira de la même manière la covariance de deux volumes v et v' occupant l'un par rapport à l'autre une position bien définie et implantés dans leur ensemble de manière quelconque dans V , et on aura :

$$(21) \quad \sigma(vv' | V) = \frac{1}{V^2} \iint_V \iint_V \gamma(MM') dM dM' - \frac{1}{vv'} \iint_{V'} \iint_{V'} \gamma(MM') dM dM'$$

2.- 3- Exemple : fonction intrinsèque homogène.

Supposons que $\gamma(h)$ soit une fonction homogène d'ordre β (d'après le paragraphe 1-3, nécessairement $\beta \leq 2$), c'est-à-dire vérifiant la relation

$$(22) \quad \gamma(\lambda h) = \lambda^\beta \gamma(h)$$

Calculons la variance $\sigma^2(v | V)$ dans le cas particulier où le volume v est géométriquement homothétique à V dans une homothétie de module μ

$$\mu^n = \frac{v}{V}$$

Dans la deuxième intégrale de la formule générale

$$\sigma^2(v | V) = \frac{1}{V^2} \iint_V \iint_V \gamma(MM') dV dV' - \frac{1}{v^2} \iint_{V'} \iint_{V'} \gamma(MM') dV dV'$$

effectuons le changement de variable $M = \mu P$, $M' = \mu P'$. Il vient :

$$\sigma^2(v | V) = (1 - \mu^\beta) \frac{1}{V^2} \iint_V \iint_V \gamma(MM') dM dM'$$

En désignant par $\sigma^2(0 | V)$ la variance de la variable ponctuelle dans V , on a ainsi :

$$(23) \quad \sigma^2(v | V) = \left[1 - \left(\frac{v}{V}\right)^{\frac{\beta}{n}} \right] \sigma^2(0 | V)$$

Plus généralement, supposons que $\gamma(h)$ soit une fonction associée à une fonction homogène d'ordre β :

$$\gamma(\lambda h) = \lambda^\beta \gamma(h) + \lambda^\beta \log \lambda \gamma_0(h)$$

où $\gamma_0(h)$ est une fonction homogène de degré β . On obtient cette fois, toujours pour v homothétique à V dans une homothétie de module μ

$$\sigma^2(v|V) = (1 - \mu^\beta) \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(MM^0) dM dM^0 - \frac{\mu^\beta \log \mu}{V^2} \iint_V \gamma_0(MM^0) dM dM^0$$

Dans le cas de Wijsien, on a $\beta = 0$, et $\gamma(h)$ est du type $\beta \propto \log r$, ou, plus généralement :

$$\begin{cases} \gamma(h) = \beta \propto \log \phi(h) + C \\ \phi(\lambda h) = \lambda \phi(h) \end{cases}$$

On a, dans ce cas $\gamma_0(h) = \beta \propto = C^{ste}$, et il vient

$$(25) \quad \sigma^2(v|V) = \alpha \log \frac{V}{v}$$

C'est la formule de DE WIJS.

3.- Relation entre schémas intrinsèques et transitifs.

Il n'existe pas forcément de relation simple entre les schémas intrinsèques définis ici comme des processus stochastiques à accroissements stationnaires, et les schémas transitifs, que nous avons utilisés dans la Note 42. Le mode de représentation transitif présente un très haut degré de généralité. Il permet de décrire n'importe quelle variable régionalisée évoluant dans un champ géométrique fini V. En contre partie, le covariogramme transitif $g(h)$ est lié étroitement à la géométrie de V, et il n'existe aucun moyen simple de passer du champ V à un autre champ V'. Il faut bien voir, d'ailleurs, que la liaison entre le covariogramme et le champ exprime souvent aussi une zonalité réelle de la variation régionalisée, si les tenants présentent, par exemple, une tendance systématique à l'appauvrissement lorsque l'on va d'un coeur riche aux frontières du champ. Ce genre de phénomène, aisément pris en compte par la représentation transitive, est profondément étranger aux schémas intrinsèques, puisqu'en pareil cas les accroissements ε_{ij} ne peuvent en aucune façon présenter le caractère stationnaire. Par contre, dans le cas où les frontières du champ n'exercent pas d'influence particulière sur la régionalisation, et où tout se passe comme si le champ V avait été découpé arbitrairement au sein d'une régionalisation homogène, qui aurait pu se poursuivre, sans changer de nature, bien au delà des frontières, la dépendance du $g(h)$ relativement à la géométrie de V apparaît comme artificielle, et masque une réalité plus simple. En pareil cas, il vaut mieux

utiliser la représentation intrinsèque, c'est-à-dire considérer la régionalisation comme une réalisation d'un processus stochastique à accroissements stationnaires. La relation entre les deux modes de représentations doit alors s'exprimer dans une formule donnant la valeur probable $E [g(h)]$ du covariogramme transitif en fonction de la loi de dispersion intrinsèque $\gamma(h)$.

3 - 1 - Définitions et Algorithmes

Etant donné un processus stochastique intrinsèque, décrit par une loi de dispersion $\gamma(h)$, et un volume V arbitraire dans l'espace, nous allons nous intéresser aux réalisations du processus à l'intérieur de V , et annuler conventionnellement toutes les valeurs de la variable régionalisée extérieure à V . Ainsi tronquée au champ V , la régionalisation donne naissance à un covariogramme transitif

$$(26) \quad g(h) = \int f(M+h) f(M) dM$$

qui doit être considéré comme une intégrale stochastique. Le champ V , de son côté, est commodément décrit par la variable géométrique $k(M)$ à support ponctuel définie par :

$$(27) \quad \begin{cases} k(M) = 1 & \text{si } M \in V \\ k(M) = 0 & \text{si } M \notin V \end{cases}$$

L'intégrale (26), étendue à la régionalisation tronquée, doit s'écrire de manière plus précise

$$(26 \text{ bis}) \quad g(h) = \int f(M+h) f(M) k(M+h) k(M) dM$$

$f(M)$ représentant cette fois la régionalisation non tronquée. A la variable $k(M)$ définie en (27) nous associons un covariogramme transitif $K(h)$, ou covariogramme géométrique du champ V

$$(28) \quad K(h) = \int k(M) k(M+h) dM$$

On a vu dans la Note (42) que $K(h)$ représente la mesure du volume de l'intersection

du volume V et de son translaté $\mathcal{U}(h)V$ dans la translation h . Cette interprétation géométrique est une conséquence évidente des définitions (27). Ce volume $V \cap \mathcal{U}(h)V$, dont $K(h)$ est la mesure, est géométriquement égal au volume $V \cap \mathcal{U}(-h)V$ de l'intersection de V et de son translaté par $-h$, et s'en déduit par une translation de h .

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}(h) [V \cap \mathcal{U}(-h)V] = V \cap \mathcal{U}(h)V \\ K(h) = \text{Mes} [V \cap \mathcal{U}(h)V] = \text{Mes} [V \cap \mathcal{U}(-h)V] \end{array} \right.$$

Nous aurons, par la suite, à considérer les quantités de métal $Q(h)$ et $Q(-h)$ et les teneurs moyennes $m(h)$ et $m(-h)$ associées à ces deux volumes. Leurs définitions précises sont les suivantes

$$Q(h) = m(h) K(h) = \int_{V \cap \mathcal{U}(h)V} f(M) dM$$

Compte tenu de (27), on peut remplacer l'intégrale prise dans le volume de l'intersection de V et de son translaté par h par une intégrale étendue à tout l'espace, à condition de multiplier $f(M)$ par $k(M) k(M-h)$, facteur égal à l'unité quand M appartient à cette intersection et à 0 dans le cas contraire. D'où les définitions :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q(h) = m(h) K(h) = \int k(M) k(M-h) f(M) dM \\ Q(-h) = m(-h) K(h) = \int k(M) k(M+h) f(M) dM \end{array} \right.$$

Dans notre optique actuelle, $Q(h)$ et $m(h)$ doivent être considérées comme des intégrales stochastiques, tandis que $k(M)$ et son covariogramme $K(h)$ sont de nature purement géométrique, et ne dépendent que du choix du champ V . Le covariogramme $K(h)$ peut être utilisé pour simplifier le calcul de la valeur moyenne dans V d'une fonction quelconque $F(h)$ de l'argument vectoriel h . En effet, on peut écrire

$$\frac{1}{V^2} \iint_V \iint_V F(MM') dM dM' = \frac{1}{V^2} \iint k(u) k(v) F(v-u) du dv$$

Dans le deuxième membre figurent des intégrales étendues à tout l'espace (intégrale sextuple si l'espace a trois dimensions), u et v sont des vecteurs et du et dv

(comme dM et dM') des éléments de volumes. Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} v = M + h \\ u = M \end{array} \right.$$

L'expression à calculer prend alors la forme :

$$\iint k(M + h) k(M) F(h) dM dh$$

si l'on effectue en premier lieu l'intégration en M (dans tout l'espace), on fait apparaître l'expression (28) du covariogramme $K(h)$. Il en résulte la règle de calcul suivante, d'ailleurs évidente si l'on tient compte de la signification géométrique de $K(h)$:

$$(31) \quad \frac{1}{V^2} \iint_V F(MM') dM dM' = \frac{1}{V^2} \int K(h) F(h) dh$$

Ces diverses formules seront utilisées dans toute la suite. La formule (31) peut aussi servir à simplifier le calcul d'une variance par l'équation (18).

3.- 2- Relations entre $\gamma(h)$ et $E [g(h)]$

Dans le volume V règne un variogramme local $\gamma_V(h)$ que nous définirons par la relation

$$(32) \quad \gamma_V(h) = \frac{1}{2K(h)} \int [f(M) - f(M+h)]^2 k(M) k(M+h) dM$$

C'est le variogramme que l'on pourrait construire expérimentalement si l'on connaissait la valeur $f(M)$ prise par la variable régionalisée en tous les points du champ V . Avec cette définition, $\gamma_V(h)$ apparaît comme une intégrale stochastique. C'est une variable aléatoire dont la valeur probable (a priori) est naturellement égale à la fonction intrinsèque $\gamma(h)$

$$(33) \quad E [\gamma_V(h)] = \gamma(h)$$

Nous reviendrons dans un autre paragraphe sur la variance $D^2 [\gamma_V(h)]$ du

variogramme local. Si nous développons le carré figurant dans l'intégrale (32), le double produit $2 f(M) f(M+h)$ va faire apparaître l'expression (26 bis) du covariogramme transitif $g(h)$. Il vient ainsi :

$$\gamma_V(h) = \frac{1}{2K(h)} \int_{V \cap \mathcal{C}(h) \cap V} k(M) k(M+h) [f^2(M) + f^2(M+h)] dM = \frac{g(h)}{K(h)}$$

Considérons une intégrale telle que

$$\int_{V \cap \mathcal{C}(-h) \cap V} k(M) k(M+h) f^2(M) dM = \int_{V \cap \mathcal{C}(-h) \cap V} f^2(M) dM$$

égale à l'intégrale du carré de la variable régionalisée dans l'intersection de V et de son translaté par $-h$. Désignons par $S^2(-h)$ la variance locale de $f(M)$ dans cette intersection, définie par l'intégrale stochastique :

$$(34) \quad S^2(-h) = \frac{1}{K(h)} \int_{V \cap \mathcal{C}(-h) \cap V} [f(M) - m(-h)]^2 dM$$

et de même la variance locale $S^2(h)$ de $f(M)$ dans $V \cap \mathcal{C}(h) \cap V$, $m(h)$ et $m(-h)$ étant explicités en (30). Avec ces notations, on a immédiatement

$$\frac{1}{K(h)} \int_{V \cap \mathcal{C}(-h) \cap V} f^2(M) dM = S^2(-h) + m^2(-h)$$

D'où l'on déduit l'expression du variogramme local $\gamma_V(h)$:

$$(35) \quad \gamma_V(h) = \frac{1}{2} [m^2(h) + S^2(h) + m^2(-h) + S^2(-h)] = \frac{g(h)}{K(h)}$$

Le premier membre de cette équation admet une valeur probable égale à $\gamma(h)$. Il en est donc de même de l'expression stochastique qui figure au second membre. Mais, d'après le paragraphe 2-2, $S^2(h)$ et $S^2(-h)$, définies en (34), ont une même valeur probable $\sigma^2(h)$, égale à la variance de la variable ponctuelle dans $V \cap \mathcal{C}(h) \cap V$ ou $V \cap \mathcal{C}(-h) \cap V$ (équation (17)) :

$$E [S^2(h)] = E [S^2(-h)] = \sigma^2 [V \cap \mathcal{C}(h) \cap V] = \sigma^2(h)$$

Nous avons donc :

$$(36) \quad E [\gamma_V(h)] = \gamma(h) = \sigma^2(h) + E \left[\frac{m^2(h) + m^2(-h)}{2} - \frac{g(h)}{K(h)} \right]$$

D'un point de vue purement théorique, il serait souhaitable de remplacer, dans une telle relation, les moyennes partielles $m(h)$ et $m(-h)$ par la moyenne $m = m(0)$ de la variable dans le champ V . Pour ce faire, nous allons considérer que le champ V se déplace dans un hyperchamp H , fini mais suffisamment grand pour que les interférences aux frontières aient un effet négligeable. Si G désigne le centre de gravité de V , supposé décrire H , $m^2(h)$, $m^2(-h)$ et m^2 sont des variables régionalisées liées à G , et on peut introduire l'intégrale stochastique

$$(37) \quad I = \frac{1}{H} \int_H \left\{ \frac{1}{2} [m^2(h) + m^2(-h)] - m^2 \right\} dG$$

La valeur probable de cette intégrale est égale à la différence des variances de $V \cap \mathcal{C}(h)V$ et de V dans H

$$(38) \quad E(I) = \sigma^2(V \cap \mathcal{C}(h)V | H) - \sigma^2(V | H)$$

Mais, si dans l'expression (37) de I on fait tendre l'hyperchamp H vers l'infini, on obtient à la limite (1)*

$$I = E \left[\frac{m^2(h) + m^2(-h)}{2} - m^2 \right]$$

Comme enfin l'expression (38) de $E(I)$ ne dépend pas réellement de H , comme on le voit en remplaçant les deux variances par leurs expressions (18), ou encore en utilisant la relation (20) :

$$\sigma^2(V \cap \mathcal{C}(h)V | H) - \sigma^2(V | H) = \sigma^2(V \cap \mathcal{C}(h)V | V)$$

nous obtenons finalement

$$(39) \quad E \left[\frac{m^2(h) + m^2(-h)}{2} - m^2 \right] = \sigma^2[V \cap \mathcal{C}(h)V | V]$$

Revenons maintenant à la relation (36), que nous mettrons sous la forme suivante :

(1)* - L'existence d'une telle limite n'est pas évidente. Elle suppose que les variables du type $m^2(h) - m^2$ possèdent la propriété ergodique. Ce point, que nous ne discuterons pas ici, mériterait une étude plus approfondie.

$$\gamma(h) = \sigma^2 [0 | V] \gamma(h) + E \left[\frac{m^2(h) + m^2(-h)}{2} - m^2 \right] + E \left[m^2 - \frac{g(h)}{K(h)} \right]$$

Compte tenu de (36), et de la formule de KRIGE (19), il vient finalement :

$$(40) \quad \gamma(h) = \sigma^2 (0 | V) + E \left[m^2 - \frac{g(h)}{K(h)} \right]$$

Ainsi est précisée la relation entre la loi de dispersion $\gamma(h)$, la variance de la variable ponctuelle dans V et le covariogramme transitif. Remarquons bien que le $g(h)$, en tant qu'intégrale stochastique, ne possède pas forcément de valeur probable définie. La relation (40) n'affirme cette propriété que de la différence $\left[m^2 - \frac{g(h)}{K(h)} \right]$, qui prend ainsi une signification intrinsèque. Remarquons également que, si l'intérêt théorique va en croissant lorsque l'on passe de la formule (35) à (36) et à (40), la précision expérimentale va, au contraire, en décroissant. La première formule est une relation numérique, obligatoirement vérifiée par les diverses grandeurs introduites. La deuxième et la troisième indiquent simplement des relations entre valeurs probables, et n'excluent nullement des divergences dues aux fluctuations statistiques habituelles. L'expression $\frac{m^2(h) + m^2(-h)}{2} - \frac{g(h)}{K(h)}$ peut différer de sa valeur probable $\gamma(h) - \sigma^2(h)$, et plus encore l'expression $m^2 - \frac{g(h)}{K(h)}$ de $\gamma(h) - \sigma^2(0 | V)$

3.- 3- Remarques complémentaires

Si, dans la relation (40), nous faisons $h = 0$, il nous reste (puisque $\gamma(0) = 0$)

$$E \left[\frac{g(0)}{K(0)} - m^2 \right] = \sigma^2 (0 | V)$$

En fait, $K(0)$ est égal à la mesure du volume V , de sorte que $\frac{g(0)}{K(0)} - m^2$ est égal à la variance locale S^2 de la variable dans V :

$$\frac{g(0)}{K(0)} - m^2 = \frac{1}{V} \int_V [f(M) - m]^2 dM = S^2$$

de sorte que nous avons

$$E(S^2) = \sigma^2 (0 | V)$$

La valeur probable de la variance locale coïncide bien avec l'expression théorique

Prenons maintenant, à l'aide de l'algorithme (31), la valeur moyenne dans V des deux membres de la formule (40). On a vu, dans la Note 42, que l'intégrale d'un covariogramme transitif étendue à tout l'espace était égale au carré de la quantité de métal correspondante. On a donc

$$\int g(h)dh = Q^2 = m^2 V^2$$

$$\int K(h)dh = V^2$$

Et par suite, en intégrant $K(h) \gamma(h)$ dans tout l'espace, on trouve :

$$\int K(h) \gamma(h)dh = V^2 \sigma^2(0 | V) = E \left[m^2 V^2 - \int g(h)dh \right]$$

L'expression figurant sous le signe E étant identiquement nulle, il reste simplement :

$$\sigma^2(0 | V) = \frac{1}{V^2} \int K(h) \gamma(h)dh$$

Ceci n'est pas autre chose que la formule (17) déjà obtenue.

4.- Représentation Transitive des covariations régionalisées.

Il arrive souvent que l'on ait affaire simultanément à plusieurs variables régionalisées définies sur un même support, ponctuel ou non. Nous parlerons dans ce cas de covariation régionalisée, et nous devons attacher une attention particulière à l'étude des corrélations reliant les diverses composantes de la covariation. Outre les corrélations directes reliant les valeurs $f_i(M)$ et $f_j(M)$ de deux variables en un même point M , il convient également de considérer les corrélations "différées" reliant les valeurs $f_i(M)$ et $f_j(M+h)$ de ces deux variables en deux points distincts distants de h . Les covariations régionalisées seront traitées, dans ce chapitre, en transitif et, dans le chapitre suivant, en intrinsèque. La représentation transitive nous permettra, en particulier, d'étudier l'influence des frontières du champ géométrique sur une régionalisation, et donc de préciser sous quelles conditions générales cette régionalisation est susceptible d'être représen-

tée en schéma intrinsèque. De son côté, la représentation intrinsèque, en tant qu'elle est débarrassée de toute influence du champ géométrique, permet une étude plus fine des relations régnant entre plusieurs variables à l'intérieur d'un milieu homogène : ces variables pourront correspondre, par exemple, aux divers constituants minéralogiques ou chimiques d'une roche ou d'un gisement, et nous serons ainsi conduits au paradoxe de Chayes.

4.- 1.- Matrice de covariation

Supposons que, dans un champ V défini par la variable géométrique $k(M)$ introduite en (27) et son covariogramme $K(h)$ introduit en (28), que l'on peut écrire aussi, en notation convolutive

$$(41) \quad K = k \overset{V}{*} k$$

règnent simultanément plusieurs variations régionalisées $f_1(M), f_2(M) \dots$ à support ponctuel. A la variable $f_i(M)$ d'indice i est associé son covariogramme transitif $g_i(h)$ défini par :

$$(42) \quad g_i(h) = f_i \overset{V}{*} f_i$$

Etant donné des nombres réels λ_i quelconques, nous pouvons définir une nouvelle régionalisation par une combinaison linéaire de n variables f_i :

$$(43) \quad f(M; \lambda_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(M)$$

et lui associer son covariogramme transitif $g(h; \lambda_i)$:

$$\begin{aligned} g(h; \lambda_i) &= \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j f_i(M) \overset{V}{*} f_j(M) \\ &= \sum_i^2 \lambda_i^2 g_i(h) + \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j [f_i(M) \overset{V}{*} f_j(M) + f_j(M) \overset{V}{*} f_i(M)] \end{aligned}$$

Dans certains cas, il y a intérêt à distinguer les deux composantes des termes rectangulaires, soient

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{ij} = f_i \overset{V}{*} f_j \\ D_{ii} = f_i \overset{V}{*} f_i \end{array} \right.$$

Le plus souvent, ils n'interviennent que par l'expression symétrisée

$$(45) \quad C_{ij}(h) = C_{ji}(h) = \frac{1}{2} \left[f_i^V * f_j^V + f_j^V * f_i^V \right]$$

La fonction $C_{ij}(h)$ est le covariogramme rectangulaire des variables f_i et f_j . Le covariogramme de la variable (43) s'écrit, avec ces notations :

$$(46) \quad g(h; \lambda_i) = \sum_i \lambda_i^2 g_i(h) + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j C_{ij}(h)$$

En posant, conventionnellement,

$$C_{ii}(h) = g_i(h)$$

on obtient l'écriture plus condensée

$$(47) \quad g(h; \lambda_i) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j C_{ij}(h)$$

La matrice des $C_{ij}(h)$ associée à la covariation régionalisée des f_i sera dite matrice des covariogrammes, ou matrice de covariation.

*
* *

4.- 2- Les covariances d'estimation.

Le covariogramme rectangulaire $C_{ij}(h)$ exprime à sa manière la corrélation différée régnant entre $f_i(M)$ et $f_j(M+h)$. Pour en préciser la signification, imaginons que nous disposions, pour estimer la quantité de métal $Q(\lambda_i)$ associée à la variable (43), d'un réseau de prélèvements ponctuels implantés aux noeuds d'un réseau parallélépipédique. A toute estimation par une maille définie par un vecteur a est associée une variance d'estimation σ_a^2 , qui s'obtient, conformément aux formules (56) et (57) de la Note 42, en appliquant au covariogramme $g(h)$ l'opérateur linéaire \mathcal{E}_a défini par

$$(48) \quad \sigma_a^2 = \mathcal{E}_a^2(h) = |a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n| \sum_{k_1 \dots k_n} g(k_1 a_1, \dots, k_n a_n) = \int g(h) dh$$

Puisque cet opérateur est linéaire, la variance associée à l'estimation de $Q(\lambda_i)$ va prendre l'expression suivante :

$$(49) \left\{ \begin{aligned} \hat{C}_a [g(h; \lambda_i)] &= \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \hat{C}_a [c_{ij}(h)] \\ &= \sum \lambda_i^2 \hat{C}_a(g_i) + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \hat{C}_a(c_{ij}) \end{aligned} \right.$$

Dans cette relation, $\hat{C}_a(g_i)$ est naturellement égale à la variance de l'estimation de la quantité de métal Q_i associée à la variable f_i . On voit immédiatement (en faisant varier les coefficients arbitraires λ_i, λ_j) que, de son côté, l'algorithme $\hat{C}_a(c_{ij})$ - calculé en appliquant (48) au covariogramme rectangulaire c_{ij} - représente la covariance de l'estimation simultanée des quantités de métal Q_i et Q_j par une même maille de prélèvement.

4.-3- Condition d'indépendance interne de deux variables.

En règle générale, cette covariance d'estimation ne sera pas nulle, mais, le plus souvent, positive. Les deux variables f_i et f_j , liées à un même champ géométrique V , ne sont certainement pas "indépendantes" dans l'absolu. En l'absence de toute autre cause de liaison, le fait qu'elles aient même champ géométrique entraîne une valeur positive de $\hat{C}_a(c_{ij})$. Si la maille a a été implantée de telle manière qu'elle conduise, par exemple, à une estimation par excès du volume de V , il en résulte - toutes choses égales d'ailleurs - une tendance à la surestimation simultanée des deux quantités de métal Q_i et Q_j , et inversement. La notion usuelle d'indépendance de f_i et f_j - notion interne au champ V et qui s'exprime plus commodément en représentation intrinsèque - correspond au cas où la covariance directe (ordinaire) des variables ponctuelles f_i et f_j est égale à 0, ce qui s'écrit, avec nos notations :

$$(50) \quad C_{ij}(0) = m_i m_j K(0) = m_i m_j V$$

m_i et m_j étant les moyennes $\frac{Q_i}{V}$ et $\frac{Q_j}{V}$ de f_i et f_j dans V .

Mais il faut bien voir que la relation (50), qui exprime l'indépendance des variables ponctuelles, n'entraîne pas nécessairement l'indépendance des variables non ponctuelles que l'on peut en déduire. En effet, désignons, conformément aux notations de la Note 42, par p la fonction associée au prélèvement d'un échantillon v (Note 42, formule-14) - Les variables y_i et y_j à support non ponctuel v se dédui-

sent de f_i et f_j par les formules (15) de cette note, soit

$$(51) \left\{ \begin{array}{l} y_i = \frac{1}{V} f_i * p \\ y_j = \frac{1}{V} f_j * p \end{array} \right.$$

En désignant par $P = \frac{p * p}{V^2}$ le covariogramme transitif associé à $\frac{p}{V}$

(c'est-à-dire le covariogramme géométrique de v), la formule (46) nous montre que le covariogramme rectangulaire associé aux nouvelles variables y_i et y_j a pour expression

$$P * C_{ij} = \int P(h - u) C_{ij}(u) du$$

Mais - et c'est une façon de prendre en compte l'effet de bavure qui se produit aux frontières lorsque l'on définit les variables à support non ponctuel, le covariogramme géométrique doit également être remplacé par

$$P * K_V = \int P(h - u) K(u) du$$

On vérifie que la convolution par $\frac{V}{p}$ n'altère ni les quantités de métal $\int f_i * \frac{V}{p} dM = Q_i$, ni le "volume" généralisé $\int k * \frac{V}{p} dM = V$, donc ne change pas les moyennes m_i et m_j . La condition d'indépendance des variables y_i et y_j s'écrit donc

$$(52) \int P(u) C_{ij}(u) = m_i m_j \int P(u) K(u) du$$

Or (52) n'est pas du tout une conséquence de (50). Pour que y_i et y_j soient indépendants quel que soit le support v , c'est-à-dire pour que (52) soit vérifiée pour tout $P(u)$, il est nécessaire et suffisant que l'on ait :

$$(53) C_{ij}(h) = m_i m_j K(h)$$

Lorsque cette relation est vérifiée, nous dirons que le couple $f_i f_j$ vérifie la propriété d'indépendance interne (interne au champ V). C'est là, en fait, une condition très sévère, qui ne sera jamais rigoureusement vérifiée en pratique. Mais, si les fluctuations de $C_{ij}(h)$, de part et d'autre de $m_i m_j K(h)$ n'ont pas trop d'ampleur, on pourra souvent admettre l'indépendance interne à titre d'approximation.

Si cette condition (53) d'indépendance interne est vérifiée, la covariance $\mathcal{E}(C_{ij})$ des estimations de Q_i et Q_j se met sous la forme :

$$(54) \quad \sigma_{Q_i Q_j} = \mathcal{E}(C_{ij}) = m_i m_j \mathcal{E}(K) = m_i m_j \sigma_V^2$$

où V représente la variance d'estimation du volume V par la même maille (variance géométrique). En pareil cas, la variance relative de l'erreur commise sur l'estimation du rapport Q_i/Q_j peut s'écrire, en première approximation

$$(55) \quad \frac{\sigma_{Q_i}^2}{Q_i^2} + \frac{\sigma_{Q_j}^2}{Q_j^2} - \frac{2 \sigma_{Q_i Q_j}}{Q_i Q_j} = \frac{\sigma_{Q_i}^2}{Q_i^2} + \frac{\sigma_{Q_j}^2}{Q_j^2} - \frac{2 \sigma_V^2}{V^2}$$

*
* *
*

4.- 4- Corrélation entre une variable et son champ géométrique V.

Un cas particulier remarquable s'obtient en prenant $f_i = f$ (variable régionalisée quelconque) et $f_j = k$ (variable géométrique associée au champ V de f). En écrivant $C(h)$ au lieu de $C_{ij}(h)$, la condition d'indépendance interne (53) s'écrit

$$(56) \quad C(h) = m K(h)$$

Lorsqu'elle est vérifiée, la relation (55) prend la forme

$$(57) \quad \frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} - \frac{\sigma_V^2}{V^2}$$

La variance relative $\frac{\sigma_m^2}{m^2}$ sur la teneur moyenne s'obtient en faisant la différence des variances relatives sur la quantité de métal et sur le volume. Cela

signifié que, dans le produit $Q = mV$, les quantités m et V peuvent être considérées comme estimées indépendamment l'une de l'autre, autrement dit qu'il n'y a pas d'interférence entre le problème géométrique (estimation de V) et l'estimation de la teneur moyenne m . Dans la mesure où elle manifeste l'absence d'influence de la position d'un point M à l'intérieur de V (plus ou moins près des frontières de V) cette condition doit servir de critère pour juger de la possibilité d'une représentation intrinsèque. En raison de son importance, nous allons l'analyser avec quelques détails.

Revenons à la définition (45) du $C(h)$; qui s'écrit ici :

$$C(h) = \frac{1}{2} \left[\int_V f^* k + \int_V f^* k \right]$$

Reportons-nous aux définitions (30) des quantités de métal $Q(h)$ et $Q(-h)$ contenues dans les intersections $V \cap \mathcal{U}(h)V$ et $V \cap \mathcal{U}(-h)V$. Il vient :

$$(58) \begin{cases} \int_V f^* k = \int f(M) k(M-h) dM = Q(h) \\ \int_V f^* k = \int f(M) k(M+h) dM = Q(-h) \end{cases}$$

La condition d'indépendance interne (56) peut donc s'écrire :

$$(59) \quad \frac{1}{2} \left[m(h) + m(-h) \right] = m$$

Elle exprime que la moyenne des teneurs dans les deux intersections $V \cap \mathcal{U}(h)V$ et $V \cap \mathcal{U}(-h)V$ reste constante et égale à la moyenne m de la variable dans V . Naturellement, une telle relation ne peut pas être rigoureusement vérifiée. Du point de vue stochastique, on peut l'interpréter comme une relation entre valeurs probables : elle traduit alors l'absence de dérive systématique des teneurs, à l'exception d'une dérive linéaire (qui n'influerait pas sur $\frac{m(h) + m(-h)}{2}$). Elle traduit donc la condition pour que le formalisme intrinsèque puisse être utilisé à la description de $f(M)$. Du point de vue pratique, on pourra admettre certains écarts relativement à (59), écarts que l'on interprétera comme des fluctuations statistiques (sans que l'on puisse préciser l'ampleur maximale admissible de ces fluctuations). Mais, dans le cas d'une dérive zonée (coeur riche, périphérie de

plus en plus pauvres), on a nécessairement :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C(h) < m K(h) & \text{pour } h \text{ grand} \\ C(h) > m K(h) & \text{pour } h \text{ petit} \end{array} \right.$$

On notera, cependant, que dans tous les cas, les relations suivantes sont vérifiées :

$$(60) \left\{ \begin{array}{l} C(0) = m K(0) = Q \\ \int C(h) dh = m \int K(h) dh = QV \end{array} \right.$$

La première résulte simplement de la définition de $C(h)$

$$C(h) = \frac{1}{2} [Q(h) + Q(-h)]$$

La deuxième découle des relations (58), à condition d'invertir les intégrations en M et h . Elle s'applique du reste à un covariogramme rectangulaire (45) quelconque

$$(61) \int C_{ij}(h) dh = Q_i Q_j$$

Par contre, dans le cas général, le $C_{ij}(0)$ est de la forme

$$(62) C_{ij}(0) = \int f_i(M) f_j(M) dM = V(m_i m_j + \sigma_{ij})$$

Dans cette relation σ_{ij} est la covariance directe (ordinaire) des valeurs $f_i(M)$ et $f_j(M)$ associées à un même point M . La première relation (60), $C(0) = Q$, exprime donc que la covariance ordinaire entre une variable $f(M)$ et la variable géométrique $k(M)$ associée à son champ est toujours nulle. Seules les corrélations différées entre $f(M)$ et $k(M+h)$, exprimées par la fonction $C(h)$, peuvent donc permettre de représenter l'influence du champ sur l'allure de la variation régionalisée.

4.- 5- Le paradoxe de Chayes

Lorsque l'on effectue l'analyse chimique complète d'un échantillon, ou lorsque l'on établit la composition minéralogique d'une roche, en pourcentage des différents minéraux constitutifs, la somme des résultats obtenus doit être égale à

100 % (aux erreurs près). Un tel système "fermé" représenté par un ensemble de n nombres f_i positifs dont la somme doit être obligatoirement égale à l'unité donne lieu au "paradoxe" apparent de Chayes : la relation imposée

$$\sum f_i = 1$$

entraîne nécessairement entre les f_i une corrélation négative globale. Le fait d'observer un coefficient de corrélation négatif entre deux constituants particuliers f_i et f_j n'a donc en soi rien d'insolite. On ne peut conclure à une affinité ou à une répulsion entre f_i et f_j que si la corrélation observée diffère significativement d'une certaine valeur considérée comme normale. Mais quelle doit être cette valeur "normale" nécessairement négative, et correspondant cependant à une absence de liaison ?

Formulons ce "paradoxe" en représentation transitive. Au constituant i est associée la variable régionalisée à support ponctuel $f_i(M)$, égale à 1 ou à 0 selon que le point M tombe, ou non, à l'intérieur d'un minéral de la catégorie i . En somme, $f_i(M)$ est la variable géométrique associée au volume V_i , de forme compliquée, occupé à l'intérieur du champ total V par l'ensemble des grains du minéral i . Comme tout point M tombe à l'intérieur d'un et d'un seul grain minéral, les V_i constituent une partition de V , et l'on a :

$$(63) \quad \sum_i f_i(M) = k(M)$$

$k(M)$ étant la variable géométrique du champ total V . Le principe d'exclusion

$$(64) \quad f_i(M) f_j(M) = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

entraîne, d'après (62)

$$(65) \quad C_{ij}(0) = 0$$

Réciproquement, comme les f_i et les f_j sont positifs ou nuls, (65) entraîne (64). D'après (62), la condition $C_{ij}(0) = 0$ correspond à

$$\sigma_{ij} = -m_i m_j$$

Les covariances (ordinaires) des variables ponctuelles ont des valeurs imposées par le seul principe d'exclusion. Il est donc clair qu'une affinité ou une répulsion entre les constituants i et j ne peut être reflétée que par les corrélations différées, c'est-à-dire par les covariogrammes $C_{ij}(h)$, pour h non nul. Le principe d'exclusion, cependant, n'a d'influence directe que pour des distances inférieures au diamètre maximum a des grains minéraux. Il donne naissance à un effet de pépite de portée a . On peut donc considérer comme indépendants (au sens de l'indépendance interne) deux minéraux i et j tels que :

$$(66) \quad C_{ij}(h) \neq m_i m_j K(h) \quad \text{pour } |h| > a$$

L'égalité ne peut être qu'approximative, à cause de la condition (61) : le petit défaut du $C_{ij}(h)$ pour $|h| \ll a$ doit être rattrapé par un léger excès pour $|h| > a$, excès qui peut être très faible si a est petit devant V . La fonction

$$C_{ij}(h) - m_i m_j K(h)$$

caractérise les relations entre les minéraux i et j . Négative pour $|h| < a$, à cause du principe d'exclusion, elle peut prendre des valeurs positives, par exemple, pour $|h| > a$, mais, d'après (62), à ces valeurs positives doivent ensuite succéder à nouveau, des valeurs négatives, de manière que l'intégrale totale reste nulle. Une affinité aux courtes distances a pour corollaire nécessaire une répulsion aux grandes distances (et réciproquement). Il va de soi que l'on pourra parler de corrélation positive, ou d'affinité entre les minéraux i et j dans le cas où $C_{ij}(h) - m_i m_j K(h)$ prendra des valeurs notablement supérieures à zéro pour des distances $|h|$ immédiatement supérieures à la portée a .

En faisant la convolution de (63) par $f_j(M)$, et celle de l'équation transposée par $f_j(M)$, on obtient, avec les notations (30)

$$(67) \quad \sum_i C_{ij}(h) = \frac{1}{2} [Q_j(h) + Q_j(-h)]$$

Imaginons que la condition d'indépendance interne (66) soit vérifiée pour tous les couples i et j (pour des distances $|h|$ supérieures à la portée a). En sommant (66) en i , et compte tenu de la relation

$$\sum_i m_i = 1$$

conséquence immédiate de (63), il reste simplement

$$(68) \quad \sum_i c_{i,j}(h) = m_j K(h)$$

En comparant (67) et (68), on fait apparaître la relation (69)

$$(69) \quad \frac{1}{2} [m_j(h) + m_j(-h)] = m_j$$

qui exprime l'absence d'influence du champ géométrique sur l'allure de la variation f_j .

Ainsi se dégage une importante conclusion : les variables soumises au principe d'exclusion de Chayes ne peuvent être toutes mutuellement indépendantes deux à deux, au sens de l'indépendance interne (66), que si la condition (69) est vérifiée, c'est-à-dire si aucune d'entre elles n'est influencée dans son allure par le champ géométrique V . On conçoit bien, d'ailleurs, que si l'une des variables s'enrichit au coeur de V quelques unes au moins des autres devront s'enrichir à la périphérie.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie, puisque (69) n'entraîne pas, en général, (66). La condition (69) est nécessaire, mais non suffisante, pour que l'indépendance interne soit possible. Comme cette condition exprime également qu'il est possible de représenter les variables $f_j(M)$ par des schémas intrinsèques, nous reprendrons l'étude du paradoxe de Chayes après avoir exposé la théorie des co-régionalisations intrinsèques.

5 - Théorie des Corégionalisations intrinsèques.

Nous désignerons sous le nom de covariation régionalisée intrinsèque, ou, plus brièvement, corégionalisation intrinsèque une réalisation d'un processus stochastique à plusieurs composantes et à accroissement stationnaire. La théorie intrinsèque des corégionalisations apparaît à la fois comme la généralisation au cas d'un processus à plusieurs composantes des théories des chapitres 1 et 2, et comme la transposition en termes stochastiques de la représentation transitive donnée au

chapitre 4. La théorie stochastique est d'une part moins générale que la représentation transitive, puisqu'elle postule le caractère intrinsèque de la corégionalisation, c'est-à-dire l'indépendance de celle-ci vis-à-vis de son champ géométrique, mais elle permet d'autre part une étude plus fine et plus approfondie des corrélations des diverses variables entre elles, précisément parce qu'elle réussit à faire abstraction de toute interférence avec la géométrie du champ.

5.- 1- Définition des corégionalisations intrinsèques.

Une covariation régionalisée est une réalisation d'un processus stochastique à n composantes $f_1(M), f_2(M) \dots f_n(M)$ et à accroissements stationnaires. Par accroissements $\varepsilon_i(MM')$ de la variable $f_i(M)$ nous désignons la variable aléatoire

$$(70) \quad \varepsilon_i(MM') = f_i(M) - f_i(M')$$

Les accroissements $\varepsilon_i(MM')$ sont définis, en tant que processus stochastiques, par la donnée de la loi de distribution (probabiliste) simultanée :

$$F \left[\varepsilon_{i_1}(M_1 M_1'), \varepsilon_{i_2}(M_2 M_2') \dots \varepsilon_{i_k}(M_k M_k') \right]$$

d'un nombre quelconque k d'accroissements des variables $f_{i_1} \dots f_{i_k}$ prises parmi les variables f_i pour k couples quelconques de points $M_1 M_1' \dots M_k M_k'$. Ce processus est dit stationnaire, et la corégionalisation est dite intrinsèque, si la loi F ainsi définie ne dépend que des positions relatives des points $M_1 M_1' \dots M_k M_k'$. C'est-à-dire si elle ne dépend que des $2k - 1$ vecteurs $M_1 M_1', M_1 M_2', M_1 M_2', M_1 M_2', \dots, M_1 M_k', M_2 M_k', \dots, M_{k-1} M_k'$. Cette définition implique que la loi F ne dépend pas de la position dans l'espace du centre de gravité du nuage de points $M_1 M_1' \dots M_k M_k'$, ni des valeurs prises par les variables $f_{i_1} \dots f_{i_k}$ elles-mêmes, ce que l'on exprime habituellement en disant qu'elle possède le caractère intrinsèque. En fait, sauf dans les questions très particulières qui feront l'objet du chapitre 8 (estimation du variogramme et des variances), il n'est pas nécessaire de postuler le caractère intrinsèque pour la loi F elle-même, mais seulement pour ses moments d'ordre 1 et 2. Comme nous l'avons vu au premier chapitre, cela signifie que le contenu probabiliste de la définition n'intervient pas réellement, et n'est pas strictement indispensable à la construction de la théorie.

En ce qui concerne les moments d'ordre 1, nous pouvons, sans inconvénients, les supposer tous nuls. Chaque variable $f_i(M)$ prise individuellement, possédant le caractère intrinsèque, ne peut admettre, comme nous l'avons vu en 1-1, qu'une dérivée linéaire, qu'il est toujours possible d'éliminer. Par contre, les moments d'ordre 2 présentent la plus grande importance. Pour les introduire commodément, considérons une combinaison linéaire arbitraire des variables $f_i(M)$:

$$(71) \quad f(M; \lambda_i) = \sum_i \lambda_i f_i(M)$$

Cette nouvelle variable possède le caractère intrinsèque quels que soient les coefficients réels λ_i , puisque tout accroissement

$$\varepsilon(MM'; \lambda_i) = f(M'; \lambda_i) - f(M; \lambda_i) = \sum \lambda_i \varepsilon_i(MM')$$

est une combinaison linéaire d'accroissements $\varepsilon_i(MM')$. Il lui est donc associée une loi de dispersion intrinsèque $\gamma(h; \lambda_i)$, définie comme en (4) par

$$\gamma(h; \lambda_i) = \frac{1}{2} D^2 \left[\varepsilon(M, M+h; \lambda_i) \right]$$

Comme tous les accroissements ont, par hypothèse, une valeur probable égale à 0, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \gamma(h; \lambda_i) &= \frac{1}{2} E \left[\varepsilon(M, M+h; \lambda_i)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j E \left[\varepsilon_i(M, M+h) \varepsilon_j(M, M+h) \right] \end{aligned}$$

La définition (4) admet ainsi la généralisation naturelle suivante :

$$(72) \quad \gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} E \left[\varepsilon_i(M, M+h) \varepsilon_j(M, M+h) \right] = \frac{1}{2} E \left\{ \left[f_i(M+h) - f_i(M) \right] \left[f_j(M+h) - f_j(M) \right] \right\}$$

Avec ces notations, le variogramme $\gamma(h; \lambda_i)$ de la combinaison linéaire (71) peut s'écrire

$$(73) \quad \gamma(h; \lambda_i) = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij}(h)$$

La matrice $\gamma_{ij}(h)$ s'appelle matrice de covariation intrinsèque. Ses termes diagonaux $\gamma_{ii}(h) = \gamma_i(h)$ ne sont autres que les lois de dispersion intrinsèque $\gamma_i(h)$ des

variables $f_i(M)$ considérées individuellement. Un terme rectangulaire tel que $\gamma_{ij}(h)$, que nous appellerons fonction de codispersion intrinsèque des deux variables f_i et f_j doit, tout naturellement, représenter la corrélation existant entre ces deux variables.

5.- 2 - Propriétés de la matrice de covariation intrinsèque

A toute propriété d'une fonction intrinsèque $\gamma(h)$ doit correspondre une propriété de la fonction de codispersion $\gamma_{ij}(h)$, que l'on peut obtenir en écrivant que la propriété en question doit être vérifiée, quels que soient les coefficients λ_i , par le variogramme $\gamma(h; \lambda_i)$ de toute combinaison linéaire du type (71).

Par exemple, tout variogramme doit être positif :

$$\gamma(h; \lambda_i) \geq 0$$

Par conséquent, pour toute combinaison linéaire limitée à deux termes $\lambda_i f_i + \lambda_j f_j$, la forme quadratique en λ_i et λ_j :

$$\lambda_i^2 \gamma_i(h) + 2 \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij}(h) + \lambda_j^2 \gamma_j(h)$$

doit être définie positive, d'où résulte l'inégalité de Schwartz :

$$(74) \quad |\gamma_{ij}(h)| \leq \sqrt{\gamma_i(h) \gamma_j(h)}$$

On peut ainsi définir un coefficient de codispersion

$$(75) \quad R_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_i(h) \gamma_j(h)}}$$

qui est une fonction de h , nécessairement comprise entre +1 et -1. $R_{ij}(h)$ n'est pas autre chose, en fait, que le coefficient de corrélation des accroissements

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_i(M + h, M) = f_i(M + h) - f_i(M) \\ \varepsilon_j(M + h, M) = f_j(M + h) - f_j(M) \end{array} \right.$$

Un coefficient de covariation égal à +1 ou -1 pour un argument vectoriel donné h_0 entraîne une relation linéaire fonctionnelle entre les accroissements ε_i et ε_j .

Cela signifie que les variables f_i et f_j vérifient une équation aux différences finies de la forme :

$$a_i \left[f_i(M + h_0) - f_i(M) \right] = a_j \left[f_j(M + h_0) - f_j(M) \right]$$

Les valeurs de $f_i(M + kh)$ pour k entier quelconques sont alors déterminées par la donnée de $f_i(M)$ et des $f_j(M + kh_0)$

Comme deuxième exemple, considérons la relation (7). Appliquée à $\gamma(h, \lambda_i)$ elle peut s'écrire) pour quatre points $MM' PP'$ quelconques :

$$E \left[\varepsilon(MM'; \lambda_i) \varepsilon(PP'; \lambda_i) \right] = \gamma(MP'; \lambda_i) + \gamma(M'P; \lambda_i) - \gamma(MP; \lambda_i) - \gamma(M'P'; \lambda_i)$$

Mais on a aussi

$$E \left[\varepsilon(MM'; \lambda_i) \varepsilon(PP'; \lambda_i) \right] = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j E \left[\varepsilon_i(MM') \varepsilon_j(PP') \right]$$

$$\gamma(MP'; \lambda_i) + \gamma(M'P; \lambda_i) - \gamma(MP; \lambda_i) - \gamma(M'P'; \lambda_i) = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \left[\gamma_{ij}(MP') + \gamma_{ij}(M'P) - \gamma_{ij}(MP) - \gamma_{ij}(M'P') \right]$$

En identifiant les coefficients de $\lambda_i \lambda_j$, on obtient la généralisation de la relation (7) soit :

$$(76) \quad E \left[\varepsilon_i(MM') \varepsilon_j(PP') \right] = \gamma_{ij}(MP') + \gamma_{ij}(M'P) - \gamma_{ij}(MP) - \gamma_{ij}(M'P')$$

et cette relation nous montre que la matrice de covariation $\gamma_{ij}(h)$ suffit pour déterminer tous les moments d'ordre 2.

Dans le paragraphe 1-3, nous avons établi que la transformée de Fourier $\phi(u)$ d'une fonction intrinsèque, qui est en général une distribution, devait être telle que son produit par le carré d'une forme linéaire quelconque $(u \zeta)^2 \phi(u)$ soit une mesure positive. Appliquons cette propriété à $\gamma(h, \lambda_i)$, et soit $\phi_{ij}(u)$ la transformée de Fourier de $\gamma_{ij}(h)$. Dans le cas de deux coefficients λ_i et λ_j , on trouve (en changeant λ_i en $-\lambda_i$) que les deux distributions

$$(u \tau)^2 \left[\lambda_i^2 \phi_i(u) + 2 \lambda_i \lambda_j \phi_{ij}(u) + \lambda_j^2 \phi_j(u) \right]$$

$$(u \tau)^2 \left[\lambda_i^2 \phi_i(u) - 2 \lambda_i \lambda_j \phi_{ij}(u) + \lambda_j^2 \phi_j(u) \right]$$

doivent être des mesures positives. La différence de deux mesures positives étant une mesure quelconque, on trouve simplement que $(u \tau)^2 \phi_{ij}(u)$ doit être une mesure. Comme l'intégrale de la mesure positive $(u \tau)^2 \phi(u; \lambda_i)$ sur un domaine D quelconque doit être positive, on obtient l'inégalité de Schwartz :

$$(77) \left[\int_D (u \tau)^2 \phi_{ij}(u) du \right]^2 \leq \int_D (u \tau)^2 \phi_i(u) du \int_D (u \tau)^2 \phi_j(u) du$$

Cette inégalité n'est pas une conséquence de (74), et constitue donc bien une condition supplémentaire. A titre d'exemple, examinons le cas

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = A_1 r^{\alpha_1} \\ \gamma_2 = A_2 r^{\alpha_2} \\ \gamma_{12} = B r^{\beta} \end{array} \right.$$

D'après le paragraphe 1-3, les exposants α_1 et α_2 doivent être inférieurs à 2. Le même raisonnement montre que, pour que $(u \tau)^2 \phi_{12}(u)$ soit une mesure, β doit être également inférieur à 2. Soient :

$$\alpha_1 < 2 \quad \alpha_2 < 2 \quad \beta < 2$$

La condition (74) donne, de son côté :

$$|B| r^{\beta} < \sqrt{\frac{A_1 A_2}{r^2}}$$

Cette inégalité, devant être vérifiée quel que soit r , et en particulier pour r très petit et r très grand, entraîne nécessairement :

$$(78) \left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ |B| \leq \sqrt{A_1 A_2} \end{array} \right.$$

On voit facilement que (77) est alors vérifiée.

5-3 - Covariances d'estimation et covariances de variables non ponctuelles.

La théorie des variances d'estimation, telle qu'elle a été définie au chapitre 2, s'applique évidemment à la variable intrinsèque $f(M; \lambda_1)$, combinaison linéaire du type (71) des covariables $f_i(M)$. Désignons par y et z les intégrales stochastiques de $f(M; \lambda_1)$ dans deux volumes V et V' , divisée par la mesure de ces volumes, et de même par y_i et z_i les moyennes stochastiques de $f_i(M)$ dans ces deux mêmes volumes. La variance d'estimation de y par z est donnée par l'application au variogramme $\gamma(h; \lambda_1)$ d'un opérateur linéaire, dont l'expression résulte de la formule (14)

$$D^2(y - z) = \frac{2}{VV'} \iint_{V, V'} \gamma(MM', \lambda_1) dM dM' - \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(MP, \lambda_1) dM dP - \frac{1}{V'^2} \iint_{V'} \gamma(M'P', \lambda_1) dM' dP'$$

Le premier membre de cette relation peut s'écrire

$$D^2(y - z) = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j E \left[(y_i - z_i)(y_j - z_j) \right]$$

et le deuxième membre se met sous la forme :

$$\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \left[\frac{2}{VV'} \iint_{V, V'} \gamma_{ij}(MM') dM dM' - \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma_{ij}(MP) dM dP - \frac{1}{V'^2} \iint_{V'} \gamma_{ij}(M'P') dM' dP' \right]$$

En identifiant les termes en $\lambda_i \lambda_j$, on obtient immédiatement :

$$(79) \quad E \left[(y_i - z_i)(y_j - z_j) \right] = \frac{2}{VV'} \iint_{V, V'} \gamma_{ij}(MM') dM dM' - \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma_{ij}(MP) dM dP - \frac{1}{V'^2} \iint_{V'} \gamma_{ij}(M'P') dM' dP'$$

La relation (79) définit la covariance des estimations de la moyenne (stochastique) en i du volume V par celle du volume V' de la moyenne en j de V par la moyenne en j de V' . Nous disons plus brièvement : covariance d'esti-

mation des variables i et j pour les supports V et V^0 . On voit qu'il s'agit de la covariance des erreurs $(y_i - z_i)$ et $(y_j - z_j)$. Dans le cas particulier $i = j$, on retombe naturellement sur la définition habituelle de la variance d'estimation, qui est ici la variance de l'erreur $(y_i - z_i)$.

La définition de la covariance des deux variables y_i et y_j de même support non ponctuel v à l'intérieur d'un même champ géométrique se développe de la même manière, en appliquant les résultats du paragraphe 2-2 à la combinaison linéaire $f(M; \lambda_i)$, et en identifiant les termes en λ_i et λ_j . Tout comme au paragraphe 2-2, cette définition n'est vraiment claire que dans le cas où il existe une partition de V par un nombre fini de volumes égaux à v et translatés les uns des autres, ou encore si le volume v est suffisamment petit dans toutes ses dimensions vis-à-vis de V pour que les effets d'interférence aux bordures puissent être négligés. Dans un cas comme dans l'autre, on obtient la formule suivante, qui généralise la formule (18) du paragraphe 2-2 :

$$(80) \quad \sigma_{ij}(v | V) = \frac{1}{V^2} \iint_V \iint_V \gamma_{ij}(MM') dM dM' - \frac{1}{V^2} \iint_V \iint_V \gamma_{ij}(MM') dM dM'$$

De cette relation, on déduit immédiatement la loi d'additivité, ou formule de Krige,

$$\sigma_{ij}(v | V) = \sigma_{ij}(v | V^0) + \sigma_{ij}(V^0 | V)$$

et cette relation nous permet d'adopter dans tous les cas la formule (80) comme définition conventionnelle de la covariance des variables y_i et y_j de même support v à l'intérieur d'un volume quelconque V .

5.- 4 - L'indépendance intrinsèque.

Par définition, nous dirons que les deux variables ponctuelles $f_i(M)$ et $f_j(M)$ sont intrinséquement indépendantes si leur fonction de codispersion $\gamma_{ij}(h)$ est identiquement nulle, soit

$$(81) \quad \gamma_{ij}(h) = 0$$

Cette condition exprime simplement que les accroissements $\left[f_i(M+h) - f_i(M) \right]$ et $\left[f_j(M+h) - f_j(M) \right]$ ont un coefficient de corrélation nul quel que soit h . Il résulte de (76) que des accroissements $\varepsilon_i(MM')$ et $\varepsilon_j(PP')$ sont également indépendants quels que soient les points $MM'P$ et P' . De même, toute covariance d'estimation du type (79) est égale à 0, et cela signifie que toutes les estimations des valeurs moyennes de f_i et f_j dans des volumes quelconques sont toujours indépendantes les unes des autres. Enfin, la covariance introduite en (80) s'annule également, et cela signifie que les teneurs en i et en j d'un même échantillon de volume v sont toujours indépendantes, quelles que soient les caractéristiques géométriques de v .

Examinons maintenant les rapports entre l'indépendance intrinsèque ainsi définie, et la notion transitive d'indépendance interne introduite au paragraphe 4-3. Le résultat essentiel est le suivant : l'indépendance intrinsèque entraîne l'indépendance interne, mais en valeur probable seulement. Le fait que ce résultat ne s'énonce qu'en valeur probable est naturellement lié à la nature stochastique de la théorie intrinsèque, en contraste avec la représentation transitive, qui s'intéresse directement aux réalisations, c'est-à-dire aux régionalisations elles-mêmes.

Pour établir ce résultat, appliquons la formule (40) du paragraphe 3-2 à la combinaison linéaire $f(M; \lambda_i)$ de variables régionalisées, pour un champ géométrique quelconque V de covariogramme transitif $K(h)$. On a

$$\gamma(h; \lambda_i) = \sigma^2(0|V) + E \left[m^2 - \frac{g(h; \lambda_i)}{K(h)} \right]$$

Compte tenu de (47) et de (73), on obtient

$$\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij}(h) = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \left\{ \sigma_{ij}(0|V) + E \left[m_i m_j - \frac{C_{ij}(h)}{K(h)} \right] \right\}$$

La notation $\sigma_{ij}(0|V)$ représente la covariance dans V des variables ponctuelles f_i et f_j . En identifiant les termes en $\lambda_i \lambda_j$, on trouve :

$$(82) \quad \gamma_{ij}(h) = \sigma_{ij}(0|V) + E \left[m_i m_j - \frac{C_{ij}(h)}{K(h)} \right]$$

Si les variables i et j sont intrinsèquement indépendantes, γ_{ij} est identiquement nul ainsi que la covariance $\sigma_{ij}(0|V)$. Il reste donc

$$E \left[C_{ij}(h) - m_i m_j K(h) \right] = 0$$

C'est là, précisément, la condition (53) de l'indépendance interne, exprimée en valeur probable.

Dans le cas général où $\gamma_{ij}(h)$ n'est pas identiquement nulle, les variables f_i et f_j présentent une dépendance intrinsèque. La mesure de leur degré de dépendance est donnée par $\gamma_{ij}(h)$ elle-même, ou, si l'on veut, par le coefficient de codispersion $R_{ij}(h)$ de la formule (75), qui est un coefficient de corrélation entre accroissements, et non entre les variables elles-mêmes. On pourra s'intéresser à la limite de $R_{ij}(h)$, si elle existe, quand h tend vers 0. $R_{ij}(h)$ présente le caractère intrinsèque, en ce sens qu'il ne dépend pas du champ géométrique V dans lequel on étudie la corégionalisation. Mais, au contraire de la fonction $\gamma_{ij}(h)$, il ne se généralise pas d'une manière simple au cas de variables à support non ponctuel v .

De même, de la définition (80) de la covariance, on peut déduire un coefficient de corrélation ρ_{ij} des variables y_i et y_j de même support v dans un même champ V :

$$(83) \quad \rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}(v/V)}{\sqrt{\sigma_i^2(v/V) \sigma_j^2(v/V)}}$$

Un tel coefficient n'a pas le caractère intrinsèque, puisqu'il dépend à la fois de v et de V . Il ne présente, en fait, pas grande signification. Il suffit, dans certains cas, de faire tendre le champ V vers l'infini, pour obtenir, à la limite, $\rho_{ij} = 1$. Telle est la raison profonde pour laquelle la théorie intrinsèque raisonne toujours en termes de covariances d'estimation, et pratiquement jamais en termes de coefficient de corrélation.

Il y a cependant un cas particulier remarquable où le coefficient (83) présente le caractère intrinsèque. C'est celui où les fonctions $\gamma_i(h), \gamma_j(h)$ et $\gamma_{ij}(h)$ sont proportionnelles à une même fonction $\gamma(h)$, soit :

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_i(h) = \alpha_i \gamma(h) \\ \gamma_j(h) = \alpha_j \gamma(h) \\ \gamma_{ij}(h) = \alpha_{ij} \gamma(h) \end{array} \right.$$

En effet, les variances et covariances σ_i^2 , σ_j^2 et σ_{ij} se calculent en appliquant un même opérateur linéaire \mathcal{L} à γ_i , γ_j et γ_{ij} respectivement, de sorte que l'on a

$$\rho_{ij} = \frac{\alpha_{ij} \mathcal{L}[\gamma(h)]}{\sqrt{\alpha_i \mathcal{L}[\gamma(h)] \alpha_j \mathcal{L}[\gamma(h)]}}$$

D'où l'on tire immédiatement

$$(85) \quad \rho_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}}$$

Le coefficient de corrélation est, dans ce cas, indépendant de v et de V , et constant. Nous parlerons alors de corrélation intrinsèque. On vérifie immédiatement que le coefficient de codispersion $R_{ij}(h)$ de la formule (75) est ici constant, indépendant de h et égal à ρ_{ij}

$$R_{ij}(h) = \rho_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}}$$

Une corrélation intrinsèque, lorsqu'elle existe, a des chances sérieuses de traduire une liaison génétique. On ne peut espérer en observer qu'entre variables de même nature. Des variables de natures différentes, comme une teneur et une puissance dans un gisement, ont en général des variogrammes ne présentant pas le même comportement analytique au voisinage de l'origine, de sorte que les relations (84) ne peuvent pas être vérifiées.

5.- 5- Le paradoxe de Chayes en intrinsèque

Revenons maintenant au paradoxe de Chayes, déjà exposé au paragraphe 4.5. Les variables ponctuelles $f_i(M)$, égales à +1 ou à 0 suivant que le point M tombe ou non à l'intérieur d'un grain de minéral i , vérifient les relations d'exclusion et de fermeture :

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_i(M) f_j(M) \equiv 0 \quad \text{pour } i \neq j \\ \sum_i f_i(M) = 1 \end{array} \right.$$

Remarquons qu'en toute rigueur de telles variables ne peuvent pas posséder le caractère intrinsèque. Comme les variables ne peuvent prendre que deux valeurs seulement 0 et 1, les accroissements ne sont pas indépendants des valeurs prises par les variables elles-mêmes. Un accroissement tel que $f(M+h) - f(M)$, par exemple, peut prendre les valeurs 0 ou 1 si $f(M) = 0$, et -1 ou 0 si $f(M) = 1$. Cette limitation joue pour les variables ponctuelles. Les variables à support non ponctuel, même petit (pourvu qu'il soit grand vis-à-vis de la dimension des grains) n'y sont plus soumises, et peuvent souvent être décrites, en première approximation, à l'aide d'un schéma intrinsèque. Cette approximation revient à ne pas tenir compte de l'effet de pépite à l'origine, et à négliger la relation d'exclusion pour ne conserver que la relation de fermeture. Celle-ci entraîne, pour les accroissements $\varepsilon_i(MM')$, la condition :

$$\sum_i \varepsilon_i(MM') = 0$$

En multipliant par l'accroissement $\varepsilon_j(MM')$ d'une des variables f_j , et en passant aux valeurs probables, on obtient immédiatement :

$$(87) \quad \sum_i \gamma_{ij}(h) = 0$$

La relation (87) se répercute sur toutes les covariances du type (80) :

$$(88) \quad \sum_i \sigma_{ij}(v|v) = 0$$

Il en résulte que ces variables ne peuvent pas être toutes intrinséquement indépendantes deux à deux. Supposons, en premier lieu, que leurs corrélations soient intrinsèques, c'est-à-dire que les relations (84) soient vérifiées. Il existe alors des coefficients constants ρ_{ij} , indépendants du champ V et du support v , et les coefficients de covariation $R_{ij}(h)$ sont constants et égaux aux ρ_{ij} . La distance n'altère pas les rapports entre les deux variables i et j , qui ne présentent donc ni affinité ni répulsion particulière.

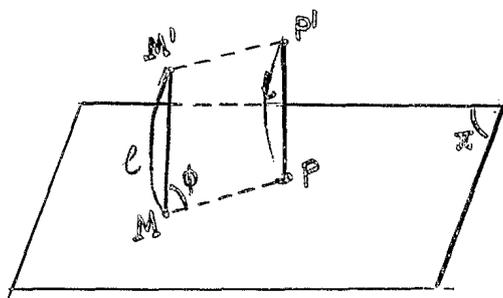
Si deux minéraux présentent une affinité, (ou une répulsion) sensible, les corrélations ne peuvent donc pas être intrinsèques. Le coefficient ρ_{ij} augmentera (ou diminuera) si l'on augmente la taille du support v initialement très petit. Une liaison positive entre i et j se traduira, pour les petites valeurs de h , par une croissance de $\gamma_{ij}(h)$ plus rapide que celle de $\sqrt{\gamma_i(h)\gamma_j(h)}$. C'est ici le coefficient de codispersion $R_{ij}(h)$ qui doit servir de critère. $R_{ij}(h) > R_{ij}(0)$ indiquera une liaison positive entre les minéraux i et j à la distance h , et réciproquement.

6 - Théorie de la montée intrinsèque.

En représentation transitive, la montée apparaissait comme un cas limite du passage de la variable ponctuelle à la variable de support géométrique v , lorsque le support v se réduisait à une droite indéfinie. En intrinsèque, la montée ne peut plus se faire le long d'une droite indéfinie, puisque la régionalisation se poursuit, homogène, dans tout l'espace. Nous nous intéresserons donc à la montée sous puissance finie. Trois cas sont possibles, selon que cette puissance finie est de nature stochastique, variable mais déterminée, ou enfin constante. La montée stochastique serait sans doute la plus intéressante à étudier du point de vue théorique, mais, outre de grandes difficultés mathématiques, elle est soumise à certaines limitations a priori. Une montée stochastique, en schéma intrinsèque, ne peut conduire qu'à une corrélation nulle entre puissance et teneur montée. Une corrélation non nulle, en effet, signifierait que la variable ponctuelle n'est pas indépendante de son champ géométrique, et ne peut pas vraiment être considérée comme intrinsèque. De plus, les puissances elles-mêmes, assujetties à ne prendre que des valeurs positives, ne peuvent pas non plus, en toute rigueur, être considérées comme intrinsèques. La montée sous puissance variable (mais déterminée) ne peut, de son côté, donner naissance à une nouvelle variable intrinsèque que dans le cas très particulier où les puissances sont soumises à une simple dérive linéaire : mais, dans ce cas très particulier, l'apparition de puissances négatives enlève toute signification physique à la montée. Nous nous limiterons donc à la montée sous puissance constante qui suffit en général dans les applications pratiques. Nous donnerons d'abord les formules générales, et nous examinerons ensuite le cas particulier d'un variogramme en r^λ .

6 - 1 - La montés sous puissance constante

Soit, dans un espace à n dimensions, une régionalisation intrinsèque $f_n(M)$ à support ponctuel, décrite par un variogramme $\gamma_n(h)$.



Considérons des segments MM' , PP' ... égaux et parallèles, de même longueur ϕ (figure 1), les points origine M , P ... étant pris dans un même plan Π , fixé une fois pour toutes. La moyenne stochastique de $f_n(M)$ sur le segment MM'

Figure 1

$$(89) \quad f_{n-1}(M) = \frac{1}{\phi} \int_M^{M'} f_n(M'') d\ell'$$

peut être considérée comme une variable régionalisée à support ponctuel M dans le plan Π à $(n-1)$ dimensions, et peut être, dans ce plan, représentée par un processus stochastique à accroissements stationnaires, c'est-à-dire par un schéma intrinsèque. On vérifie facilement, en effet, que l'accroissement

$$\varepsilon_{n-1}(MP) = f_{n-1}(P) - f_{n-1}(M)$$

vérifie les conditions énumérées au chapitre 1. Déterminons le variogramme $\gamma_{n-1}(h)$ de cette nouvelle variable régionalisée à $n-1$ dimensions. D'après le paragraphe 1-2, ce variogramme est égal à la moitié de la variance de l'accroissement correspondant.

$$\gamma_{n-1}(h) = \frac{1}{2} D^2 \left[\varepsilon_{n-1}(M+h, M) \right] = \frac{1}{2} D^2 \left[f_{n-1}(M+h) - f_{n-1}(M) \right]$$

Il coïncide donc avec la définition, écrite pour la variable originelle $f_n(M)$, de la variance d'estimation du segment MM' par le segment PP' , pour $MP = h$ (le vecteur h étant parallèle au plan Π). La formule (14) nous donne donc l'expression du nouveau variogramme $\gamma_{n-1}(h)$ sous la forme

$$2 \gamma_{n-1}(h) = \frac{2}{\phi^2} \int_0^\phi dt \int_0^\phi \gamma_n \left[h + (t'-t)u \right] dt' - \frac{2}{\phi^2} \int_0^\phi dt \int_0^\phi \gamma_n \left[(t'-t)u \right] dt'$$

où $u = \frac{\rho}{|\rho|}$ est le vecteur unitaire du vecteur ρ . En simplifiant par ρ , et en utilisant l'algorithme de la formule (31), on obtient facilement :

$$(90) \quad \gamma_{n-1}(h) = \frac{2}{\rho^2} \int_0^\rho (\rho-t) \gamma_n[h+tu] dt - \frac{2}{\rho^2} \int_0^\rho (\rho-t) \gamma_n(tu) dt$$

Dans le cas général, le plan Π , auquel h est parallèle, n'est pas perpendiculaire au vecteur ρ , et la montée est dite oblique. Si le plan Π est perpendiculaire à ρ , la montée sera dite droite. La plupart des applications pratiques utilisent la montée droite. Si la montée est droite et si la fonction intrinsèque est isotrope, c'est-à-dire peut se mettre sous la forme d'une fonction $\gamma_n(r)$ du scalaire positif $r = |h|$, la formule (90) s'écrit sous la forme suivante, qui sera utilisée dans les applications :

$$(91) \quad \gamma_{n-1}(r) = \frac{2}{\rho^2} \int_0^\rho (\rho-x) \gamma_n \left[\sqrt{r^2 + x^2} \right] dx - \frac{2}{\rho^2} \int_0^\rho (\rho-x) \gamma_n(x) dx$$

Le variogramme $\gamma_{n-1}(h)$ ainsi défini permet de calculer, par les formules du premier chapitre, toutes les variances ou covariances requises relatives à la variable $f_{n-1}(M)$ régionalisée dans le plan Π .

Il est possible de réitérer l'opération, en effectuant une nouvelle montée le long d'un vecteur ρ' du plan Π . On définit ainsi une nouvelle régionalisation à $n-2$ dimensions, dont le variogramme peut se calculer en appliquant l'algorithme (90) au $\gamma_{n-1}(h)$ précédemment formé. On obtient ainsi l'algorithme composé de la montée d'ordre 2, qui fait intervenir les valeurs moyennes de γ_n dans le parallélogramme $\rho\rho'$:

$$(92) \quad \gamma_{n-2}(h) = \frac{4}{\rho^2 \rho'^2} \int_0^\rho \int_0^{\rho'} (\rho-t)(\rho'-t') \gamma_n(h+tu+t'u') dt dt' - \frac{4}{\rho^2 \rho'^2} \int_0^\rho \int_0^{\rho'} (\rho-t)(\rho'-t') \gamma_n(tu+t'u') dt dt'$$

Dans le cas particulier de la montée droite en schéma isotrope, cette formule s'écrit :

$$(93) \quad \gamma_{n-2}(r) = \frac{4}{\rho^2 \rho'^2} \int_0^\rho \int_0^{\rho'} (\rho-x)(\rho'-x') \gamma_n \left[\sqrt{r^2 + x^2 + x'^2} \right] dx dx' - \frac{4}{\rho^2 \rho'^2} \int_0^\rho \int_0^{\rho'} (\rho-x)(\rho'-x') \gamma_n \left[\sqrt{x^2 + x'^2} \right] dx dx'$$

Relativement à la montée transitive (sous puissance infinie), la montée intrinsèque se présente comme moins simple, en ce sens que les variogrammes obtenus dépendent des vecteurs ρ, ρ' , même dans le cas isotrope. Il faut bien voir, en effet, qu'une montée d'ordre deux telle que (92) décrit, dans l'espace à n dimensions l'évolution des teneurs moyennes de parallélogrammes $\rho\rho'$ dont l'un des sommets décrit une droite (un plan à $n-2$ dimensions).

6-2- Montée droite sous puissance constante de r^λ

En vue des applications pratiques, nous allons traiter explicitement le cas de la montée droite sous puissance constante ρ du variogramme isotrope.

$$\gamma_n(r) = r^\lambda$$

Les résultats s'expriment à l'aide des fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, déjà utilisées dans la note 42, et permettent d'établir les formules du rectangle pour r^λ . Dans ce qui suit, nous poserons

$$(94) \quad \gamma_\lambda(r) = \frac{2}{\rho^2} \int_0^\rho (\rho - x) (x^2 + r^2)^{\frac{\lambda}{2}} dx$$

Cette fonction $\gamma_\lambda(r)$, qui représente la valeur moyenne de r^λ entre deux vecteurs ρ distants de r , disposés comme les deux cotés ρ d'un rectangle $\rho \times r$, diffère du variogramme cherché $\gamma_{n-1}(r)$ d'une constante, que l'on détermine aisément en écrivant

$$\gamma_{n-1}(r) = \gamma_\lambda(r) - \gamma(0)$$

Calculons explicitement l'algorithme (94). Il est égal à la différence

$$(95) \quad \gamma_\lambda(r) = I_1(\lambda) - I_2(\lambda)$$

des deux intégrales.

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1(\lambda) = \frac{2}{\rho^2} \int_0^\rho (x^2 + r^2)^{\frac{\lambda}{2}} dx \\ I_2(\lambda) = \frac{2}{\rho^2} \int_0^\rho x(x^2 + r^2)^{\frac{\lambda}{2}} dx \end{array} \right.$$

La deuxième intégrale se calcule aisément en faisant le changement de variable $x = \sqrt{u}$. Il vient :

$$(96) I_2(\lambda) = \frac{2}{(\lambda+2)\ell^2} \left[(\ell^2 + r^2)^{1+\frac{\lambda}{2}} - r^{\lambda+2} \right]$$

Passons au calcul, plus difficile, de $I_1(\lambda)$. Posons.

$$x = \rho \sqrt{v}$$

Il vient

$$I_1(\lambda) = r^\lambda \int_0^1 \left[1 + \frac{\rho^2 v}{r^2} \right]^{\frac{\lambda}{2}} v^{-\frac{1}{2}} dv$$

Nous reportant à la formule (115) de la Note 42, nous voyons que cette intégrale s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, -\frac{\rho^2}{r^2})$, avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta - 1 = -\frac{1}{2} \\ \gamma - \beta - 1 = 0 \\ -\alpha = \frac{\lambda}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{\lambda}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

On obtient ainsi :

$$(97) I_1(\lambda) = 2 r^\lambda F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\rho^2}{r^2}\right)$$

Cette expression, qui se développe sous la forme d'une série entière en $(-\frac{\rho^2}{r^2})$, est satisfaisante lorsque r est plus grand que ℓ (comportement du variogramme à long rayon d'action). Comme les propriétés les plus intéressantes d'un variogramme sont liées à son comportement analytique au voisinage de l'origine, il est nécessaire de transformer l'expression obtenue, de manière à faire apparaître un développement en $\frac{r^2}{\ell^2}$. On y parvient à l'aide d'une formule de transformation des fonctions hypergéométriques, que nous nous contenterons de donner ici sans démonstration.

$$(98) \left\{ \begin{array}{l} F(\alpha, \beta, \gamma, -x) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \alpha)} x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, -\frac{1}{x}) \\ + \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} x^{-\beta} F(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, -\frac{1}{x}) \end{array} \right.$$

Si nous appliquons (98) à l'intégrale (97), il vient :

$$(99) \quad I_1(\lambda) = \frac{2}{1+\lambda} \rho^\lambda F\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{1+\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}, -\frac{r^2}{\rho^2}\right) + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{r^{1+\lambda}}{\rho}$$

Pour la symétrie des écritures, nous mettrons (96) sous la forme :

$$\begin{aligned} I_2(\lambda) &= r^\lambda F\left(-\frac{\lambda}{2}, 1, 2, -\frac{\rho^2}{r^2}\right) \\ &= \frac{2}{2+\lambda} \rho^\lambda F\left(-\frac{\lambda}{2}, -1, -\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, -\frac{r^2}{\rho^2}\right) - \frac{2}{2+\lambda} \frac{r^{\lambda+2}}{\rho^2} \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans (95), on obtient l'algorithme $\gamma_\lambda(r)$ sous les deux formes équivalentes suivantes

$$(100) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_\lambda(r) &= r^\lambda \left[2 F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\rho^2}{r^2}\right) - F\left(-\frac{\lambda}{2}, 1, 2, -\frac{\rho^2}{r^2}\right) \right] \\ &\quad - \frac{2 \rho^\lambda}{1+\lambda} F\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{1+\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}, -\frac{r^2}{\rho^2}\right) + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{r^{1+\lambda}}{\rho} \\ &\quad - \frac{2 \rho^\lambda}{2+\lambda} F\left(-\frac{\lambda}{2}, -1, -\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, -\frac{r^2}{\rho^2}\right) + \frac{2}{2+\lambda} \frac{r^{2+\lambda}}{\rho^2} \end{aligned} \right.$$

On utilisera le premier développement dans le cas $r > \rho$. Il s'écrit explicitement :

$$(101) \quad \gamma_\lambda(r) = r^\lambda \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2} (\frac{\lambda}{2} - 1) \dots (\frac{\lambda}{2} - k + 1)}{(2k+1)(k+1)!} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2k} \right]$$

Pour $r < \rho$, on doit se servir du deuxième développement, qui se met sous la forme :

$$(102) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_\lambda(r) &= \rho^\lambda \left[\frac{2}{(1+\lambda)(2+\lambda)} + \frac{1}{\lambda-1} \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2} (\frac{\lambda}{2} - 1) \dots (\frac{\lambda}{2} - k + 2)}{(\lambda+1-2k)k!} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2k} \right] \\ &\quad + \frac{2}{2+\lambda} \frac{r^{2+\lambda}}{\rho^2} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{r^{1+\lambda}}{\rho} \end{aligned} \right.$$

En pratique, on s'intéressera surtout au cas où λ est un entier pair ou impair, et on aura aussi à effectuer des montées sur des termes en $r^{2p} \log r$ (p entier). Le cas de $\lambda = 2p$ entier pair est particulièrement simple : $\gamma_\lambda(r)$ se réduit, en effet, à un polynôme homogène pair de degré $2p$ en ℓ et h , dont on obtient, immédiatement l'expression en arrêtant (101) à $k = p$. Par exemple, on a :

$$(103) \begin{cases} \gamma_2(r) = r^2 + \frac{1}{6} \ell^2 \\ \gamma_4(r) = r^4 + \frac{1}{2} \ell^2 r^2 + \frac{1}{15} \ell^4 \\ \gamma_6(r) = r^6 + \frac{1}{2} r^4 \ell^2 + \frac{1}{5} r^2 \ell^4 + \frac{1}{28} \ell^6 \end{cases}$$

Pour $\lambda = 2p - 1$, entier impair, le développement (101) est utilisable pour $r > \ell$. Par contre, pour $r < \ell$, le développement (102) présente des singularités, et doit être étudié par un passage à la limite. On s'attend à voir apparaître un terme en $r^{2p} \log r$, et on va le vérifier en effet. Lorsque λ tend vers $2p - 1$, tous les termes de (102) ont une limite finie, à l'exception de deux d'entre eux : le terme de la somme correspondant à $k = p$, et le terme isolé en $r^{1+\lambda}$. Séparons ces deux termes :

$$\ell^\lambda \frac{\frac{\lambda}{2}(\frac{\lambda}{2} - 1) \dots (\frac{\lambda}{2} - p + 2)}{(\lambda + 1 - 2p) p!} \left(\frac{r}{\ell}\right)^{2p} + \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(-\frac{1+\lambda}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} \frac{r^{1+\lambda}}{\ell}$$

Posons $\lambda = 2p - 1 + \varepsilon$, et faisons tendre ε vers 0. Le premier terme est équivalent à :

$$\frac{r^{2p}}{\ell} \frac{(1 + \varepsilon \log \frac{\ell}{r})}{\varepsilon p!} \left[(p - \frac{1}{2}) \dots (\frac{3}{2}) + \frac{\varepsilon}{4} (p^2 - 1) \right]$$

Le deuxième peut s'écrire :

$$-\sqrt{\pi} \frac{\cos \varepsilon \frac{\pi}{2}}{\sin \varepsilon \frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + p + \frac{\varepsilon}{2})}{\Gamma(1 + p + \frac{\varepsilon}{2})} \frac{r^{2p+\varepsilon}}{\ell} \sim \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\pi} p!} \left[\Gamma(p + \frac{1}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} \Gamma'(p + \frac{1}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2}) \Gamma'(1+p)}{p!} \right]$$

Le terme singulier a pour limite, lorsque ε tend vers 0 :

$$T_{2p} = \frac{2 \Gamma(p + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} p!} \frac{r^{2p}}{\ell} \log \frac{\ell}{r} + \frac{r^{2p}}{\ell} \left[\frac{\Gamma(p + \frac{1}{2}) \Gamma'(1+p)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1+p)^2} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2}) \Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(1+p) \Gamma(\frac{3}{2})^2} \right]$$

$$(104) \quad T_{2p} = \frac{2 \Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} p!} \frac{r^{2p}}{f} \log \frac{f}{r} + \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} p!} \left[1+\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - 2 + 2 \log 2 \right] \frac{r^{2p}}{f}$$

Ce terme T_{2p} remplace, dans le développement (102), les deux termes en r^{2p} . Les autres termes restent inchangés. Pour $\lambda = 1$, par exemple, on obtient ainsi :

$$(105) \quad \gamma_1(r) = \frac{1}{3} + \frac{r^2}{f} \left[\log \frac{f}{r} + \log 2 - \frac{1}{2} \right] + \frac{2}{3} \frac{r^3}{f^2} - \frac{1}{8} \frac{r^4}{f^3} + \frac{1}{96} \frac{r^6}{f^5} + \dots$$

On peut d'ailleurs, par des calculs directs, obtenir l'expression suivante :

$$\gamma_1(r) = \frac{1}{3} \sqrt{f^2 + r^2} + \frac{2}{3} \frac{r^2}{f^2} \left[r - \sqrt{r^2 + f^2} \right] + \frac{r^2}{f} \log \frac{f + \sqrt{f^2 + r^2}}{2}$$

Enfin, la montée pour un terme en $r^{2k} \log r$ peut s'obtenir en dérivant $\gamma_\lambda(r)$ en λ , et en faisant $\lambda = 2k$. Comme λ est un entier pair, des simplifications notables se produisent. Pour $\log r$ et $r^2 \log r$, on obtient les développements suivants :

$$(106) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{d}{d\lambda} \gamma_\lambda(r) \right]_{\lambda=0} &= \log r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)(2k+1)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2k} \\ &= \log f - \frac{3}{2} + \pi \frac{r}{f} + \left(\frac{r}{f} \right)^2 \left[\log \frac{r}{f} - \frac{3}{2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)(2k-1)} \left(\frac{r}{f} \right)^{2k} \\ \left[\frac{d}{d\lambda} \gamma_\lambda(r) \right]_{\lambda=2} &= r^2 \log r + \frac{1}{6} f^2 \log r + r^2 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{f}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)(k-1)(2k+1)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2k} \right] \\ &= f^2 \log f \left[\frac{1}{6} + \left(\frac{r}{f} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{f} \right)^4 \right] + \frac{1}{2} \frac{r^4}{f^2} \log r + \frac{2}{3} \pi \frac{r^3}{f} \\ &+ f^2 \left[-\frac{7}{72} - \left(\frac{r}{f} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{f} \right)^4 + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)(k-2)(2k-3)} \left(\frac{r}{f} \right)^{2k} \right] \end{aligned} \right.$$

6 - 3 - Les formules du rectangle pour r^λ

Dans les applications, et notamment pour le calcul de la variance d'extension d'un élément linéaire dans sa zone d'influence, on a souvent besoin des fonctions auxiliaires χ et F , qui permettent d'exprimer la covariance du rectangle

avec l'un de ses côtés, et la variance du rectangle lui-même :

$$\left\{ \begin{aligned} \chi(h) &= \frac{1}{h} \int_0^h \gamma_{n-1}(x) dx \\ F(h) &= \frac{2}{h^2} \int_0^h x \chi(x) dx = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) \gamma_{n-1}(x) dx \end{aligned} \right.$$

La fonction $\gamma_{n-1}(x)$ à laquelle s'appliquent ces formules est la fonction intrinsèque obtenue après une montée droite sous puissance constante \mathcal{L} effectuée sur le variogramme $\gamma_n(h)$ du phénomène ponctuel. Comme χ se déduit de F en dérivant $\frac{h^2}{2} F(h)$, nous nous intéresserons à la fonction $F(h)$, que nous écrirons $F(h, \mathcal{L})$, puisqu'elle dépend symétriquement des deux côtés h et \mathcal{L} du rectangle. Eu égard à (93), il nous suffit, dans le cas $\gamma_n(r) = r^\lambda$, de calculer la valeur moyenne $F_\lambda(h, \mathcal{L})$ de r^λ dans le rectangle $\mathcal{L} \times h$. Cette fonction a pour expression :

$$F_\lambda(h, \mathcal{L}) = \frac{4}{h^2 \mathcal{L}^2} \int_0^h \int_0^{\mathcal{L}} (h-x)(\mathcal{L}-y)(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}} dx dy$$

Pour calculer cette intégrale, passons en coordonnées polaires ($x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$)

$$\begin{aligned} F_\lambda &= \frac{4}{h^2 \mathcal{L}^2} \iint_R \left[h \mathcal{L} \rho^{\lambda+1} - (h \sin \theta + \mathcal{L} \cos \theta) \rho^{\lambda+2} + \sin \theta \cos \theta \rho^{\lambda+3} \right] d\rho d\theta \\ &= \frac{4}{h^2 \mathcal{L}^2} \int_C \left[\frac{h \mathcal{L}}{\lambda+2} \rho^{\lambda+2} - \frac{(h \sin \theta + \mathcal{L} \cos \theta)}{\lambda+3} \rho^{\lambda+3} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\lambda+4} \rho^{\lambda+4} \right] d\theta \end{aligned}$$

Sous cette deuxième forme, l'intégrale est étendue au contour du rectangle. Par raison de symétrie, il suffit d'intégrer de 0 à $\theta_0 = \text{Arc tg } \frac{\mathcal{L}}{h}$. L'intégrale de θ_0 à $\frac{\pi}{2}$ s'en déduit en échangeant les rôles de h et de \mathcal{L} . La première intégration donne, en remplaçant ρ par $\frac{h}{\cos \theta}$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{4}{h^2 \mathcal{L}^2} \left[\frac{\mathcal{L} h^{\lambda+3}}{(\lambda+2)(\lambda+3)} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\cos^{\lambda+2} \theta} - \frac{h^{\lambda+4}}{(\lambda+3)(\lambda+4)} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos^{\lambda+3} \theta} \right] \\ &= \frac{4 h^\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+3)} F \left[-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\mathcal{L}^2}{h^2} \right] - \frac{4}{(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)} \left[\frac{(h^2 + \mathcal{L}^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}}{\mathcal{L}^2} - h^{\lambda+2} \right] \end{aligned}$$

D'où le résultat cherché :

$$(107) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{\lambda}(h, \ell) &= \frac{4h^{\lambda}}{(\lambda+2)(\lambda+3)} F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\ell^2}{h^2}\right) + \frac{4\ell^{\lambda}}{(\lambda+2)(\lambda+3)} F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{h^2}{\ell^2}\right) \\ &- \frac{4}{(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)} \left[\frac{(h^2+\ell^2)^{2+\frac{\lambda}{2}}}{\ell^2 h^2} - \frac{h^{2+\lambda}}{\ell^2} - \frac{\ell^{2+\lambda}}{h^2} \right] \end{aligned} \right.$$

Il est aisé de transformer cette expression à l'aide des formules (98), de manière à obtenir un développement en $\frac{h}{\ell}$, valable pour $h \leq \ell$. En réalité, ces développements s'obtiennent plus rapidement en intégrant directement en h le développement (102) de $\gamma_{\lambda}(r)$, valable pour $h \leq \ell$

$$F_{\lambda}(\ell, h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) \gamma_{\lambda}(x) dx$$

chaque terme en x^{μ} apportant sa contribution $\frac{2}{(\mu+1)(\mu+2)} h^{\mu}$, on obtient ainsi :

$$(108) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{\lambda}(\ell, h) &= \ell^{\lambda} \left[\frac{2}{(1+\lambda)(2+\lambda)} + \frac{1}{6(\lambda-1)} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2}(\frac{\lambda}{2}-1) \dots (\frac{\lambda}{2}-k+2)}{(\lambda+1-2k)(1+2k)(k+1)!} \left(\frac{h}{\ell}\right)^{2k} \right] \\ &+ \frac{4}{(2+\lambda)(3+\lambda)(4+\lambda)} \frac{h^{2+\lambda}}{\ell^2} + \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(-\frac{1+\lambda}{2})}{(2+\lambda)(3+\lambda) \Gamma(-\frac{\lambda}{2})} \frac{h^{1+\lambda}}{\ell^2} \end{aligned} \right.$$

Lorsque λ est un entier pair, le terme en $h^{1+\lambda}$ disparaît, puisque $\Gamma(-\frac{\lambda}{2})$ est infini. Il reste un polynôme pair et homogène, de degré λ en h et ℓ . Pour λ entier impair, soit $\lambda = 2p-1$, on remplace le terme en r^{2p} par T_{2p} de la formule (104), et on intègre directement, en notant qu'un terme en $r^{2p} \log r$ apporte la contribution :

$$\frac{2}{(2p+1)(2p+2)} h^{2p} \log h - \frac{2(4p+3)}{(2p+1)^2(2p+2)^2} h^{2p}$$

Les mêmes règles, appliquées aux formules (106), permettent de calculer facilement la valeur moyenne dans le rectangle des termes en $r^{2k} \log r$.

On aura également besoin, en pratique, de la covariance du rectangle avec l'un de ses sommets, ou de la covariance des deux côtés ℓ et h du rectangle $\ell \times h$.

Désignons par $K_\lambda(h, l)$ la valeur moyenne de r^λ entre le rectangle et l'un de ses sommets, ou, ce qui revient au même, entre deux côtés l et h :

$$K_\lambda(h, l) = \frac{1}{lh} \iint_R r^{\lambda+1} dr d\theta = \frac{1}{lh(\lambda+2)} \int_0^l r^{\lambda+2} d\theta$$

Comme ci-dessus, l'intégrale se sépare en deux composantes I_1 et I_2 , qui se déduisent l'une de l'autre par échange de l et h . Il vient, par exemple :

$$lh I_1 = \int_0^{\theta_0} \frac{r^{\lambda+2}}{\lambda+2} d\theta = \frac{h}{\lambda+2} \int_0^l \frac{r^{\lambda+2}}{(h^2+x^2)^{\frac{\lambda}{2}}} dx = \frac{h^{1+\lambda} l}{\lambda+2} F\left[-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{l^2}{h^2}\right]$$

D'où le résultat :

$$(109) \quad K_\lambda(h, l) = \frac{h^\lambda}{\lambda+2} F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{l^2}{h^2}\right) + \frac{l^\lambda}{\lambda+2} F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{h^2}{l^2}\right)$$

Si $h \leq l$, on peut transformer la première fonction hypergéométrique à l'aide des formules (98), qui donnent :

$$K_\lambda(h, l) = \frac{l^\lambda}{(1+\lambda)(2+\lambda)} F\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{1+\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}, -\frac{h^2}{l^2}\right) + \frac{l^\lambda}{2+\lambda} F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{h^2}{l^2}\right) + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(-\frac{1+\lambda}{2})}{(1+\frac{\lambda}{2}) \Gamma(-\frac{\lambda}{2})} h^{\lambda-1} l$$

En fait, on s'intéressera surtout à la covariance d'un carré avec son centre. Celle-ci se déduira, pour un carré de côté a , de

$$(110) \quad K_\lambda\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{2^{1-\lambda} a^\lambda}{\lambda+2} F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$$

Il est possible d'établir de la même manière les formules du parallélépipède, en effectuant une nouvelle montée terme à terme sur le développement de $\gamma_\lambda(r)$. Les résultats peuvent s'exprimer au moyen de fonctions plus générales que les fonctions hypergéométriques à trois paramètres $\alpha \beta \gamma$. Nous n'écrivons pas ici les développements, qui s'expriment par des séries doubles, car on aura le plus souvent intérêt à calculer directement et numériquement, dans chaque cas particulier, les premiers termes des formules correspondantes.

7 - Calcul des variances d'estimation intrinsèques

La notion générale de variance d'estimation a été définie au chapitre 2. En pratique, on utilise le plus souvent des mailles régulières de prélèvement, et il importe de savoir calculer numériquement les variances d'estimation correspondantes. Nous établirons les formules générales relatives aux mailles régulières, sous deux formes différentes. La première forme, suggérant une analogie avec les variances d'estimation transitives, permettra de dégager une règle approchée de composition de termes de tranches et de termes de section, et de se ramener à un problème à une seule dimension. La deuxième forme fera apparaître un principe d'approximation de nature différente, reposant sur la notion de variance d'extension élémentaire. Les deux méthodes d'approximation conduisant à des résultats légèrement différents, nous nous efforcerons de dégager une règle pratique, dont la nature sera mixte.

7-1- Formules générales des mailles régulières.

Nous supposons connues les valeurs

$$y_i = f(M_i)$$

de la variable régionalisée $f(M)$ en un nombre fini n de points M_i implantés aux noeuds d'une maille régulière. Cette maille régulière pourra, par exemple, être définie par la donnée d'un parallélépipède (1)* oblique v . A chaque point de prélèvement M_i , nous attribuerons une "zone d'influence" v_i , qui sera le parallélépipède v centré au point M_i . Nous désignerons par V la réunion des zones d'influence v_i . Pour abréger le langage, nous remplacerons l'expression "moyenne stochastique de la variable régionalisée $f(M)$ dans le volume V " par l'expression "teneur moyenne de V ". Le problème que nous nous proposons de traiter est celui de l'estimation de la teneur z de V par la teneur moyenne y des n prélèvements

$$M_i : \quad (111) \quad y = \frac{1}{n} \sum_i v_i$$

(1)* La maille pourrait être définie par d'autres polyèdres v , sous réserve qu'ils possèdent un centre de symétrie, et que l'ensemble des v_i centrés aux points M_i constitue une partition du volume V à estimer.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, on peut associer à cette estimation la variance d'estimation σ_n^2

$$\sigma_n^2 = D^2(z - y)$$

dont la valeur est donnée par la formule théorique (11), qui s'écrit ici :

$$(112) \quad \sigma_n^2 = \frac{2}{nV} \sum_i \int_V \gamma(M_i P) dP - \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \gamma(M_i M_j) - \frac{1}{V^2} \iint_{VV} \gamma(MM') dM dM'$$

Du point de vue pratique, une telle formule est difficile à mettre en oeuvre directement, et on est conduit à rechercher des méthodes de calcul approchées. Il faut bien voir que la somme double $\frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \gamma(M_i M_j)$ peut être considérée comme une valeur approchée de l'expression $\frac{1}{nV} \sum_i \int_V \gamma(M_i P) dP$, qui, à son tour, est une approximation de l'intégrale double. La variance σ_n^2 apparaît comme une différence seconde de quantités très voisines les unes des autres (d'autant plus voisines que la maille est plus serrée). Dans la théorie des variances d'estimation transitives, nous avons rencontré une circonstance très analogue, et nous avons pu en déduire un principe approché de composition de termes de tranches et de termes de section. Il serait malaisé de montrer rigoureusement que le même principe peut être utilisé pour le calcul de (112), mais la parenté profonde des formulations intrinsèques et transitives rend très plausible le raisonnement par analogie. Nous admettrons donc que l'on peut écrire (dans le cas d'un espace à 3 dimensions)

$$(113) \quad \sigma_n^2 = \sigma_{n_1}^2 + \sigma_{n_2}^2 + \sigma_{n_3}^2$$

$\sigma_{n_1}^2$ étant la variance de l'estimation par les y_i de la teneur moyenne des lignes à plus grande densité de prélèvements, $\sigma_{n_2}^2$ la variance de l'estimation des plans de plus grande densité par les lignes de plus grande densité, et $\sigma_{n_3}^2$ celle de l'estimation de V par ces plans. Sous réserve d'effectuer, pour les deux dernières, des montées convenables sur le variogramme $\gamma(h)$, chacune de ces variances peut se calculer comme une variance d'estimation à une seule dimension.

Mais la variance d'estimation σ_n^2 admet aussi une deuxième décomposition,

profondément différente de (113). Considérons, en effet, l'accroissement

$$\varepsilon_i = z_i - y_i$$

c'est-à-dire l'erreur que l'on commet en attribuant à la zone d'influence v_i la teneur y_i de l'échantillon qu'on y a prélevé. Cette " erreur " peut être considérée comme une réalisation d'un processus stationnaire. Elle admet une variance σ_E^2

$$(114) \quad \sigma_E^2 = D^2(z_i - y_i) = \frac{2}{v} \int \gamma(M_i P) dP - \frac{1}{v^2} \iint \gamma(MM') dM dM'$$

que nous appellerons variance d'extension élémentaire de l'échantillon M_i dans sa zone d'influence v_i . Mais l'erreur totale :

$$\varepsilon = z - y$$

commise en estimant la teneur moyenne de V par la moyenne des n y_i peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \sum \varepsilon_i$$

En prenant la variance des deux membres, il vient :

$$D^2(\varepsilon) = \frac{1}{n^2} \sum_{ij} E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$$

Ainsi la variance d'estimation σ_n^2 admet la décomposition suivante :

$$(115) \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sigma_E^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$$

Les termes $E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$ sont des covariances d'estimation, et peuvent se calculer à l'aide de la formule (15). Si, dans (115), la somme des covariances d'estimation, étendue à $i \neq j$, peut être considérée comme négligeable, il nous restera la formule très simple :

$$(116) \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sigma_E^2$$

qui exprime un principe de composition des variances d'extension. Les règles (116)

et (113) sont manifestement incompatibles. En fait, dans le cas général, la somme des covariances n'est pas négligeable.

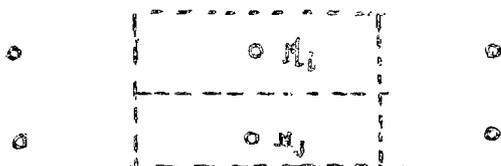


Figure 2

On s'en rend compte (et on peut le vérifier par le calcul), en imaginant une maille rectangulaire très allongée. Sur la figure 2, il n'est pas possible, en effet, de considérer que M_i et M_j estiment indépendamment l'un de l'autre leurs zones d'influence respectives : ils sont trop proches l'un de l'autre.

En dehors peut être du cas d'un variogramme isotrope et d'une maille cubique (ou carrée), la formule (116) ne sera certainement pas utilisable dans un espace à plus d'une dimension. On est ainsi conduit à subordonner le principe de composition des variances d'extension au principe de composition des termes de tranches et de section. On appliquera donc, en premier lieu, la décomposition (113). C'est seulement pour le calcul des variances d'estimation à une seule dimension, $\sigma_{n_1}^2, \sigma_{n_2}^2, \sigma_{n_3}^2$, que nous pouvons espérer pouvoir utiliser le principe (116) : même alors, comme nous allons le voir, des réserves doivent être faites dans certains cas.

7-2- Calcul des Variances d'estimation à une dimension.

Rappelons la définition des fonctions auxiliaires $\chi(h)$ et $F(h)$ qui se déduisent du variogramme $\gamma(h)$ à une dimension par les formules

$$(117) \begin{cases} \chi(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx \\ F(h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h x\chi(x) dx = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) \gamma(x) dx \end{cases}$$

Désignons par a la maille de prélèvement. Soit $(0, L)$ l'intervalle, de longueur $L = na$, que l'on veut estimer et

$$x_i = (i - \frac{1}{2})a$$

l'abscisse du point de prélèvement M_i . Pour calculer la variance d'estimation $\sigma_{n_i}^2$

nous utiliserons la décomposition (115). Le calcul de la variance d'extension élémentaire σ_E^2 est immédiat

$$\sigma_E^2 = 2 \chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a)$$

(par hypothèse, on a $\gamma(0) = 0$). Calculons la covariance d'estimation $E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$, pour les points M_i et M_j distants de

$$h = |j - i| a$$

La formule générale (15) nous donne ici

$$(118) \quad E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \gamma(h+u) du - \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \gamma(h+u-v) dudv - \gamma(h)$$

Dans la suite, nous supposons $\gamma(h)$ continu et plusieurs fois dérivable, sauf au voisinage de l'origine. Pour $i \neq j$, la covariance d'estimation est donc une fonction continue et dérivable de h . La formule (118), compte tenu de (117), peut s'écrire :

$$(119) \quad \left\{ \begin{aligned} E(\varepsilon_i \varepsilon_j) &= -\gamma(h) + \frac{2}{a} \left[\left(h + \frac{a}{2}\right) \chi\left(h + \frac{a}{2}\right) - \left(h - \frac{a}{2}\right) \chi\left(h - \frac{a}{2}\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2a^2} \left[(h+a)^2 F(h+a) - 2h^2 F(h) + (h-a)^2 F(h-a) \right] \end{aligned} \right.$$

Si $\gamma(x)$ admet un développement de Taylor autour du point d'abscisse h , il en est de même de $\frac{h^2}{2} F(h)$ et de $h\chi(h)$, et l'on a :

$$\begin{aligned} \left(h + \frac{a}{2}\right) \chi\left(h + \frac{a}{2}\right) - \left(h - \frac{a}{2}\right) \chi\left(h - \frac{a}{2}\right) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{1+2n} \gamma^{(2n)}(h) \\ \frac{(h+a)^2}{2} F(h+a) - h^2 F(h) + \frac{(h-a)^2}{2} F(h-a) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!} \gamma^{(2n)}(h) \end{aligned}$$

Si ces séries ne sont pas définies, ou ne convergent pas, on prendra des développements limités, avec des restes convenables. En portant dans (119), on obtient :

$$(120) \quad E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n+2)!} \left[2 - \frac{n+1}{2^{2n-2}} \right] \gamma^{(2n)}(h)$$

On vérifie que le terme en $a^2 (n=1)$ a un coefficient nul, de sorte que le développement commence par le terme $\frac{1}{576} a^4 \gamma^{(4)}(h)$. Comme, pour h grand, $\gamma(h)$ croît moins vite que h^2 , ainsi que nous l'avons vu en 1-3, ce premier terme doit décroître plus vite que $\frac{a^4}{h^2}$. Naturellement, cela n'est vrai que pour h grand, et n'empêche pas, en principe, la covariance de prendre des valeurs relativement élevées pour des distances h de l'ordre de quelques mailles a .

Pour simplifier l'écriture, posons

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = C(h)$$

puisque la covariance d'estimation $E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$ est une fonction de $h = |i-j|a$. Portons cette expression dans (115). La variance d'estimation σ_n^2 prend la forme :

$$(121) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{1}{n} \sigma_E^2 + \frac{2}{n^2} \left[(n-1) C(a) + (n-2) C(2a) + \dots + C[(n-1)a] \right] \\ &= \frac{1}{n} \sigma_E^2 + \frac{2}{L^2} \sum_{k=1}^{n-1} a(L-ka) C(ka) \end{aligned} \right.$$

Sous cette deuxième forme, on voit apparaître une expression approchée de l'intégrale

$$\frac{2}{L^2} \int_a^L (L-x) C(x) dx$$

étendue à l'intervalle $a, L = na$. Comme, sur cet intervalle, la fonction $C(h) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$ vérifie les conditions requises, nous pouvons utiliser la formule ^{(1)*} d'Euler Mac-Laurin :

$$(122) \quad \frac{2}{L^2} \int_a^L (L-x) C(x) dx = \frac{2}{L^2} a \sum_{k=1}^{n-1} (L-ka) C(ka) + \frac{2}{L^2} \sum_{p=1}^N (-1)^p \frac{B_{2p} a^{2p}}{(2p)!} \left[f^{(2p-1)}(L) - f^{(2p-1)}(a) \right] + R_N$$

(1)* Cette formule est prise ici sous la forme dissymétrique

$$\int_0^{na} f(x) dx = a \sum_{k=0}^{n-1} f(ka) + \sum_{k=1}^N (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} a^{2k} \left[f^{(2k-1)}(na) - f^{(2k-1)}(0) \right] + R_N$$

indiquée dans A.O. GUELFAND (is tchislienie konietchnikh raznostiei, Moscou 1959).

dans cette écriture, la fonction $f(x)$ qui figure dans la somme des termes correctifs de Bernouilli est mise pour $(L-x) C(x)$. On vérifie immédiatement la règle de récurrence

$$f^{(k)}(x) = (L-x) C^{(k)}(x) - k C^{(k-1)}$$

de sorte que l'on a

$$f^{2p-1}(L) - f^{2p-1}(a) = -(2p-1) \left[C^{2p-2}(L) - C^{2p-2}(a) \right] - (L-a) C^{2p-1}(a)$$

soit encore, en utilisant le développement de la fonction $C(h)$ donné, ci-dessous, en (123):

$$(122bis) \left\{ \begin{aligned} f^{2p-1}(L) - f^{2p-1}(a) &= -(2p-1) \sum_{k=2}^{\infty} C_{2k} a^{2k} \left[\gamma^{2k+2p-2}(L) - \gamma^{2k+2p-2}(a) \right] \\ &- (L-a) \sum_{k=2}^{\infty} C_{2k} a^{2k} \gamma^{2k+2p-1}(a) \end{aligned} \right.$$

Calculons, en premier lieu, l'intégrale du premier membre. Posant :

$$(123) \left\{ \begin{aligned} C(h) &= \sum_{k=2}^{\infty} C_{2k} a^{2k} \gamma^{2k}(h) \\ C_{2k} &= \frac{1}{(2k+2)!} \left[2 - \frac{k+1}{2^{2k-2}} \right] \end{aligned} \right.$$

On trouve immédiatement, en effectuant une intégration par parties

$$(124) \quad \frac{2}{L^2} \int_a^L (L-x) C(x) dx = \frac{2}{L^2} \sum_{k=2}^{\infty} a^{2k} \left[-C_{2k} (L-a) \gamma^{2k-1}(a) + C_{2k} \gamma^{2k-2}(L) - C_{2k} \gamma^{2k-2}(a) \right]$$

Portant cette relation dans (122), nous allons obtenir une expression de la somme figurant dans le deuxième membre de (121). Compte tenu de l'expression (122)bis, des termes de Bernouilli de (122), on obtient :

$$(125) \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{L^2} a \sum_{k=1}^{n-1} (L-ka) C(ka) &= \frac{2}{L^2} \sum_{k=2}^{\infty} a^{2k} C_{2k} \left[\gamma^{2k-2}(L) - \gamma^{2k-2}(a) - (L-a) \gamma^{2k-1}(a) \right] \\ &+ \frac{2}{L^2} \sum_{k=3}^{\infty} a^{2k} M_{2k} \left[\gamma^{2k-2}(L) - \gamma^{2k-2}(a) \right] + \frac{2}{L^2} \sum_{k=3}^{\infty} a^{2k} (L-a) N_{2k} \gamma^{2k-1}(a) \end{aligned} \right.$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} M_{2k} &= \sum_{p=1}^{k-2} \frac{(-1)^p B_{2p}}{(2p)!} C_{2k-2p} (2k-2p-1) \\ N_{2k} &= \sum_{p=1}^{k-2} \frac{(-1)^p B_{2p}}{(2p)!} C_{2k-2p} \end{aligned} \right.$$

L'examen de la formule (125) fait apparaître deux catégories de termes. En premier lieu, les termes du type $\frac{2}{L^2} a^{2k} \gamma^{(2k-2)}(L)$, où figurent les dérivées de $\gamma(h)$ au point L , constituent un Zitterbewegung. Mais on voit facilement que ce Zitterbewegung pourra, généralement, être négligé. En effet, pour h grand, et, en général $L = na$ pourra être considéré comme grand, $\gamma(h)$ croît moins vite que h^2 , et $\gamma^{(2k-2)}(h)$ décroît plus vite que $h^{(4-2k)}$ ($k \geq 2$). Le terme général du Zitterbewegung est donc, au plus, de la forme $\frac{2a^{2k}}{L^{2k-2}} = \frac{2a^2}{n^{2k-2}}$, et décroît plus vite que $\frac{1}{n^2}$ lorsque n augmente. Les termes d'extension, en deuxième lieu, comportent à leur tour deux sous-espèces : des termes en $\frac{1}{L}$ (du type $\frac{a^{2k}}{L} \gamma^{2k-1}(a)$, et des termes en $\frac{1}{L^2}$, du type $\frac{a^{2k+1}}{L^2} \gamma^{2k-1}(a)$ ou $\frac{a^{2k}}{L^2} \gamma^{2k-2}(a)$, qui seront respectivement en $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$. Si n est grand, on pourra, éventuellement, négliger les termes en $\frac{1}{n^2}$. Si, au voisinage de $h = a$, le variogramme admet un développement du type

$$(126) \quad \gamma(h) = \sum \gamma_\lambda h^\lambda$$

le deuxième membre de (125), le Zitterbewegung étant négligé, peut se mettre sous la forme :

$$\sum \gamma_\lambda \left[\frac{1}{n} T_1(\lambda) + \frac{1}{n^2} T_2(\lambda) \right] h^\lambda$$

et l'on voit ainsi apparaître, comme dans la Note 45, un principe de correspondance, associant à chaque composante en h^λ du variogramme au voisinage de $h = a$, sa contribution $\left[\frac{1}{n} T_1(\lambda) + \frac{1}{n^2} T_2(\lambda) \right] h^\lambda$ à l'expression (125). Nous calculerons plus loin, par un procédé indirect, les valeurs de $T_1(\lambda)$ et $T_2(\lambda)$. En se reportant à (121), on voit que la variance d'estimation σ_n^2 se met sous la forme :

$$(127) \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sigma_E^2 + \sum \gamma_\lambda h^\lambda \left[\frac{1}{n} T_1(\lambda) + \frac{1}{n^2} T_2(\lambda) \right]$$

Arrivé à ce point du raisonnement, il y a lieu de distinguer deux circonstances très différentes selon que le développement (126), valable autour de $h = a$, peut, ou non, représenter correctement le variogramme $\gamma(h)$ dans tout l'intervalle $0, a$. Dans le premier cas, c'est-à-dire si (126) est valable de 0 à a , (pas de changement d'allure dans l'intervalle $0-a$), on voit facilement que chaque terme en h^λ apporte à la variance d'extension une contribution :

$$\frac{2}{\lambda+1} \left[2^{-\lambda} - \frac{1}{\lambda+2} \right]$$

de sorte que (127) s'écrit

$$(128) \quad \sigma_n^2 = \sum \gamma_\lambda h^\lambda \left[\frac{1}{n} T(\lambda) + \frac{1}{n^2} T_2(\lambda) \right]$$

avec

$$(129) \quad T(\lambda) = T_1(\lambda) + \frac{2}{1+\lambda} \left[2^{-\lambda} - \frac{1}{\lambda+2} \right]$$

Dans ce cas, le principe de correspondance s'applique directement au calcul de σ_n^2 . Mais il peut arriver aussi que le développement (126) ne soit pas valable dans tout l'intervalle $0, a$, et, dans ce cas, la formule (128) ne peut pas s'appliquer. En fait, s'il y a changement d'allure du variogramme entre 0 et a , ce sera le plus souvent un ralentissement de croissance. En pareil cas, les dérivées en a de $\gamma(h)$ prendront des valeurs particulièrement faibles, de sorte que l'ensemble des termes figurant en (125) pourra, le plus souvent être négligé. On pourra donc appliquer le principe simple de la composition des variances d'extension élémentaires, et écrire :

$$(130) \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sigma_E^2 = \frac{1}{n} \left[2 \chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a) \right]$$

On arrive ainsi à la règle pratique suivante : Si un même développement de type (126) n'est pas utilisable de $h = 0$ à $h = a$, on appliquera (130), c'est-à-dire le principe de composition des variances d'extension. Si, au contraire, un développement du type (126) est valable de $h = 0$ à $h = a$, il convient d'appliquer la règle de correspondance (128), avec des coefficients $T(\lambda)$ et $T_2(\lambda)$ que nous allons maintenant calculer.

7-3-Etablissement de la règle de correspondance

Pour établir la règle de correspondance, nous partirons du variogramme particulier $\gamma(x) = 1 - e^{-ux}$, pour lequel il est possible d'obtenir l'expression exacte de la variance d'estimation. Nous transformerons ensuite ce variogramme par le jeu d'un opérateur linéaire qui fasse apparaître un terme en x^2 : appliquée à la variance d'estimation associée à $1 - e^{-ux}$, ce même opérateur mettra en évidence la règle de correspondance cherchée.

Considérons donc ce variogramme particulier, et ses fonctions auxiliaires :

$$(131) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma(x) = 1 - e^{-ux} \\ \chi(x) = 1 - \frac{1 - e^{-ux}}{ux} \\ F(x) = 1 - \frac{2}{u^2 x^2} \left[e^{-ux} - 1 + ux \right] \end{array} \right.$$

Pour calculer la variance d'estimation σ_n^2 , associée à la maille a pour n prélèvements, nous partirons de la formule générale (112), qui se met, dans le cas d'une seule dimension, sous la forme suivante :

$$\sigma_n^2 = \frac{4}{nL} \sum_{k=1}^n (k-\frac{1}{2})a \chi \left[(k-\frac{1}{2})a \right] - \frac{2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \gamma(ka) - F(L)$$

Remplaçons γ, χ , et F par leurs expressions (131), et tenons compte des formules sommatoires habituelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kau} = \frac{1 - e^{-nau}}{1 - e^{-au}} \\ \sum_{k=0}^{n-1} k e^{-kau} = \frac{n e^{-\frac{1}{2}nau}}{1 - e^{-au}} + e^{-au} \frac{(1 - e^{-nau})}{(1 - e^{-au})^2} \end{array} \right.$$

Il vient (avec $L = na$)

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= -\frac{1}{n} - \frac{4}{Lu} + \frac{4e^{-\frac{au}{2}}}{nLu} \frac{1 - e^{-Lu}}{1 - e^{-au}} + \frac{2}{n} \frac{1 - e^{-Lu}}{1 - e^{-au}} + \frac{2}{u^2 L^2} (uL - 1 + e^{-uL}) \\ &= \frac{2}{n^2} \frac{e^{-au}(1 - e^{-Lu})}{(1 - e^{-au})^2} + \frac{2}{n} \frac{e^{-Lu}}{1 - e^{-au}} \end{aligned}$$

Les exponentielles e^{-ku} correspondent au terme de Zitterbewegung envisagé au paragraphe précédent, et doivent être négligées. Il nous reste alors l'expression suivante, que nous écrivons en séparant les termes en $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$, et en remplaçant L par na :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \left[\frac{2}{1-e^{-au}} - 1 - \frac{2}{ua} \right] + \frac{1}{n^2} \left[\frac{4e^{-\frac{au}{2}}}{au(1-e^{-au})} - \frac{2e^{-au}}{(1-e^{-au})^2} - \frac{2}{a^2 u^2} \right]$$

Enfin, remplaçons les termes $\frac{1}{(1-e^{-au})}$ par leurs développements en e^{-kau} : il vient :

$$(132) \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kau} - \frac{2}{au} \right] + \frac{1}{n^2} \left[\frac{4}{au} e^{-\frac{au}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kau} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-kau} - \frac{2}{a^2 u^2} \right]$$

On voit que le fait de négliger le Zitterbewegung a eu simplement comme effet de remplacer les sommes finies d'exponentielles par les séries infinies correspondantes. Examinons le coefficient de $\frac{1}{n}$. Il se met sous la forme :

$$\frac{1}{a} \xi_a(e^{-ux}) = \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kau} - \frac{2}{a} \int_0^{\infty} e^{-ux} dx \right]$$

On reconnaît dans ξ_a l'opérateur linéaire qui, dans la représentation transitive, associe à une maille a et au covariogramme $g(x)$, la variance d'estimation transitive

$$(133) \quad \xi_a [g(x)] = g(0) + 2a \sum_{k=1}^{\infty} g(ka) - 2 \int_0^{\infty} g(x) dx$$

D'autre part, on vérifie facilement les relations :

$$\left\{ \begin{aligned} 4 e^{-\frac{au}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kau} &= \frac{4}{a} \xi_a(e^{-ux}) - \frac{2}{a} \xi_a(e^{-ux}) + \frac{4}{au} \\ 2 \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-kau} &= -\frac{1}{u} \frac{d}{da} \frac{1}{a} \xi_a(e^{-ux}) + \frac{2}{a^2 u^2} \end{aligned} \right.$$

de sorte que le coefficient de $\frac{1}{n^2}$ dans (132) se met sous la forme :

$$\frac{2}{au} \left[\frac{2}{a} \mathcal{E}_a^2(e^{-ux}) - \frac{1}{a} \mathcal{E}_a(e^{-ux}) \right] + \frac{1}{u} \frac{d}{da} \frac{1}{a} \mathcal{E}_a(e^{-ux})$$

Introduisons les opérateurs

$$(134) \quad \begin{cases} T = \frac{1}{a} \mathcal{E}_a \\ T_2 = \frac{2}{a} \left(\frac{2}{a} \mathcal{E}_a^2 - \frac{1}{a} \mathcal{E}_a \right) + \frac{d}{da} \frac{1}{a} \mathcal{E}_a \end{cases}$$

La variance d'estimation (132) se met sous la forme symbolique :

$$\sigma_n^2 = \left(\frac{1}{n} T + \frac{1}{un^2} T_2 \right) e^{-ux}$$

Considérons maintenant un variogramme $\gamma(x)$ plus général que (131), et supposons qu'il puisse se mettre sous la forme :

$$\gamma(x) = \int (1 - e^{-ux}) f(u) du$$

où $f(u)$ est une fonction donnée. Comme les opérateurs T et T_2 sont linéaires et ne dépendent pas de u , la variance σ_n^2 associée à une maille a et à $\gamma(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$(135) \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n} T \int e^{-ux} f(u) du + \frac{1}{n^2} T_2 \int e^{-ux} \frac{f(u)}{u} du$$

Il est alors facile de dégager la règle de correspondance. Prenons, par exemple, le variogramme

$$(136) \quad \gamma(x) = \int_{-1}^{\infty} (1 - e^{-ux}) \frac{u^{-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)} du$$

D'après la formule (110) de la Note 42, on a :

$$(137) \quad \xi_{\mu}(x) = \int_{-1}^{\infty} e^{-ux} \frac{u^{-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)} du = x^{\mu} + \phi(x)$$

$\phi(x)$ étant une série entière en x , de sorte que le variogramme (136) admet $-x^{\mu}$ comme terme unique en x^{μ} . Il va donc nous suffire d'identifier les termes en a^{μ} dans l'application de (135) à ce variogramme pour dégager, au signe près, les coefficients $T(\mu)$ et $T_2(\mu)$ de la formule (128). La formule (20) de la Note (45) nous indique que l'opérateur \mathcal{E}_a agissant sur (137) fait apparaître un terme unique en $a^{\mu+1}$, qui est :

$$\int_a^{\infty} \xi_{\mu}(x) dx = - \frac{2 \sin \mu \frac{\pi}{2}}{1 + \mu} B_{\frac{1+\mu}{2}} a^{1+\mu}$$

d'où résulte immédiatement

$$(138) \quad T \left[\xi_{\mu}(x) \right] = - \frac{2 \sin \mu \frac{\pi}{2}}{1 + \mu} B_{\frac{1+\mu}{2}} a^{\mu}$$

L'opérateur T_2 , de son côté, doit agir sur la fonction :

$$\int_1^{\infty} e^{-ux} \frac{u^{-\mu-2}}{\Gamma(-\mu)} du = - \frac{1}{1 + \mu} \xi_{\mu+1}(x)$$

D'après l'expression (134) de T_2 , et compte tenu de (138), on obtient :

$$(139) \quad T_2 \left[- \frac{1}{1 + \mu} \xi_{\mu+1}(x) \right] = \frac{2 \cos \mu \frac{\pi}{2}}{(1+\mu)(2+\mu)} (\mu - 1 + 2^{-\mu}) B_{\frac{2+\mu}{2}} a^{\mu}$$

En changeant les signes, nous voyons qu'à tout terme $\frac{\lambda}{x}$ du variogramme correspond, dans la variance d'estimation, la composante :

$$(140) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_n^2(\lambda) &= \frac{T(\lambda)a^{\lambda}}{n} + \frac{T_2(\lambda)a^{\lambda}}{n^2} \\ T(\lambda) &= \frac{2 \sin \frac{\lambda\pi}{2}}{1 + \lambda} B_{\frac{1+\lambda}{2}} \\ T_2(\lambda) &= \frac{2 \cos \lambda \frac{\pi}{2}}{(1+\lambda)(2+\lambda)} (\lambda - 1 + 2^{-\lambda}) B_{\frac{2+\lambda}{2}} \end{aligned} \right.$$

Si λ est un entier pair $T(\lambda)$ s'annule, mais non $T_2(\lambda)$, et l'inverse se produit pour λ entier impair :

$$(141) \quad \left\{ \begin{aligned} T(2k) &= 0 \\ T_2(2k) &= \frac{2(-1)^{k+1} (2k-1+2^{-2k})}{(1+2k)(2+2k)} B_{k+1} \end{aligned} \right.$$

$$(142) \quad \left\{ \begin{aligned} T(2k-1) &= \frac{(-1)^{k+1}}{k} B_k \\ T_2(2k-1) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Reste à examiner le cas des termes de la forme $x^{2k} \log x$. La formule (22) de la Note 45 donne immédiatement leur contribution au terme en $\frac{1}{n}$ de la variance d'estimation :

$$(143) \quad T(x^{2k} \log x) a^{2k} = (-1)^k \frac{\pi}{1+2k} B_{k+\frac{1}{2}} a^{2k}$$

Le calcul du terme en $\frac{1}{n^2}$ est un peu plus délicat. En dérivant $T_2(\lambda) a^\lambda$ en λ , et en faisant $\lambda = 2k$, on obtient :

$$(144) \quad T_2(x^{2k} \log x) a^{2k} = T_2(2k) a^{2k} \log a + \left[\frac{d}{d\lambda} T_2(\lambda) \right]_{\lambda=2k} a^{2k}$$

Mais la dérivée en λ du nombre de Bernouilli généralisé ne conduisant pas, semble-t-il, à un algorithme simple, on devra se contenter d'un calcul numérique pour chaque valeur de $2k$. On notera, dans (144), l'apparition du terme logarithmique $T_2(2k) a^{2k} \log a$.

7-4- Mailles aléatoires et aléatoires stratifiées.

Bien que les mailles régulières donnent toujours de meilleurs résultats, il arrive parfois que l'on ait affaire à des mailles du type aléatoire ou aléatoire stratifié. Nous allons établir les formules, d'ailleurs très simples, donnant la variance d'estimation dans chacun de ces deux cas.

Examinons d'abord le cas d'une maille aléatoire. Par hypothèse, les n points M_i de prélèvements sont implantés au hasard dans le domaine V à estimer, de telle manière que chacun des points M appartenant à V ait même probabilité d'être prélevé. La variance d'estimation associée à la moyenne arithmétique (111) est alors égale à la valeur probable du deuxième membre de (112) pour des points $M_i M_j$ ainsi tirés au sort dans V . On voit que l'intégrale

$$\frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(M_i P) dP$$

a pour valeur probable, dans ce tirage au sort, l'intégrale double

$$\frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(MP) dM dP$$

et que $\gamma(M_i M_j)$ a la même valeur probable pour $i \neq j$, tandis que, pour $i = j$, $\gamma(M_i M_i) = 0$ a une valeur probable nulle. On obtient ainsi la variance d'estimation associée à la maille aléatoire :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(MP) dM dP \left[2 - \frac{n(n-1)}{n^2} - 1 \right]$$

Soit, puisque l'intégrale double n'est pas autre chose que la variance σ^2 de la variable $f(M)$ dans V , comme on le voit en se reportant à la formule (17) :

$$(145) \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sigma^2(O|V)$$

Dans une maille aléatoire stratifiée, le domaine V à estimer est découpé en n zones d'influence v_i , égales entre elles et translatées les unes des autres, de manière que l'ensemble des v_i constitue une partition de V , et, dans chaque zone d'influence v_i , on implante au hasard un point de prélèvement M_i . La variance d'estimation correspondante s'obtient en prenant la valeur probable de (112) pour des points M_i, M_j ainsi tirés au sort dans v_i, v_j . Mais on a :

$$\frac{1}{n} \sum_i \frac{1}{v_i} \int_{v_i} \gamma(M_i P) dM_i = \frac{1}{V} \int_V \gamma(MP) dM$$

Le premier terme de (112) se réduit ainsi à :

$$\frac{2}{V^2} \iint_V \gamma(MM') dM dM'$$

Considérons le deuxième terme. En valeur probable, il donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V^2} \sum_{i \neq j} \iint_{v_i} \iint_{v_j} \gamma(M_i M_j) dM_i dM_j \\ & = \frac{1}{V^2} \sum_{i,j} \iint_{v_i} \iint_{v_j} \gamma(M_i M_j) dM_i dM_j - \frac{1}{V^2} \sum_i \iint_{v_i} \iint_{v_i} \gamma(M_i M_i) dM_i dM_i \end{aligned}$$

La somme doit être étendue, en effet, aux indices $i \neq j$, puisque $\gamma(M_i M_j) = 0$. L'expression obtenue se simplifie aisément, et devient :

$$\frac{1}{V^2} \iint_V \iint_V \gamma(MM') dM dM' - \frac{1}{nv^2} \iint_{\mathcal{V}} \gamma(MM') dM dM'$$

D'où, finalement, l'expression de la variance d'estimation :

$$(146) \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{nv^2} \iint_V \iint_V \gamma(MM') dM dM' = \frac{1}{n} \sigma^2(0 | v)$$

En comparant (145) et (146), on voit que la variance d'estimation s'obtient, dans le cas aléatoire pur, en divisant par n la variance des échantillons dans V , et, dans le cas aléatoire stratifié, en divisant par n la variance, toujours plus petite, des échantillons dans leur zone d'influence v . La maille aléatoire stratifiée est donc toujours supérieure à la maille aléatoire pure. Parmi toutes les mailles aléatoires stratifiées possibles pour un même V et un nombre n donné de prélèvements, la meilleure est celle qui correspond au polyèdre v réalisant, pour une mesure donnée v de son volume, le minimum de l'intégrale

$$\sigma^2(0 | v) = \frac{1}{V^2} \iint_V \iint_V \gamma(MM') dM dM'$$

Pour un variogramme isotrope $\gamma(r)$, supposé fonction non décroissante de r , ce minimum est obtenu pour des polyèdres réguliers. A deux dimensions, par exemple, on obtient les hexagones réguliers et les carrés, avec une infime supériorité pour les hexagones, dans la mesure où l'hexagone est plus proche du cercle que le carré.

Si cette maille aléatoire stratifiée optimale est comparée avec la maille régulière associée aux mêmes polyèdres v_i , maille régulière dite adaptée (carrée ou hexagonale dans le cas isotrope à 2 dimensions), on montre aisément que la maille régulière adaptée donne toujours de meilleurs résultats. Mais cette conclusion peut cesser d'être vraie pour une maille régulière non adaptée - c'est-à-dire définie par des polyèdres v différents de ceux qui minimisent $\sigma^2(0 | v)$.

8 - Les fluctuations des moments d'ordre 2, et leur estimation.

L'étude des fluctuations des moments d'ordre 2 présente une grande importance pratique, en tant qu'elle permet de formuler des tests capables de contrôler la valeur de l'hypothèse intrinsèque. Pour tout moment d'ordre 2, variance ou valeur du variogramme $\gamma(h)$ au point h , il y a lieu de distinguer une valeur expérimentale, calculée en général à partir des valeurs $f(M_i)$ prises par la variable en un nombre fini de points de prélèvement M_i , une valeur locale vraie pour un domaine V , définie par une intégrale stochastique étendue au domaine V , et enfin une valeur théorique, qui n'est autre que la valeur probable des deux variables stochastiques précédentes. L'écart entre une valeur locale vraie (ou une valeur expérimentale) et la valeur théorique correspondante peut être considéré comme une fluctuation, et l'étude des fluctuations permet de tester le caractère intrinsèque de la régionalisation. Au contraire, l'écart entre une valeur expérimentale et la valeur locale vraie doit être considéré comme une erreur d'estimation et pose le problème de l'estimation des moments d'ordre 2, que nous devons également traiter.

Du point de vue théorique, nous aurons besoin dans ce chapitre d'une hypothèse légèrement plus forte que dans le reste de cette étude. Comme, en effet, les moments d'ordre 4 s'introduisent nécessairement dans les problèmes que nous allons traiter, il convient de supposer que les accroissements de la variable régionalisée constituent des processus stationnaires d'ordre 4, c'est-à-dire que leurs moments d'ordre 1 à 4 (et non plus seulement 1 et 2) possèdent le caractère intrinsèque. Les moments impairs (d'ordre 1 et 3) seront supposés nuls. Pour pouvoir calculer effectivement les moments d'ordre 4 à l'aide du seul variogramme d'ordre 2, $\gamma(h)$, nous serons parfois amenés à supposer que les accroissements obéissent à des lois de Gauss. Cette hypothèse gaussienne, beaucoup plus forte que la précédente, n'a cependant rien d'essentiel. Elle se recommande par sa commodité, mais n'est nullement indispensable pour la construction de la théorie.

8 - 1 - Le variogramme second.

Soit une variable $f(M)$, de variogramme $\gamma(h)$, dont les accroissements

$$(147) \quad \varepsilon_{ij} = f(M_j) - f(M_i)$$

possédant le caractère intrinsèque jusqu'à l'ordre 4. Etant donné un vecteur h , arbitraire mais fixe, assujettissons-nous à reconsidérer, dans la définition (147) des accroissements, que des points M_i et M_j liés par la condition

$$M_i M_j = h$$

Le vecteur h étant fixe, l'accroissement ε_{ij} , que nous écrivons

$$(148) \quad \varepsilon_i = f(M_i + h) - f(M_i)$$

peut être considéré comme une nouvelle variable régionalisée à support ponctuel M_i . Enfin, le carré de cette variable

$$(149) \quad \varepsilon_i^2 = \left[f(M_i + h) - f(M_i) \right]^2$$

constitue également une variable à support ponctuel M_i . Des hypothèses faites (moments stationnaires jusqu'à l'ordre 4), il résulte que ε_i^2 constitue un processus stochastique stationnaire d'ordre 2, et possède une valeur probable a priori

$$(150) \quad E(\varepsilon_i^2) = 2 \gamma(h)$$

et une variance finie $D^2(\varepsilon_i^2)$. Si l'on admet l'hypothèse gaussienne, cette variance est égale à

$$(151) \quad D_G^2(\varepsilon_i^2) = 8 \overline{\gamma(h)}^2$$

L'indice G , dans $D_G^2(\varepsilon_i^2)$, est mis pour rappeler que la formule correspondante n'est vraie que dans le cas de l'hypothèse gaussienne.

De même, nous pouvons associer à la variable ε_i^2 son variogramme défini par

$$(152) \quad \Gamma(M_i M_i'; h) = \frac{1}{2} E \left[(\varepsilon_i^2 - \varepsilon_{i'}^2)^2 \right] = E(\varepsilon_i^4) - E(\varepsilon_i^2 \varepsilon_{i'}^2)$$

La fonction $\Gamma(MM', h)$, ainsi définie, à h fixé, pour un argument vectoriel MM' est appelée variogramme second de la régionalisation, et domine les problèmes de

fluctuation ou d'estimation des moments d'ordre 2. Dans le cas gaussien, le variogramme second $\Gamma^1(MM^0, h)$ se déduit d'une manière simple du variogramme premier $\gamma(h)$. En effet, si x_i, x_j, \dots sont des variables gaussiennes centrées (de moyennes nulles), de variances σ_i^2 et de covariances σ_{ij} , le moment le plus général d'ordre 4 a pour valeurs :

$$(153) \quad E(x_i x_j x_k x_l) = \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \sigma_{ik} \sigma_{jl} + \sigma_{il} \sigma_{jk}$$

En particulier

$$\left\{ \begin{array}{l} E(x_i^4) = 3 \sigma_i^4 \\ E(x_i^2 x_j^2) = \sigma_i^2 \sigma_j^2 + 2 \sigma_{ij}^2 \end{array} \right.$$

Portons ces résultats dans (152), il vient :

$$\Gamma_G^1(MM^0, h) = 3 \overline{E(\varepsilon_i^2)^2} - \overline{E(\varepsilon_i^2)}^2 - 2 \overline{E(\varepsilon_i \varepsilon_{i'})^2}$$

Tenons compte de (151) et de la formule générale (7). On obtient ainsi l'expression suivante du variogramme second, valable dans le cas gaussien, seulement :

$$(154) \quad \Gamma_G^1(MM^0, h) = 8 \overline{\gamma(h)^2} - 2 \left[\gamma(MM^0 + h) + \gamma(MM^0 - h) - 2 \gamma(MM^0) \right]^2$$

8-2- Fluctuation du variogramme local.

Dans un volume V donné, le variogramme local $\gamma_V(h)$ est défini par l'intégrale stochastique (32). En posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(M; h) = f(M+h) - f(M) \\ V^0 = \nu \mathcal{N}(-h)V \end{array} \right.$$

cette intégrale s'écrit simplement :

$$(155) \quad \gamma_V(h) = \frac{1}{2V^0} \int_{V^0} \frac{2}{\nu} \varepsilon(M, h) dM$$

C'est la valeur moyenne de l'accroissement ε dans l'intersection V' du volume disponible V et de son translaté par $-h$. Sa valeur probable est égale à la valeur théorique du variogramme au point h

$$(156) \quad E \left[\gamma_V(h) \right] = \gamma(h)$$

Sa variance

$$(157) \quad D^2 \left[\gamma_V(h) \right] = E \left[\gamma_V(h) - \gamma(h) \right]^2$$

qui prend une valeur finie, pour un h donné, s'appelle variance de fluctuation du demi-variogramme local au point h . On peut la calculer à l'aide de la formule (152), en écrivant :

$$\begin{aligned} D^2 \left[\gamma_V(h) \right] &= E \left[\overline{\gamma_V(h)}^2 - \overline{\gamma(h)}^2 \right] \\ &= \frac{1}{4 V'^2} \iint_{V'} \int_{V'} E \left[\varepsilon^2(M, h) \varepsilon^2(M', h) \right] dM dM' - \overline{\gamma(h)}^2 \\ &= \frac{-1}{4 V'^2} \iint_{V'} \int_{V'} \Gamma(MM', h) dM dM' + \frac{1}{4} E(\varepsilon_1^4) - \overline{\gamma(h)}^2 \end{aligned}$$

Soit, compte tenu de (150) :

$$(158) \quad D^2 \left[\gamma_V(h) \right] = \frac{1}{4} \left[D^2(\varepsilon^2) - \frac{1}{V'^2} \iint_{V'} \int_{V'} \Gamma(MM', h) dM dM' \right]$$

Si l'on compare (158) à la formule générale (18), on voit que la variance a priori $D^2(\varepsilon^2)$ de la variable ε^2 est égale à la limite vers laquelle tend la variance de ε^2 dans un volume fini, lorsque ce volume s'étend indéfiniment. Dans le cas particulier de l'hypothèse gaussienne, on obtient, d'après (154) et (151)

$$(159) \quad D_G^2 \left[\gamma_V(h) \right] = \frac{1}{2 V'^2} \iint_{V'} \int_{V'} \left[\gamma(MM'+h) + \gamma(MM'-h) - 2 \gamma(MM') \right]^2 dM dM'$$

De la même manière la fluctuation d'un variogramme expérimental

$$\gamma_e(h) = \frac{1}{2N'} \sum_{i=1}^{N'} \left[f(M_i + h) - f(M_i) \right]^2$$

relativement à sa valeur théorique $\gamma(h)$, sera donnée par les formules :

$$(160) \quad \left\{ \begin{aligned} D^2 \gamma_e(h) &= \frac{1}{4} \left[D^2(\varepsilon^2) - \frac{1}{N'^2} \sum_{ij} \Gamma(M_i M_j, h) \right] \\ D_G^2 \left[\gamma_e(h) \right] &= \frac{1}{2N'^2} \sum_{ij} \left[\gamma(M_i M_j + h) + \gamma(M_i M_j - h) - 2 \gamma(M_i M_j) \right]^2 \end{aligned} \right.$$

où N' désigne le nombre de couples $M_i, M_i + h$ disponibles.

8-3- Fluctuation du variogramme x^λ à une dimension.

Les formules (158) ou (159) conduisent, en général, à des calculs compliqués. Nous nous contenterons d'examiner, dans le cas gaussien, les fluctuations du demi-variogramme local à une dimension correspondant à une réalisation de la fonction intrinsèque x^λ sur un segment de longueur L . Etant dans le cas Gaussien, nous utiliserons la formule (159), qui s'écrit ici :

$$(161) \quad D_G^2 \left[\gamma_V(h) \right] = \frac{1}{L^2} \int_0^L (L-x) \left[(x+h)^\lambda + |x-h|^\lambda - 2x^\lambda \right]^2 dx$$

On a posé, pour abréger les écritures :

$$L = L - h$$

Le calcul de (161) est assez long. Le développement du carré figurant sous l'intégrale fait apparaître 6 termes qui doivent être intégrés de 0 à L : eu égard à la présence de $|x-h|^\lambda$, l'intégration doit être faite de 0 à h et de h à L (pour $h < L$ c'est-à-dire $h < \frac{L}{2}$) avec des arguments différents. Ces diverses intégrations font apparaître des fonctions hypergéométriques, qu'il faut ensuite transformer à l'aide des formules (98). Donnons simplement le résultat dans le cas

$$h < L \quad \text{c'est-à-dire} \quad h < \frac{L}{2}$$

On obtient deux termes singuliers en $\frac{h^{1+2\lambda}}{L}$ et $\frac{h^{2+2\lambda}}{L}$, et une série entière

paire en $\frac{h}{p}$, multipliée par $p^{2\lambda}$, série dont nous avons calculé les deux premiers termes en $(\frac{h}{p})^4$ et $(\frac{h}{p})^6$:

$$(162) \quad \left. \begin{aligned} D_G^2 [\gamma_V(h)] &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(\frac{3}{2} + \lambda)} \left(1 - \frac{1}{\cos \lambda \pi}\right) (1 - 2^{1-2\lambda}) \frac{h^{1+2\lambda}}{p} \\ &+ \left[2^{-2\lambda} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(\lambda + \frac{3}{2})} - \frac{2}{1+2\lambda} \right] \frac{h^{2+2\lambda}}{p^2} + \frac{\lambda^2(1-\lambda)}{2(3-2\lambda)} p^{2\lambda} \frac{h^4}{p^4} \\ &+ \frac{\lambda(1-\lambda)}{4(2\lambda-5)} \left[\frac{2}{45} (2\lambda-1)(2\lambda-3)(2\lambda-5) + \frac{8\lambda-18}{15} + \frac{1}{45}(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5) \right] p^{2\lambda} \frac{h^6}{p^6} + \dots \end{aligned} \right\} \text{calcul}$$

Par dérivation de (162) en λ , on obtient la fluctuation du variogramme local $x^\lambda \log x$.
En particulier, pour $\lambda = 0$, soit

$$\gamma(x) = \log x$$

prendre $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{D_G^2}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 h}{6} - \frac{\pi^2 h^2}{6 p^2} + \frac{1}{6} \frac{h^4}{p^4} + \frac{1}{20} \frac{h^6}{p^6} + \dots$

on constate que les trois premiers termes de (162) ont une dérivée nulle. Ainsi, la fluctuation du variogramme de wijsien $\log x$ est du sixième ordre en $\frac{h}{p}$. Numériquement, on trouve

$$D^2[\gamma_V(x)] = \frac{2}{5} \frac{h^6}{p^6}$$

Ainsi, pour h très petit, le variogramme local ne pourra pas beaucoup différer du variogramme de Wijsien. Mais, pour h de l'ordre de $\frac{L}{2}$, la fluctuation peut devenir importante. Cette conclusion est très générale; seul le début d'un variogramme local peut être considéré comme représentatif du variogramme théorique correspondant. A la limite extrême $h = L$ ($\lambda = 0$), la formule générale (161) donne

$$D^2[\gamma_V(L)] = 2 L^{2\lambda} = 2 \overline{\gamma(L)}^2$$

Il ne reste plus, en effet, qu'un seul couple de point, et la variance est égale à $\frac{1}{4} D^2(\varepsilon)$.

Le cas particulier du variogramme linéaire pur

$$\gamma(h) = |h|$$

conduit à des calculs plus simples. En effet, on a

$$x + h + |x-h| - 2x = \begin{cases} 2(h-x) & \text{pour } x < h \\ 0 & \text{pour } x > h \end{cases}$$

Cette propriété exprime le caractère markovien du schéma intrinsèque à une dimension à variogramme linéaire pur. Les accroissements de la variable pour deux intervalles ne se recouvrant pas sont indépendants. (Il s'agit du processus stationnaire à accroissements indépendants de la théorie classique). Cette propriété markovienne est étroitement liée à l'effet d'écran. La formule (161) donne ici :

$$D_G^2 [\gamma_V(h)] = \frac{4}{L^2} \int_0^h (L-x)(h-x)^2 dx$$

pour $h < L$ ($h < \frac{L}{2}$), et, pour $h > L$

$$D_G^2 [\gamma_V(h)] = \frac{4}{L^2} \int_0^L (L-x)(h-x)^2 dx$$

On obtient respectivement :

$$(163) \quad \left\{ \begin{aligned} D_G^2 [\gamma_V(h)] &= \frac{4}{3} \frac{h^3}{L} - \frac{1}{3} \frac{h^4}{L^2} = \frac{4}{3} \frac{Lh^3}{(L-h)^2} - \frac{5}{3} \frac{h^4}{(L-h)^2} \\ D_G^2 [\gamma_V(h)] &= \frac{1}{3} \frac{(L-h)^4}{L^2} - \frac{1}{3} \frac{h^4}{L^2} + \frac{4}{3} \frac{h^3}{L} \quad 2L^2 + \frac{1}{3} L^2 - \frac{4}{3} hL \end{aligned} \right.$$

Pour $\frac{h}{L}$ très petit, la variance est $\frac{4}{3} \frac{h^3}{L}$. La variance relative est en $\frac{4}{3} \frac{h}{L}$, et l'on voit que le début du variogramme est représentatif. Par contre, pour $h = L = \frac{L}{2}$, la variance est égale à L^2 , ce qui correspond à une variance relative égale à l'unité : à mi-distance, le variogramme local n'a plus qu'un rapport très lointain avec sa valeur théorique :

$$\frac{h}{L} \quad \frac{D^2(\gamma_V)}{h^2} \quad e^{-2 \sqrt{\frac{D^2(\gamma)}{h^2}}}$$

$\frac{1}{10}$	$\frac{13}{100}$	0,49 - 2,05
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	0,33 - 3,06
1	1	0,135 - 7,40

S-4- L'estimation du variogramme local.

Le variogramme local est la moyenne stochastique dans $V^0 = V \cap \mathcal{C}(-h)V$ de la variable $\frac{1}{2} \varepsilon^2(M, h)$, tandis que le variogramme expérimental est la moyenne de cette même variable en un nombre fini N^0 de points. La variance d'estimation s'obtient donc en appliquant les formules générales du chapitre 7 à la fonction intrinsèque $\frac{1}{4} \Gamma(MM^0, h)$ associée à la variable $\frac{1}{2} \varepsilon^2$. Dans le cas gaussien, et pour une maille adaptée, on obtient une formule approchée très simple. En effet, dans la formule (154), si (MM^0) est inférieur à h , le crochet $[\gamma(MM^0+h) + \gamma(h-MM^0) - 2\gamma(MM^0)]$ a pour partie principale $2[\gamma(h) - \gamma(MM^0)]$.

On aura donc

$$(164) \quad \frac{1}{4} \Gamma(MM^0, h) = 4 \gamma(h) \gamma(MM^0) - 2 \overline{\gamma(MM^0)^2}$$

Cette approximation ne peut être utilisée que pour $|MM^0| < h$. Mais, la maille étant adaptée, on peut se contenter de calculer la variance d'estimation par la formule (130), c'est-à-dire par composition de variances d'estimation. Dans le calcul de cette variance d'estimation, MM^0 est un vecteur intérieur au polyèdre de la maille, tandis que h est la somme géométrique de vecteurs de base de la maille, de sorte que la condition requise est réalisée. D'autre part, dans le deuxième membre de (164), le terme carré $\overline{\gamma(MM^0)^2}$, beaucoup plus régulier à l'origine que $\gamma(MM^0)$ lui-même, ne va apporter qu'une contribution négligeable à la variance d'estimation. Celle-ci s'obtient donc en appliquant les formules générales à $4 \gamma(h) \gamma(MM^0)$, et, comme $\gamma(h)$ est une constante, on va trouver $4 \gamma(h) \sigma_E^2$, σ_E^2 étant la variance d'extension de la variable $f(M)$ dans une zone d'influence. D'où le résultat approché très simple :

$$(165) \quad D^2 [\gamma_e(h) - \gamma_V(h)] = \frac{4 \gamma(h)}{N^0} \sigma_E^2$$

N^0 étant le nombre de couples de point M_i, M_i+h utilisés pour le calcul du variogramme expérimental $\gamma_e(h)$

Si l'on désire estimer le variogramme théorique à l'aide du variogramme expérimental, on pourra, enfin, écrire simplement :

$$(166) \quad D^2 \left[\gamma_e(h) - \gamma(h) \right] = D^2 \left[\gamma_e(h) - \gamma_V(h) \right] + D^2 \left[\gamma_V(h) - \gamma(h) \right]$$

8-5 - Fluctuations de la variance locale.

Reprenons les notations de 2-2, et raisonnons d'abord dans le cas d'un nombre fini n de points M_i où la variable prend les valeurs y_i . Soit z la valeur moyenne (stochastique) des points M_i

$$z = \frac{1}{n} \sum_j y_j$$

Considérons la différence

$$y_i - z_i = \frac{1}{n} \sum_j (y_i - y_j) = \frac{1}{n} \sum_j \varepsilon_{ji}$$

La variance expérimentale (nous disons ici expérimentale et non locale, car il n'y a qu'un nombre fini de points) est définie par la somme :

$$(167) \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_i (y_i - z)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{ijk} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{ki}$$

La variable aléatoire S^2 a pour valeur probable :

$$(168) \quad E(S^2) = \frac{1}{n^3} \sum_{ijk} \left[\gamma_{ji} + \gamma_{ki} - \gamma_{jk} \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{ij} \gamma_{ij} = \sigma^2$$

c'est-à-dire la valeur théorique de la variance. Pour calculer la variance $D^2(S^2)$ de S^2 , examinons d'abord l'expression de S^4

$$S^4 = \frac{1}{n^6} \sum_{\substack{ijk \\ lmn}} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{ki} \varepsilon_{ml} \varepsilon_{nl}$$

Pour calculer la valeur probable $E(S^4)$, nous nous placerons dans le cas gaussien. Dans ce cas, la formule (153), nous donne :

$$E \left[\varepsilon_{ji} \varepsilon_{ki} \varepsilon_{ml} \varepsilon_{nl} \right] = E(\varepsilon_{ji} \varepsilon_{ki}) E(\varepsilon_{ml} \varepsilon_{nl}) + E(\varepsilon_{ji} \varepsilon_{ml}) E(\varepsilon_{ki} \varepsilon_{nl}) + E(\varepsilon_{ji} \varepsilon_{nl}) E(\varepsilon_{ki} \varepsilon_{ml})$$

Après sommation en $ijklmn$, le premier des trois termes du deuxième membre donnera simplement $\overline{E(S^2)}^2 = \sigma^4$, comme on le voit en se reportant à (167). Dans cette même sommation, par suite de la symétrie des indices, les deux autres termes donneront le même résultat, de sorte qu'il suffit de calculer l'un d'entre eux seulement. La variance $D^2(S^2)$ va donc être donnée par :

$$D^2(S^2) = \frac{2}{n^6} \sum_{\substack{ijk \\ lmn}} E(\varepsilon_{ji} \varepsilon_{ml}) E(\varepsilon_{ki} \varepsilon_{nl})$$

Appliquons la formule générale (7)

$$E(\varepsilon_{ji} \varepsilon_{ml}) E(\varepsilon_{ki} \varepsilon_{nl}) = \left[\gamma_{ji} + \gamma_{im} - \gamma_{jm} - \gamma_{il} \right] \left[\gamma_{kl} + \gamma_{in} - \gamma_{kn} - \gamma_{il} \right]$$

Dans le développement du produit figurant au deuxième membre apparaissent trois types de termes : des termes carrés du type $\overline{\gamma_{ij}}^2$, des termes où un indice est répété, tel que $\gamma_{ij} \gamma_{ik}$, et enfin des termes à 4 indices distincts, de la forme $\gamma_{ij} \gamma_{kl}$. Dans la sommation en $ijkl$, tous les termes d'une même espèce conduisent à la même valeur. On trouve ainsi :

$$D^2(S^2) = \frac{2}{n^2} \sum_{ij} \overline{\gamma_{ij}}^2 + \frac{2}{n^4} \sum_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} - \frac{4}{n^3} \sum_{ijk} \gamma_{ij} \gamma_{ik}$$

Remarquons, enfin, que l'on a, d'après (168)

$$\frac{1}{n^4} \sum_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} = \left[\frac{1}{n^2} \sum_{ij} \gamma_{ij} \right]^2 = \sigma^4$$

Nous obtenons finalement l'expression suivante pour la fluctuation de la variance expérimentale (relativement à la variance théorique).

$$(169) \quad D^2(S^2) = 2 \sigma^4 + \frac{2}{n^2} \sum_{ij} \gamma_{ij}^2 - \frac{4}{n^3} \sum_{ijk} \gamma_{ij} \gamma_{ik}$$

La fluctuation de la variance locale dans un volume V s'en déduit, par les raisonnements habituels, en remplaçant les sommations par des intégrations :

$$(170) \quad D^2(S^2) = 2 \sigma^4(V) + \frac{2}{V^2} \int \gamma(MM')^2 dM dM' - \frac{4}{V^3} \int \gamma(MP) \gamma(MP') dM dP dP'$$

On notera, en vue des calculs pratiques, que la dernière intégrale peut se simplifier par l'algorithme suivant :

$$(171) \int_V \gamma(MP) \gamma(MP') DMdP dP' = \int_V dM \left[\int_V \gamma(MP) dP \right]^2$$

A titre d'exemple, considérons, dans le cas à une dimension et pour le variogramme

$$\gamma(x) = x^\lambda$$

la fluctuation de la variance locale dans un segment de longueur L. La formule générale (170), compte tenu de l'algorithme (171), se met alors sous la forme :

$$(172) D^2(S^2) = 2 \overline{F(L)}^2 + \frac{4}{L^2} \int_0^L (L-x) \overline{\gamma(x)}^2 dx - \frac{8}{L^3} \int_0^L x^2 \chi(x) dx - \frac{8}{L^3} \int_0^L x(1-x) \chi(x) \chi(1-x) dx$$

Les fonctions auxiliaires χ et F ont ici pour expression

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi(x) = \frac{1}{\lambda + \frac{1}{2}} x^\lambda \\ F(x) = \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} x^\lambda \end{array} \right.$$

Le calcul de (172) est aisé. On trouve :

$$(173) D^2(S^2) = L^{2\lambda} \left[\frac{8}{(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2} + \frac{4}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)} - \frac{8}{(2\lambda+3)(\lambda+1)^2} - \frac{8}{(\lambda+1)^2} \frac{\overline{\Gamma(2+\lambda)}^2}{\Gamma(4+2\lambda)} \right]$$

On notera que la variance relative

$$\frac{D^2(S^2)}{\sigma^4} = \frac{D^2(S^2)}{F(L)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} - \frac{8}{(\lambda+1)^2} \frac{\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\lambda+\frac{5}{2})} \sqrt{\pi} 2^{-2\lambda-3} \\ = \frac{2^{-2\lambda} \sqrt{\pi}}{\lambda+1} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\frac{5}{2})} \end{array} \right\}$$

est indépendante de L, et ne dépend que de λ .

$$\frac{D^2(S^2)}{\sigma^4} = 2 + \frac{1}{2} \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)^2}{1+2\lambda} - \frac{2(\lambda+2)^2}{2\lambda+3} - 2 \frac{\overline{\Gamma(\lambda+3)}^2}{\Gamma(4+2\lambda)}$$

Pour $\lambda = 1$ (variogramme linéaire pur), on trouve une variance relative de $\frac{4}{5}$

$$\frac{D^2(S^2)}{\sigma^4} = \frac{4}{5}$$

Les fluctuations auront, en général, une ampleur considérable, et la variance locale n'aura qu'un rapport assez lointain avec sa valeur théorique. Il ne faudra pas s'étonner d'observer des variances très différentes dans des panneaux de même taille. Parmi les moments d'ordre 2, il semble bien que seuls les premiers points du variogramme présentent quelque fidélité, et puissent permettre de tester le caractère intrinsèque.

8-6- L'estimation de la variance locale : le biais

Soit un domaine V , en n points M_i duquel on connaît les valeurs y_i de la variable $f(M)$. On se propose d'estimer la variance locale S_V^2 :

$$(172) \quad S_V^2 = \frac{1}{V^2} \int_V \varepsilon(MP) \varepsilon(MP') dM dP dP'$$

à l'aide de la variance expérimentale S_e^2 , calculée à partir des y_i disponibles :

$$(173) \quad S_e^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{ijk} \varepsilon(M_i M_j) \varepsilon(M_i M_k)$$

La première remarque que l'on puisse faire est qu'une telle estimation est nécessairement biaisée. En effet, les valeurs probables σ_V^2 et σ_e^2 de S_V^2 et S_e^2 ne coïncident pas, puisque l'on a :

$$(174) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_V^2 = E(S_V^2) = \frac{1}{V^2} \int_V \gamma(MM') dM dM' \\ \sigma_e^2 = E(S_e^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{ij} \gamma(M_i M_j) \end{array} \right.$$

Ce biais est de même nature que celui qui apparaît dans la théorie classique de l'estimation des variances. On le voit en supposant les points M_i et M_j implantés au hasard dans V . Pour $i \neq j$, $\gamma(M_i M_j)$ est remplacé par sa valeur probable relativement au tirage au sort de M_i et M_j , et celle-ci est égale à σ_V^2 . Mais pour $i = j$, $\gamma(M_i M_i)$ est nul, de sorte que l'on a, comme dans le cas classique :

$$E(S_e^2) = \frac{n-1}{n} \sigma_V^2$$

Mais si les points M_i ne sont pas implantés au hasard, cette relation cesse d'être vraie. Le biais est donné par :

$$(175) \quad \sigma_V^2 - \sigma_e^2 = \frac{1}{V^2} \int_V \gamma(MM') dM dM' - \frac{1}{n^2} \sum_{ij} \gamma(M_i M_j)$$

Cette expression du biais se présente comme la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée d'un intégrale portant sur $\gamma(h)$. Elle évoque une variance d'estimation. De fait, dans le cas particulier où les points M_i sont implantés au hasard, le biais est égal à :

$$\sigma_V^2 - \sigma_e^2 = \frac{1}{n} \sigma_V^2$$

c'est-à-dire, précisément, à la variance d'estimation σ_n^2 associée à cette implantation aléatoire. Dans le cas d'une implantation aléatoire stratifiée, on vérifie aisément que le biais est encore égal à la variance d'estimation correspondante.

Dans le cas d'une maille régulière, chaque M_i étant implanté au centre de sa zone d'influence v_i , il ne peut plus, cependant, en être ainsi : la formule (175) diffère de la formule (112), notamment par l'absence du terme représentant globalement la covariance des M_i et de V . De fait, (175) s'applique aussi bien à une maille régulière implantée, dans son ensemble, de manière quelconque dans V , les M_i n'étant plus au centre de leurs zones d'influence (schéma dit à champ fixe et implantation flottante). Ainsi le biais ressemble davantage à une variance d'estimation transitive qu'à une variance d'estimation intrinsèque.

Précisons ce point. Le volume V est supposé constitué par la réunion de n volumes v_i égaux entre eux et translatés les uns des autres. A ce volume est associé un covariogramme transitif $K(h)$. L'algorithme (31) nous permet de mettre l'intégrale, figurant dans (175), sous la forme :

$$\frac{1}{V^2} \int_V \gamma(MM') dM dM' = \frac{1}{V^2} \int K(h) \gamma(h) dh$$

D'autre part, les vecteurs $M_i M_j$ sur lesquels porte la somme double de (175) sont de la forme $\sum_{\mathbf{p}} k_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$, les $k_{\mathbf{p}}$ étant des entiers quelconques, et les $a_{\mathbf{p}}$ les vecteurs de base de la maille. Mais le nombre de couples $M_i M_j$ pour lesquels

le vecteur $M_i M_j$ est égal à un vecteur $\sum_I k_I a_I = k a$ est justement égal à $\frac{1}{V} K(ka)$.

De sorte que nous avons aussi :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{ij} \gamma(M_i M_j) = \frac{v}{v^2} \sum_k K(ka) \gamma(ka)$$

Ainsi, (175) peut s'écrire :

$$\sigma_V^2 - \sigma_e^2 = \frac{1}{v^2} \int K(h) \gamma(h) dh - \frac{v}{v^2} \sum_k K(ka) \gamma(ka)$$

Au facteur $\frac{1}{v^2}$ près, on reconnaît l'expression de la variance d'estimation transitive $\sigma^2(a)$ associée à la maille vectorielle $a = (a_1, a_2, \dots)$ et au covariogramme $-K(h)\gamma(h)$,

D'autre part, si nous nous reportons à la formule (40), nous voyons que la fonction

$$g(h) = K(h) \left[m^2 + \sigma_V^2 \right] - K(h) \gamma(h)$$

est, en valeur probable, le covariogramme associé à la représentation transitive de la régionalisation obtenue en découpant un champ égal à V au sein de la régionalisation intrinsèque. A la maille a donnée, ce covariogramme fait correspondre la variance d'estimation transitive de la quantité de métal en V :

$$\sigma^2(a) = v \sum_k g(ka) - \int g(h) dh$$

Mais, comme le champ V est égal à la réunion des zones d'influence v_i , la variance transitive d'estimation du volume est nulle pour cette maille a

$$v \sum_k K(ka) - \int K(h) dh = 0$$

et la variance $\sigma^2(a)$ s'écrit simplement :

$$\sigma^2(a) = \int K(h) \gamma(h) dh - v \sum_k K(ka) \gamma(ka)$$

D'où le résultat :

$$(176) \quad \sigma_V^2 - \sigma_e^2 = \frac{\sigma^2(a)}{v^2}$$

Le deuxième membre représente la variance d'estimation sur la teneur moyenne du volume V constitué par la réunion des zones d'influence v_i , lorsque le réseau de prélèvements, à maille régulière a est implanté, dans son ensemble, de manière quelconque dans V . Dans une telle implantation, l'un des prélèvements peut être considéré comme implanté au hasard dans sa zone d'influence, tous les autres prélèvements étant ensuite implantés aux points du réseau ayant ce premier point comme origine. Un tel schéma est dit à champ fixe et implantation flottante.

Ainsi, nous pouvons énoncer : "le biais $\sigma_V^2 - \sigma_e^2$ est égal à la variance d'estimation calculée en champ fixe et implantation flottante". On notera que ce biais, toujours positif, est minimum pour une maille adaptée.

8-7- L'estimation de la variance locale : la dispersion.

Il nous faut maintenant examiner la dispersion de la variance expérimentale corrigée du biais relativement à la variance locale. Elle sera représentée par la variance :

$$(177) \quad D^2 \left[S_V^2 - S_e^2 \right] = D^2(S_V^2) + D^2(S_e^2) - 2 \left[E(S_V^2 S_e^2) - E(S_V^2) E(S_e^2) \right]$$

Les variances $D^2(S_V^2)$ et $D^2(S_e^2)$ ont déjà été calculées en (170) et (169). Il reste à calculer l'expression entre crochet, qui n'est autre que la covariance de S_V^2 et S_e^2 . Compte tenu de (172) et (173), nous avons en premier lieu :

$$S_V^2 S_e^2 = \frac{1}{n^3 V^3} \sum_{ijk} \int_{V^3} \varepsilon(M_j M_i) \varepsilon(M_k M_i) \varepsilon(PM) \varepsilon(P'M) dM dM dP dP'$$

Passons aux valeurs probables. On trouve (toujours dans le cas gaussien), en appliquant (153) :

$$\begin{aligned} E \left[\varepsilon(M_j M_i) \varepsilon(M_k M_i) \varepsilon(PM) \varepsilon(P'M) \right] &= E \left[\varepsilon(M_j M_i) \varepsilon(M_k M_i) \right] E \left[\varepsilon(PM) \varepsilon(P'M) \right] \\ &+ E \left[\varepsilon(M_j M_i) \varepsilon(PM) \right] E \left[\varepsilon(M_k M_i) \varepsilon(P'M) \right] \\ &+ E \left[\varepsilon(M_j M_i) \varepsilon(P'M) \right] E \left[\varepsilon(M_k M_i) \varepsilon(PM) \right] \end{aligned}$$

Par sommation en ijk et intégration en PP' et M , le premier terme donne $E(S_V^2) E(S_e^2)$, tandis que les deux autres, par symétrie, conduisent à une seule et même valeur. Il suffit donc de calculer un seul d'entre eux, à l'aide de la formule générale (7), soit :

$$E \left[\varepsilon(M_j M_i) \varepsilon(PM) \right] E \left[\varepsilon(M_k M_i) \varepsilon(P'M) \right] = \left[\gamma(M_j M) + \gamma(M_i P) - \gamma(M_j P) - \gamma(M_i M) \right] \\ \times \left[\gamma(M_k M) + \gamma(M_i P') - \gamma(M_k P') - \gamma(M_i M) \right]$$

En développant le produit des crochets du second membre, on fait des termes de quatre types : $\gamma(MM_i) \gamma(MM_j)$, $\gamma(MM_i) \gamma(P'M_i)$, $\gamma(MM_i) \gamma(PM_j)$ et $\overline{\gamma(MM_i)^2}$. Les termes de même espèce, après sommation et intégration, conduisent à une même valeur. Des simplifications se produisent et, finalement, chacune de ces quatre valeurs ne subsiste qu'une fois, avec le signe - pour les deux premières, et le signe + pour les deux dernières. On obtient ainsi la covariance cherchée sous la forme :

$$(178) \quad \left\{ \begin{aligned} E(S_V^2 S_e^2) - E(S_V^2) E(S_e^2) &= - \frac{2}{nV^2} \sum_{ij} \int_V \gamma(MM_i) \gamma(MM_j) dM - \frac{2}{nV^2} \sum_i \int_V \gamma(MM_i) \gamma(M'M_i) dM dM' \\ &+ \frac{2}{nV^2} \sum_{ij} \int_V \gamma(MM_i) \gamma(M'M_j) dM dM' + \frac{2}{nV} \sum_i \int_V \overline{\gamma(MM_i)^2} dM \end{aligned} \right.$$

On notera la simplification

$$\frac{1}{2V^2} \sum_{ij} \int_V \gamma(MM_i) \gamma(M'M_j) dM dM' = \left[\frac{1}{nV} \sum_i \int_V \gamma(MM_i) dM \right]^2$$

Cette expression est liée étroitement à la variance d'estimation σ_n^2 de V par les points M_i . La formule générale (112) donne, en effet :

$$\sigma_n^2 = \frac{2}{nV} \sum_i \int_V \gamma(M_i M) dM - \sigma_e^2 - \sigma_V^2$$

d'où l'on tire :

$$\frac{4}{n^2 V^2} \left[\sum_i \int_V \gamma(M_i M) dM \right]^2 = \left[\sigma_n^2 + \sigma_V^2 + \sigma_e^2 \right]^2$$

Compte tenu de cette simplification, reportons (178), (170), et (169) dans (177).
 Nous obtenons ainsi la dispersion de la variance expérimentale relativement à la
 variance locale sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 (179) \quad & \left\{ D^2 \left[S_V^2 - S_e^2 \right] = (\sigma_V^2 - \sigma_e^2)^2 - 2 \sigma_n^2 (\sigma_V^2 + \sigma_e^2) - \sigma_n^4 \right. \\
 & + \frac{2}{V^2} \int \sqrt{\gamma(MM^0)}^2 dM dM^0 + \frac{2}{n^2} \sum_{ij} \overline{\gamma(M_i M_j)}^2 - \frac{4}{nV} \sum_i \int \sqrt{\gamma(MM_i)}^2 dM \\
 & - \frac{4}{V^3} \int \sqrt{\gamma(MP)} \sqrt{\gamma(MP^0)} dM dP dP^0 - \frac{4}{n^3} \sum_{ijk} \gamma(M_i M_j) \gamma(M_i M_k) \\
 & \left. + \frac{4}{Vn} \sum_i \int \sqrt{\gamma(MM_i)} \sqrt{\gamma(M^0 M_i)} dM dM^0 + \frac{4}{nV} \sum_{ij} \int \sqrt{\gamma(MM_i)} \sqrt{\gamma(MM_j)} dM \right\}
 \end{aligned}$$

G. MATHERON

Juin 1963