

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 48

REPRESENTATION TRANSITIVE
ET THEORIE INTRINSEQUE DES DISTRIBUTIONS

1/ Espaces de fonctions et distributions.

Il est naturel de représenter une minéralisation par une distribution. On ne connaît jamais le phénomène ponctuel, mais seulement la réponse, que donne la nature sous forme numérique, aux questions précises qu'on lui pose, en appliquant au gisement une opération technologique définie (prélèvement d'échantillon, exploitation de panneau, etc ...). De telles opérations peuvent être représentées par des fonctions φ appartenant à un certain espace fonctionnel (F). A toute question, symbolisée par une fonction déterminée $\varphi \in F$, la nature donne une réponse numérique $T \varphi$, dont on peut voir qu'elle se présente comme une fonctionnelle linéaire continue définie sur l'espace F : autrement dit, le phénomène naturel lui-même doit être symbolisé par une distribution $T \in F'$, appartenant à l'espace F' dual de F.

Comme exemple simple de fonction φ , citons les fonctions caractéristiques de prélèvement, définies comme suit : au prélèvement, dans le gisement, d'un ensemble v (dit échantillon) est associée la fonction de point $\phi_v(M)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_v(M) = 1 & \text{si } M \in v \\ \phi_v(M) = 0 & \text{si } M \notin v \end{array} \right.$$

L'espace de distribution associé à cet espace fonctionnel est celui des mesures. En tant que mesure, la minéralisation associe une quantité de métal définie à tout échantillon v (v doit être un ensemble borélien). Les mesures agissent, d'ailleurs, sur un espace fonctionnel plus vaste que celui des fonctions caractéristiques, à savoir celui des fonctions boréliennes (1)*. Comme exem-

(1)* Cet espace est le plus petit ensemble de fonctions qui contienne toutes les fonctions continues, et ne puisse contenir une suite convergente de fonctions sans contenir leur limite. cf. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Tome I, page 15.

ple, on peut citer les fonctions de pondération qui interviennent dans la théorie du krigeage continu, ou encore, pour les gisements d'uranium, le passage des teneurs aux radioactivités. Dans ce dernier cas, la radioactivité en un point est une moyenne de toutes les teneurs du voisinage pondérées par une fonction de la distance du type $\frac{e^{-\mu r}}{4\pi r^2}$ (μ coefficient d'absorption), ce qui peut se noter comme un produit de convolution, $f * \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r^2}$

Il pourra y avoir intérêt à considérer des distributions plus générales que les mesures, définies, par conséquent, sur des espaces fonctionnels plus restreints que les espaces boréliens, par exemple des espaces de fonction indéfiniment dérivables. Cependant, comme nous aurons besoin des ressources de l'analyse harmonique, toutes les distributions utilisées devront avoir des transformées de Fourier : elles devront appartenir ⁽¹⁾ à l'espace \mathcal{J}' des distributions tempérées (à croissance lente) et, corrélativement, l'espace des fonctions sur lesquelles elles agissent devra contenir l'espace \mathcal{J} des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide.

D'autre part, les espaces que l'on peut avoir à utiliser ne sont pas les mêmes selon que l'on met en oeuvre des méthodes transitives ou des méthodes intrinsèques. En transitif, le phénomène naturel est considéré comme fini, les distributions devront être sommables dans tout l'espace. En intrinsèque, au contraire, le phénomène se poursuit indéfiniment dans tout l'espace et les distributions ne peuvent pas être sommables. Nous nous limiterons aux espaces suivants

En transitif
- Un espace \mathcal{E}' de distributions à support compact, définies sur l'espace \mathcal{E} des fonctions indéfiniment dérivables.

- Un espace \mathcal{M}' de mesures sommables, définies sur l'espace \mathcal{M} des fonctions continues bornées (ou plus généralement boréliennes et bornées).

- Un espace \mathcal{C}' de mesures à support compact, définies sur l'espace \mathcal{C} des fonctions continues (ou boréliennes).

... / ...

1 - SCHWARTZ, op. cit. Tome II, chp. VII.

En intrinsèque

- L'espace \mathcal{D}' des distributions tempérées, définies sur l'espace \mathcal{D} des fonctions indéfiniment dérivables, à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

- L'espace \mathcal{M}' des mesures à croissance lente, définies sur un espace \mathcal{M} de fonctions continues à décroissance rapide.

2/- Montée pour les distributions isotropes.

En intrinsèque, la montée sous puissance constante est toujours définissable. Pour une fonction φ (dans \mathcal{D} ou dans \mathcal{M}), tout d'abord, une montée sous puissance a le long de l'axe des x_n se note

$$M_a \varphi = \frac{1}{a} \int_{x_n - \frac{a}{2}}^{x_n + \frac{a}{2}} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n$$

et s'interprète comme le produit de convolution :

$$(1) M_a \varphi = \varphi * \left[\delta(x_1) \delta(x_2) \dots \delta(x_{n-1}) a(x_n) \right]$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(x_n) = \frac{1}{a} & \text{pour } -\frac{a}{2} \leq x_n \leq \frac{a}{2} \\ a(x_n) = 0 & \text{pour } |x_n| > \frac{a}{2} \end{array} \right.$$

Cette définition s'étend immédiatement à une distribution quelconque, puisque le produit de convolution (1) a toujours un sens, la distribution $\delta(x_1) \dots \delta(x_{n-1}) a(x_n)$ étant à support compact.

La montée transitive

$$(2) M \varphi = \int_{\mathcal{D}} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dz_n = \varphi * \left[\delta(x_1) \dots \delta(x_{n-1}) 1(x_n) \right]$$

est définie pour toute fonction φ sommable en x_n , et notamment pour $\varphi \in \mathcal{S}$.

'. Pour une distribution à support compact, le produit de convolution écrit en (2) a un sens et définit la montée sans aucune ambiguïté. Il en est ainsi dans les cas $T \in \mathcal{C}'$ et $T \in \mathcal{C}'$. Mais pour une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'$ quelconque, le produit de convolution (2) n'est, en général, pas défini.

Nous ne traiterons pas ici le cas général, très étroitement lié au problème de Radon⁽¹⁾. Nous nous contenterons d'examiner le cas, particulier, mais très significatif, des fonctions et distributions isotropes.

Soit, dans l'espace R_n à n dimensions, une fonction isotrope appartenant à \mathcal{S} . Etant isotrope et indéfiniment dérivable, elle est de la forme $g_n(r^2)$. Sa transformée de Fourier, également isotrope, appartient aussi, comme on sait, à \mathcal{S} . Nous la noterons

$$(3) \quad G(\rho^2) = \mathcal{F}_n g_n(r^2)$$

La montée d'ordre $n - \lambda$ transforme $g_n(r^2)$ en une fonction $g_\lambda(r^2)$ considérée comme appartenant à un espace à λ dimensions. Elle s'obtient en prenant l'inverse de Fourier de $G(\rho^2)$ dans l'espace à λ dimensions :

$$(4) \quad g_\lambda(r^2) = M_{n-\lambda} g_n(r^2) = \mathcal{F}_\lambda^{-1} G(\rho^2)$$

Pourvu que λ soit positif, g_λ , inverse de Fourier de $G \in \mathcal{S}$, appartient également à l'espace \mathcal{S} .

Passons maintenant à une distribution isotrope $T_n \in \mathcal{S}'$. Une distribution T_n de l'espace à n dimensions est isotrope si l'on a, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}$

$$T_n \varphi = T_n g_n(r^2)$$

$g_n(r^2) \in \mathcal{S}$ étant la fonction isotrope obtenue en prenant la valeur moyenne de $\varphi \in \mathcal{S}$

(1) Le problème de Radon, pour les distributions, est traité dans Guelfand "obobchtcheniefunkstie, Tome V, integralnaia geometria" Moscou 1962, et permet de résoudre le problème d'une montée d'ordre $n-1$ dans un espace à n dimensions.

sur la sphère de rayon r . Il revient au même, pour définir T_n , de se limiter aux fonctions $g_n(r^2) \in \mathcal{F}$

Si $T_n \in \mathcal{F}'$, elle admet une transformée de Fourier $\theta(\rho^2)$, dont on voit facilement qu'elle est elle-même isotrope (dans l'espace à n dimensions des images de Fourier). On est tenté de généraliser (4), en écrivant :

$$(5) \quad T_\lambda = \mathcal{F}_\lambda^{-1} \theta(\rho^2)$$

Mais, pour que cette écriture ait un sens, il faut que la distribution $\theta(\rho^2)$, définie dans l'espace image à n dimensions puisse être interprétée comme une distribution dans un espace à λ dimensions, et cela soulève certaines difficultés.

La transformée de Fourier à n dimensions

$$\theta_n = \mathcal{F}_n T_n$$

se définit comme la fonctionnelle agissant sur $G(\rho^2) = \mathcal{F}_n g_n(r^2) \in \mathcal{F}$ conformément à l'égalité

$$\theta G = (2\pi)^n T_n g_n$$

Mais θ agit sur G dans un espace à n dimensions. En écriture symbolique, on a

$$(6) \quad \theta G = (2\pi)^n \Omega_n \int_0^\infty \theta(\rho^2) G(\rho^2) \rho^{n-1} d\rho$$

$\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ étant la surface de la sphère de rayon unité dans R_n . Pour

que la définition (5) soit possible, il faut que l'on puisse définir T_λ comme la distribution agissant sur $g_\lambda = \mathcal{F}_\lambda^{-1} G$ de la même manière que θ agit sur G dans R_n , soit :

$$(7) \quad T_\lambda g_\lambda = (2\pi)^\lambda \Omega_\lambda \int_0^\infty \theta(\rho^2) G(\rho^2) \rho^{\lambda-1} d\rho$$

Or $\theta(\rho^2)$, définie en (6), peut être considérée comme une fonctionnelle à support sur le demi-axe $\rho \geq 0$, agissant sur des fonctions de bases de la forme $\rho^{n-1} G(\rho^2)$,

avec $G \in \mathcal{F}$. Pour λ quelconque, son action sur $\rho^{\lambda-1} G(\rho^2)$ n'est nullement définie. Dans le cas particulier $\lambda = n + 2k$ (descente d'ordre pair) on écrit $\rho^{\lambda-1} G(\rho^2) = \rho^{n-1} \rho^{2k} G(\rho^2)$ avec $\rho^{2k} G(\rho^2) \in \mathcal{F}$, de sorte que la descente d'ordre pair est bien définie. On a :

$$T_{n+2k} \varepsilon_{n+2k} = \frac{\Omega_{n+2k}}{\Omega_n} 2\pi \Omega_n \int_0^\infty \theta(\rho^2) \rho^{2k} G(\rho^2) \rho^{n-1} d\rho$$

Comme

$$\rho^{2k} G(\rho^2) = (-1)^k \tilde{f}_n \Delta^k \varepsilon_n(r^2)$$

Δ étant le Laplacien (dans R_n), on a symboliquement :

$$T_{n+2k} \varepsilon_{n+2k} = (-1)^k \frac{\Omega_{n+2k}}{\Omega_n} T_n \Delta^k \varepsilon_n$$

$$(8) \quad T_{n+2k} \varepsilon_{n+2k} = (-1)^k \frac{\pi^k \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + k)} (\Delta^k T_n) \varepsilon_n$$

A un facteur près, T_{n+2k} agit sur ε_{n+2k} comme le laplacien itéré.

$\Delta^k T_n$ de T_n agit sur ε_n dans R_n .

Mais déjà pour la montée paire apparaissent des indéterminations. Dans la formule (7), en effet, l'action de $\theta(\rho^2)$ sur une fonction du type $\rho^{n-1-2k} G(\rho^2)$ n'est connue que si $\rho^{-2k} G(\rho^2) \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire si $G(\rho^2)$ appartient à \mathcal{F} et s'annule à l'origine ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $2(k-1)$. En tant que fonctionnelle sur l'espace entier des $\rho^{n-1-2k} G(\rho^2)$, $\theta(\rho^2)$ ne définit qu'une classe de distributions se déduisant de l'une d'entre elles par addition d'une distribution arbitraire de la classe zéro, c'est-à-dire une distribution θ_0 telle que

$$\theta_0 \rho^{n-1-2k} G(\rho^2) = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{G(\rho^2)}{\rho^{2k}} \in \mathcal{F}$$

Comme on se limite aux distributions isotropes, la classe zéro est constituée de l'ensemble des combinaisons linéaires des laplaciens itérés d'ordre inférieur à k

$$\theta_0 = a_0 + a_1 \Delta + a_2 \Delta^2 + \dots + a_{k-1} \Delta^{k-1}$$

En tant que fonctionnelle dans R_{n-2k} , $\theta(\rho^2)$ est définie à θ_0 près. Son inverse de Fourier $\mathcal{F}_{n-2k}^{-1} \theta = T_{n-2k}$ est donc définie à une distribution arbitraire près, qui est ici un polynôme pair de degré inférieur à $2k$.

$$(9) \quad T_0 = a_0 + a_1 r^2 + \dots + a_{k-1} r^{2k-2}$$

Ainsi la montée paire ne définit qu'une classe de distribution de \mathcal{S}' , la classe zéro étant le polynôme pair écrit en (9).

Si l'on passe à une montée ou descente d'ordre impair, les choses se compliquent encore. En effet, l'action de θ n'est définie que sur les fonctions $\rho^{n-1} G(\rho^2)$, où G est une fonction paire de \mathcal{S} . Pour effectuer une descente d'ordre $2k+1$, on devra définir son action sur $\rho^{n-1+2k+1} G(\rho^2)$. Or la fonction $\rho^{2k+1} G(\rho^2)$ ne peut pas appartenir à \mathcal{S} , puisqu'elle n'est pas indéfiniment dérivable à l'origine. Pour donner un sens à la montée ou descente d'ordre impair, et, plus généralement, d'ordre quelconque, il est nécessaire de restreindre considérablement l'espace de base des fonctions G . Nous avons besoin d'un espace \mathcal{S}_ω tel que, si G appartient à \mathcal{S}_ω , toutes les fonctions $|\rho|^\mu G(\rho^2)$ y appartiennent aussi. Un tel espace existe, et peut être défini comme l'ensemble des fonctions $G \in \mathcal{S}$ s'annulant rapidement (c'est-à-dire plus rapidement que ρ^{2k} , quel que soit l'entier k) à l'origine ainsi que toutes ses dérivées. Si $H(\rho^2) \in \mathcal{S}$, $H(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}) \in \mathcal{S}_\omega$, de sorte que \mathcal{S}_ω a même puissance que \mathcal{S} . Comme exemple simple de fonction de \mathcal{S}_ω , on peut citer $\exp[-\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}]$. L'inverse de Fourier d'une fonction G de \mathcal{S}_ω , dans un espace à λ dimensions

$$e_\lambda = \mathcal{F}_\lambda^{-1} G$$

à tous ses moments pairs égaux à zéro, c'est-à-dire vérifie pour tous les entiers k l'égalité :

$$(10) \quad \int_0^\infty e_\lambda(r^2) r^{2k+\lambda-1} dr = 0$$

L'espace des g_λ vérifiant (10) sera désigné $\mathcal{S}_\lambda^\omega$. C'est un sous espace de \mathcal{S} , qui a la même puissance que \mathcal{S} .

Limitons-nous aux fonctions $G \in \mathcal{S}_\omega$. Comme toute fonction de \mathcal{S}_ω peut être mise sous la forme $\rho^{n-1} G$, avec $\bar{G} \in \mathcal{S}_\omega$, la distribution $\theta(\rho^2)$ agit sur toutes les fonctions de \mathcal{S}_ω , et, comme $\rho^{\lambda-1} G$ est également dans \mathcal{S}_ω , la formule (7) a un sens, et définit la distribution T_λ comme fonctionnelle sur $\mathcal{S}_\lambda^\omega$. A cette fonctionnelle, ne peut pas correspondre une distribution unique de \mathcal{S}' , mais seulement une classe de distributions, se déduisant les unes des autres par addition de distributions T_0 quelconque de la classe 0. Cette classe zéro se détermine comme plus haut. La distribution θ ne peut être étendue à toutes les fonctions de \mathcal{S} qu'avec un arbitraire

$$\theta_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Delta^n$$

c'est-à-dire à une série entière de Laplacien près. En inversant la transformation de Fourier, on voit que la classe zéro de T_λ est constituée de l'ensemble des séries entières paires

$$(11) \quad T_0 = \sum a_n r^{2n}$$

Dans la note 45, la notion d'équivalence analytique avait été introduite pour les fonctions. Deux fonctions étaient dites équivalentes analytiquement lorsqu'elles ne différaient l'une de l'autre que par une série entière du type (11). L'intérêt de cette notion était lié au fait que les variances d'estimation, pour une maille a , calculées sur des fonctions équivalentes, admettent le même développement limité au voisinage de $a = 0$, la contribution de la classe zéro à ce développement étant identiquement nulle (dans la présente terminologie, on dirait que la variance d'estimation calculée sur une fonction de la classe zéro s'annule rapidement en $a = 0$, ainsi que toutes ses dérivées).

L'équivalence analytique s'étend tout naturellement aux distributions tempérées. En fait, les opérateurs de montées et de descente n'agissent pas sur les distributions elles-mêmes, mais seulement sur les classes d'équivalence analytique.

3.- Montée et descente pour r^λ

A titre d'exemple, montrons que la montée (à une équivalence près) effectuée sur la distribution r^λ permet de retrouver immédiatement l'un des résultats majeurs des notes 42 et 45.

Considérée comme une distribution de l'espace à n dimensions R_n , r^λ admet la transformée de Fourier

$$\theta(\rho^2) = \mathcal{F}_n r^\lambda = 2^{\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} \rho^{-\lambda-n}$$

L'inverse de Fourier $\mathcal{F}_\mu^{-1} \theta(\rho^2)$ dans l'espace à μ dimensions est par conséquent :

$$\mathcal{F}_\mu^{-1} \theta(\rho^2) = \pi^{\frac{n-\mu}{2}} \frac{\Gamma(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu-n}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} r^{\lambda+n-\mu}$$

Ainsi, en changeant les notations, on voit que la montée d'ordre $\alpha = n - \mu$ effectuée sur $\Gamma(-\frac{\lambda}{2}) r^\lambda$ donne, à une équivalence analytique près, le résultat :

$$(12) \quad M_\alpha \Gamma(-\frac{\lambda}{2}) r^\lambda = \pi^\alpha \Gamma(-\frac{\lambda+\alpha}{2}) r^{\lambda+\alpha}$$

Ceci n'est pas autre chose que la formule (14) de la note (45). Appliquée terme à terme à une fonction quelconque, cette formule donne la montée à une équivalence près, équivalence qui n'intervient pas dans le calcul d'une variance d'estimation.

4.- Représentation transitive des distributions à support compact.

Les distributions de \mathcal{E}' , les mesures de \mathcal{M}' , et aussi certains espaces de distributions ou de mesures un peu plus générales vérifiant des conditions de décroissance suffisamment rapide, relèvent des représentations transitives définies dans la Note 42. Le covariogramme transitif est une distribution g , définie par le produit de convolution de T par sa transposée, produit qui a toujours un sens lorsque T est à support compact.

$$(13) \quad g = T \overset{V}{\circ} T$$

C'est évidemment, une distribution de type positif. La transformée de Fourier θ de T , si T est à support compact, est une fonction analytique entière à croissance exponentielle bornée (théorème de Paley Wiener). La transformée G du covariogramme transitif est donc la fonction positive :

$$(14) \quad G = |\theta|^2$$

G et θ étant des fonctions, les opérations de montée et de descente sont définies sans ambiguïté (cela résulte aussi du fait que, g et T ayant des supports compacts, le produit de convolution (2) existe), et l'on voit immédiatement qu'après une montée M , Mg reste le covariogramme de MT : le covariogramme de MT , après une montée le long de l'axe des x_n , par exemple, a pour transformée de Fourier la fonction

$|\theta(u_1, u_2 \dots u_{n-1}, 0)|^2 = G(u_1 \dots u_{n-1}, 0)$, qui n'est autre que la transformée de Mg .

Le prélèvement d'un "échantillon" v au point origine 0 , caractérisé par une fonction ϕ , donne le résultat $T\phi$. La fonction ϕ , naturellement, doit appartenir à l'espace fonctionnel sur lequel T est défini. Si T est une mesure à support compact, ϕ peut être la fonction caractéristique d'un échantillon ordinaire (de taille finie, ou non), ou même d'un nombre quelconque, fini ou non, d'échantillons ordinaires. Le même échantillon, prélevé en un point h quelconque, donne le résultat $T\phi(x-h)$. Il lui correspond la fonction de prélèvement traduite

$$\mathcal{T}_h^* \phi(x) = \phi(x-h)$$

Il revient strictement au même d'effectuer la translation inverse \mathcal{T}_{-h} sur T , la fonctionnelle $\mathcal{T}_{-h}^* T$ étant définie par l'égalité

$$(\mathcal{T}_{-h}^* T) \phi(x) = T \phi(x-h)$$

En notations de fonction, on aurait simplement

$$\mathcal{T}_{-h}^* T(x) = T(x+h)$$

Ainsi, le prélèvement d'échantillons φ selon une maille régulière $ka = (k_1 a_1, \dots, k_n a_n)$ s'écrit, indifféremment

$$(15) \quad \left(\sum_k \mathcal{Z}_{-ka} \right) * T \phi = T \sum_{ka} \mathcal{Z} * \phi$$

Il peut être également intéressant de remplacer la distribution T par une de ses régularisées. L'échantillon φ prélevé au point x donne le résultat numérique

$$f(x) = T \mathcal{Z}_x \phi$$

qui peut être considéré comme une fonction de x , c'est-à-dire comme une variable régionalisée à support ponctuel. Une telle fonction n'est pas autre chose que le produit de convolution

$$(16) \quad f = T * \overset{V}{\phi}$$

de T par la transposée de φ , ou régularisée de T par ϕ . Les résultats de la Note (42) s'appliquent à de telles régularisées f . On notera que f , définie en (16) possède les mêmes propriétés de régularités que ϕ : si $\phi \in \mathcal{E}$ est indéfiniment dérivable, il en est de même de f . Si $\phi \in \mathcal{M}$ est continue, f est continue. Le covariogramme g_x de la régularisée f s'obtient immédiatement à l'aide de (13) :

$$g_x = T * T * \overset{V}{\phi} * \overset{V}{\phi} = g * \overset{V}{\phi} * \overset{V}{\phi}$$

On notera que

$$\overset{V}{\phi} * \overset{V}{\phi} = K(h)$$

n'est pas autre chose que le covariogramme transitif de la fonction $\phi(x)$ considérée comme une variable régionalisée à support ponctuel. En particulier, si ϕ est la fonction caractéristique d'un échantillon ordinaire v , $K(h)$ n'est autre que le covariogramme géométrique de v . On a ainsi la règle simple :

$$(17) \quad g_x = g * K$$

Les covariogrammes se régularisent par les covariogrammes des fonctions de prélèvement.

La définition (16) et la propriété (17) subsistent si ϕ est une distribution quelconque, pourvu que $\overset{V}{\phi} * \overset{V}{\phi}$ soit défini (il en est ainsi si φ

a un support compact.) En particulier, on peut prendre un opérateur D_p de dérivation d'ordre p . Ainsi, la dérivée

$$D_p T = D_p * T$$

a pour covariogramme transitif la dérivée d'ordre double, soit :

$$g_r = (-1)^p D_p^2 g$$

Ces dérivées doivent, naturellement, être prises au sens des distributions.

Enfin, la théorie de l'estimation à l'aide d'une maille régulière de prélèvements d'échantillons φ se ramène à l'estimation, par la même maille de prélèvements ponctuels, de la variable ponctuelle de covariogramme $g_r = g * K$,

Examinons, en passant, le cas d'une maille aléatoire stratifiée, qui n'a pas été traité dans la Note 42. D'après ce qui précède, on peut se limiter au cas d'une variable ponctuelle et de prélèvements ponctuels.

5.- Maille aléatoire stratifiée en transitif.

Désignons par $f(x) = f(x_1 \dots x_n)$ la variable ponctuelle, par $g(h)$ son covariogramme, par Π le parallélépipède construit sur la maille $a = (a_1 \dots a_n)$ et centré à l'origine, par $\pi(h)$ sa fonction caractéristique et par $P(h)$ son covariogramme géométrique

$$(18) \quad P(h) = \pi * \pi$$

La maille aléatoire stratifiée est définie lorsque l'on connaît la position $v = (v_1 \dots v_n)$ du centre d'un parallélépipède translaté de Π dans une translation v , soit $\mathcal{C}_v \Pi$. Dans chacun des parallélépipèdes $\mathcal{C}_{v+ka} \Pi$ de la maille, on tire au sort un point de prélèvement $v + ka + u_k$, de telle manière que chacun des points de $\mathcal{C}_{v+ka} \Pi$ ait même probabilité d'être tiré : autrement dit, u_k est tiré au sort dans Π selon une loi de probabilité uniforme. Pour estimer la quantité de métal, on forme l'estimateur :

$$(19) \quad Q^* = |a| \sum_k f(v + ka + u_k)$$

$|a|$ est le volume de Π , soit $|a| = a_1 a_2 \dots a_n$, et les u_k résultent de tirages au sort indépendants dans Π . Q^* est une variable aléatoire relativement à ces u_k , et aussi relativement à la position v de l'origine du réseau, que l'on peut considérer comme tirée au sort dans Π indépendamment des u_k . Raisonnons d'abord à v fixé.

L'espérance mathématique de Q^* à v fixé est :

$$E(Q^*, v) = |a| \sum_k \frac{1}{|a|} \int_{\Pi} f(v + ka + u_k) du_k = \int f(x) dx = Q$$

Elle est égale à la vraie valeur de la quantité de métal Q : on a donc aussi

$$E(Q^*) = E(Q^*, v) = Q$$

Pour calculer la variance à v fixé, formons le carré

$$Q^{*2} = |a|^2 \sum_{k \neq p} f(v + ka + u_k) f(v + pa + u_p)$$

Pour $k \neq p$, f_k et f_p sont indépendants. Pour $k = p$, la variance de f^2 apparaît.

On a ainsi :

$$E \begin{bmatrix} f_k & f_k \end{bmatrix} = \overline{E(f_k)}^2 + D^2(f_k)$$

$$E \begin{bmatrix} f_k & f_p \end{bmatrix} = E(f_k) E(f_p)$$

Par suite, il vient

$$E(Q^{*2}, v) = |a|^2 \sum_{k \neq p} E(f_k) E(f_p) + |a|^2 \sum_k D^2(f_k)$$

$$= Q^2 + |a|^2 \sum_k D^2(f_k)$$

D'où l'expression de la variance, lorsque l'origine v du réseau est donnée :

$$(20) D^2(Q^*, v) = |a|^2 \sum_k D^2 \left[f(v + ka + u_k) \right]$$

Comme $E(Q^*.v) = Q$, ne dépend pas de v , on aura la variance a priori $D^2(Q^*)$ en prenant la valeur probable relativement à v de $D^2(Q^*.v)$. Pour expliciter son expression, introduisons la variable régionalisée

$$y(x) = \frac{1}{|a|} \int_{\Pi} f(x+u) du = \frac{1}{|a|} f * \frac{v}{\omega}$$

égale à la valeur moyenne de f dans le parallélépipède Π centré en x . On a

$$D^2 \left[f(v + ka + u_k) \right] = \frac{1}{|a|} \int_{\Pi} f^2(v + ka + u) du - \frac{y(v + ka)^2}{|a|}$$

Par suite, d'après (20)

$$\begin{aligned} D^2(Q^*.v) &= |a| \int f^2(x) dx - |a|^2 \sum_k \frac{y(v + ka)^2}{|a|} \\ &= |a| g(0) - |a|^2 \sum_k \frac{y(v + ka)^2}{|a|} \end{aligned}$$

Le premier terme est indépendant de v . Le deuxième, lorsque v est pris au hasard dans π , a pour valeur probable

$$|a|^2 E \sum_k \frac{y(v + ka)^2}{|a|} = |a| \int \frac{y(x)^2}{|a|} dx$$

Comme le covariogramme de $y(x)$ est

$$g_{\pi} = \frac{1}{|a|} f * \frac{v}{\omega} * \frac{1}{|a|} f * \frac{v}{\omega} = \frac{1}{|a|^2} g * P$$

on obtient finalement

$$D^2(Q^*) = |a| \left[g(0) - \frac{1}{|a|^2} \int g(h) P(h) dh \right]$$

La variance s'obtient en multipliant par $|a|$ la différence entre $g(0)$ et la moyenne de $g(h)$ dans la maille Π ce que nous écrirons :

$$(20) \quad D^2(Q^*) = |a| \left[g(0) - g_{\pi}(0) \right]$$

Cette formule est la transposition exacte du résultat connu que l'on obtient dans le cas intrinsèque.

6.- Définition des distributions aléatoires.

Pour étendre aux distributions la théorie intrinsèque de la Note 47, il convient en premier lieu d'introduire la notion de distribution aléatoire, qui est une généralisation naturelle de la notion de processus stochastique. En toute rigueur, pour probabiliser un espace de distributions \mathcal{C}' (défini comme l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues agissant sur les fonctions d'un espace \mathcal{C} donné), il convient de se donner sur \mathcal{C}' d'une part une σ -algèbre, de l'autre une probabilité, c'est-à-dire une mesure sommable à l'unité définie pour cette σ algèbre. Cette définition, la seule rigoureuse, d'une distribution aléatoire dans \mathcal{C}' conduit à de très hautes et très abstraites spéculations mathématiques qui ne peuvent trouver place ici. Nous nous contenterons de la définition suivante, non rigoureuse, mais pragmatique :

6.1 - Définition

Etant donné un espace de distribution \mathcal{C}' , défini sur un espace de fonctions \mathcal{C} , nous dirons qu'une distribution $T \in \mathcal{C}'$ est définie en tant que distribution aléatoire (ou stochastique), si, pour tout ensemble de fonctions $\varphi_i \in \mathcal{C}$ en nombre arbitraire n , les nombres $T\varphi_i$ sont des variables aléatoires dont la loi de répartition probabiliste $F(T\varphi_1, T\varphi_2, \dots, T\varphi_n)$ est connue.

Ces fonctions de répartition probabiliste $F(T\varphi_1, \dots, T\varphi_n)$, dont l'ensemble définit une distribution aléatoire, ne peuvent pas être absolument quelconques. Nous leur imposerons les deux conditions suivantes :

1 - Quelles que soient les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ de \mathcal{C} , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} F(T\varphi_1, T\varphi_2, \dots, T\varphi_{n-1}, \infty) = F(T\varphi_1, T\varphi_2, \dots, T\varphi_{n-1}) \\ F(T\varphi_1, T\varphi_2, \dots, T\varphi_{n-1}, -\infty) = 0 \end{array} \right.$$

2 - Si $\varphi_i \rightarrow \psi_i$ et si $\psi_i \in \mathcal{C}$, on a $F(T\varphi_i) \rightarrow F(T\psi_i)$

La condition 1 est une simple condition de cohérence. Elle signifie que $F(T\varphi_1, \dots, T\varphi_{n-1})$ est une loi marginale de $F(T\varphi_1, \dots, T\varphi_{n-1}, T\varphi_n)$, quelle que soit $\varphi_n \in \mathcal{C}$. La condition de continuité 2 exprime que si les fonctions $\varphi_i \in \mathcal{C}$

convergent, au sens de la convergence utilisée dans \mathcal{L} pour définir \mathcal{C}' , vers des fonctions ψ_i appartenant elles-mêmes à \mathcal{C} , la loi $F(T\varphi_i)$ converge vers la loi $F(T\psi_i)$, au sens habituel de la convergence des fonctions de répartitions. (Une condition nécessaire et suffisante pour cette convergence est que la fonction caractéristique de $F(T\varphi_i)$ converge vers la fonction caractéristique de $F(T\psi_i)$ uniformément sur un domaine fini quelconque contenant l'origine). Si les moments de la loi des $T\varphi_i$ existent, ils convergent vers les moments correspondants de la loi des $T\psi_i$.

D'une manière plus synthétique, on obtient une définition équivalente à la précédente en se donnant la fonctionnelle caractéristique $\mathcal{C}(\varphi)$ qui, à toute fonction φ de \mathcal{C} , associe l'espérance mathématique de l'exponentielle $e^{iT\varphi}$

$$\mathcal{C}(\varphi) = E(e^{iT\varphi})$$

En effet, si toutes les lois $F(T\varphi)$ sont connues, $\mathcal{C}(\varphi)$ est bien déterminée. Inversement, la fonctionnelle caractéristique permet de retrouver toute loi du type $F(T\varphi_1 \dots T\varphi_n)$. En posant, en effet :

$$\varphi = u_1 \varphi_1 + \dots + u_n \varphi_n$$

la fonction φ est dans \mathcal{C} , donc $\mathcal{C}(\varphi)$ est connue, et

$$\mathcal{C}(\varphi) = E \left[e^{iu_1 T\varphi_1 + \dots + iu_n T\varphi_n} \right]$$

n'est pas autre chose que la fonction caractéristique de la loi $F(T\varphi_1 \dots T\varphi_n)$.

La condition (2) exprime que la fonctionnelle $\mathcal{C}(\varphi)$ est continue, c'est-à-dire que $\mathcal{C}(\varphi_i)$ converge vers $\mathcal{C}(\varphi)$ lorsque φ_i tend vers φ (au sens de la convergence utilisée dans \mathcal{C}).

La fonctionnelle caractéristique permet de même de définir commodément un ensemble de distributions aléatoires non indépendantes T_1, \dots, T_k . On prend dans ce cas

$$\mathcal{C}(\varphi_1 \dots \varphi_k) = E \left[e^{i(T_1\varphi_1 + \dots + T_k\varphi_k)} \right]$$

Comme cas particulier, on doit examiner les distributions aléatoires stationnaires, et les distributions aléatoires à accroissements indépendants, qui se correspondent l'une l'autre par images de Fourier réciproques. Dans tout ce qui suit, de manière à rendre possible l'analyse harmonique, on suppose que \mathcal{C}' est un espace de distributions tempérées. En pratique, \mathcal{C}' pourra être l'espace \mathcal{S}' entier, et dans ce cas les fonctions de base φ devront appartenir à \mathcal{S} , c'est-à-dire être indéfiniment dérivables et à décroissance rapide ; ou bien \mathcal{C}' sera l'espace \mathcal{M}' des mesures à croissance lente, définies sur un espace \mathcal{M} de fonctions boréliennes vérifiant des conditions convenables de décroissance. En particulier, \mathcal{M} contiendra les fonctions boréliennes à support compact, et, notamment les fonctions caractéristiques de tout ensemble borélien v fini (ou échantillon).

6.2 - Distribution aléatoire stationnaire.

Une distribution aléatoire sera dite stationnaire, si toutes les lois $F(T\varphi_i)$ restent invariantes, pour toute translation affectant simultanément les fonctions φ_i , autrement dit si l'on a, quelles que soient les $\varphi_i \in \mathcal{C}$, quel que soit n et quel que soit le vecteur h :

$$(21) \quad F \left[T\varphi_1(x) \dots T\varphi_n(x) \right] = F \left[T\varphi_1(x-h) \dots T\varphi_n(x-h) \right]$$

On peut aussi considérer la translation réciproque affectant T

$$(\mathcal{T}_{-h}^T) \varphi(x) = T(\mathcal{T}_h \varphi) = T\varphi(x-h)$$

et dire que tout ensemble de $(\mathcal{T}_{-h}^T)\varphi_i$ a même loi de répartition que l'ensemble $T\varphi_i$: en langage bref, les lois de répartition sont invariantes pour toute translation de T . Avec la fonctionnelle caractéristique, on a :

$$\mathcal{C}(\varphi) = \mathcal{C}(\mathcal{T}_h \varphi)$$

6.3 - Distributions aléatoires à accroissements indépendants.

Une distribution aléatoire T sera dite à accroissements indépendants, si, pour tout ensemble de fonctions φ_i à supports V_i disjoints, c'est-à-dire tels que

$$V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{pour } i \neq j$$

les variables aléatoires $T\varphi_i$ sont mutuellement indépendantes

$$F(T\varphi_1 \dots T\varphi_n) = F(T\varphi_1) F(T\varphi_2) \dots F(T\varphi_n)$$

En particulier, si $T \in \mathcal{M}'$ est une mesure aléatoire, on peut prendre comme φ_i les fonctions caractéristiques d'ensemble borélien disjoints V_i de mesures finies (échantillons distincts au sens usuel). Alors les quantités de métal $Q_i = T\varphi_i$ portées par les échantillons V_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

L'analyse harmonique établit un rapport étroit entre processus stochastiques stationnaires et à accroissements indépendants, les transformées de Fourier des processus du premier type étant des processus du 2ème type. (Théorème de Kolmogorov). Ce résultat devrait pouvoir être étendu aux distributions aléatoires. Nous nous limiterons au cas stationnaire d'ordre deux et aux accroissements non corréllés.

6.4- Moments d'ordre 1

Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}$, la variable aléatoire $T\phi$ a une espérance mathématique $E(T\phi)$. La fonctionnelle $E(T\phi)$ est manifestement linéaire, car

$$E \left[T \sum \lambda_i \phi_i \right] = E \left[\sum \lambda_i T\phi_i \right] = \sum \lambda_i E(T\phi_i)$$

Elle est continue, car, d'après la condition 2 du paragraphe 5.1, $\phi_i \rightarrow \psi_i$ (au sens de la convergence utilisée dans \mathcal{C} pour définir les distributions de \mathcal{C}') entraîne $E(T\phi_i) \rightarrow E(T\psi_i)$. Ainsi $E(T\phi)$ résulte de l'action sur ϕ d'une certaine distribution de \mathcal{C}' , que nous noterons $E(T)$, soit :

$$(22) \quad E(T\phi) = E(T) \phi$$

Il est loisible de remplacer T par $T - E(T)$, de manière à se ramener au cas où la distribution espérance mathématique est identiquement nulle. Dans le cas stationnaire, on a, pour toute translation \mathcal{C}_h

$$\mathcal{C}_h * E(T) = E(T)$$

d'où résulte que toutes les dérivées de $E(T)$ sont nulles, de sorte que cette dis-

tribution se réduit à une simple constante.

6.5. - Moments d'ordre 2.

A tout couple $\phi_1 \phi_2$ de fonctions de \mathcal{L} est associé le moment rectangulaire $E [T\phi_1 T\phi_2]$, valeur probable du produit des variables aléatoires $T\phi_1$ et $T\phi_2$. Dans le cas $E(T) = 0$, ce moment est une covariance. A ϕ_1 fixé, $E(T\phi_1 T\phi_2)$ est une fonctionnelle linéaire de ϕ_2 , dont la condition 2 assure la continuité. C'est donc une distribution $\in \mathcal{L}'$. A ϕ_2 fixé, $E(T\phi_1 T\phi_2)$ est de même une distribution de \mathcal{L}' agissant sur ϕ_1 . Dans le produit topologique $R_x^n \times R_y^n$ de R^n par lui-même, les fonctions du type $\phi_1(x) \phi_2(y)$ et les combinaisons linéaires des fonctions de ce type constituent un ensemble partout dense dans l'espace fonctionnel \mathcal{L} associé à $R_x^n \times R_y^n$. $E(T\phi_1 T\phi_2)$ fonctionnelle linéaire continue sur les produits $\phi_1(x)$, $\phi_2(y)$, induit une fonctionnelle linéaire sur \mathcal{L} dans $R_x^n \times R_y^n$. Comme cette fonctionnelle est continue, en vertu de la condition 2 de 6.1, c'est une distribution K de \mathcal{L}' . En utilisant une notation symbolique, on a

$$(23) E [T\phi_1 T\phi_2] = K [\phi_1(x) \times \phi_2(y)] = \iint K(xy) \phi_1(x) \phi_2(y) dx dy$$

Cette distribution K , dans $R_x^n \times R_y^n$, est la covariance de la distribution aléatoire T . Elle est symétrique en x et y , puisque $E(T\phi_1 T\phi_2) = E(T\phi_2 T\phi_1)$.

Examinons ce que l'on peut en dire dans les deux cas particuliers 6.2 et 6.3.

6.6 - Distribution stationnaire d'ordre 2

Supposons d'abord que T soit stationnaire au sens de 6.2, c'est-à-dire que les lois F soient invariantes pour toute translation. En particulier, la distribution covariance $K(xy)$ doit être invariante pour toute translation, soit :

$$\mathcal{Z}_h(x) \mathcal{Z}_h(y) * K(xy) = K(xy)$$

En notations symboliques, quelles que soient ϕ_1 et ϕ_2 dans \mathcal{L} , on a :

$$(24) \iint K(xy) \phi_1(x-h) \phi_2(y-h) dx dy = \iint K(xy) \phi_1(x) \phi_2(y) dx dy$$

Si K était une fonction ordinaire, on en déduirait immédiatement

$$K(x-h, y-h) = K(x, y)$$

et on en conclurait que K est de la forme $K(x-y)$, c'est-à-dire une fonction dans R_n du seul argument $(x-y)$, fonction paire puisque K est symétrique en x et y .

$$(25) \quad K(x - y) = K(y - x)$$

Dans ce cas, l'équation (24) se met sous la forme

$$\begin{aligned} \iint K(x-y) \phi_1(x) \phi_2(y) dx dy &= \iint K(h) \phi_1(y+h) \phi_2(y) dx dy \\ &= \int K(h) dh \int \phi_1(y+h) \phi_2(y) dy \end{aligned}$$

On voit apparaître le covariogramme rectangulaire de ϕ_1 et ϕ_2 ,

$$(26) \quad c_{12}(h) = \overset{V}{\phi_2} * \phi_1$$

et on peut écrire

$$(27) \quad E(T\phi_1 T\phi_2) = K(xy) \left[\phi_1(x) \times \phi_2(y) \right] = K(h) c_{12}(h)$$

Comme K est pair, on peut aussi bien remplacer c_{12} par

$$c_{21} = \phi_2 * \overset{V}{\phi_1} = \overset{V}{c_{12}}$$

Mais, dans le cas général où $K(x,y)$ est une distribution, il faut montrer que les résultats écrits ci-dessus restent valables. On partira de la relation (24)

$$K(\phi_1 \times \phi_2) = K(\tau_{-h}\phi_1 \times \tau_{-h}\phi_2)$$

qui montre que la distribution $K(xy)$ agit seulement sur des classes de fonctions du type $\phi_1(x) \times \phi_2(y)$, les éléments d'une classe étant constitués d'un produit de deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 et de tous leurs translatés. Or les éléments d'une même classe sont caractérisés par un même covariogramme rectangulaire $\phi_1 * \overset{V}{\phi_2}$, puisque l'on a

$$\tau_{-h} * \phi_1 * \overset{V}{\tau_{-h}} * \overset{V}{\phi_2} = \overset{V}{\tau_{-h}} * \overset{V}{\tau_{-h}} * \phi_1 * \overset{V}{\phi_2} = \phi_1 * \overset{V}{\phi_2}$$

Ainsi, à tout covariogramme $\phi_1 * \overset{V}{\phi_2}$ la distribution $K(xy)$ associe un nombre déterminé, et définit une fonctionnelle K sur l'ensemble des fonctions $\phi_1 * \overset{V}{\phi_2}$. Cette

fonctionnelle est bilinéaire, car on a

$$(28) \quad K \left[\sum \lambda_i \lambda_j \varphi_i * \overset{V}{\psi}_j \right] = \sum \lambda_i \lambda_j K \left[\varphi_i * \overset{V}{\psi}_j \right]$$

On en fait une fonctionnelle linéaire sur l'espace $U \subset \mathcal{C}$ engendré par les fonctions $\varphi * \overset{V}{\psi}$, φ et $\overset{V}{\psi} \in \mathcal{C}$, en posant par convention

$$(29) \quad K \sum \lambda_i \varphi_i * \overset{V}{\psi}_i = \sum \lambda_i K \varphi_i * \overset{V}{\psi}_i$$

la relation bilinéaire (28) étant un cas particulier de (29). Enfin, la condition 2 de 6.1 nous garantit la continuité de cette fonctionnelle, de sorte que K apparaît comme une distribution sur l'espace fonctionnel U engendré par les $\varphi * \overset{V}{\psi}$, et l'on a la relation fondamentale

$$(30) \quad E(T \varphi_1 T \varphi_2) = K(\varphi_1 * \overset{V}{\psi}_2) = K(\varphi_2 * \overset{V}{\psi}_1)$$

En particulier, pour $E(T) = 0$, la variance d'un prélèvement φ est donnée par

$$(31) \quad D^2(T \varphi) = K(\varphi * \overset{V}{\varphi})$$

Cette variance doit être positive ou nulle, quelle que soit φ dans \mathcal{C} : la covariance est donc une distribution du type positif. On sait (théorème de Bochner) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution K soit de type positif est que sa transformée de Fourier soit une mesure ^{(1)*} positive. Cette transformée de Fourier χ agit sur l'espace des produits $\psi_1 \psi_2$ des transformées de Fourier des $\varphi_1 * \overset{V}{\varphi}_2$ (on doit se limiter à φ_1 et $\varphi_2 \in \mathcal{S}$), selon la définition habituelle

$$\chi(\varphi_1 \overline{\varphi_2}) = (2\pi)^n K(\varphi_1 * \overset{V}{\varphi}_2)$$

En particulier, pour $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, on a

$$\chi |\varphi|^2 = (2\pi)^n D^2(T\varphi)$$

et cette relation montre bien que χ doit être une mesure positive. Deux cas sont alors possibles : ou bien la mesure χ est sommable. Dans ce cas, K est une fonc-

(1)* Schwartz, op.cit. tome II, pp.130 et suiv.

tion continue $K(x)$, de type positif, et telle, en particulier que $K(x) < K(0)$, pour $x \neq 0$. La valeur $K(0)$ à l'origine existe et est égale à la somme de la mesure χ .

Si, au contraire, χ n'est pas sommable, K ne peut pas être une fonction continue, car $K(0)$ n'est pas définie. C'est une distribution de type positif.

La régularisée $T * \overset{V}{\psi}$ de T par une fonction $\psi \in \mathcal{C}$ possède les propriétés de régularité (continuité et dérivabilité) de ψ elle-même. C'est une fonction. Si T est stationnaire, il en est de même de sa régularisée, et cette régularisée a pour covariogramme $K * \overset{V}{\psi} * \overset{V}{\psi}$, qui est nécessairement une fonction continue de type positif. Cette fonction est étroitement liée au variogramme $\gamma(h)$ de la variable ponctuelle intrinsèque $T * \psi = f(x)$. En effet, un accroissement

$$f(x_1) - f(x_2) = [T * \overset{V}{\psi}] (\delta_{x_1} - \delta_{x_2})$$

a pour variance, selon (31)

$$2 \gamma(h) = K_r \left[(\delta_{x_1} - \delta_{x_2}) * (\overset{V}{\delta_{x_1}} - \overset{V}{\delta_{x_2}}) \right]$$

En effet, $K_r = K * \overset{V}{\psi} * \overset{V}{\psi}$ étant une fonction régulière agit sur les mesures δ de Dirac.

Comme on a

$$\begin{aligned} \delta_{x_1} * \overset{V}{\delta_{x_1}} &= \delta \\ \delta_{x_1} * \overset{V}{\delta_{x_2}} &= \delta_{x_1 - x_2} = \delta_h \\ \overset{V}{\delta_{x_1}} * \delta_{x_2} &= \delta_{x_2 - x_1} = \delta_{-h} \end{aligned}$$

Il vient simplement

$$2 \gamma(h) = 2 K_r(0) - K_r(h) - K_r(-h)$$

et, comme K_r est une fonction paire :

$$(32) \quad \gamma(h) = K_r(0) - K_r(h)$$

Les résultats obtenus ici supposent simplement la relation (24), c'est-à-dire l'invariance de $K(xy)$ pour toute translation. Inversement, si (24) est vérifié, on dira que la distribution T possède le caractère stationnaire d'ordre 2. En général, on ne pourra pas affirmer que T est stationnaire au sens strict de 6.2. L'invariance de $K(xy)$ pour les translations n'entraîne pas, en général, celle de toutes les lois F .

6.7.- Distributions aléatoires à accroissements sans corrélation.

Une distribution aléatoire T à accroissements indépendants au sens 6.3., et pour laquelle $E(T) = 0$, est telle que, pour deux fonctions φ_1 et φ_2 de \mathcal{C} à supports disjoints V_1 et V_2 , on ait

$$(33) \quad E(T \varphi_1 T \varphi_2) = 0$$

Inversement, si T est telle que $E(T) = 0$ et que (33) soit vérifiée pour $V_1 \cap V_2 = 0$, on dira que T est une distribution aléatoire à accroissements sans corrélations. Mais on ne pourra pas, en général, affirmer qu'elle est à accroissements indépendants.

Examinons comment se présente la covariance $K(xy)$ d'une distribution T à accroissements sans corrélation et telle que $E(T) = 0$.

Si φ_1 et φ_2 ont leurs supports V_1 et V_2 disjoints dans R_n , le support du produit $\varphi_1(x) \varphi_2(y)$ dans $R_n^x \times R_n^y$ a une intersection nulle avec la bissectrice $x = y$ de $R_n^x \times R_n^y$, et dans ce cas $K(xy) [\varphi_1(x) \varphi_2(y)] = 0$. Comme les produits $\varphi_1(x) \varphi_2(y)$ sont partout denses dans l'espace \mathcal{C} des fonctions $\varphi(xy)$ de $R_n^x \times R_n^y$, on voit que $K \varphi(xy)$ est nul pour toute fonction φ dont le support ne coupe pas cette bissectrice. Par conséquent $K(xy)$ est une distribution concentrée sur cette bissectrice, et peut être mise sous la forme

$$(34) \quad K(xy) = \delta(y - x) K(x)$$

où $K(x)$ est une distribution de R_n^x . (34) signifie que $K(xy)$ agit sur tout produit $\varphi_1(x) \varphi_2(y)$ comme $K(x)$ sur $\varphi_1(x) \varphi_2(x)$, soit

$$(35) \quad K(xy) [\varphi_1(x) \varphi_2(y)] = K(x) [\varphi_1(x) \varphi_2(x)]$$

Lorsque V_1 et V_2 sont disjoints, $\varphi_1(x) \varphi_2(x) = 0$, et la relation (33) est bien vérifiée. $K(x)$ est une sorte de densité de variance. En particulier, si T est une mesure aléatoire à accroissements sans corrélation, on peut prendre

$$\varphi_1 = \varphi_2 = k(x)$$

$k(x)$ étant la fonction caractéristique d'un échantillon borélien v . Ici, on a identiquement $k^2(x) = k(x)$. La relation (35) montre que la variance de la quantité de métal $Q = Tk$ contenue dans l'échantillon v n'est autre que :

$$D^2(Q) = Kk = \int_v dK(x)$$

La variance de l'échantillon v est égale à la somme dans v de la mesure K , qui joue bien le rôle d'une densité de variance.

Dans le cas particulier où T est en outre stationnaire, $K(x)$ est une constante, et on a une densité de variance uniformément répartie dans tout l'espace.

6.8. - Analyse harmonique d'une distribution stationnaire d'ordre 2.

Soit T une distribution aléatoire sur l'espace \mathcal{J} des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide, et $K(xy)$ sa covariance, distribution de $R_n^x \times R_n^y$. La transformée de Fourier de T , soit \mathcal{T} est la distribution aléatoire définie sur l'espace des fonctions Ψ transformée de φ (ces fonctions Ψ sont également indéfiniment dérivables à décroissance rapide) par la relation

$$(36) \quad \mathcal{T} \bar{\Psi} = (2\pi)^n T \varphi$$

Au facteur $(2\pi)^n$ près, les $\mathcal{T}\varphi$ ont mêmes lois de répartition que les $T\varphi$, de sorte que \mathcal{T} est effectivement définie comme distribution aléatoire sur l'espace des Ψ . Soit $\chi(uv)$ la covariance de \mathcal{T} , distribution de $R_n^u \times R_n^v$. La covariance de $\mathcal{T}\varphi_1$ et $\mathcal{T}\varphi_2$ est égale, à $(2\pi)^{2n}$ près, à celle de $T\varphi_1$ et $T\varphi_2$, et l'on a par conséquent

$$(37) \quad \chi(uv) \left[\overline{\varphi_1(u)} \overline{\varphi_2(v)} \right] = (2\pi)^{2n} K(xy) \left[\varphi_1(x) \varphi_2(y) \right]$$

$\chi(uv)$ est donc la transformée de Fourier, dans $R_n^u \times R_n^v$, de $K(xy)$.

Supposons maintenant que T soit stationnaire d'ordre (2), c'est-à-dire

$$K(xy) \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(y) \end{bmatrix} = K(xy) \begin{bmatrix} \varphi_1(x-h) & \varphi_2(y-h) \end{bmatrix}$$

La transformée de Fourier de $\varphi(x-h)$ étant $e^{iuh} \psi(u)$, où uh désigne le produit scalaire $u_1 h_1 + \dots + u_n h_n$, on déduit de (37)

$$\chi(uv) \begin{bmatrix} e^{-i(u+v)h} \overline{\psi_1(u)} \overline{\psi_2(v)} \end{bmatrix} = \chi(uv) \begin{bmatrix} \overline{\psi_1(u)} \overline{\psi_2(v)} \end{bmatrix}$$

Il est commode, changeant v en $-v$, d'introduire la distribution $\chi(u, -v)$ définie par :

$$\chi(u, -v) \overline{\psi_1(u)} \overline{\psi_2(v)} = \chi(u, v) \overline{\psi_1(u)} \overline{\psi_2(v)}$$

On n'oubliera pas, d'ailleurs, que $\chi(u, -v) = \chi(-u, v)$, en raison de la symétrie de χ . Du fait que T est stationnaire du second ordre, on déduit donc

$$e^{-i(u-v)h} \chi(u, -v) = \chi(u, -v)$$

et on en déduit que $\chi(u, -v)$ est nécessairement de la forme

$$(38) \quad \chi(u, -v) = \delta(u-v) \chi(u)$$

Ainsi $\chi(u, -v)$ est la covariance d'une distribution aléatoire à accroissements sans corrélation. On voit facilement que la covariance de \mathcal{U} s'en déduit en changeant v en $-v$.

$$(39) \quad \chi(u, v) = \delta(u+v) \chi(u)$$

En portant dans (37), on obtient

$$(40) \quad \chi(u) \overline{\psi_1(u)} \overline{\psi_2(u)} = (2\pi)^{2n} K(x) \varphi_1(x) * \varphi_2(x)$$

De sorte que $\chi(u)$, distribution densité de variance dans R_n^u est aussi la transformée de Fourier de la covariance stationnaire $K(x)$ de R_n^x (à un facteur $(2\pi)^n$ près).

La distribution \mathcal{L} elle-même n'est pas exactement à accroissements sans corrélation. $\mathcal{L}\psi_1$ et $\mathcal{L}\psi_2$ sont sans corrélation lorsque le support de ψ_1 est disjoint du symétrique du support de ψ_2 par rapport à l'origine. Il n'est pas possible (et dépourvu de signification physique) de séparer une fréquence u de \mathbb{R}_n^u de la fréquence "négative" $-u$ qui lui est associée.

En fait toute fonction de base ψ est de la forme

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2$$

où ψ_1 est réelle et paire, et ψ_2 réelle et impaire. La distribution \mathcal{L} elle-même se met sous la forme d'une somme d'un terme pair \mathcal{L}_S et d'un terme impair \mathcal{L}_a ,

$$(41) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_S = \frac{1}{2}(\mathcal{L} + \overline{\mathcal{L}}) \\ \mathcal{L}_a = \frac{1}{2}(\mathcal{L} - \overline{\mathcal{L}}) \\ \mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_a \end{cases}$$

On voit immédiatement que \mathcal{L}_S n'agit que sur la partie réelle ψ_1 d'une fonction ψ , et \mathcal{L}_a sur la partie imaginaire

$$(42) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_S \psi = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\psi + \overline{\psi}) = \mathcal{L}\psi_1 \\ \mathcal{L}_a \psi = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\psi - \overline{\psi}) = i\mathcal{L}\psi_2 \end{cases}$$

chacune de ses deux distributions \mathcal{L}_S et \mathcal{L}_a est à accroissements sans corrélation. On a, en effet, d'après (42) et (39)

$$\begin{cases} E[\mathcal{L}_S \psi \mathcal{L}_S \omega] = E[\mathcal{L}\psi_1 \mathcal{L}\omega_1] = \chi(u) [\psi_1(u) \omega_1(u)] = \chi(u) [\psi_1(u) \omega(u)] \\ E[\mathcal{L}_a \psi \mathcal{L}_a \omega] = E[\mathcal{L}\psi_2 \mathcal{L}\omega_2] = -\chi(u) [\psi_2(u) \omega_2(-u)] = \chi(u) [\psi_2(u) \omega_2(u)] \end{cases}$$

\mathcal{L}_S , agissant sur les fonctions paires réelles, et \mathcal{L}_a , agissant sur les fonctions impaires réelles, ont même densité de variance $\chi(u)$. Montrons, de plus, que \mathcal{L}_S et \mathcal{L}_a sont sans corrélation, c'est-à-dire que, pour ψ et ω quelconques, $\mathcal{L}_S \psi$ et $\mathcal{L}_a \omega$ sont des variables aléatoires à corrélation nulle. En effet, on a :

$$E[\mathcal{L}_S \psi \mathcal{L}_a \omega] = iE[\mathcal{L}\psi_1 \mathcal{L}\omega_2] = i\chi(u) [\psi_1(u) \omega_2(-u)] = 0$$

et cette expression est nulle, puisque χ et ψ_1 sont paires, tandis que ω_2 est impair.

En résumé, l'inverse de Fourier \mathcal{C} d'une distribution stationnaire T à covariance $K(x)$ se met sous la forme d'une somme

$$(43) \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_S + \mathcal{C}_a$$

de deux composantes indépendantes, l'une paire et l'autre impaire, ayant même covariance $\chi(u)$, transformée de Fourier de $K(x)$, à $(2\pi)^n$ près, lorsqu'elles agissent la première sur l'espace des fonctions ψ_1 paires, la deuxième sur l'espace des fonctions ψ_2 impaires.

Inversement, T est l'inverse de Fourier de \mathcal{C} , au sens des distributions, et l'on peut écrire (symboliquement, car \mathcal{C}_a et \mathcal{C}_S ne sont jamais des fonctions ordinaires, puisque T est stationnaire, donc non sommable).

$$(44) \quad T = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \cos ux \mathcal{C}_S dx + \frac{1}{(2\pi)^n} \int \sin ux \mathcal{C}_a dx$$

Ainsi, la formule (44) permet de résoudre le problème inverse de la synthèse harmonique, qui consiste à construire une distribution qui puisse être considérée comme une réalisation particulière d'une distribution stationnaire d'ordre 2 de covariance $K(x)$ donnée à l'avance. En pratique, on se contente de déterminer les valeurs numériques de $T * \overset{V}{k}$, où k est une fonction régularisante. Si T est une mesure, on peut chercher à construire ainsi les valeurs numériques des quantités de métal Q_i portées par des parallélépipèdes π_i constituant un réseau régulier. On prendra la covariance $K * k * \overset{V}{k}$, de cette régularisée, et sa transformée de Fourier (à $(2\pi)^n$ près).

$$\chi_C = \chi |c|^2$$

où C est la transformée de k . Pour construire une réalisation de \mathcal{C} , on effectuera une partition de l'espace des fréquences R_n^u en domaines P_i , tels que P_{-i} soit la symétrique de P_i par rapport à l'origine, de fonctions caractéristiques $p_i(u) = \overset{V}{p}_{-i}(u)$. A chaque couple de domaines P_i et P_{-i} , on associe une fonction paire et une fonction impaire

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{p_i(u) + P_i(u)}{2} \\ \psi_2 &= \frac{p_i(u) - P_i(u)}{2} \end{aligned} \right.$$

On tirera au sort, indépendamment l'une de l'autre, deux variables aléatoires $\mathcal{L}_S \psi_1$ et $\mathcal{L}_a \psi_2$, de même variance.

$$(46) \quad D^2(\mathcal{L}_S \psi_1) = D^2(\mathcal{L}_a \psi_2) = \frac{1}{2} \times p_i(u) = \frac{1}{2} \int_{P_i} dx(u)$$

Et l'on affectera à P_i et P_{-i} les nombres

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}_{P_i} &= \mathcal{L}_S \psi_1 + \mathcal{L}_a \psi_2 \\ \mathcal{L}_{P_{-i}} &= \mathcal{L}_S \psi_1 - \mathcal{L}_a \psi_2 \end{aligned} \right.$$

Les valeurs numériques de la régularisée $T_r(x)$ s'en déduisent par (44).

7.- Distributions aléatoires intrinsèques.

Nous avons défini, au paragraphe 5, les distributions aléatoires définies sur un espace \mathcal{L} de fonctions φ (pratiquement $\mathcal{L} = \mathcal{I}$ ou $\mathcal{L} = \mathcal{M}$). Mais il peut arriver que les lois $F(T_{p_i})$, et particulièrement leurs moments d'ordre 1 et 2, ne soient pas définies pour toutes les fonctions $\varphi_i \in \mathcal{L}$, mais seulement pour des fonctions appartenant à un sous espace $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}$. Comme exemple d'espace \mathcal{U} , on peut prendre l'espace \mathcal{L}_k des fonctions ψ de \mathcal{L} dont tous les moments d'ordre inférieur ou égal à k sont nuls. Nous nous limiterons, dans ce qui suit, à l'espace \mathcal{L}_0 des fonctions $\psi \in \mathcal{L}$ de somme nulle, c'est-à-dire telles que :

$$(48) \quad \int \psi(x) dx = 0$$

Il est clair que les distributions ainsi définies sur \mathcal{L}_0 ne correspondent pas, de manière univoque, à des distributions de \mathcal{L}' . En fait, à chaque distribution sur \mathcal{L}_0 , on peut faire correspondre une classe de distributions de \mathcal{L}' , définies à une constante arbitraire près. Pour le voir, il suffit de raisonner sur les images de Fourier. La transformée φ d'une fonction de base de \mathcal{I}_0 vérifiant

(48) est une fonction $\psi \in \mathcal{J}, \mathcal{J}^0$ désignant le sous espace des fonctions de \mathcal{J} nulles à l'origine

$$\psi(0) = 0$$

La transformée \mathcal{T} de T , définie sur \mathcal{J}^0 , ne se prolonge pas de manière univoque sur \mathcal{J} , mais avec l'arbitraire d'une distribution $A\delta$, où A est une constante quelconque. En passant aux images inverses, on voit que T , définie sur \mathcal{J}^0 , ne se prolonge sur \mathcal{J} qu'à une constante près A .

Une distribution aléatoire sera dite intrinsèque (de 2ème ordre) si elle est définie sur l'espace \mathcal{L}_0 des fonctions vérifiant (48) et possède, pour ces fonctions, le caractère stationnaire (de 2ème ordre). On parlera aussi de distribution à accroissements stationnaires. En effet, toute fonction ψ de \mathcal{L}_0 peut être mise sous la forme de la différence

$$\psi = \psi_1 - \psi_2$$

de deux fonctions de \mathcal{L} ayant même somme dans R_n

$$\int \psi_1 dx = \int \psi_2 dx$$

La quantité de métal

$$T \psi = T \psi_1 - T \psi_2$$

peut être interprétée comme un accroissement. Dans le cas particulier où T_r (régularisée de T) est une fonction continue, on peut faire agir sur T_r la mesure

$$\psi = \delta_{x_1} - \delta_{x_2}$$

On trouve :

$$T_r \psi = T_r(x_1) - T_r(x_2)$$

et il s'agit bien d'un accroissement au sens usuel : il faut noter que seule la différence des valeurs prises aux points x_1 et x_2 est ainsi définie, les valeurs ponctuelles $T_r(x_1)$ et $T_r(x_2)$ n'étant connues qu'à une constante arbitraire près.

La raison majeure de cette restriction à l'espace \mathcal{C}_0 des accroissements est, évidemment, de permettre l'étude de phénomènes dont les variances a priori seraient infinies, mais dont les accroissements ont des variances finies. On sait que cette circonstance se rencontre dans le cas d'une variable ponctuelle (fonction continue, et non distribution), lorsque le variogramme $\gamma(h)$ croît indéfiniment. La variance d'un échantillon v dans un domaine V tend vers l'infini lorsque V devient infiniment grand, et il est clair que les variances a priori sont infinies. Par contre, les accroissements $f(x+h) - f(x)$ ont une variance bien déterminée, égale à $2\gamma(h)$.

Le moment d'ordre 1 se définit comme au paragraphe 5. Il donne naissance à une fonctionnelle continue $E(T)$, qui se réduit à une constante en vertu du caractère stationnaire. On peut supposer $E(T) = 0$. Mais il faut bien voir que $E(T)$ n'est défini que pour les fonctions $\varphi \in \mathcal{C}_0$ vérifiant (48). Pour une fonction ψ de \mathcal{C} , de somme non nulle, l'espérance mathématique $E(T\psi)$ n'est définie qu'à une constante arbitraire près.

En ce qui concerne les moments d'ordre 2, les raisonnements faits en 6.5. restent applicables. La covariance $K(xy)$, définie comme une distribution de $R_n^x \times R_n^y$ sur les produits $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$, avec $\varphi_1 \in \mathcal{C}_0$, $\varphi_2 \in \mathcal{C}_0$, compte tenu du caractère stationnaire, conduit à la distribution $K(x)$ de R_n , telle que

$$(49) \quad E(T\varphi_1 T\varphi_2) = K \left[\varphi_1(x) * \overset{V}{\varphi_2}(x) \right]$$

Mais K n'est définie que pour des fonctions φ_1 et φ_2 de sommes nulles toutes deux. La transformée de Fourier de $\varphi_1 * \overset{V}{\varphi_2}$ est le produit $\varphi_1 \overline{\varphi_2}$ de deux fonctions nulles à l'origine, donc s'annule elle-même à l'origine ainsi que ses dérivées premières. Par suite $\varphi_1 * \overset{V}{\varphi_2}$ appartient à \mathcal{C}_1 , espace des fonctions de somme nulle ayant tous leurs moments d'ordre 1 égaux à zéro, et la distribution K ne peut être définie que sur \mathcal{C}_1 .

Sur cet espace \mathcal{C}_1 , K doit être de type positif, puisque toutes les variances $K(\varphi * \overset{V}{\varphi})$ doivent être non négatives pour $\varphi \in \mathcal{C}_0$. En particulier, K est une distribution paire. Sa transformée de Fourier χ , définie par

$$\chi \psi_1 \overline{\psi_2} = (2\pi)^n K \varphi_1 * \overset{V}{\varphi_2}$$

sur l'espace \mathcal{J}_1 des fonctions de \mathcal{J} nulles à l'origine ainsi que toutes leurs dérivées premières doit être une mesure positive, puisque $\chi |\psi_1|^2$ est nécessairement non négatif. Mais ce n'est que sur \mathcal{J}_1 que cette propriété est imposée. Par conséquent χ n'est pas obligatoirement une mesure sur \mathcal{J} . On peut noter que le produit d'une fonction $\psi \in \mathcal{J}$ quelconque par le carré d'une forme linéaire, ou, plus généralement, par une forme quadratique définie positive, est une fonction de \mathcal{J}_1 . Par conséquent, $Q(u)\chi$ est obligatoirement une mesure positive sur \mathcal{J} , Q étant une forme quadratique définie positive, et, par conséquent aussi, toute combinaison linéaire de type elliptique des dérivées secondes de K est (au signe près) une distribution de type positif (définie au moins sur \mathcal{J}).

Ce théorème admet une réciproque, au moins dans le cas particulier important où K est une distribution isotrope $K(r)$. Dans ce cas, l'action de K sur une fonction $\varphi_1 * \overset{V}{\varphi_2}$ de \mathcal{J}_1 est identique à l'action de K sur la fonction $\varphi(r^2)$ obtenue en prenant la valeur moyenne de $\varphi_1 * \overset{V}{\varphi_2}$ sur la surface de la sphère de rayon r . $\varphi(r^2)$ est une fonction paire, appartenant à \mathcal{J}_1 si φ_1 et φ_2 appartiennent à \mathcal{J}_0 . En passant aux images de Fourier χ et ψ , et comme toute $\psi(\rho^2) \in \mathcal{J}^0$, c'est-à-dire nulle à l'origine, peut se mettre sous la forme $\rho^2 \omega(\rho^2)$ avec $\omega \in \mathcal{J}$, il est clair que si $\rho^2 \chi$ est une mesure positive, on aura

$$\chi \psi(\rho^2) = \rho^2 \chi \omega(\rho^2) \geq 0$$

On voit ainsi, comme dans la Note 47, que la distribution r^λ peut jouer le rôle de covariance $K(r)$ pourvu que λ soit inférieur à 2 (l'image de Fourier de r^λ est en $\rho^{-\lambda-n}$, et $\rho^{-\lambda-n+2}$ est une mesure positive dans R_n si, et seulement si

$$\lambda < 2$$

Les formules synthétiques de la Note 47 se généralisent aisément. En estimant la teneur (généralisée) $T\varphi$ correspondant à une fonction de prélèvement φ vérifiant

$$(50) \int \varphi dx = 1$$

à l'aide de la teneur d'un prélèvement ψ (de somme unité), on commet une erreur $T(\varphi - \psi)$, et comme $\varphi - \psi$ appartient à \mathcal{C}_0 , cette erreur se caractérise commodément par la variance d'estimation

$$D^2 [T(\varphi - \psi)] = K[\varphi - \psi] * (\varphi - \psi)$$

En développant, on obtient (compte tenu de la parité de K)

$$(51) D^2 [T(\varphi - \psi)] = K[\varphi * \varphi + \psi * \psi - 2\varphi * \psi]$$

Si K est une fonction continue (et on peut toujours se ramener à ce cas, moyennant une régularisation de T), la variance d'un accroissement $T(x+h) - T(x)$ est :

$$K \left[\delta_x * \delta_x + \delta_{x+h} * \delta_{x+h} - 2\delta_x * \delta_{x+h} \right] = 2[K(0) - K(h)]$$

Comme cette variance n'est autre que $2\gamma(h)$, $\gamma(h)$ désignant le demi-variogramme, on a :

$$(52) \quad \gamma(h) = K(0) - K(h)$$

Conformément à la règle générale, $K(h)$, en tant que distribution sur \mathcal{C} , n'est déterminée qu'à une constante près $K(0)$. Si l'on prend $K(0) = 0$, $K(h)$ coïncide, au signe près, avec $\gamma(h)$. La formule synthétique (51), compte tenu de (52), se met sous la forme

$$\begin{aligned} D^2 T(\varphi - \psi) &= 2 \int (\varphi * \psi) \gamma(h) dh - \int (\varphi * \varphi) \gamma(h) dh - \int (\psi * \psi) \gamma(h) dh \\ &= 2 \iint \varphi(x) \psi(x+h) \gamma(h) dx dh - \iint \varphi(x) \varphi(x+h) \gamma(h) dx dh \\ &\quad - \iint \psi(x) \psi(x+h) \gamma(h) dx dh \end{aligned}$$

En particulier, si φ et ψ sont les fonctions caractéristiques, normées à l'unité, de deux ensembles V et V' , on retrouve la formule habituelle

$$D^2 [T(\varphi - \psi)] = \frac{2}{VV'} \iint_V \int_{V'} \gamma(h) dh - \frac{1}{V^2} \iint_V \int_V \gamma(h) dh - \frac{1}{V'^2} \iint_{V'} \int_{V'} \gamma(h) dh$$

Si, au contraire, ψ est une somme de prélèvements ponctuels,

$$\psi = \frac{1}{n} \left[\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} \right]$$

et φ la fonction caractéristique normée à l'unité d'un panneau V , il vient

$$\begin{aligned} D^2 [T(\varphi - \psi)] &= \frac{2}{nV} \sum_i \int_V \gamma(x-x_i) dx - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x-x') dx dx' \\ &\quad - \frac{1}{n^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j) \end{aligned}$$