

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 50

PROCESSUS MARKOVIENS NORMAUX STATIONNAIRES à n DIMENSIONS

G. MATHERON

Novembre 1963

PROCESSUS MARKOVIENS NORMAUX STATIONNAIRES A n DIMENSIONS

1.- Définitions

Soit une fonction aléatoire $f(x)$, telle que toutes les lois de répartition simultanées $F(f_1 \dots f_k; x_1 \dots x_k)$ des valeurs prises par $f(x)$ en k points quelconques soient Gaussiennes. Nous nous limiterons au cas stationnaire, c'est-à-dire au cas où les lois F sont invariantes par translation. Ces lois gaussiennes sont entièrement déterminées si l'on connaît la valeur probable

$$m = E [f(x)]$$

et la covariance

$$K(h) = E [f(x+h) f(x)] - m^2$$

Nous supposons que m et $K(h)$ existent effectivement, c'est-à-dire que la fonction aléatoire $f(x)$ a une variance finie, et nous prendrons d'ailleurs

$$(1) \quad m = 0$$

ce qui ne diminue en rien la généralité. Le cas, considéré dans la théorie intrinsèque, où $K(h)$ n'existe pas, mais où les accroissements de $f(x)$ ont une variance finie, pourra être traité par passage à la limite.

Dans l'espace à n dimensions, la fonction aléatoire $f(x)$ sera dite markovienne si, une fois connues les valeurs prises par $f(x)$ sur toute hypersurface S fermée à $n-1$ dimensions, il y a indépendance entre $f(x_0)$ et $f(x')$, pour tous points x_0 et x' l'un intérieur et l'autre extérieur à S .

Comme $f(x)$ est gaussienne, cette indépendance est assurée dès lors qu'il y a une corrélation nulle, et il suffit pour cela que la valeur probable de $f(x_0)$,

une fois fixées les valeurs prises par la fonction sur S , ne soit pas modifiée si l'on connaît en outre x' .

Lorsque les valeurs $f_i = f(x_i)$ prises par $f(x)$ en k points x_i sont fixés, la valeur probable de $f(x_0)$ est de la forme :

$$(2) \quad E [f(x_0); f_i] = \sum_i \alpha_i f_i$$

Les coefficients α_i sont constants et se déterminent en écrivant que la variance résiduelle est minimale. Cette variance a pour expression :

$$K(0) - 2 \sum_i \alpha_i K(x_0 - x_i) + \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j K(x_i - x_j)$$

Elle est minimale lorsque les α_i vérifient le système :

$$(3) \quad \sum_j \alpha_j K(x_i - x_j) = K(x_i - x_0)$$

On voit que l'équation (3), à laquelle conduit la théorie de la régression des variables gaussiennes, ne diffère des équations de la théorie intrinsèque du krigeage que par l'absence de la condition supplémentaire

$$\sum_i \alpha_i = 1$$

Et, en effet, la valeur probable a priori $m = 0$ existe, contrairement à ce qui est supposé en intrinsèque. L'équation (2) est une moyenne pondérée des $k + 1$ valeurs f_i et m , le coefficient de m étant $1 - \sum \alpha_i$. Puisque m existe, on doit en tenir compte, ce qui est fait implicitement dans l'équation (2).

Si, au lieu de k points x_i , l'on dispose d'un domaine continu V en tout point duquel $f(x)$ est connue, (3) est remplacée par l'équation intégrale :

$$(4) \quad \int_V \alpha(x) K(x' - x) dx = K(x' - x_0)$$

qui doit être vérifiée pour tout point x' appartenant à V .

Si le domaine V est une hypersurface fermée S , (4) devient :

$$(5) \quad \int_S \alpha(x) K(x'-x) dS = K(x'-x_0)$$

et cette équation doit être vérifiée pour tout point x' de l'hypersurface S .

Le point x_0 étant, par exemple, supposé appartenir au domaine extérieur de S , on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit markovienne est que l'équation (5) soit vérifiée non seulement pour tout point x' de S , mais également pour tout point x' intérieur à S . Nous nous proposons de déterminer les fonctions de covariance $K(h)$ vérifiant cette condition nécessaire et suffisante, et par là-même de déterminer tous les processus normaux stationnaires et markoviens possibles dans l'espace à n dimensions. Nous rechercherons en premier lieu une condition nécessaire que doit vérifier $K(h)$ si le processus est markovien, et nous montrerons ensuite que cette condition est suffisante.

2.- Recherche d'une condition nécessaire

Le processus étant markovien, prenons pour S l'hyperplan de coordonnées (x_2, \dots, x_n) . Pour abréger les notations, nous désignerons par x la coordonnée x_1 et par $y = (x_2, \dots, x_n)$ les $n-1$ dernières coordonnées. Un point quelconque de l'espace est caractérisé par ses coordonnées (x, y) , et l'hyperplan S est défini par l'équation

$$x = 0$$

De même, en ce qui concerne les transformées de Fourier, nous poserons $u = u_1$ et $v = (u_2, \dots, u_n)$, de sorte que le point (u_1, u_2, \dots, u_n) sera représenté par (u, v) .

Soient alors deux points (x_0, y_0) et (x', y') situés de part et d'autre de S :

Par exemple, prenons :

$$(6) \quad \begin{cases} x_0 > 0 \\ x' < 0 \end{cases}$$

Lorsque les valeurs de $f(0,y)$, prises par f sur S , sont connues, la valeur probable de $f(x_0)$ est de la forme :

$$E [f(x_0) | S] = \int \alpha(y) f(0,y) dy$$

La fonction $\alpha(y) = \alpha(x_2, \dots, x_n)$ est solution de l'équation intégrale :

$$(7) \quad \int \alpha(y) K(0, y' - y) dy = K(x_0, y_0 - y')$$

vérifiée pour tout point $(0, y')$ de S . Si $f(x)$ est markovien, la solution $\alpha(y)$ de (7) doit vérifier également

$$(8) \quad \int \alpha(y) K(x', y' - y) dy = K(x' - x_0, y' - y_0)$$

pour tout point (x', y') vérifiant $x' < 0$

Soient $\chi(u, v)$ la transformée de Fourier de $K(x, y)$.

$$(9) \quad \chi(u, v) = \iint K(x, y) e^{-2i\pi(ux + vy)} dx dy$$

et $H(x, v)$ la transformée partielle de $K(x, y)$, prise en y seulement :

$$(10) \quad H(x, v) = \int K(x, y) e^{-2i\pi v y} dy$$

De (9) et (10) résulte, en prenant l'inverse de Fourier en u de $\chi(u, v)$:

$$(11) \quad H(x, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(u, v) e^{2i\pi u x} du$$

Soit enfin $A(v)$ la transformée (en y) de $\alpha(y)$. L'équation (7), qui est un produit de convolution dans S , donne, en prenant la transformée de Fourier en y' des deux membres :

$$(12) \quad A(v) H(0, v) = e^{-2\pi i y_0 v} H(-x_0, v)$$

De même, (8) donne :

$$(13) \quad A(v) H(x', v) = e^{-2\pi i y_0 v} H(x' - x_0, v)$$

Pour que $f(x)$ soit markovien, il faut que (12) entraîne (13) pour tous les nombres x' , x_0 vérifiant (6), ou les inégalités opposées. Autrement dit, on doit avoir :

$$\frac{H(x' - x_0, v)}{H(x', v)} = \frac{H(-x_0, v)}{H(0, v)} = C(v, x_0)$$

C , fonction de x_0 et de v seulement, est indépendante de x' . Prenons la dérivée logarithmique par rapport à x' : on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} \log H(x' - x_0, v) = \frac{\partial}{\partial x} \log H(x', v)$$

Par suite, il existe une fonction $C_1(v)$ telle que l'on ait, pour tout $x < 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} \log H(x, v) = C_1(v)$$

D'où l'on tire immédiatement, pour $x < 0$

$$(14) \quad H(x, v) = A_1(v) e^{-|x| C_1(v)}$$

En prenant, au lieu de (6), les inégalités inverses, on établit de la même manière que, pour $x > 0$, $H(x, v)$ est de la forme

$$(15) \quad H(x, v) = A_2(v) e^{-x C_2(v)}$$

$A_2(v)$ et $C_2(v)$ étant deux fonctions de v , non nécessairement identiques à $A_1(v)$ et $C_1(v)$. C_1 et C_2 ont leurs parties réelles positives, pourvu simplement que $K(x,y)$ soit une fonction à croissance lente. En effet, $H(x,v)$ est alors nécessairement une distribution tempérée, et cela exclut une croissance en $e^{|x|}$. Du reste $K(x,y)$, fonction continue de type positif, est nécessairement à croissance lente, de sorte que C_1 et C_2 ont bien leurs parties réelles positives, et que l'on peut prendre la transformée de Fourier en x de $H(x,v)$. On a, par suite :

$$\begin{aligned} \chi(u,v) &= A_1(v) \int_{-\infty}^0 e^{-|x|C_1(v)-2i\pi ux} dx + A_2(v) \int_0^{\infty} e^{-x C_2(v)-2i\pi ux} dx \\ &= \frac{A_1(v)}{C_1(v)-2i\pi u} + \frac{A_2(v)}{C_2(v)+2i\pi u} \end{aligned}$$

A_1, C_1, A_2, C_2 , sont des fonctions complexes de v . Cependant, comme $K(x,y)$ est réelle et paire, $\chi(u,v)$ doit être également réelle et paire. Il en résulte que A_2 et C_2 sont les conjuguées de A_1 et C_1 . Désignons par A et B les parties réelles et imaginaires de A_1 , et par C et D celles de C_1 , qui sont des fonctions de v . On obtient pour $\chi(u,v)$ une expression de la forme

$$\chi(u,v) = 2 \frac{AC + BD - 2\pi B u}{C^2 + (D - 2\pi u)^2}$$

ou encore, en changeant les notations :

$$(16) \quad \chi(u,v) = \frac{A(v) + u B(v)}{C(v) + [u + D(v)]^2}$$

Le rôle privilégié que joue la coordonnée $u = u_1$ dans cette expression résulte naturellement du fait que l'on a pris pour S le plan des coordonnées $y = (x_2, \dots, x_n)$. Mais la propriété markovienne doit être vérifiée si l'on prend pour S un plan quelconque passant par l'origine. Autrement dit, si l'on effectue sur les u_1 une transformation linéaire quelconque, $\chi(u,v)$ doit rester de la forme (16). Cela n'est possible que si le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degré 1 et 2 relativement aux u_1 . Reprenant les notations de l'espace à n dimensions, on a donc :

$$\chi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\sum a_i u_i + b}{\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j u_i u_j + \sum_i \mu_i u_i + c}$$

Mais χ doit être une fonction paire, et cela implique $a_i = \mu_i = 0$.
Il reste une expression de la forme :

$$(17) \quad \chi(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j u_i u_j + c^2}$$

Comme χ doit être non négative, la forme quadratique

$$Q(u_i, u_j) = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j u_i u_j$$

doit être elle-même non négative. En effectuant sur les u_i une transformation linéaire homogène convenable, la forme quadratique Q se ramène à une somme de carrés. Si Q est définie positive, elle se ramène à la forme :

$$(18) \quad Q = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$$

Si elle est simplement non négative, on obtient un nombre $k < n$ de composantes :

$$(19) \quad Q = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_k^2$$

À toute transformation linéaire homogène effectuée sur les u_i correspond, par dualité, une transformation associée effectuée sur les x_i . Ainsi, on obtiendra, à une transformation linéaire près, toutes les fonctions de covariance markoviennes possibles $K(x_i)$ en prenant la transformée de Fourier de :

$$\chi(u_i) = \frac{1}{u_1^2 + \dots + u_k^2 + c^2} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Pour $k = n$, on obtiendra une fonction isotrope de l'espace à n dimensions. Pour $k < n$, on obtient des fonctions dégénérées, isotropes dans le sous-espace des k premières coordonnées et indépendantes des $n-k$ autres coor-

données, c'est-à-dire des modèles d'anisotropies zonales.

Solution non dégénérée. Prenons d'abord $k = n$. Toutes les covariances $K(h)$ possibles se déduisent, par transformations linéaires homogènes des coordonnées, de la solution isotrope.

$$(20) \quad K(r) = \mathcal{F}_n \frac{A}{\rho^2 + C^2}$$

On obtient les fonctions de Bessel modifiées de 2ème espèce d'ordre $\frac{n}{2} - 1$:

$$K(r) = 2\pi A(C)^n (Cr)^{1-\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}-1}(2\pi Cr)$$

Les constantes A et C étant arbitraires, nous écrirons simplement :

$$(21) \quad K(r) = B(Cr)^{1-\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}-1}(Cr)$$

Pour $n = 1$, on retrouve l'exponentielle e^{-Cr} que donne la théorie classique des processus markoviens stationnaires normaux à une dimension. Pour $n = 2$, on obtient la fonction d'ordre zéro, $K_0(Cr)$, caractérisée par son comportement logarithmique à l'origine. Pour $n = 3$, on obtient $\frac{e^{-Cr}}{r}$ etc ... On notera que les solutions ainsi obtenues pour $n > 1$ concernent des distributions aléatoires, et non plus des fonctions.

Le cas limite $C = 0$ correspond à la théorie intrinsèque. En effet, d'après (20), on obtient pour $C = 0$ et $n \neq 1$

$$K(r) = \frac{B}{r^{n-2}}$$

et, pour $n = 2$

$$K(r) = B \log \frac{1}{r}$$

c'est-à-dire, d'après la théorie du krigeage continu, les fonctions intrinsèques à caractère markovien. Pour $C = 0$, $K(r)$ est harmonique. Pour C quelconque, il résulte de (20) que $K(r)$, d'expression (21), vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$(22) \quad K(r) - \frac{1}{C^2} \Delta K(r) = B C^{-n} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta(x)$$

En particulier, pour $r \neq 0$, on a :

$$(23) \quad \Delta K(r) = C^2 K(r)$$

Solutions dégénérées. Pour $k < n$, on obtient de la même façon :

$$(24) \quad K\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}\right) = B(C \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2})^{1 - \frac{k}{2}} K_{\frac{k}{2} - 1}\left(C \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}\right)$$

Dans le sous-espace à k dimensions des $x_1 \dots x_k$, cette solution est isotrope et coïncide avec la solution (21) écrite pour $n = k$. Dans son extension à l'espace à n dimensions, elle engendre une zonalité. La fonction aléatoire $f(x)$ conserve des valeurs constantes sur les hyperplans à $n-k$ dimensions parallèles à l'hyperplan des coordonnées $(x_{k+1} \dots x_n)$. Par transformation linéaire des coordonnées, on déduit de (24) la solution générale présentant une zonalité d'ordre $n-k$ parallèlement à un hyperplan quelconque de dimension $n-k$.

3.- Démonstration de la réciproque.

Il reste à montrer que les covariances (21) ou (24), et celles que l'on peut en déduire par transformation linéaire des coordonnées, possèdent effectivement le caractère markovien. Démontrons le pour (21), la démonstration étant identique pour (24). D'après (23), $K(r)$ est une solution isotrope de l'équation

$$(25) \quad \Delta \Phi = C^2 \Phi$$

Les solutions de l'équation (25) vérifient un théorème d'unicité qui s'énonce ainsi : étant donné une hypersurface fermée S à $n-1$ dimensions, il existe au plus une fonction régulière Φ vérifiant (25) pour tout point intérieur à S et prenant sur S des valeurs déterminées.

Pour établir ce théorème, il suffit de montrer que seule la fonction $\Phi \equiv 0$ vérifie (25) à l'intérieur de S et s'annule identiquement sur S . Cela résulte de la formule classique de Green. Désignons par V l'intérieur de S , et par Φ et ψ deux fonctions régulières, cette formule nous donne :

$$(26) \quad \int_V [\Phi \Delta \psi - \psi \Delta \Phi] dx = - \int_S \left[\Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] dS$$

n représentant la normale intérieure à S . Si Φ vérifie (25) et s'annule identiquement sur S , et si ψ est une solution quelconque de (25), le premier membre de (26) est identiquement nul ; par suite aussi, quelle que soit ψ vérifiant (26), on a :

$$\int_S \psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = 0$$

D'où l'on déduit, par un raisonnement classique, que $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ est nulle sur S . Soit alors une fonction ψ quelconque. Le deuxième membre de (26) étant nul, et Φ vérifiant (25), on a :

$$\int_V \Phi [\Delta \psi - c^2 \psi] dx = 0$$

Comme ψ est quelconque, on en déduit que Φ est identiquement nul dans V , d'où résulte le théorème d'unicité.

Montrons que la fonction bessélienne (21) possède bien le caractère markovien dans l'espace à n dimension. Soit une hypersurface S fermée, V le domaine intérieur de S , et x_0 un point extérieur à S . Désignons par $\alpha(x)$ la solution de l'équation intégrale (5), c'est-à-dire une fonction vérifiant

$$(27) \quad \int_S \alpha(x) K(x' - x) dS = K(x' - x_0)$$

pour tout point x' de S . Considérons la fonction :

$$\bar{\Phi}(x') = \int_S \alpha(x) K(x'-x) dS$$

Sur S , elle coïncide avec $K(x'-x_0)$. Si x' est un point intérieur à S , on a :

$$(\Delta - c^2) \bar{\Phi}(x') = \int_S \alpha(x) [\Delta - c^2] K(x'-x) dS \equiv 0$$

puisque, tant que x' est intérieur à S , $(\Delta - c^2)K(x'-x)$ est nul d'après (22). Mais, x' étant intérieur et x_0 extérieur, on a également

$$(\Delta - c^2) K(x'-x_0) = 0$$

Autrement dit, $\bar{\Phi}(x')$ et $K(x'-x_0)$ vérifient la même équation (25) dans l'intérieur de S , et coïncident sur S d'après (27). Le théorème d'unicité montre que ces deux fonctions sont identiques (dans l'intérieur de S).

$$\bar{\Phi}(x') \equiv K(x'-x_0)$$

et par suite $K(h)$ possède effectivement la propriété markovienne.

4.- Détermination directe de $\alpha(x)$ sur un hyperplan.

Il est instructif de déterminer explicitement la fonction de pondération $\alpha(y)$, solution de l'équation intégrale (7), lorsque $K(r)$ est la solution isotrope

$$(28) \quad K(r) = (Cr)^{1-\frac{n}{2}} \frac{K_{\frac{n}{2}-1}(Cr)}{2-1}$$

En reprenant les mêmes notations qu'au paragraphe 2, et en prenant $y_0 = 0$, l'équation 7 s'écrit :

$$(29) \quad \int \alpha(y) K[C|y'-y|] dy = K\left(c\sqrt{x_0^2 + y'^2}\right)$$

Prenons la transformée de Fourier en y des deux membres de (29). Soit $A(v)$ la transformée de $\alpha(y)$. Celle de $K(|y|)$ est :

$$(30) \quad \mathcal{F}_{n-1} (Cr)^{1-\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}-1} (Cr) = \frac{2^{\frac{n}{2}-1} \pi^{\frac{n}{2}}}{c^{n-2} \sqrt{c^2 + 4\pi^2 v^2}}$$

On a écrit v^2 au lieu de $u_2^2 + \dots + u_n^2$, de même que y^2 dans (29) est mis pour $x_2^2 + \dots + x_n^2$. Cherchons maintenant la transformée en y de $K(c\sqrt{x_0^2 + y^2})$. Nous l'évaluerons, d'après (11), en prenant la transformée en x de $\mathcal{F}_n K(Cr)$. Or, on a :

$$\mathcal{F}_n (Cr)^{1-\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}-1} (Cr) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{c^{n-2} (c^2 + 4\pi^2 \rho^2)} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{c^{n-2} (c^2 + 4\pi^2 u^2 + 4\pi^2 v^2)}$$

Prenons la transformée en u de cette expression :

$$\begin{aligned} H(x, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{c^{n-2} (c^2 + 4\pi^2 u^2 + 4\pi^2 v^2)} e^{2\pi i u x} du \\ &= \frac{2^{\frac{n}{2}-1} \pi^{\frac{n}{2}}}{c^{n-2} \sqrt{c^2 + 4\pi^2 v^2}} e^{-|x| \sqrt{c^2 + 4\pi^2 v^2}} \end{aligned}$$

Appliquons ces résultats en transformant (29). Il vient :

$$A(v) \frac{2^{\frac{n}{2}-1} \pi^{\frac{n}{2}}}{c^{n-2} \sqrt{c^2 + 4\pi^2 v^2}} = H(x_0, v) = \frac{2^{\frac{n}{2}-1} \pi^{\frac{n}{2}}}{c^{n-2} \sqrt{c^2 + 4\pi^2 v^2}} e^{-|x_0| \sqrt{c^2 + 4\pi^2 v^2}}$$

D'où :

$$(31) \quad A(v) = e^{-|x_0| \sqrt{c^2 + 4\pi^2 v^2}}$$

En particulier, pour $v = 0$, on obtient le poids total, attribué aux données de S , ou intégrale de $\alpha(y)$ dans l'hyperplan S :

$$(32) \quad A(0) = \int \alpha(y) dy = e^{-c|x_0|}$$

Ce poids est toujours inférieur à 1, sauf si $C = 0$, c'est-à-dire dans le cas intrinsèque (krigeage continu). La décroissance, en fonction de la distance du point (x_0, y_0) à l'hyperplan S , est exponentielle. Dès que cette distance dépasse deux à trois fois l'inverse de C , la connaissance des données sur S est pratiquement sans influence sur ce qui se passe en (x_0, y_0) .

Pour déterminer explicitement $\alpha(y)$, il faut inverser (31) :

$$\alpha(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x_0| \sqrt{C^2 + 4\pi^2 v^2} + 2i\pi v y} dv$$

Pour faire ce calcul, nous poserons en premier lieu :

$$C^2 = 4\pi^2 u^2$$

et nous déterminerons la fonction auxiliaire

$$(33) \quad \beta(x, y; x_0) = \int e^{-2\pi|x_0| \sqrt{u^2 + v^2} + 2i\pi(ux+vy)} du dv$$

$\alpha(y)$ s'en déduit ensuite en prenant l'inverse de Fourier en x :

$$(34) \quad \alpha(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(x, y; x_0) \cdot e^{-2i\pi x y} dx$$

De (33), on déduit :

$$\beta(x, y; x_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{J}_n(2\pi x_0 \rho)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{n}{2}}(2\pi x_0 \rho) = x_0 \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(x_0^2 + y^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Portant ce résultat dans (34), on obtient l'expression de $\alpha(y)$:

$$\alpha(y) = \frac{x_0}{(x_0^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u \sqrt{x_0^2 + y^2} \right]^{\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}}(2\pi u \sqrt{x_0^2 + y^2})$$

Posons

$$r^2 = x_0^2 + y^2$$

r représentant la distance du point à estimer (x_0, y_0) , y_0 étant supposé nul, avec

le point courant y du plan S d'équation $x = 0$, sur lequel les valeurs de $f(x)$ sont disponibles, et remplaçons u par $\frac{c}{2\pi}$. Il vient :

$$(35) \quad \alpha(y) = 2^{1-\frac{n}{2}} \pi^{-\frac{n}{2}} \frac{x_0}{r^n} (Cr)^{\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}}(Cr)$$

Lorsque C tend vers 0, $(Cr)^{\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}}(Cr)$ tend vers la constante $2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\frac{n}{2})$.

On obtient donc, dans le cas markovien intrinsèque, c'est-à-dire lorsque la fonction intrinsèque $\gamma(r)$ est en $\frac{1}{r^{n-2}}$, ou $\log r$ pour $n = 2$, la fonction de pondération $\alpha(y)$ du krigeage continu sur un hyperplan à $n-1$ dimensions :

$$(36) \quad \alpha(y) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{x_0}{r^n}$$

En particulier, pour $n = 2$ (schéma de wijsien à 2 dimensions), on trouve $\frac{1}{\pi} \frac{x_0}{r^2}$, formule déjà obtenue dans la théorie du krigeage continu.

5.- Détermination de $\alpha(x)$ par la fonction de Green.

La covariance markovienne isotrope

$$K(r) = (Cr)^{1-\frac{n}{2}} K_{\frac{n-1}{2}}(Cr)$$

vérifie l'équation

$$(37) \quad (c^2 - \Delta) \Phi = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{c^{n-2}} \delta(x)$$

où $\delta(x)$ est la mesure de Dirac. Etant donnée une hypersurface fermée S et un point X_0 intérieur à S , on appellera fonction de Green associée à S et au point x_0 (supposé fixe) une fonction $G(x, x_0)$ nulle sur S et vérifiant à l'intérieur de S l'équation :

$$(38) \quad (c^2 - \Delta) G = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{c^{n-2}} \delta(x - x_0)$$

Prenons $\psi(x) = G(x, x_0)$ dans la formule de Green (26), $\bar{\Phi}$ étant une solution quelconque (régulière à l'intérieur de S) de :

$$(39) \quad (c^2 - \Delta) \bar{\Phi} = 0$$

On trouve

$$(40) \quad \bar{\Phi}(x_0) = \frac{c^{n-2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_S \bar{\Phi}(x) \frac{dG}{dn}(x, x_0) dS$$

Ainsi, la connaissance de la fonction de Green permet de déterminer la valeur en x_0 de la fonction $\bar{\Phi}(x)$ vérifiant (39) et prenant sur S des valeurs connues. Elle permet également de déterminer la solution $\alpha(x)$ de l'équation intégrale (5). Soit en effet x' un point extérieur à S. Prenons :

$$\begin{cases} \bar{\Phi}(x) = K(x-x') \\ \psi(x) = G(x, x_0) \end{cases}$$

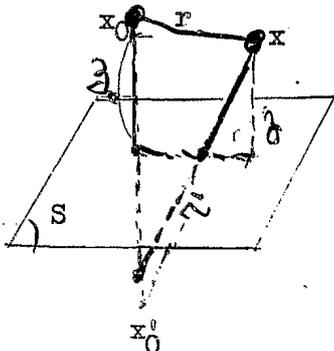
$\bar{\Phi}(x)$ est une solution de (39) régulière dans S (puisque x' est un point extérieur). L'application de (40) donne :

$$\bar{\Phi}(x_0) = K(x_0-x') = \frac{c^{n-2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_S K(x-x') \frac{dG}{dn}(x, x_0) dS$$

Il suffit de comparer à (5) pour en déduire :

$$(41) \quad \alpha(x) = \frac{c^{n-2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{d}{dn} G(x, x_0)$$

Exemple. Reprenons le cas, déjà traité au paragraphe (4), où S est un plan. Désignons



par y un point courant de S, et par r et r' les distances à x_0 et à son symétrique x'_0 d'un point quelconque x de l'espace, et limitons nous aux points x du demi espace supérieur (x et x_0 d'un même côté de S). La fonction

$$K(r) - K(r') = (Cr)^{\frac{1-n}{2}} K_{\frac{n}{2}-1}(Cr) - (Cr')^{\frac{1-n}{2}} K_{\frac{n}{2}-1}(Cr')$$

vérifie (38), et s'annule quand x vient sur S. On a donc :

$$G(x, x_0) = K(r) - K(r')$$

Désignons par z et z_0 les cotes de x et x_0 au dessus de S : de (41), on tire :

$$(42) \quad \alpha(x) = \frac{c^{n-2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{d}{dz} \left[K(r) - K(r') \right]_{(z=0)}$$

Or, on a

$$\frac{d}{dz} K(r) = \frac{z - z_0}{r} \frac{d}{dr} K(r)$$

$$\frac{d}{dz} K(r') = \frac{z + z_0}{r} \frac{d}{dr} K(r)$$

D'autre part, la fonction de Bessel $r^{-\lambda} K_{\lambda}(r)$ vérifie la relation

$$\frac{d}{dr} \left[r^{-\lambda} K_{\lambda}(r) \right] = - r^{-\lambda} K_{\lambda+1}(r)$$

D'où :

$$\frac{d}{dr} K(r) = \frac{d}{dr} \left[(Cr)^{1-\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}-1}(Cr) \right] = - C(Cr)^{1-\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}}(Cr)$$

Portons dans (42) :

$$\alpha(x) = - \frac{c^{n-2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} 2 \frac{z_0}{r} \left[\frac{d}{dr} K(r) \right]_{z=0} = \frac{2}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{z_0}{r^{\frac{n}{2}}} (Cr)^{\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}}(Cr)$$

Compte tenu de la symétrie $K_{\lambda} = K_{-\lambda}$ des fonctions de Bessel K_{λ} relativement à leur indice, on retrouve bien le résultat (35).

6.- Relation entre krigeage et régression linéaire.

Le krigeage nous est apparu comme un cas limite de la régression linéaire, de même que la théorie intrinsèque elle-même est un cas limite de la théorie des processus stationnaires d'ordre 2. Mais, en réalité, le rapport est plus étroit.

Dans les applications, en effet, la moyenne a priori m est inconnue, et doit être elle-même estimée à l'aide des valeurs numériques disponibles. Compte tenu de cet impératif, on peut voir que la régression linéaire conduit, inévitablement, aux mêmes équations que le krigeage.

Soient, en effet, $n+1$ variables aléatoires $f_0, f_i (i = 1, 2, \dots, n)$, de même moyenne m a priori et de covariance σ_{ij} . Il n'est pas utile de les supposer gaussiennes. Les f_i étant connues, la théorie de la régression linéaire se propose de constituer l'estimateur

$$(43) \quad f_0^* = \sum_i \alpha_i f_i + b$$

tel que la variance $D^2 [f_0 - f_0^*]$ soit minimale. Or on a :

$$D^2 [f_0 - f_0^*] = \sigma_0^2 - 2 \sum_i \alpha_i \sigma_{0i} + \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} + \left[m \left(1 - \sum_i \alpha_i \right) - b \right]^2$$

La condition du minimum s'exprime en annulant les dérivées en α_i et en b . L'équation en b donne simplement

$$(44) \quad b = m \left[1 - \sum_i \alpha_i \right]$$

L'équation en α_i , de son côté, donne :

$$\sum_j \alpha_j \sigma_{ij} = \sigma_{0i} + m \left(1 - \sum_i \alpha_i \right) - b$$

Soit, compte tenu de (44) :

$$(45) \quad \sum_j \alpha_j \sigma_{ij} = \sigma_{0i}$$

c'est-à-dire l'équation (3) que nous avons écrite directement dans le cas gaussien. Une fois résolu le système (45), on adopte l'estimateur :

$$(46) \quad f_0^* = \sum_i \alpha_i f_i + m \left[1 - \sum_i \alpha_i \right]$$

Mais m n'est pas connu, et doit être estimée à partir des f_i eux-

Après résolution de ce système, on obtient f_0^* sous la forme :

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0^* = \sum_i \left[\alpha_i + (1-A) \beta_i \right] f_i \\ (A = \sum_i \alpha_i) \end{array} \right.$$

Considérons le coefficient de f_i , soit :

$$\gamma_i = \alpha_i + (1-A) \beta_i = \alpha_i + \beta_i (1 - \sum \alpha_i)$$

Ces coefficients sont solutions d'un système linéaire facile à former. Multiplions (49) par $(1-A)$ et ajoutons membre à membre à (45). Il vient :

$$\sum_i \gamma_i \sigma_{ij} = \lambda(1-A) + \sigma_{ij}$$

De même multiplions la deuxième relation (49) par $(1-A)$ et ajoutons membre à membre à la deuxième relation (50). Il vient :

$$\sum \gamma_i = 1$$

Autrement dit, en remplaçant $\lambda(1-A)$ par λ' , l'estimateur

$$f_0^* = \sum_i \gamma_i f_i$$

se forme en calculant les coefficients γ_i à l'aide du système :

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \gamma_i \sigma_{ij} = \lambda' + \sigma_{0j} \\ \sum_i \gamma_i = 1 \end{array} \right.$$

Or les équations (51) sont identiques à celles du krigage. Compte tenu de la nécessité d'estimer m , la régression linéaire conduit bien, dans tous les cas, au procédé du krigage.

Dans ce raisonnement, on a admis que les covariances σ_{ij} étaient connues a priori. En fait, elles se déduisent d'une fonction de covariance $K(h)$, dont l'estimation pose un problème plus difficile. Mais on sait que les incidences de l'estima-

tion des moments du 2^{ème} ordre ne se répercutent que par des termes correctifs sur l'estimation des moments d'ordre 1.

Cas Gaussien

Dans le cas gaussien, le système (49), dont (51) découle comme nous l'avons vu, s'obtient directement par la méthode du maximum de vraisemblance. En effet, la densité de probabilité a priori des f_i est :

$$(52) \quad B \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{ij} \lambda_{ij} (f_i - m)(f_j - m) \right]$$

B étant une constante de normalisation, et les λ_{ij} constituant la matrice inverse des σ_{ij} :

$$(53) \quad \sum_j \lambda_{ij} \sigma_{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} +1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Remplaçons m par un estimateur m^* dans (52), et écrivons que la valeur numérique de m^* maximise cette expression. On obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial m^*} \sum_{ij} \lambda_{ij} (f_i - m^*)(f_j - m^*) = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial m^*} (f_i - m^* + f_j - m^*) \right] = 0$$

D'où l'on déduit l'estimateur du maximum de vraisemblance :

$$m^* = \frac{\sum_{ij} \lambda_{ij} f_j}{\sum_{ij} \lambda_{ij}}$$

Ce résultat s'écrit plus commodément :

$$(54) \quad \left. \begin{aligned} m^* &= \sum_j \beta_j f_j \\ \beta_j &= \frac{\sum_i \lambda_{ij}}{\sum_{ij} \lambda_{ij}} \end{aligned} \right\}$$

mêmes. S'agissant d'une théorie de la régression linéaire (c'est-à-dire d'une théorie qui ne veut faire intervenir que les moments d'ordre 1 et 2, et non les lois de répartitions elles-mêmes, et se limite par suite à des estimateurs linéaires), on doit prendre pour m^* un estimateur de la forme.

$$(47) \quad m^* = \mu + \sum_i \beta_i f_i$$

et déterminer les coefficients β_i et la constante μ par la condition de rendre minimale l'expression :

$$E \left[(m - m^*)^2 \right] = \left[\mu - m(1 - \sum \beta_i) \right]^2 + \sum_{ij} \beta_i \beta_j \sigma_{ij}$$

En annulant la dérivée en μ , on obtient :

$$\mu = m(1 - \sum \beta_i)$$

Il apparaît ainsi un cercle vicieux, puisque la moyenne m a priori doit figurer, par l'intermédiaire de μ , dans l'expression de l'estimateur m^* . Pour sortir de l'impasse, on doit s'imposer la condition a priori

$$(48) \quad \sum \beta_i = 1$$

qui donne $\mu = 0$. Il reste à exprimer que

$$\sum \beta_i \beta_j \sigma_{ij}$$

est minimum, compte tenu de (48), et cela conduit au système :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \beta_i \sigma_{ij} = \lambda \\ \sum_i \beta_i = 1 \end{array} \right.$$

Montrons que ces coefficients β_i vérifient le système (49). De la deuxième relation (54), on déduit, en premier lieu :

$$\sum_j \beta_j = 1$$

En deuxième lieu, on déduit de (53) :

$$\sum_j \beta_j \sigma_{ji} = \frac{1}{\sum_{ij} \lambda_{ij}} \sum_{kj} \lambda_{kj} \sigma_{ji} = \frac{\sum_k \delta_{ki}}{\sum_{ij} \lambda_{ij}} = \frac{1}{\sum_{ij} \lambda_{ij}} = \lambda'$$

La constante λ' est indépendante de i , de sorte que l'on retrouve bien le système (49).

Ainsi, dans le cas gaussien, ce n'est pas seulement la théorie de la régression linéaire, mais aussi la méthode plus puissante du maximum de vraisemblance qui conduit aux équations du krigeage.

G. MATHERON

Novembre 1963.