

B.R.G.M.

N-42 Bis

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 44

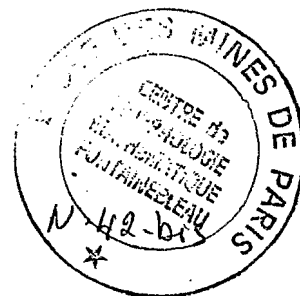
RECHERCHE D'OPTIMUM DANS L'ESTIMATION
DES PARAMETRES TECHNIQUES
ET ECONOMIQUES
=====

G. MATHERON
Ph. FORMERY

Mars 1963

BUREAU DE RECHERCHES GEOLOGIQUES
ET MINIERES

Département des Réserves



NOTE GEOSTATISTIQUE N° 44

RECHERCHE D'OPTIMUM DANS L'ESTIMATION
DES PARAMETRES TECHNIQUES ET ECONOMIQUES

par G. MATHERON et Ph. FORMERY

- 0 -

Mars 1963

RECHERCHE D'OPTIMUM DANS L'ESTIMATION
DES PARAMETRES TECHNIQUES ET ECONOMIQUES

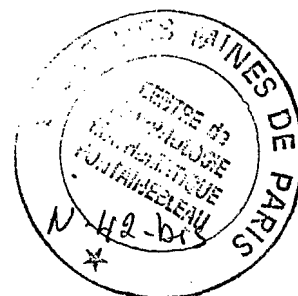
Introduction

Dans la Note n°41, nous avons donné une méthode qui permet de déterminer le volume optimal des travaux de reconnaissance dans le cas où les données techniques et économiques sont parfaitement connues. En fait, ces données technico-économiques sont toujours estimées avec une précision plus ou moins bonne, précision qui peut souvent être améliorée par des études supplémentaires. Il peut arriver, par exemple, dans le cas d'un gisement marginal, qu'une erreur, même légère, sur la prévision du rendement de laverie présente plus d'importance pratique qu'une erreur du même ordre affectant l'évaluation des réserves. En pareil cas - à dépenses égales - il sera plus intéressant de procéder à des essais de traitement plutôt qu'à des travaux de reconnaissance supplémentaires. Mais, naturellement, ces essais, eux aussi, coûtent cher, et la valeur de l'information qu'ils apportent doit être mise en balance avec leur prix de revient. Là encore, il doit exister un optimum. D'une manière plus générale, on doit mettre en balance le coût de tous les travaux (miniers, techniques, économiques) avec la valeur de l'information qu'ils apportent.

Tout comme dans la Note 41, nous examinerons ce problème de deux points de vue différents. En premier lieu, nous traiterons le cas où le risque de ruine est exclu, la certitude de la rentabilité ayant pu être établie. Dans ce cas, les erreurs affectant les paramètres technico-économiques - tout comme les erreurs commises dans l'estimation des réserves - conduisent à un dimensionnement de l'exploitation qui s'écarte légèrement de l'optimum. Il en résulte une perte, dont la valeur probable doit être comparée avec le coût des études et des travaux qui permettent de préciser les différents paramètres. En deuxième lieu, nous traiterons le problème du risque de ruine dans un schéma séquentiel généralisant celui de la Note 41.

BUREAU DE RECHERCHES GEOLOGIQUES
ET MINIERES

Département des Réserves



NOTE GEOSTATISTIQUE N° 44

RECHERCHE D'OPTIMUM DANS L'ESTIMATION
DES PARAMETRES TECHNIQUES ET ECONOMIQUES

par G. MATHERON et Ph. FORMERY

- o -

Mars 1963

En un point crucial C, cinq options, au lieu de trois, sont ici possibles :

- 1 - Fermer,
- 2 - Exploiter,
- 3 - Faire des études technico-économiques,
- 4 - Faire des travaux de reconnaissance,
- 5 - Faire à la fois des travaux de reconnaissance et des études économiques.

et les trois dernières entraînent, en aval, de nouveaux points cruciaux et de nouvelles options. Bien que la formulation devienne plus compliquée, le principe reste le même que dans la Note 41 : on calculera les cinq espérances mathématiques attachées aux cinq décisions possibles, et on adoptera la meilleure.

Les paramètres sont les mêmes que dans la Note 41, et sont désignés par les mêmes notations :

Paramètres géologiques : Tonnage T, teneur m et relation tonnage-teneur.

" techniques : teneur de coupure x, cadence d'exploitation t.

" Economiques : $p(t)$ = prix de revient à la tonne (exploitation et traitement).

$I(t)$ = investissements,

b = valeur du point de métal supplémentaire dans une tonne de minerai.

On notera que b est de la forme

$$b = 10 \rho C$$

où ρ est le taux de récupération du traitement, et C la valeur du kilo de métal contenu dans le concentré, telle qu'elle résulte des cours et de la formule de vente. Les deux variables ρ et C, l'une purement technique, l'autre purement économique, n'interviennent que par leur produit : et l'erreur sur b résulte de la composition

... / ...

de deux erreurs de nature très différente. La première peut être diminuée autant que l'on veut grâce à des essais de traitement, qui deviennent cependant vite assez onéreux. Quant à la deuxième, une fois effectuées les études prévisionnelles de cours, on n'a plus aucun moyen de la réduire. Il en résulte, en particulier, que l'erreur sur b ne pourra pas être abaissée en dessous d'une certaine limite inférieure non nulle.

I.- SOLUTION OPTIMALE VIS-A-VIS DU DIMENSIONNEMENT

La perte due à un mauvais dimensionnement est une expression du type :

$$(1) P = -\frac{1}{2} \left[B''_{T^2} \delta T^2 + 2 B''_{Tt} \delta T \delta t + B''_{t^2} \delta t^2 \right]$$

où δT et δt représentent les écarts de la solution $T = T_0 + \delta T$, $t = t_0 + \delta t$ vis-à-vis de la solution optimale T_0, t_0 obtenue en résolvant le système

$$\begin{matrix} B' \\ T \end{matrix} = \begin{matrix} B' \\ t \end{matrix} = 0$$

et où B représente le bénéfice

$$(2) B = (bm - p)T - I$$

Les deux écarts δT et δt sont la conséquence des erreurs commises dans l'estimation des réserves, d'une part, des paramètres économiques, de l'autre. Ces deux catégories d'erreurs sont en général indépendantes. Il en résulte, quand on remplace l'expression (1) de la perte par sa valeur probable, qu'il y a additivité des pertes entraînées par chacun des deux groupes d'erreurs : Autrement dit, on peut calculer la perte due aux erreurs sur b , p et I en supposant les réserves parfaitement connues, et lui ajouter la perte due aux erreurs sur les réserves, calculées comme si b , p et I étaient connues. Si P_{EC} et P_{TR} sont ces deux pertes, et

... / ...

R_{EC} et R_{TR} les coûts des études technico-économiques et des travaux de reconnaissance, on doit minimiser la somme

$$P_{EC} + P_{TR} + R_{EC} + R_{TR}$$

P_{EC} et R_{EC} dépendent uniquement des paramètres U_i mesurant l'intensité des études technico-économiques, tandis que P_{TR} et R_{TR} ne dépendent que des paramètres v_i fixant la dimension des travaux de reconnaissance. Le problème se scinde en deux. La résolution du système

$$\frac{\partial P_{TR}}{\partial v_i} + \frac{\partial R_{TR}}{\partial v_i} = 0$$

donne le volume optimal de la reconnaissance, qui correspond au minimum de $P_{TR} + R_{TR}$, comme dans la note 41. Et le système :

$$(3) \quad \frac{\partial P_{EC}}{\partial u_i} + \frac{\partial R_{EC}}{\partial u_i} = 0$$

qui se résout indépendamment du premier, donne le minimum de $P_{EC} + R_{EC}$, c'est-à-dire la solution optimale relativement aux recherches technico-économiques.

Pour calculer la perte P_{EC} , nous considérerons le bénéfice B sous une forme

$$(4) \quad B = B [T, t, a_1(T, t), a_2(T, t) \dots]$$

dépendant de T et t explicitement et par l'intermédiaire des fonctions économiques $a_i(T, t)$. Nous utiliserons les notations :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} B'_T = \frac{\partial B}{\partial T} + \sum_i \frac{\partial B}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial T} \\ B'_t = \frac{\partial B}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial B}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial t} \end{array} \right.$$

Des erreurs $\delta a_i(T, t)$ sur les fonctions $a_i(T, t)$ ont pour conséquence des écarts δT et δt entre la solution adoptée et la solution optimale définie par :

... / ...

$$(6) \quad B_{T1}^0 = B_t^0 = 0$$

Ces écarts se calculent en faisant varier le système (6) :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{T2}^{00} \delta T + B_{Tt}^{00} \delta t + \sum_i \frac{\partial B_{T1}^0}{\partial a_i} \delta a_i + \sum_i \frac{\partial B_{T1}^0}{\partial \left[\frac{\partial B_{T1}^0}{\partial T} a_i \right]} \frac{\partial}{\partial T} \delta a_i = 0 \\ B_{t2}^{00} \delta t^2 + B_{Tt}^{00} \delta T + \sum_i \frac{\partial B_t^0}{\partial a_i} \delta a_i + \sum_i \frac{\partial B_t^0}{\partial \left[\frac{\partial B_t^0}{\partial t} a_i \right]} \frac{\partial}{\partial t} \delta a_i = 0 \end{array} \right.$$

Comme B_{T1}^0 et B_t^0 sont linéaires en $\frac{\partial a_i}{\partial T}$ et $\frac{\partial a_i}{\partial t}$, on obtient :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{T2}^{00} \delta T + B_{Tt}^{00} \delta t = \sum_i \frac{\partial B_{T1}^0}{\partial a_i} \delta a_i - \sum_i \frac{\partial B_{T1}^0}{\partial a_i} \frac{\partial}{\partial T} \delta a_i = N_1 \\ B_{Tt}^{00} \delta T + B_{t2}^{00} \delta t = - \sum_i \frac{\partial B_t^0}{\partial a_i} \delta a_i - \sum_i \frac{\partial B_t^0}{\partial a_i} \frac{\partial}{\partial t} \delta a_i = N_2 \end{array} \right.$$

et la perte résultante se met sous la forme :

$$P = - \frac{1}{2} \left[N_1 \delta T + N_2 \delta t \right]$$

En résolvant (7) en δT et δt , il vient :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = - \frac{1}{2D} \left[2 N_1 N_2 B_{Tt}^{00} - N_1^2 B_{t2}^{00} - N_2^2 B_{T2}^{00} \right] \\ D = \frac{B_{Tt}^{00}}{B_{T2}^{00}} - B_{Tt}^{00} B_{t2}^{00} \end{array} \right.$$

Si B a l'expression (2) - non actualisée, puisqu'il s'agit ici d'une optimisation à caractère technique - les dérivées ont les expressions suivantes :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_t^0 = -Tp^0 - I^0 \\ B_{T1}^0 = bx - p \\ B_{t2}^{00} = -Tp^{00} - I^{00} \\ B_{Tt}^{00} = -p^0 \\ B_{T2}^{00} = b \frac{dx}{dT} \end{array} \right.$$

... / ...

tandis que les deuxièmes membres N_1 et N_2 de (7) s'écrivent :

$$(10) \quad \begin{cases} N_1 = \left[\delta p - \frac{p}{b} \delta b \right] \\ N_2 = \left[T \delta p' + \delta I' \right] \end{cases}$$

Le premier ne dépend que de l'erreur sur l'estimation du rapport $\frac{p}{b}$, qui est la teneur limite, et le deuxième de l'erreur sur l'estimation de la dérivée en t des dépenses totales $Tp + I$. En substituant dans (8), il vient :

$$(11) \quad \begin{cases} P = - \frac{1}{2D} \left[- 2 p' (T \delta p' + \delta I') \left(\delta p - \frac{p}{b} \delta b \right) + (I'' + T p'') \left(\delta p - \frac{p}{b} \delta b \right)^2 - b \frac{dx}{dT} (\delta I' + T \delta p')^2 \right] \\ D = p'^2 + b \frac{dx}{dT} (I'' + T p'') \end{cases}$$

Toutes les erreurs δp , $\delta p'$, δI , $\delta I'$, δb peuvent être considérées comme indépendantes les unes des autres, à l'exception des couples (p, p') et (I, I') . En valeur probable on trouve, en introduisant les variances et les covariances de ces erreurs :

$$(12) \quad P = - \frac{1}{2D} \left[- 2 p' \sigma_{pp'} + (I'' + T p'') (\sigma_p^2 + \frac{p^2}{b^2} \sigma_b^2) - b \frac{dx}{dT} (\sigma_{I'}^2 + T^2 \sigma_{p'}^2) \right]$$

Dans les applications pratiques, on saura, en général, forfaire des valeurs plausibles pour les variances σ_p^2 , $\sigma_{I'}^2$ ou σ_b^2 . On sera, par contre, gêné pour évaluer les variances $\sigma_{p'}$ ou $\sigma_{I'}$, - variances des erreurs sur la dérivée $p'(t)$ ou $I'(t)$.

Pour les covariances, on notera la relation :

$$(13) \quad \sigma_{pp'} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sigma_p^2$$

Certains artifices permettent de tourner la difficulté. Par exemple, si $p(t)$ est de la forme :

$$p(t) = a_0 + \frac{a_1}{t}$$

... / ...

on a_0 , avec des notations évidentes :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_p^2 &= \sigma_{a_0}^2 + 2 \frac{\sigma_{a_0} a_1}{t} + \frac{\sigma_{a_1}^2}{t^2} \\ \sigma_{pp'} &= - \frac{\sigma_{a_0} a_1}{t^2} - \frac{\sigma_{a_1}^2}{t^3} \\ \sigma_{p'}^2 &= \frac{\sigma_{a_1}^2}{t^4} \end{aligned} \right.$$

Or, a_1 et a_0 représentent les frais fixes (plus exactement, indépendants de la cadence d'exploitation adoptée dans le projet) et les frais proportionnels. Ils sont, en général, de nature différente, et peuvent parfois être considérés comme estimés indépendamment l'un de l'autre. Dans ce cas, on a :

$$\sigma_{a_0} a_1 = 0$$

On peut ensuite admettre que les frais fixes et proportionnels sont estimés avec une même précision relative, soit :

$$\frac{\sigma_{a_1}^2}{a_1^2} = \frac{\sigma_{a_0}^2}{a_0^2} = \lambda^2$$

On a alors

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_p^2 &= \left[a_0^2 + \frac{a_1^2}{t^2} \right] \lambda^2 \\ \sigma_{pp'} &= - \frac{a_1^2}{t^3} \lambda^2 \\ \sigma_{p'}^2 &= \frac{a_1^2}{t^4} \lambda^2 \end{aligned} \right.$$

En ce qui concerne les investissements, si l'on prend une expression du type :

$$I = c_1 t^Y$$

.../...

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta I}{I} = \frac{\delta C_1}{C_1} + \log t \delta \gamma \\ \frac{\delta I'}{I'} = \frac{\delta I}{I} + \frac{\delta \gamma}{\gamma} \end{array} \right.$$

Souvent, on s'étalonne sur un seul projet, en forfaitant la valeur de γ (par exemple $\gamma = \frac{2}{3}$) Dans ce cas, δI et $\delta \gamma$ peuvent être considérés comme indépendants, et l'on a :

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_{II'}}{II'} = \frac{\sigma_I^2}{I^2} \\ \frac{\sigma_{I,2}^2}{I'^2} = \frac{\sigma_I^2}{I^2} + \frac{\sigma_\gamma^2}{\gamma^2} \end{array} \right.$$

Exemple numérique - Avec l'exemple numérique de la Note 41 (4ème partie), on avait :

$$\left\{ \begin{array}{l} B''_{T^2} = - 0,1233 \\ B''_{Tt} = 0.2420 \\ B''_{t^2} = - 3.8284 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 464,6 \\ t = 49,0 \\ \frac{T}{t} = 9,49 \\ I = 82,56 \\ p = 34,64 + \frac{580}{49} = 46,5 \end{array} \right.$$

Pour avoir un ordre de grandeur, prenons toutes les variances et covariances relatives égales à une même valeur λ^2 :

$$\frac{\sigma_p^2}{p^2} = \frac{\sigma_{pp'}}{pp'} = \frac{\sigma_{p^2}}{p^2} = \frac{\sigma_b^2}{b^2} = \frac{\sigma_I^2}{I^2} = \frac{\sigma_{II'}}{II'} = \frac{\sigma_{I^2}}{I^2} = \lambda^2$$

On trouve :

$$\left\{ \begin{aligned} N_1 N_2 &= -\lambda^2 T p \frac{a_1}{t^2} = -5220 \lambda^2 \\ N_1^2 &= 2 \lambda^2 p^2 = 4320 \lambda^2 \\ N_2^2 &= \left[T^2 \frac{a_1^2}{t^2} + Y^2 \frac{I^2}{t^2} \right] \lambda^2 = 26260 \lambda^2 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{\lambda^2}{0.828} \left[-0.1233 \times 5220 + 3.8284 \times 4320 + 0.1233 \times 26260 \right] \\ &= \lambda^2 \left[-3080 + 20.000 + 3940 \right] = 20.860 \lambda^2 \end{aligned}$$

Par exemple, pour $\lambda^2 = \frac{1}{100}$ (erreur de 20 % sur les estimations économiques), on a

$$P = 208 = 208.000 \text{ N.F.}$$

(l'unité est le millier de NF). On voit qu'on a le droit de dépenser 100.000 NF pour diviser cette variance par deux. On notera aussi que l'essentiel de la perte provient du terme 20.000, issu de $B_{t^2}^{00} N_1^2$. En fait, N_2^2 est supérieur à N_1^2 , mais son coefficient $B_{t^2}^{00}$ est extrêmement petit. Les termes en $N_1 N_2$ et N_2^2 sont petits et de sens contraire. On voit qu'en première approximation on pourrait prendre

$$P = \frac{N_1^2 B_{t^2}^{00}}{2 D} = \frac{(I^{00} + T p^{00}) \left(p^2 \frac{\sigma_b^2}{b^2} + \sigma_p^2 \right)}{-2 \left[p^2 + b \frac{dx}{dT} (I^{00} + T p^{00}) \right]}$$

Si l'on note que p^2 est petit devant $b \frac{dx}{dT} (I^{00} + T p^{00})$, cette expression se simplifie encore :

$$(16) \quad P = -\frac{p x}{2} \frac{dT}{dx} \left[\frac{\sigma_b^2}{b^2} + \frac{\sigma_p^2}{p^2} \right] \quad \dots / \dots$$

Avec la loi de LASKY, il vient :

$$(17) \quad P = \frac{1}{2} p T \frac{x}{\beta} \left[\frac{\sigma_b^2}{b^2} + \frac{\sigma_p^2}{p^2} \right]$$

Dans notre exemple numérique :

$$P = 8.800 \left[\frac{\sigma_b^2}{b^2} + \frac{\sigma_p^2}{p^2} \right] 10^3 \text{ N F}$$

La conclusion pratique est qu'il faut surtout chercher à préciser p et b . En ce qui concerne p , cela implique une étude technique plus détaillée du projet d'exploitation et de traitement. Quant à b , il dépend de la récupération ρ et du cours C . On a :

$$\frac{\sigma_b^2}{b^2} = \frac{\sigma_p^2}{p^2} + \frac{\sigma_c^2}{c^2}$$

On a peu de moyen pour réduire σ_c^2 . Par contre, on peut agir sur σ_p^2 en effectuant des essais de traitement. Par exemple, remplacer la fourchette :

$$0,6 < \rho < 0,9, \quad \text{soit} \quad \frac{\sigma_p^2}{p^2} = \frac{1}{100}$$

par la fourchette :

$$0,7 < \rho < 0,8 \quad \text{soit} \quad \frac{\sigma_p^2}{p^2} = \frac{1}{900}$$

vaut :

$$8.800 \cdot 10^3 \left[\frac{1}{100} - \frac{1}{900} \right] = 78.000 \text{ N F}$$

Il est normal, sur ce gisement, de consacrer 8 millions d'anciens francs à des essais de traitement. Une fois atteinte la fourchette $0,7 < \rho < 0,8$, il n'est pas utile d'aller beaucoup plus loin. Passer de $\frac{\sigma_p^2}{p^2} = \frac{1}{900}$ à $\sigma_p^2 = 0$, ne vaut plus que 10.000 NF environ.

... / ...

L'amélioration de p est également intéressante. Passer de $\pm 10\%$ à $\pm 5\%$, c'est-à-dire $\frac{1}{400}$ à $\frac{1}{1600}$ pour $\frac{\sigma_0^2}{\rho^2}$, vaut :

$$8,8 \cdot 10^6 \left[\frac{1}{400} - \frac{1}{1600} \right] = 16.500 \text{ NF}$$

On peut sans hésiter consacrer un mois d'ingénieur à une étude qui aurait ce résultat. La précision sur les investissements est moins payante. La perte correspondante est :

$$\frac{\frac{\sigma_{I,b}^2 \frac{dx}{dT}}{D}}{\frac{\sigma_{I'}^2}{I'' + p'' T}} = 3.300 \cdot 10^3 \cdot \frac{\sigma_{I'}^2}{I'^2} \text{ NF}$$

Passer de $\pm 10\%$ à $\pm 5\%$ ne vaut ici que 6.200 NF seulement.

*
* *

II.- OPTIMISATION SEQUENTIELLE ET ARRET DES RECHERCHES

Dans la formulation séquentielle du problème, il n'est plus possible de traiter séparément la reconnaissance et les études technico-économiques. Les diverses sortes de variables interfèrent. Parmi ces variables, les unes sont relatives au gisement et se traitent comme des variables régionalisées (tonnage et teneur), les autres sont de nature économique et doivent être plutôt assimilées à des variables aléatoires (p , b et I). Afin de traiter ces diverses variables par un procédé unique, nous devrons étendre aux variables aléatoires classiques les résultats obtenus dans la Note 41 pour la probabilisation des erreurs d'estimation géostatistiques. Ce sera l'objet d'un premier paragraphe, consacré à la théorie des chaînes de krigeage. Nous présenterons ensuite l'arbre séquentiel des options possibles en aval du point crucial C, et nous calculerons les différentes espérances mathématiques attachées aux 5 décisions primaires possibles. Enfin, nous indiquerons dans une annexe des méthodes de calcul approchées relativement faciles à mettre en oeuvre.

1. - Théorie des chaînes de krigeage.

La théorie des chaînes de krigeage est une transposition au calcul des probabilités du procédé géostatistique du krigeage.

1 - a- Définition.

Une suite de variables aléatoires $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ prises dans cet ordre constitue une chaîne d'estimateurs de Krige pour une variable z si la valeur probable de z lorsque les i premières variables $z_1, z_2, \dots, z_i$ sont fixées est égale à la dernière d'entre elles, z_i :

$$(18) \quad E(z, z_1, z_{1-1}, \dots, z_1) = z_i$$

... / ...

Si, de la chaîne finie $z_{i_1} \dots z_{i_n}$, nous extrayons une chaîne partielle $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k} \dots z_i$ (avec $i_1 < i_2 < i_k < i$), on voit immédiatement que (18) entraîne :

$$E(z, z_{i_1}, z_{i_2} \dots z_i) = z_i$$

Et, en particulier :

$$E(z, z_i) = z_i$$

Autrement dit, la valeur probable de z lorsqu'un nombre fini quelconque d'estimateurs de la chaîne sont connus est égale à la valeur prise par le dernier estimateur connu (c'est-à-dire celui de plus grand indice). On le voit immédiatement en revenant à la définition d'une valeur probable. On a, par exemple :

$$\begin{aligned} E(z, z_i) &= \int \dots \int z f(z, z_{i_1}, \dots, z_i) dz_{i_1} \dots dz_{i-1} dz \\ &= \iint z f(z, z_{i_1} \dots z_i) f(z_{i_1}, \dots, z_i) dz_{i_1} \dots dz_{i-1} dz \\ &= z_i \int \dots \int f(z_{i_1}, \dots, z_{i-1}, z_i) dz_{i_1} \dots dz_{i-1} \\ &= z_i \end{aligned}$$

1-b - Théorème 1 -

Toute chaîne partielle finie $z_{i_1} \dots z_{i_n}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_n$) constitue une chaîne de krigeage pour toutes les variables z_j situées à sa droite ($j > i_n$).

Désignons par z_i l'ensemble des variables $(z_{i_1} \dots z_{i_n})$, et par $f(z, z_j, z_i)$ la loi de z et z_j liée par $(z_{i_1} \dots z_{i_n})$. Par hypothèse, on a

$$\begin{cases} E(z, z_i, z_j) = z_j \\ E(z, z_i) = z_{i_n} \end{cases}$$

... / ...

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E(z_j \circ z_i) &= \int z_j f(z_j \circ z_i) dz_j \\
 &= \int E(z \circ z_i \circ z_j) f(z_j \circ z_i) dz_j \\
 &= \iint z f(z \circ z_i \circ z_j) f(z_j \circ z_i) dz dz_j \\
 &= \iint z f(z, z_j \circ z_i) dz dz_j = E(z \circ z_i) = z_{i_n}
 \end{aligned}$$

En particulier, on peut noter $z_0 = E(z) = m$ la valeur moyenne a priori de z .
Si l'on considère z_0 comme la première variable de la chaîne $z_0, z_1 \dots z_n \dots z$,
on a :

$$E(z) = E(z_i) = z_0 = m$$

Toutes les variables de la chaîne ont mêmes valeurs probables. Plus généralement,
lorsque n variables quelconques $z_{i_1} \dots z_{i_n}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_n$) sont connues,
toutes les variables z_j situées à droite ($j > i_n$) et z ont une même valeur
probable égale à z_{i_n} .

$$(19) \quad E(z_j \circ z_{i_1} \dots z_{i_n}) = E(z \circ z_{i_1} \dots z_{i_n}) = z_{i_n}$$

1 - C - Variances et covariances

Dans ce qui suit, nous utiliserons une suite d'indices croissants :

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < i < j$$

et nous désignerons par z_k l'ensemble des variables ($z_{k_1} \dots z_{k_n}$). Calculons la
variance $D^2(z_i \circ z_k)$ lorsque les z_k sont fixées. On a :

... / ...

$$\begin{aligned}
 E \left[z_i^2 \cdot z_k \right] &= \iint z_i E(z \cdot z_i \cdot z_k) f(z, z_i \cdot z_k) dz dz_i \\
 &= \iint z_i f(z z_i \cdot z_k) dz dz_i \frac{f(u, z_i \cdot z_k) u du}{\int f(u, z_i \cdot z_k) du} \\
 &= \iint z_i u f(u, z_i \cdot z_k) dz_i du = E \left[z z_i \cdot z_k \right]
 \end{aligned}$$

On en déduit qu'à z_k fixée, la variance de z_i est égale à la covariance de z et z_i , soit

$$(20) \quad \sigma_{z_i \cdot z_k}^2 = \sigma_{z z_i \cdot z_k}$$

Il en résulte immédiatement du théorème 1 que l'on a aussi (pour $j > i$)

$$(21) \quad \sigma_{z_i \cdot z_k}^2 = \sigma_{z_i z_j \cdot z_k}$$

A z_k fixée, z_i a même covariance avec z et avec toutes les variables z_j situées à sa droite, et cette covariance est égale à la variance de z_i elle-même. En particulier, si l'on prend $z_k = z_0 = m$, ce résultat s'applique aux variances a priori :

$$(22) \quad \sigma_{z_i}^2 = \sigma_{z_i z_j} = \sigma_{z z_i}$$

1 - d - La relation d'additivité

Dans ce qui suit, les $z_k = (z_{k_1} \dots z_{k_n})$ sont supposées fixées. Pour alléger l'écriture, nous omettrons le symbole $\cdot z_k$. Dans le cas particulier $z_k = z_0$, les résultats obtenus concerneront les variances a priori. Mais ils s'appliqueront plus généralement aux variances à z_k fixées. Les indices utilisés vérifient les inégalités :

$$k_1 < \dots < k_n < i < j < u$$

la variable z_u pouvant être remplacée par la variable terminale z .

Calculons en premier lieu la variance $D^2(z_i - z_j)$ de la différence $(z_i - z_j)$. Cette variance sera désignée comme la variance d'estimation de z_j par z_i (éventuellement, à z_k fixée). La relation (21) donne immédiatement :

$$(23) \quad D^2(z_i - z_j) = \sigma_{z_i}^2 + \sigma_{z_j}^2 - 2 \sigma_{z_i z_j} = \sigma_{z_j}^2 - \sigma_{z_i}^2$$

Ceci implique, en particulier, l'inégalité

$$\sigma_{z_j}^2 > \sigma_{z_i}^2 \quad \text{pour } j > i$$

Cette inégalité est stricte (car $\sigma_{z_j}^2 = \sigma_{z_i}^2$ entraînerait $z_i = z_j$, et l'une des deux variables serait superflue). Ainsi, les variances (éventuellement à z_k fixée) vont en croissant avec l'indice, et sont toutes majorées par σ_z^2 .

De (23), on déduit immédiatement, avec $u > j > i$:

$$(24) \quad D^2(z_j - z_i) + D^2(z_u - z_j) = D^2(z_u - z_i)$$

Ecrive sous la forme :

$$(25) \quad D^2(z_j - z_i) = D^2(z_u - z_i) - D^2(z_u - z_j)$$

Cette relation exprime que la variance d'estimation de z_j par z_i est la différence entre les variances d'estimation de z_u par z_i et de z_u par z_j . L'indice $u > j$ est quelconque. On peut, en particulier, prendre $z_u = z$. La variance $D^2(z_j - z_i)$ peut alors être interprétée comme le gain d'information obtenu en passant de l'estimateur z_i à l'estimateur z_j . Ces résultats constituent une transposition des relations analogues obtenues dans le cas des variables régionalisées. Pour interpréter une variance telle que $D^2(z_j - z_i)$, on notera que l'on a :

$$(26) \quad D^2(z_i - z_j) = \int D^2(z_j, z_i) f(z_i) dz_i$$

La variance d'estimation de z_j par z_i est égale à la valeur moyenne en z_i de la variance $\sigma_{z_j, z_i}^2 = D^2(z_j, z_i)$ de z_j à z_i fixé. Cette variance liée σ_{z_j, z_i}^2 n'est indépendante de z_i que dans certains cas particuliers, par exemple, si toutes les

... / ...

variables de la chaîne sont normales (ou lognormales, à condition de prendre les variances logarithmiques).

Ces résultats s'appliquent à des variances d'estimation liées $D^2[z_i, z_j, z_k]$ ou à des variances d'estimation a priori $D^2(z_i - z_j)$. En général, on n'aura pas l'égalité

$$(27) \quad D^2(z_i - z_j, z_k) = D^2(z_i - z_j)$$

Car l'égalité des valeurs probables de z_j à z_i fixé et à z_i et z_k fixé :

$$E(z_j, z_i) = E(z_j, z_i, z_k) = z_i$$

n'implique pas, en général, l'indépendance de z_j et z_k à z_i fixé. Cette indépendance, et la relation (27), sont cependant assurées dans le cas des chaînes fortes.

1 - e - Chaînes fortes de krigeage -

Une chaîne de krigeage sera dite forte si elle est markovienne, c'est-à-dire si la loi de probabilité des variables $z_1 \dots z_n, z$ (n quelconque) est de la forme :

$$f(z_1) f_1^2(z_2, z_1) \dots f_{n-1}^n(z_n, z_{n-1}) f_n^{\text{D}}(z, z_n)$$

Lorsqu'il en est ainsi, à z_i fixé toutes les variables $z_j (j > i)$ sont indépendantes de toutes les variables $z_k (k < i)$. En particulier, on a

$$D^2(z_j, z_i) = D^2(z_j, z_i, z_k)$$

et par suite la relation (27) est vérifiée.

Théorème 2 -

Toute chaîne de krigeage normale est une chaîne forte. En effet, si les $n+1$ variables $z_1 \dots z_n, z$ sont simultanément normales, leur loi de distribution est obligatoirement de la forme :

... / ...

$$A \exp \left[- \frac{(z_1 - m)^2}{2 \sigma_1^2} - \frac{(z_2 - z_1)^2}{2 \sigma_{2,1}^2} - \dots - \frac{(z_n - z_{n-1})^2}{2 \sigma_{n,n-1}^2} - \frac{(z - z_n)^2}{2 \sigma_{\omega,n}^2} \right]$$

et par suite la chaîne est markovienne.

On montre de la même manière que toute chaîne de krigeage lognormale est une chaîne forte.

1 - f - Construction d'une chaîne de krigeage.

Soient $x_1, x_2 \dots x_n \dots$ une chaîne de variables aléatoires représentant des estimations successives d'une même variable z , mais ne vérifiant pas la relation (18). Posons :

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1(x_1) = E(z, x_1) \\ z_2(x_1, x_2) = E(z, x_1, x_2) \\ \dots \dots \dots \\ z_n(x_1 \dots x_n) = E(z, x_1 \dots x_n) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Le changement de variables, consistant à remplacer les n premières variables $x_1 \dots x_n$ par leurs expressions en fonction de $z_1 \dots z_n$, est possible si le déterminant fonctionnel :

$$\frac{D(z_1 \dots z_n)}{D(x_1 \dots x_n)} = \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial z_n}{\partial x_n}$$

n'est pas identiquement nul, c'est-à-dire si la valeur probable z_i de z à $x_1, x_2 \dots x_i$ fixés dépend effectivement de x_i

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_i} \neq 0 \quad \text{pour } i = 1, 2 \dots n$$

Si cette condition est remplie, les nouvelles variables z_i , dont la loi de probabilité se déduit de celles des x_i , vérifient les relations (18), et constituent donc une chaîne de krigeage.

... / ...

1 - g - Conséquences pour l'optimisation séquentielle.

Dans l'optimisation séquentielle, on assimilera les paramètres économiques b, p, I à des variables aléatoires $\beta, \overline{w}, \eta$, et on admettra que les estimations successives $b_1, b_2 \dots p_1, p_2 \dots I_1, I_2$ des valeurs vraies de ces paramètres constituent trois chaînes indépendantes d'estimateurs de Krige pour les variables $\beta, \overline{w}$ et η . Il résulte du paragraphe précédent que l'on peut toujours ramener à ce cas. D'un point de vue pratique, on peut observer que l'on n'aura, en général, aucune information sur la valeur probable a priori d'une variable telle que β en dehors de l'estimation b_1 elle-même : on admettra nécessairement au départ $E(\beta) = b_1$, de sorte que la première estimation b_1 sera d'elle-même un estimateur de Krige de β .

De plus, nous admettrons, en l'absence de renseignements expérimentaux directs, que toutes ces variables sont simultanément normales. Il résulte alors du théorème 2 que les trois chaînes de krigeages sont fortes, de sorte que les relations (27) s'appliquent et qu'il y a identité entre les variances d'estimation et les variances liées.

Les propriétés des chaînes de krigeage établies ci-dessus, comparées avec les résultats obtenus dans la Note 41 dans la probabilisation des erreurs géostatistiques d'estimation, permettent de traiter de manière formellement identique les trois variables aléatoires économiques $\beta, \overline{w}, \eta$, et les deux variables régionalisées μ et T représentant la teneur et le tonnage. Si ξ désigne l'une quelconque de ces cinq variables, et $X_1, X_2 \dots$ les estimateurs de Krige que l'on s'en forme successivement, on aura :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(\xi, X_1) = X_1 \\ E(\xi, X_2) = X_2 \\ E(X_2, X_1) = X_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} D^2(\xi, X_1) = \sigma_{X_1}^2 \\ D^2(\xi, X_2) = \sigma_{X_2}^2 \\ D^2(X_2, X_1) = \sigma_{X_1}^2 = \sigma_{X_2}^2 = \sigma_X^2 \end{array} \right.$$

... / ...

Ces notations sont les mêmes que dans la Note 41. Une variance, telle que

$$\sigma_{X_1}^2 = D^2(\xi \cdot X_1) = D^2(\xi - X_1)$$

représente la variance d'estimation de ξ par X_1 , aussi bien que la variance liée de ξ à X_1 fixée. L'expression de la variance de $D^2(X_2 \cdot X_1)$ est une conséquence de la relation d'additivité (25) appliquée au cas d'une chaîne de krigeage normale, donc forte.

2.- Formulation du Schéma Séquentiel

Dans ce paragraphe, nous présenterons, en premier lieu, l'arbre des décisions possibles, puis nous donnerons la formulation abstraite du schéma séquentiel. Cette formulation sera, enfin, particularisée dans un dernier paragraphe, où l'on indiquera comment calculer numériquement les diverses espérances mathématiques. Pour alléger le texte, certaines méthodes de calcul intermédiaires seront exposées en plusieurs annexes.

2 - a - L'Arbre des décisions.

L'arbre des décisions possibles, et de leurs conséquences en aval, est présenté sur la Figure 1. On est parvenu en un point crucial C, où l'on dispose d'une première estimation (T_1, m_1, b_1, p_1, I_1) des paramètres du problème, et où l'on a le choix entre cinq décisions :

- 1 - Fermer les recherches, et abandonner le gisement,
- 2 - Exploiter tout de suite,
- 3 - Faire des travaux de reconnaissance complémentaires TR,
- 4 - Faire des études technico-économiques complémentaires EC
- 5 - Faire à la fois les TR et les EC.

... / ...

Les deux premières décisions n'appellent aucun commentaire particulier, et les espérances mathématiques (en C), $E(B_1) = 0$ et $E(B_2)$ se calculeront facilement. En ce qui concerne les trois dernières, il faut préciser que les travaux de reconnaissance TR, ou les études technico-économiques EC possibles sont pratiquement imposés, de sorte que le seul choix consiste à les entreprendre, ou non. Nous avons vu, dans la Note 41, que la technologie même de la recherche minière ne laissait aucun choix quant à la nature des TR. Pour les EC, il est théoriquement possible de pousser plus ou moins loin chacune des études techniques ou économiques ou même de ne faire que certaines d'entre elles en abandonnant les autres, de sorte que vient, en principe, se greffer, sur notre problème séquentiel principal, un problème secondaire d'optimisation des EC elles-mêmes = problème de nature continue, puisqu'il consisterait à déterminer les meilleures valeurs possibles des paramètres mesurant l'intensité de chacune de ces études. Nous négligerons ce problème secondaire, qui compliquerait inutilement notre schéma : en pratique, en effet, les études proprement économiques (prévision des cours, évaluation des prix de revient et des investissements) sont assez bon marché pour qu'on ait toujours intérêt à les entreprendre. Quant aux recherches techniques, plus onéreuses, telles que les essais de traitement, la possibilité de les pousser plus ou moins loin reste assez théorique : en réalité, une fois que les techniciens ont préparé un programme d'essais, le choix se limite, le plus souvent, à le réaliser ou non.

Si l'on adopte la troisième décision, on se trouve, à l'issue des TR, en un point crucial C_3^1 , où l'on a le choix entre 3 décisions :

- 1.- Fermer,
- 2.- Exploiter,
- 3.- Faire les études technico-économiques EC.

Les deux premières conduisent aux espérances, en C_3^1 , $E_3^1(B_1) = 0$ et $E_3^1(B_2)$ aisées à calculer. La troisième amène à un nouveau point crucial tertiaire C_3^2 , on a le choix entre deux décisions

- 1.- Fermer,
- 2.- Exploiter.

... / ...

TR : faire des travaux de reconnaissance,

EC : faire des études économiques, et techniques (traitement et méthodes d'exploitation).

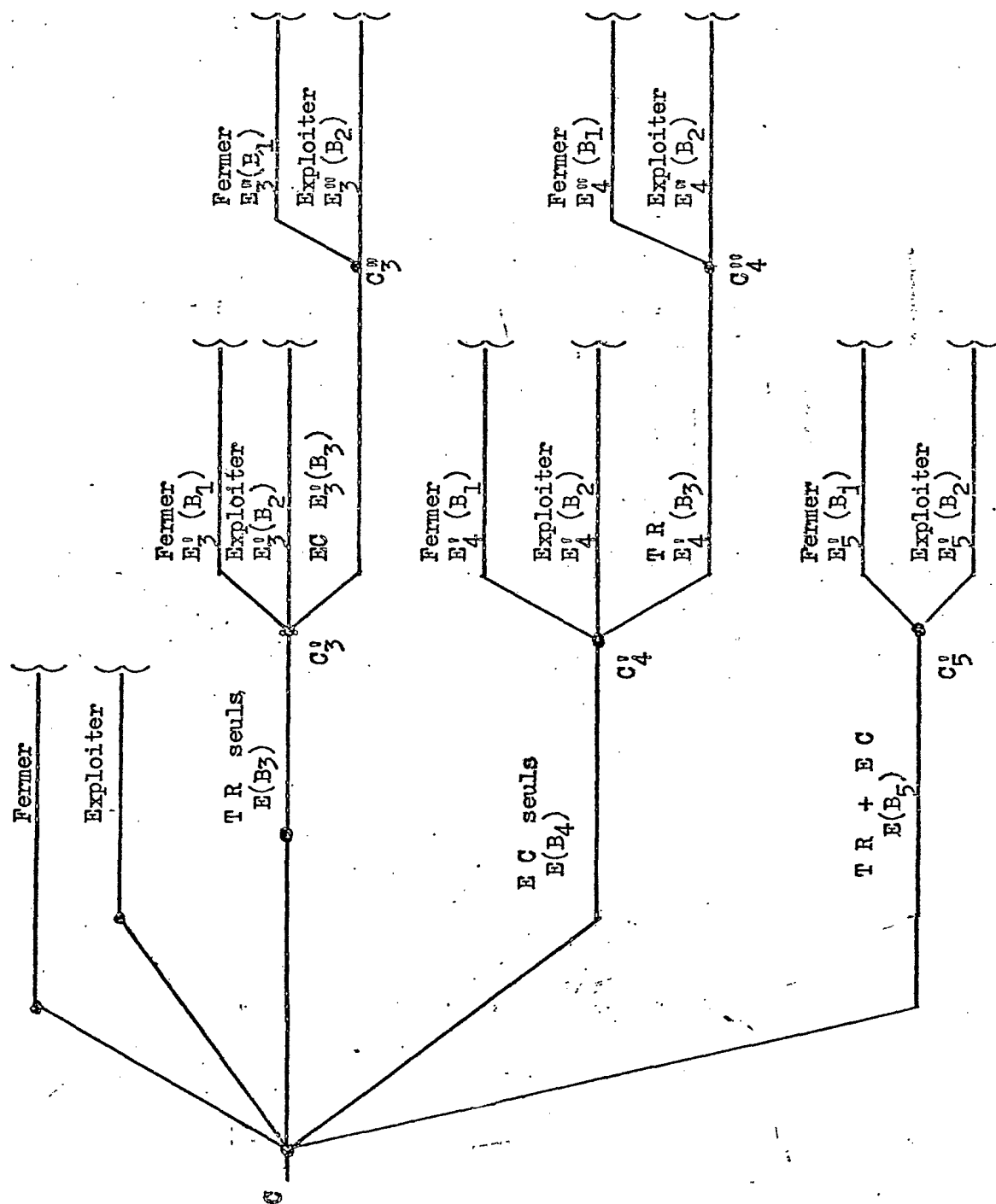


Figure 1

à chacune desquelles est associée, en C_3^2 , une espérance $E_3^2(B_1) = 0$ et $E_3^2(B_2)$ aisées à calculer. L'espérance $E^1(E_3)$, attachée en C_3^1 à la troisième décision, doit se calculer en anticipant ces deux espérances en C_3^2 , et les décisions qu'elles impliqueront. Et finalement, l'espérance primaire $E(B_3)$ attachée en C à la troisième décision, doit se calculer en anticipant en probabilité les trois espérances secondaires $E^1(B_1)$, $E^1(B_2)$, $E^1(B_3)$, et les décisions qu'elles impliqueront en C^1 .

La quatrième décision s'analyse de la même manière, en intervertissant les rôles des TR et des EC. On est conduit à calculer successivement deux espérances tertiaires ($E_4^3(B_1)$ et $E_4^3(B_2)$) et trois espérances secondaires - $E_4^1(B_1)$, $E_4^1(B_2)$, $E_4^1(B_3)$ - dont l'anticipation permet le calcul de l'espérance primaire $E(B_4)$ attachée en C à la quatrième décision.

Enfin la cinquième décision conduit au point crucial secondaire C_5^2 , où le choix se limite à fermer ou à exploiter, avec les espérances secondaires $E_5^2(B_1)$, et $E_5^2(B_2)$, dont l'anticipation en C donne $E(B_5)$.

Cette cinquième décision paraîtra peut-être superflue, puisque l'une ou l'autre des décisions 2 et 3 conduit nécessairement à une meilleure espérance. Cependant, en tant qu'elle consiste à entreprendre simultanément les deux catégories de travaux, cette solution conduit à gagner du temps, et ce gain peut, dans certains cas, largement contrebalancer une légère diminution de l'espérance. On pourrait, du reste, tenir compte du facteur temps, en introduisant à chacun des stades des coefficients d'actualisation liés à la durée propre de chacun des travaux. Nous avons préféré, cependant, ne pas introduire de tels facteurs, qui apporteraient une note de précipitation artificielle dans la lente maturation de la recherche minière, et conduiraient, dans bien des cas, à adopter une solution de mise en exploitation prématurée. Si plusieurs recherches sont en cours simultanément, selon un planning convenablement conçu, il n'y a, en général, pas d'intérêt majeur à avancer d'un an ou de 6 mois le démarrage d'une exploitation particulière, surtout si ce gain de temps doit avoir comme contrepartie une augmentation du risque de ruine. En tout état de cause, les facteurs d'actualisation traditionnels ne doivent intervenir qu'après l'entrée en jeu des investissements qui accompagnent la mise en exploitation.

... / ...

2 - b - Formulation générale du schéma séquentiel.

Le problème consiste à calculer les cinq espérances attachées aux cinq décisions primaires possibles en C. En premier lieu, on a :

$$(30) \quad E(B_1) = 0.$$

*
* *
*

La deuxième espérance se déduit de l'expression $B(\tau, \mu, \beta, \overline{w}, \eta)$ du bénéfice futur et de la loi

$$f(\tau, \mu, \beta, \overline{w}, \eta; T_1, m_1, b_1, p_1, I_1)$$

des cinq variables au point C, c'est-à-dire à T_1, m_1, b_1, p_1 et I_1 connues. Cette loi, de même que toutes celles que nous allons introduire, doit être compatible avec les relations (29). On a :

$$(31) \quad E(B_2) = \int B(\tau, \mu, \dots) f(\tau, \mu, \dots; T_1, m_1, b_1, \dots) d\tau d\mu d\beta d\overline{w} d\eta$$

L'intégrale, qui est une intégrale d'ordre 5, est étendue au champ des valeurs possibles des cinq paramètres T, m, b, p et I .

*
* *

Pour calculer la troisième espérance, on doit introduire, outre la loi f valable en C déjà définie, les quatre lois conditionnelles suivantes :

- En C_3^1 , la loi de $\tau, \mu, \dots$ à T_2, m_2, b_1, p_1, I_1 fixés, que nous noterons :

$$f_3^1 \left[\tau, \mu, \beta, \overline{w}, \eta; T_2, m_2, b_1, p_1, I_1 \right]$$

... / ...

- En C_3^0 , la loi de $\tau, \mu \dots$ à T_2, m_2, b_2, p_2, I_2 fixés, notée

$$f_3^0[\tau, \mu \dots ; T_2, m_2, b_2, p_2, I_2]$$

- En C_3^1 , la loi de b_2, p_2, I_2 à m_2, T_2, b_1, p_1, I_1 fixés, notée

$$g_3^1(b_2, p_2, I_2 ; T_2, m_2, b_1, p_1, I_1)$$

- En C_3 , enfin, la loi de m_2, T_2 à m_1, T_1, b_1, p_1, I_1 fixés, notée

$$g_3(m_2, T_2 ; m_1, T_1, b_1, p_1, I_1)$$

Outre les relations (29), ces différentes lois doivent vérifier les deux relations de composition suivantes :

$$(32) \quad \begin{cases} f_3^0[\tau, \mu \dots ; T_2, m_2, b_1 \dots] = \int g_3^1(b_2, p_2, I_2 ; T_2, m_2, b_1 \dots) f_3^0(\tau, \mu \dots ; T_2, m_2, b_2 \dots) \underbrace{db_2 dp_2 dI_2}_{\text{...}} \\ f[\tau, \mu \dots ; T_1, m_1, b_1 \dots] = \int g_3[m_2, T_2 ; m_1, T_1, b_1 \dots] f_3^0[\mu \dots ; T_2, m_2, b_1 \dots] dm_2 dT_2 \end{cases}$$

Pour calculer $E(B_3)$, on doit se transporter, par la pensée, au point crucial secondaire C_3^1 où l'on se trouvera après l'exécution des TR, et calculer les trois espérances secondaires E_3^1 en ce point. Les deux premières se calculent facilement :

$$(33) \quad \begin{cases} E_3^1(B_1) = 0 \\ E_3^1(B_2) = \int f_3^0(\tau, \mu \dots ; T_2, m_2, b_1 \dots) B(\tau, \mu \dots) d\tau d\mu d\beta \dots \end{cases}$$

Pour calculer la troisième, il faut se placer au point tertiaire C_3^2 , où les deux espérances tertiaires ont pour expression :

$$(34) \quad \begin{cases} E_3^2(B_1) = 0 \\ E_3^2(B_2) = \int B(\tau, \mu \dots) f_3^0(\tau, \mu \dots ; T_2, m_2, b_2 \dots) d\tau d\mu d\beta \dots \end{cases}$$

... / ...

En C_3^0 , on exploitera ou on fermera selon que $E_3^0(B_2)$ sera positif ou négatif. En C_3^0 , ce résultat doit être anticipé en probabilité, en même temps que l'on doit faire intervenir le coût P_{EG} des recherches technico-économiques, puisque celles-ci, en C_3^0 , n'ont pas encore été effectuées. D'où la troisième espérance secondaire :

$$(35) E_3^0(B_3) = \iiint_{D_2^0} E_3^0(B_2) g_3^0(b_2 p_2 I_2; T_2 m_2, b_1, p_1 I_1) db_2 dp_2 dI_2 - P_{EG}$$

Dans cette intégrale $E_3^0(B_2)$ a son expression (34), et l'intégration est faite dans le domaine D_2^0 défini par l'inégalité :

$$E_3^0(B_2) \geq 0$$

qui représente l'ensemble des cas où, en C_3^0 , on décidera d'exploiter.

On peut remplacer l'expression (35) par une intégrale simple, en introduisant une variable aléatoire auxiliaire Y_3 , définie par :

$$(36) Y_3 = E_3^0(B_2)$$

dont la loi de probabilité en C_3^0 , notée

$$H_3 \left[Y_3; T_2 m_2, b_1, p_1 I_1 \right]$$

peut théoriquement se déduire par le calcul des lois précédemment introduites. On a alors :

$$(37) E_3^0(B_3) = \int_0^{\infty} Y_3 H_3 \left[Y_3; T_2 m_2, b_1, p_1 I_1 \right] dY_3 - P_{EG}$$

Les équations (33) et (37) donnent les espérances secondaires au point crucial C_3^0 . Au point primaire C , pour calculer l'espérance primaire $E(B_3)$ on doit anticiper en probabilité les trois espérances secondaires, et la décision qu'elles impliqueront en C_3^0 , en même temps que l'on doit introduire le coût P_{TR} des travaux de reconnaissance, puisque ceux-ci ne sont pas encore exécutés. On obtient ainsi :

$$(38) \quad E(B_3) = \iint_{D_2} E_3^i(B_2) \varepsilon_3 \left[m_2 T_2; m_1 T_1 b_1 \dots \right] dm_2 dT_2 \\ + \iint_{D_3} E_3^i(B_3) \varepsilon_3 \left[m_2 T_2; m_1 T_1 b_1 \dots \right] dm_2 dT_2 - P_{TR}$$

Dans cette équation, $E_3^i(B_2)$ et $E_3^i(B_3)$ sont données par leurs expressions (33) et (37) en fonction de m_2 , T_2 , b_1 , p_1 , I_1 . Les domaines d'intégration D_2 et D_3 , qui représentent l'ensemble des cas où, en C_3^i , on adoptera respectivement la deuxième ou la troisième décision, sont définies par les inégalités :

$$D_2 \begin{cases} E_3^i(B_2) \geq 0 \\ E_3^i(B_2) \geq E_3^i(B_3) \end{cases} \quad D_3 \begin{cases} E_3^i(B_3) \geq 0 \\ E_3^i(B_3) \geq E_3^i(B_2) \end{cases}$$

Le calcul de (38) peut être simplifié si l'on introduit les deux variables aléatoires auxiliaires :

$$(39) \begin{cases} X_3 = E_3^i(B_2) \\ Z_3 = E_3^i(B_3) \end{cases}$$

dont la loi de distribution en C , soit $K_3 \left[X_3, Z_3; m_1 T_1 b_1 \dots \right]$, peut, en principe, se déduire des diverses lois déjà introduites. La troisième espérance primaire se met alors sous la forme :

$$(40) \quad E(B_3) = \iint_{D_2} X_3 K_3(X_3, Z_3) dX_3 dZ_3 + \iint_{D_3} Z_3 K_3(X_3, Z_3) dX_3 dZ_3 - P_{TR}$$

Les domaines d'intégration étant :

$$D_2 = (X_3 \geq 0; X_3 \geq Z_3) \quad \text{et} \quad D_3 = (Z_3 \geq 0; Z_3 \geq X_3)$$

*
* *

Le calcul de la quatrième espérance primaire $E(B_4)$ se conduit de la même façon, en échangeant les rôles des deux groupes de variables (T_m) et ($b p I$). Nous l'exposerons donc de manière plus rapide. Outre la loi de probabilité primaire

$$f(\tau, \mu \dots; T_1 m_1 b_1 p_1 I_1)$$

... / ...

déjà introduite, on a besoin des lois secondaires et tertiaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_4^I [\tau, \mu \dots ; T_1 m_1 b_2 p_2 I_2] \\ f_4^{II} [\tau, \mu \dots ; T_2 m_2 b_2 p_2 I_2] \end{array} \right.$$

dont la deuxième, f_4^{II} , est identique à la loi f_3^{II} , et des lois conditionnelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_4^I [T_2 m_2 ; T_1 m_1 b_2 p_2 I_2] \\ \varepsilon_4 [b_2 p_2 I_2 ; T_1 m_1 b_1 p_1 I_1] \end{array} \right.$$

avec, entre ces 5 lois, des relations de compositions analogues à (32).

On calcule successivement : En C_4^{III}

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_4^{III}(B_1) = 0 \\ E_4^{III}(B_2) = \int B f_4^{III}(\tau, \mu \dots ; T_2 m_2 b_2 \dots) d\tau d\mu d\beta d\omega d\eta \end{array} \right.$$

et on pose :

$$Y_4 = E_4^{III}(B_2)$$

avec une loi, en C_4^I , de la forme $H_4 [Y_4 ; T_1 m_1 b_2 p_2 I_2]$. On a alors en C_4^I :

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_4^I(B_1) = 0 \\ E_4^I(B_2) = \int \dots \int B f_4^I(\tau, \mu \dots ; T_1 m_1 b_2 p_2 I_2) d\tau d\mu d\beta d\omega d\eta \\ E_4^I(B_3) = \int_0^\infty Y_4 H_4 [Y_4 ; T_1 m_1 b_2 p_2 I_2] dY_4 - P_{TR} \end{array} \right.$$

... / ...

Enfin, pour remonter en C on introduit les deux variables :

$$(43) \begin{cases} X_4 = E_4^0(B_2) \\ Z_4 = E_4^0(B_3) \end{cases}$$

et leur loi simultanée $K_4 \left[X_4 Z_4; T_1 m_1 b_1 p_1 I_1 \right]$

on a :

$$E(B_4) = \iint_{D_2} X_4 K_4(X_4 Z_4) dX_4 dZ_4 + \iint_{D_3} Z_4 K_4(X_4 Z_4) dX_4 dZ_4 - P_{EC}$$

$$(D_2) \begin{cases} X_4 \geq 0 \\ X_4 \geq Z_4 \end{cases}$$

$$(D_3) \begin{cases} Z_4 \geq 0 \\ Z_4 \geq X_4 \end{cases}$$

*
* *

Le calcul de la cinquième espérance est plus simple, puisqu'il n'y a pas de point crucial tertiaire C_5^r . On introduit les deux lois :

$$\begin{cases} f_5^1(\tau, \mu \dots; T_2 m_2 b_2 p_2 I_2) \\ g_5(T_2 m_2 b_2 p_2 I_2; T_1 m_1 b_1 p_1 I_1) \end{cases}$$

On calcule ensuite les espérances secondaires

$$(45) \begin{cases} E_5^1(B_1) = 0 \\ E_5^1(B_2) = \int_B f_5^1(\tau, \mu \dots; T_2 m_2 b_2 p_2 I_2) d\tau d\mu \dots \end{cases}$$

Puis on introduit la variable auxiliaire :

$$X_5 = E_5^1(B_2)$$

et sa loi $H_5(X_5; T_1 m_1 b_1 p_1 I_1)$, et on en déduit la cinquième espérance :

$$(46) E(B_5) = \int_0^\infty X_5 H(X_5) dX_5 - P_{TR} = P_{EC}$$

... / ...

2 - c - Méthodes de Calcul Numérique.-

On prend pour le bénéfice la fonction habituelle :

$$(47) B(TmbpI) = (bm - p)t \frac{1 - e^{-iN}}{i} - I$$

avec $N = \frac{T}{t}$, où l'on suppose connue (ou forfaitée) la cadence t . Le calcul des deux premières espérances primaires ne présente pas de difficulté. On prendra :

$$(48) \begin{cases} E(B_1) = 0 \\ E(B_2) = B(T_1 m_1 b_1 p_1 I_1) = (b_1 m_1 - p_1)t \frac{1 - e^{-iN_1}}{i} - I_1 \end{cases}$$

La deuxième relation (48) est, en réalité, une expression approchée, très suffisante, pour les applications pratiques. L'expression exacte est, du reste, donnée dans la Note 41, en Annexe.

*

* *

C'est le calcul de $E(B_3)$ et $E(B_4)$ qui rencontre les plus grandes difficultés. Raisonnons, par exemple, sur $E(B_3)$. La formule (40) nous montre que le problème est centré sur la détermination de la loi $K_3 [X_3, Z_3]$ des deux variables X_3 et Z_3 . Mais, en réalité, ces deux variables sont liées par une relation fonctionnelle. Si l'on considère, en effet, la variable auxiliaire définie en (36)

$$Y_3 = E_3^{00}(B_2)$$

et sa loi de probabilité en C_3 , soit $H_3(Y_3; T_2 m_2 b_1 p_1 I_1)$, on a de toute évidence :

$$(49) \begin{cases} X_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_3 H_3(Y_3) dY_3 \\ Z_3 = \int_0^{\infty} Y_3 H_3(Y_3) dY_3 - P_{EC} \end{cases}$$

... / ...

La première de ces relations exprime que la valeur probable, en C'_3 , de Y_3 n'est autre que X_3 , et résulte de (33), tandis que la deuxième est identique à (37). Une fois fixés tous les paramètres de la loi H_3 , et en particulier sa moyenne X_3 , Z_3 est parfaitement défini, et par suite Z_3 est bien lié à X_3 par une relation fonctionnelle de la forme :

$$(50) \quad Z_3 = Z_3 [X_3]$$

En particulier, si la loi H_3 centrée est de la forme $h(y)$, on a

$$H_3(Y_3) = h(Y_3 - X_3)$$

et, en dérivant deux fois l'expression de Z_3 , et en intégrant par parties, on trouve

$$(51) \quad \frac{d^2 Z_3}{dX_3^2} = h(-X_3) = H_3(0)$$

Par suite, $K_3(X_3)$ désignant la loi de probabilité de X_3 en C , la troisième espérance primaire est donnée par :

$$(52) \quad E(B_3) = \int_{D_2} X_3 K_3(X_3) dX_3 + \int_{D_3} Z_3(X_3) K_3(X_3) dX_3 - P_{TR}$$

Les intervalles d'intégration D_2 et D_3 sont définis par les inégalités suivantes :

$$(D_2) \quad \begin{cases} X_3 > 0 \\ Z_3(X_3) < X_3 \end{cases} \quad (D_3) \quad \begin{cases} Z_3 > 0 \\ Z_3 > X_3 \end{cases}$$

Le détail des calculs est exposé en Annexe. On utilisera la formule (L) de cette annexe, avec les valeurs numériques suivantes :

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 = t^2 \left(\frac{1-e^{-iN_1}}{i} \right)^2 \left[m_1^2 \sigma_b^2 + \sigma_p^2 \right] + \sigma_I^2 \\ m = (b_1 m_1 - p_1) t \frac{1-e^{-iN_1}}{i} - I_1 \\ \sigma^2 = b_1^2 t^2 \left(\frac{1-e^{-iN_1}}{i} \right)^2 \sigma_m^2 + (b_1 m_1 - p_1)^2 e^{-2iN_1} \sigma_T^2 + 2b_1 t (b_1 m_1 - p_1) e^{-iN_1} \left(\frac{1-e^{-iN_1}}{i} \right) \sigma_E \\ P = P_{EC} \end{array} \right.$$

... /

On prendra garde aux notations utilisées pour les variances et covariances. Une notation sans indice, telle que σ_m^2 , doit s'expliciter, selon (29), de la manière suivante :

$$\sigma_m^2 = \sigma_{m_1}^2 - \sigma_{m_2}^2$$

On en déduira :

$$(54) \quad E(B_3) = U - P_{TR}$$

*

* *

Le calcul de la quatrième espérance primaire se conduit de façon symétrique. On utilisera la même formule (L) de l'annexe, avec les valeurs numériques suivantes :

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda^2 &= b_1^2 t^2 \left(\frac{1-e^{-iN_1}}{i} \right)^2 \sigma_m^2 + (b_1 m_1 - p_1)^2 e^{-2iN_1} \sigma_T^2 \\ &\quad + 2b_1 t (b_1 m_1 - p_1) e^{-iN_1} \left(\frac{1-e^{-iN_1}}{i} \right) \sigma_{mT} \\ m &= (b_1 m_1 - p_1) t \frac{1-e^{-iN_1}}{i} - I_1 \\ \sigma^2 &= t^2 \left(\frac{1-e^{-iN_1}}{i} \right)^2 (m_1^2 \sigma_b^2 + \sigma_p^2) + \sigma_I^2 \\ P &= P_{TR} \end{aligned} \right.$$

On en déduira :

$$(56) \quad E(B_4) = U - P_{EC}$$

*
* *

Enfin, le calcul de la cinquième espérance primaire s'effectuera par la formule :

$$(57) \quad E(B_5) = X_0 G\left(-\frac{X_0}{\sigma}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{X_0^2}{2\sigma^2}\right] - P_{TR} - P_{EC}$$

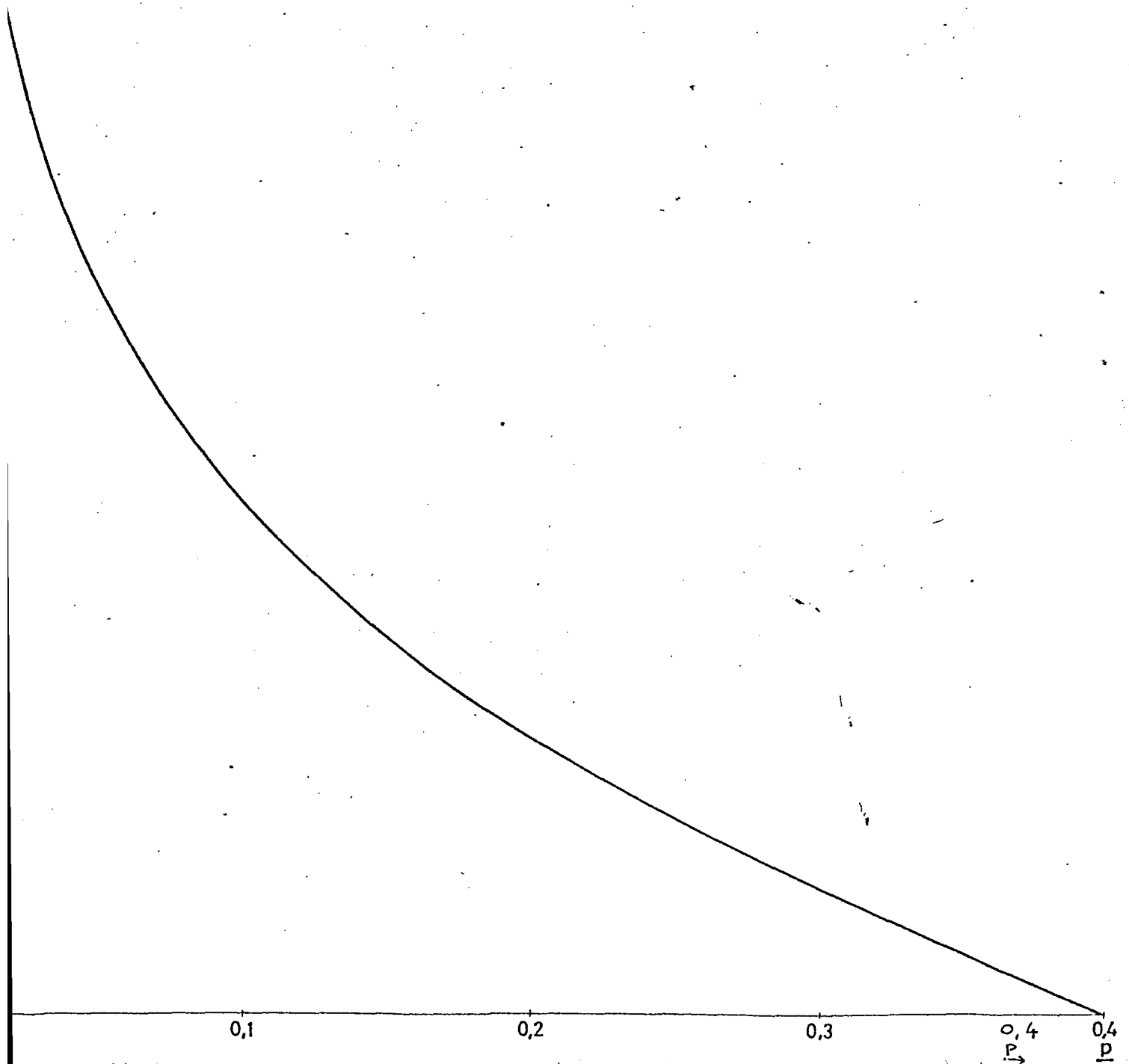
... / ...

Avec les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned}
 (58) \quad \left\{ \begin{aligned}
 X_0 &= (b_1 m_1 - p_1) t \frac{1 - e^{-iN_1}}{i} - I_1 \\
 \sigma^2 &= b_1^2 t^2 \left(\frac{1 - e^{-iN_1}}{i} \right)^2 \sigma_m^2 + (b_1 m_1 - p_1)^2 e^{-2iN_1} \sigma_T^2 \\
 &\quad + 2 b_1 t (b_1 m_1 - p_1) e^{-iN_1} \left(\frac{1 - e^{-iN_1}}{i} \right) \sigma_{mT} \\
 &\quad + t^2 \left(\frac{1 - e^{-iN_1}}{i} \right)^2 \left[m_1^2 \sigma_b^2 + \sigma_p^2 \right] + \sigma_I^2
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

G. MATHERON et Ph. FORMERY.

$$a = -1,9632 + 2,6859 \sqrt{0,1352 - \log_{10} p}$$



A N N E X E

Soit une variable normale Y , de moyenne X et de variance λ^2 . On considère l'expression :

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} Z(X) &= \frac{1}{\lambda \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} Y \exp \left[-\frac{(Y-X)^2}{2\lambda^2} \right] dY - P \\ &= X G\left(-\frac{X}{\lambda}\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{X^2}{2\lambda^2} \right] - P \end{aligned} \right.$$

où $G(u) = \int_u^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy$ est l'intégrale de Gauss, et P une quantité

positive donnée. $Z(X)$ apparaît comme une fonction de X . Si X est lui-même une variable aléatoire normale, de moyenne m et de variance σ^2 , $Z(X)$ devient lui aussi une variable aléatoire, dont la loi de distribution peut se déduire des paramètres λ , P , m et σ . Nous sommes intéressés, en fait, par le calcul de l'expression :

$$(B) \quad U(\lambda, P, m, \sigma) = \int_{D_2} X f(X) dX + \int_{D_3} Z(X) f(X) dX$$

où l'on a posé

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left[-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2} \right]$$

et où les intervalles d'intégration sont définis par les inégalités :

$$D_2 \quad \left\{ \begin{aligned} X &\geq 0 \\ X &\geq Z \end{aligned} \right. \quad D_3 \quad \left\{ \begin{aligned} Z &\geq 0 \\ Z &\geq X \end{aligned} \right.$$

Pour effectuer ces calculs, nous introduirons les variables réduites :

$$x = \frac{X}{\lambda} \quad z = \frac{Z}{\lambda} \quad p = \frac{P}{\lambda}$$

... / ...

La variable réduite x a une moyenne m' et une variance σ'^2 données par :

$$m' = \frac{m}{\lambda} \quad \sigma'^2 = \frac{\sigma^2}{\lambda^2}$$

L'expression de z en fonction de x devient :

$$z(x) = x G(-x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - p$$

et l'équation B se met sous la forme :

$$(B') \quad \frac{U(\lambda P m \sigma)}{\lambda} = \int_{D_2} \frac{x}{\sqrt{2\pi} \sigma'} \exp\left[-\frac{(x-m')^2}{2 \sigma'^2}\right] dx + \int_{D_3} \frac{z(x)}{\sqrt{2\pi} \sigma'} \exp\left[-\frac{(x-m')^2}{2 \sigma'^2}\right]$$

Précisons les limites des intervalles D_2 et D_3 . Pour cela, posons :

$$(C) \quad \varphi(x) = x G(-x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Cette fonction $\varphi(x)$ vérifie les deux relations suivantes :

$$(D) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \varphi(-x) + x \\ \varphi''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{cases}$$

L'intervalle D_3 est défini par les deux inégalités :

$$(E) \quad \begin{cases} \varphi(x) \geq p \\ \varphi(x) \geq p + x \end{cases}$$

Il en résulte que l'on doit considérer deux cas de figure, selon que $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est inférieur ou supérieur à p .

Premier cas : $p \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, ou $p \geq \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}$

Dans ce cas, les inégalités E ne peuvent jamais être satisfaites simultanément. Le domaine D_3 s'évanouit, et (B') se réduit à :

... / ...

$$\frac{U}{\lambda} = \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x-m')^2}{2\sigma'^2} \right] dx = m' G\left(-\frac{m'}{\sigma'}\right) + \frac{\sigma'}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{m'^2}{2\sigma'^2}\right)$$

Soit, en revenant aux variables non réduites :

$$(F) \quad U(\lambda, p, m, \sigma) = m G\left(-\frac{m}{\sigma}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma^2}\right)$$

Deuxième cas $p < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, ou $P < \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}$

Dans ce cas, le domaine D_3 ne s'annule pas. Sa borne supérieure positive, a , est définie comme la racine de l'équation

$$(G) \quad \varphi(a) - a = p$$

et sa borne inférieure (négative) b comme la racine de :

$$\varphi(b) = p$$

La première relation (D) donne immédiatement :

$$b = -a$$

On a donc à calculer l'expression :

$$(H) \quad \frac{U}{\lambda} = \frac{1}{\sigma' \sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} x \exp \left[-\frac{(x-m')^2}{2\sigma'^2} \right] dx + \frac{1}{\sigma' \sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a z(x) \exp \left[-\frac{(x-m')^2}{2\sigma'^2} \right] dx$$

où a est donnée, en fonction de p , comme la racine $a(p)$ de G . Le calcul de la première intégrale ne soulève pas de difficultés particulières :

$$(I) \quad \frac{1}{\sigma' \sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-m')^2}{2\sigma'^2} \right] dx = m' G\left(\frac{a-m'}{\sigma'}\right) + \frac{\sigma'}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(a-m')^2}{2\sigma'^2} \right]$$

... / ...

La deuxième intégrale peut, le cas échéant, se calculer rigoureusement à l'aide des tables de double coupure de Ph. FORMERY. On peut obtenir des méthodes de calcul approchées en remplaçant la fonction $\psi(x)$ exacte par une expression approchée plus simple. Plus exactement, nous allons chercher une fonction paire $\psi(x)$ de la forme :

$$\psi(x) = \psi(-x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x^2 + 2\beta|x|}{2\alpha^2} \right]$$

représentant convenablement $\varphi(x) - x$, pour $x \geq 0$, et $\varphi(x)$ pour $x < 0$. Nous disposons de 3 paramètres A , α , et β . Pour les ajuster numériquement, nous devons prendre garde que la dérivée seconde :

$$g(x) = \psi''(x)$$

doit représenter une approximation de la loi normale réduite $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right)$. Si

nous écrivons que cette loi $g(x)$ doit être normée à l'unité, et avoir mêmes moments absolus d'ordre 1 et 2 que la loi normale réduite, nous obtenons les trois conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g(x) dx &= -\psi'(0) = \frac{1}{2} \\ \int_0^{\infty} g(x) dx &= \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \int_0^{\infty} x^2 g(x) dx &= 2 \int_0^{\infty} \psi(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Ces trois conditions expriment aussi que $\psi(x)$ et sa dérivée ont mêmes valeurs pour x nul que $\varphi(x)$ et sa dérivée, et que les intégrales de ψ et de φ prises de 0 à l'infini ont mêmes valeurs numériques. Ces trois conditions conduisent à prendre :

$$(J) \quad \begin{cases} \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x^2 + 2\beta|x|}{2\alpha^2} \right] \\ \alpha = 1,2516 \\ \beta = \alpha^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,9632 \end{cases}$$

... / ...

Il est facile de contrôler sur des exemples numériques que la fonction ψ ainsi définie donne une bonne approximation de $\psi(x) - x$. La racine a de l'équation (G) doit être remplacée par la racine de :

$$\psi(a) = p$$

c'est-à-dire :

$$(K) \quad a = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 \log(2\pi p^2)}$$

Avec cette valeur numérique de a , on calcule facilement la deuxième intégrale figurant en (H). On donne à $z(x)$ l'expression suivante :

$$z(x) = \psi(x) + x - p \quad \text{pour } x \geq 0$$

$$z(x) = \psi(x) - p \quad \text{pour } x \leq 0$$

L'intégrale du terme en x de 0 à a , et du terme p de $-a$ à $+a$ apportent les contributions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \int_0^a x \exp\left[-\frac{(x-m^0)^2}{2\sigma^2}\right] dx &= m^0 G\left(-\frac{m^0}{\sigma^2}\right) + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{m^0{}^2}{2\sigma^2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \int_a^\infty x \exp\left[-\frac{(x-m^0)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a p \exp\left[-\frac{(x-m^0)^2}{2\sigma^2}\right] dx &= p G\left(-\frac{a+m^0}{\sigma^2}\right) - p G\left(\frac{a-m^0}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

La première de ces expressions se regroupera commodément avec la première intégrale de H. Il reste à intégrer ψ dans les deux intervalles $(-a, 0)$ et $(0, a)$.

Afin de simplifier les notations, on désignera, comme plus haut, par g la fonction de Gauss :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

... / ...

on trouvera dans les tables usuelles $G(x)$ et $g(x)$ pour les valeurs de x inférieures à 6. Au delà, on pourra utiliser le développement asymptotique.

$$\text{pour } z \text{ positif et grand } G(x) = g(x) \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1 \cdot 3}{x^5} - \dots \right]$$

Ceci posé, pour évaluer l'intégrale de $-a$ à a :

$$\frac{1}{2 \pi \sigma^2} \int_{-a}^a \exp \left[-\frac{(x-m^2)^2}{2 \sigma^2} - \frac{x^2 + 2/3|x|}{2 \alpha^2} \right] dx$$

il y a intérêt à prendre de nouveaux paramètres et à poser, par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \frac{\alpha' \sigma^2}{\sqrt{\alpha^2 + \sigma^2}} \\ z = s \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{m^2}{\sigma^2} \right) \\ z^2 = s \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{m^2}{\sigma^2} \right) \end{array} \right. \quad \text{avec } \alpha = 1,2516$$

L'intégrale de 0 à a s'exprime alors par :

$$\frac{s}{\sigma^2 \sqrt{2 \pi}} g\left(\frac{m^2}{\sigma^2}\right) \frac{G(z) - G\left(z + \frac{a}{s}\right)}{g(z)}$$

L'intégrale de $-a$ à 0 s'en déduit en changeant m^2 en $-m^2$, c'est-à-dire z en z^2 .

Finalement, on obtient :

$$(L) \quad \frac{U}{\lambda} = m^2 G\left(-\frac{m^2}{\sigma^2}\right) + \sigma^2 g\left(\frac{m^2}{\sigma^2}\right) - p \left[G\left(-\frac{a+m^2}{\sigma^2}\right) - G\left(\frac{a-m^2}{\sigma^2}\right) \right] + \frac{s}{\sigma^2 \sqrt{2 \pi}} g\left(\frac{m^2}{\sigma^2}\right) \left[\frac{G(z) - G\left(z + \frac{a}{s}\right)}{g(z)} + \frac{G(z^2) - G\left(z^2 + \frac{a}{s}\right)}{g(z^2)} \right]$$

Cette expression se calcule facilement à l'aide des tables, ou du développement asymptotique indiqué pour les grandes valeurs de z et z^2 , et des valeurs numériques :

$$\alpha = 1,2516$$

$$m^2 = \frac{m}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma}{\lambda}$$