



BUREAU DE RECHERCHES GEOLOGIQUES ET MINIERES  
Département Géostatistique

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 55

EQUATION DE LA CHALEUR, ECOULEMENTS EN MILIEU POREUX  
ET DIFFUSION GEOCHIMIQUE

Octobre 1964 G.MATHERON

N-52

## NOTE GEOSTATISTIQUE N° 55

EQUATION DE LA CHALEUR, ECOULEMENTS EN MILIEU POREUX  
ET DIFFUSION GEOCHIMIQUETable des Matières

|   | <u>Pages</u> |
|---|--------------|
| 1 - Introduction                                  | 1            |
| 2 - Les équations de Kolmogorov                   | 3            |
| 3 - Forme tensorielle des équations de Kolmogorov | 6            |
| 4 - Equations de la chaleur et de l'Hydraulique   | 10           |
| 5 - Principe de Réciprocité                       | 14           |
| 6 - Cas d'intégrabilité                           | 17           |
| 7 - Promenade Aléatoire                           | 26           |
| 8 - Génèse des paramètres macroscopiques.         | 31           |

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 55

EQUATION DE LA CHALEUR, ECOULEMENTS EN MILIEU POREUX  
ET DIFFUSION GEOCHIMIQUE

I.- INTRODUCTION

Nous nous proposons d'examiner, dans cette Note, dans quelle mesure un processus de diffusion géochimique peut être comparé à un processus de diffusion thermique, autrement dit, dans quelle mesure l'équation de la chaleur peut elle conduire à une interprétation intéressante des phénomènes géochimiques. Rappelons cette équation. Si  $\varphi(x, t)$  représente la température du point  $x = (x_1, \dots, x_n)$  au temps  $t$ , elle s'écrit :

$$(1) \quad \Delta \varphi = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$\Delta$  représentant l'opérateur laplacien  $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ , et  $c$  une constante que nous appellerons ici conductibilité. En intégrant (1) dans un domaine fermé, on obtient à droite une quantité proportionnelle à la variation de la quantité de chaleur contenue dans ce domaine, et à gauche le flux du gradient de température, de sorte que (1) signifie que les échanges de chaleur sont proportionnels aux différences de température.

Si  $\varphi(x, t)$  représente la teneur au temps  $t$  et au point  $x$  d'une auréole de dispersion géochimique, la même équation signifierait que les échanges de matière sont proportionnels aux différences de teneur. Il est très probable que le véritable mécanisme de la diffusion géochimique est beaucoup plus complexe. Cependant, on sait que l'équation (1) décrit très bien les phénomènes de diffusion en phase gazeuse (théorie cinétique des gaz). D'autre part, les géochimistes russes <sup>(1)</sup> interprètent les profils d'anomalie, à l'aplomb d'un filon vertical, par des courbes de Gauss, et déduisent des paramètres de ces courbes la profondeur et la teneur du filon. On sait (voir ci-dessous) que la solution élémentaire de l'équation (1) est une exponentielle de Gauss. Dans la mesure où la pratique des géochimistes russes est justifiée, elle implique que les processus de diffusion soient régis par l'équation de la chaleur.

-----  
(1) Indication verbale de Mr. SAKOVITCH.

Il n'est peut-être pas licite de se montrer aussi affirmatif, mais les remarques qui précèdent montrent l'intérêt du problème abordé.

En réalité, l'équation (1) où  $c$  est une constante ne peut convenir que si le milieu où se fait la diffusion peut être considéré comme homogène. Cette homogénéité est peu plausible. Nous considérerons donc la conductibilité  $c$  comme une variable régionalisée  $c(x)$ , et nous chercherons à construire une interprétation stochastique de l'équation (1). Plus exactement, il apparaîtra nécessaire d'introduire, pour décrire en toute généralité le milieu hétérogène où s'opère la diffusion, d'une part un vecteur régionalisé, représentant une dérive, de l'autre un tenseur régionalisé lié aux moments du deuxième ordre (équation de Kolmogorov). Dans le cas où l'analogie avec l'équation de la chaleur doit être maintenue, ce vecteur et ce tenseur s'exprimeront d'une manière simple en fonction d'un autre tenseur (de conductibilité) et d'un scalaire (la capacité calorifique).

D'autre part, la même équation (1) se rencontre dans l'étude de nombreux phénomènes hydrauliques. La fonction  $f$  représente alors la pression, ou la densité d'un fluide s'écoulant dans un milieu poreux homogène et isotrope. Si le milieu n'est ni homogène ni isotrope, ses propriétés doivent être décrites à l'aide d'un tenseur des perméabilités et d'un scalaire de porosité, qui doivent être rapprochés du tenseur de conductibilité et du scalaire de capacité calorifique : ce rapprochement permet l'identification formelle de l'équation hydraulique avec celle de la chaleur.

Ainsi trois catégories de phénomènes bien différents - mouvement brownien ou diffusion géochimique (si l'on accepte l'identification des auteurs russes), propagation de la chaleur, écoulement d'un fluide en milieu poreux - obéissent à la même équation aux dérivées partielles, et cela même dans le cas où le milieu n'est ni homogène ni isotrope. Moyennant le choix des mêmes conditions aux limites, une seule et même solution représentera donc ces trois sortes de phénomènes. Nous nous attachons surtout à la recherche de la solution élémentaire, à partir de laquelle il est possible de construire les solutions correspondant à une gamme très large de conditions aux limites. La solution élémentaire est celle qui répond aux conditions aux limites suivantes :

1 - Introduction au temps  $t = 0$  et à l'origine des coordonnées d'une masse unité  $\left[ f(x, 0) = \delta(x), \delta \text{ mesure de Dirac} \right]$ .

2 - Diffusion libre dans l'espace entier avec conservation de la masse

$$\int f(x,t) dx = 1.$$

Suivant les cas,  $f(x,t)$  représentera la densité de probabilité de présence de la particule au point  $x$  et au temps  $t$ , la densité de quantité de chaleur, ou le produit  $\omega\rho$  de la densité du fluide  $\rho$  par la porosité  $\omega$  du milieu.

Dans cette Note, nous commencerons par écrire les deux équations de Kolmogorov, et celles de la chaleur et de l'hydraulique. Nous examinerons ensuite un principe de réversibilité, puis nous aborderons les cas d'intégrabilité. En dernier lieu, nous étudierons la théorie de la promenade aléatoire sur laquelle il est possible de fonder des méthodes de résolution numérique approchée.

## II.- LES EQUATIONS DE KOLMOGOROV

Soient  $X^i(t)$  les coordonnées d'une fonction vectorielle aléatoire du temps  $t$  : on peut se représenter les  $X^i(t)$ ,  $i = 1, 2 \dots n$  comme les  $n$  coordonnées, au temps  $t$ , d'une particule animée d'un mouvement brownien dans l'espace à  $n$  dimensions (euclidien et rapporté à des axes de coordonnées rectangulaires). Le processus stochastique  $X^i(t)$  est supposé markovien. Sa loi temporelle est donc entièrement définie par la donnée de la fonction :

$$F(y^i, \mathcal{C}; x^i, t)$$

qui représente la probabilité conditionnelle pour que l'on ait  $X^i(t) \leq x^i$  sachant que l'on avait  $X^i(\mathcal{C}) = y^i$ .

Nous nous limiterons au cas où le processus markovien est stationnaire (homogène dans le temps), c'est-à-dire au cas où  $F$  ne dépend pas séparément de  $\mathcal{C}$  et  $t$ , mais seulement de leur différence  $t - \mathcal{C}$  et nous écrirons  $F(y^i, x^i, t - \mathcal{C})$  au lieu de  $F(y^i, \mathcal{C}; x^i, t)$ . De plus, nous admettrons le plus souvent que  $F(y^i, x^i; t)$  possède une densité de probabilité  $f(y^i, x^i; t)$  telle que l'on ait :

$$F(y^i, x^i; t) = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} f(y^i, x^i; t) dx^1 \dots dx^n$$

Cette restriction n'a d'ailleurs rien d'essentiel.

Dérive et tenseur des moments d'ordre 2.

Le processus sera supposé continu au sens (assez strict) suivant :  
 Quel que soit le nombre positif  $\varepsilon$ , on a :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| > \varepsilon} d_x F(y, x; \Delta t) = 0$$

Pour introduire la dérive (vecteur  $\lambda^i$ ) et les moments d'ordre 2 (tenseur  $\bar{\nu}^{ij}$ ), nous admettrons l'existence des limites suivantes, quel que soit  $\varepsilon > 0$

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| < \varepsilon} (x^i - y^i) d_x F(y, x; \Delta t) = \lambda^i(y) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| < \varepsilon} (x^i - y^i)(x^j - y^j) d_x F(y, x; \Delta t) = \bar{\nu}^{ij}(y) \end{array} \right.$$

Ces limites n'entraînent nullement l'existence des moments d'ordre 1 et 2. Néanmoins, le plus souvent, ces moments existeront et les relations (1) seront remplacées par

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \lambda^i(y) = \lim_{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} E(x^i - y^i) \\ \bar{\nu}^{ij}(y) = \lim_{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} E\left\{ (x^i - y^i) (x^j - y^j) \right\} \end{array} \right.$$

Sous cette forme, il est clair que  $\lambda^i(y)$  représente la dérive (ou vitesse probable) de la particule et que le tenseur  $\bar{\nu}^{ij}$  est lié à son énergie cinétique.

lère équation de Kolmogorov

Le processus étant markovien, et le passage de l'état  $y(0)$  à l'état  $x(t)$  pouvant donner lieu au passage par n'importe quel état  $z(\tau)$  au temps intermédiaire  $\tau (0 < \tau < t)$ , le principe des probabilités composées conduit à l'équation de Markov :

$$(3) \quad F(y, x; t) = \int F(z, x; t - \tau) d_z F(y, z; \tau)$$

ou, s'il y a des densités de probabilité :

$$f(y, x; t) = \int f(y, z; \tau) f(z, x; t - \tau) dz$$

Prenant  $\tau$  très petit, on aura :

$$F(y, x; t + \Delta t) = \int F(z, x; t) d_z F(y, z; \Delta t)$$

Par passage à la limite, compte tenu de (1) et en supposant l'existence et la continuité des dérivées 1<sup>res</sup> et 2<sup>èmes</sup> en  $y^i$ , on en déduit la première équation de Kolmogorov :

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \nabla^{ij}(y) \partial_{ij} F + \lambda^i(y) \partial_i F$$

Dans cette écriture, on utilise la convention de sommation sur tout indice répété en positions co et contravariante (inférieure et supérieure). Le symbole  $\partial_i$  représente la dérivation partielle par rapport à la coordonnée d'indice  $i$  : Dans (4) ces dérivées sont prises par rapport aux  $y^i$ , c'est-à-dire par rapport à l'état initial.

S'il y a une densité de probabilité, par dérivation relativement aux  $x^i$ , on obtient :

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \nabla^{ij}(y) \partial_{ij} f + \lambda^i(y) \partial_i f$$

### 2ème équation de Kolmogorov

Dans cette deuxième équation, on veut introduire des dérivations en  $x^i$  (par rapport à l'état actuel au temps  $t$ ) et non plus en  $y^i$  (état initial). Des hypothèses plus strictes sont requises : on doit supposer l'existence de la densité  $f(y, x; t)$ , l'existence et la continuité des dérivées :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^i} (\lambda^i f) - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (\nabla^{ij} f)$$

De l'équation de Markov écrite sous la forme

$$f(y, x; t + \Delta t) = \int f(y, z; t) f(z, x; \Delta t) dz$$

on déduit, par passage à la limite, la deuxième équation de Kolmogorov, où les dérivations sont faites par rapport aux  $x^i$  - c'est-à-dire par rapport à l'état actuel:

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \partial_{ij} (\gamma^{ij} f) - \partial_i (\lambda^i f)$$

Cas particulier

Si la dérive est nulle  $\lambda^i = 0$  et si le tenseur  $\gamma^{ij}$  est isotrope et constant ( $\gamma^{ij} = c \delta^{ij}$ ,  $\delta^{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ , les deux équations (5) et (6) prennent la même forme.

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{c}{2} \Delta f$$

(le laplacien étant pris par rapport aux  $x^i$  ou aux  $y^i$  selon qu'il s'agit de la deuxième ou de la troisième équation).

On sait que la solution classique de (7) est l'exponentielle de Gauss :

$$f = \frac{1}{(2\pi ct)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2ct} \sum (x^i - y^i)^2}$$

Le processus est dit, dans ce cas, de Wiener-Levy. Il se caractérise par sa loi gaussienne et sa variance proportionnelle au temps : c'est l'exemple le plus simple de processus stochastique à accroissements indépendants. On verra que (8) représente aussi la solution élémentaire de l'équation de la chaleur ou de l'hydraulique dans le cas homogène et isotrope.

III.- FORME TENSORIELLE DES EQUATIONS DE KOLMOGOROV

Supposons que l'espace euclidien dans lequel se meut la particule soit rapporté à un système de coordonnées curvilignes  $\xi^i$ , de tenseur fondamental  $g_{ij}(\xi^i)$ : cela signifie que la métrique est donnée par :

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j$$

Si l'on pose  $g = \text{Det} | g_{ij} |$ , l'élément de volume est  $\sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n$ .  
 Les  $\xi^i(t)$  représentent un nouveau processus dont la densité de probabilité se déduit de  $f(y^i, x^i, t)$  en remplaçant  $y^i$  et  $x^i$  par leurs expressions en fonction des coordonnées curvilignes  $\xi^i, \eta^i$  : nous désignerons par  $f(\eta^i, \xi^i, t)$  cette nouvelle expression de la densité. On doit bien noter que la probabilité pour que le point  $\xi(t) = (\xi^1(t), \xi^2(t), \dots)$  appartienne à l'ensemble A est :

$$P(\eta^i; A, t) = \int_A f(\eta^i, \xi^i, t) \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n$$

Si l'on désigne par  $\lambda^i(\xi)$  et  $\gamma^{ij}(\xi)$  les composantes contravariantes du vecteur dérive et du tenseur des moments dans le repère naturel attaché au point  $\xi$ , les équations de Kolmogorov s'écrivent immédiatement sous forme tensorielle :

$$(5\text{bis}) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \gamma^{ij}(\eta) \nabla_{ij} f + \lambda^i(\eta) \nabla_i f$$

$$(6\text{bis}) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \nabla_{ij} (\gamma^{ij}(\xi) f) + \nabla_i \lambda^i(\xi) f$$

Les dérivations covariantes  $\nabla_i$  sont prises en  $\eta^i$  pour la première équation et en  $\xi^i$  pour la deuxième.

Mais, d'autre part, le raisonnement classique qui a conduit à (5) ou à (6) peut être repris directement en coordonnées curvilignes. Introduisons les quantités :

$$(9) \quad \begin{cases} \ell^i = \lim_{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} E(\xi^i - \eta^i) \\ n^{ij} = \lim_{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} E[(\xi^i - \eta^i)(\xi^j - \eta^j)] \end{cases}$$

Comme  $f \sqrt{g} d\xi^1 \dots d\xi^n$  représente la probabilité affectée au volume élémentaire construit sur  $d\xi^1 \dots d\xi^n$ , le raisonnement aboutit aux mêmes équations (4) et (6), à condition de remplacer  $f$  par  $f \sqrt{g}$  : soit

$$(5\text{ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} n^{ij} \partial_{ij} f \sqrt{g} + \ell^i \partial_i f \sqrt{g} \end{array} \right.$$

$$(6\text{ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \partial_{ij} n^{ij} f \sqrt{g} - \partial_i \ell^i f \sqrt{g} \end{array} \right.$$

Ces équations ne coïncident pas avec 5<sup>bis</sup> et 6<sup>bis</sup> lorsqu'on identifie  $\mathcal{L}^i$  et  $\lambda^i$ ,  $n^{ij}$  et  $\mathcal{V}^{ij}$ : il y a d'autant moins de raison pour qu'elles coïncident que  $\mathcal{L}^i$  et  $n^{ij}$  n'ont aucune raison, a priori, de présenter l'invariance tensorielle: en particulier, la pseudo-dérive  $\mathcal{L}^i$  n'est pas un vecteur et ne coïncide pas avec  $\lambda^i$ .

Pour préciser le rapport des  $\mathcal{L}^i$  et  $\lambda^i$ , il est nécessaire d'introduire les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ik}^j$ , qui expriment la courbure du système de coordonnées  $\xi^i$ . Par définition même des  $\Gamma_{ik}^j$ , le vecteur de placement correspondant aux accroissements  $\Delta \xi^i$  des coordonnées  $\xi^i$  a pour composante dans le repère local attaché au point  $\xi^i$  les quantités :

$$u^i = \Delta \xi^i + \frac{1}{2} \Gamma_{kj}^i \Delta \xi^k \Delta \xi^j$$

les termes d'ordre 3 étant négligés. A la même approximation, on a :

$$u^i u^j = \Delta \xi^i \Delta \xi^j$$

Prenons la valeur probable de ces quantités. Par définition,  $\lambda^i$  et  $\mathcal{V}^{ij}$ , composantes contravariantes dans le repère local du vecteur dérive et du tenseur des moments, sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^i = \lim_{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} E(u^i) \\ \mathcal{V}^{ij} = \lim_{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} E(u^i u^j) \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^i = \mathcal{L}^i + \frac{1}{2} \Gamma_{kj}^i n^{kj} \\ \mathcal{V}^{ij} = n^{ij} \end{array} \right.$$

Ainsi,  $\mathcal{L}^i$  n'est pas un vecteur, et la courbure des coordonnées, sans effet sur le tenseur des moments, introduit une pseudo-dérive apparente représentée par le terme  $\frac{1}{2} \Gamma_{kj}^i n^{kj}$ .

Compte tenu de (10), on vérifie facilement l'équivalence de 5<sup>bis</sup> et 6<sup>bis</sup> avec 5<sup>ter</sup> et 6<sup>ter</sup>. Prenons par exemple la deuxième équation et explicitons les dérivations covariantes :

$$\frac{1}{2} \nabla_{ij} \gamma^{ij}_f - \nabla_i \lambda^i_f =$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} \nabla_j \gamma^{ij}_f) - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} \lambda^i_f =$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_j \sqrt{g} \gamma^{ij}_f + \Gamma_{jk}^i \gamma^{jk}_f \right) - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} \lambda^i_f$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g}} \partial_{ij} \sqrt{g} \gamma^{ij}_f - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} \left[ \lambda^i - \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i \gamma^{jk} \right]$$

Ainsi, compte tenu de (10), (6bis) et (6ter) sont bien équivalentes.

Equations de Kolmogorov dans un espace de Riemann.

En fait, l'hypothèse que l'espace est euclidien ne joue aucun rôle ici. Avec les quantités  $\gamma^i$  et  $n^{ij}$  (non tensorielles) définies en (9), le raisonnement direct conduit à nouveau à 5<sup>ter</sup> et 6<sup>ter</sup> si l'espace est riemannien. Par contre, les composantes contravariantes  $u^i$  du déplacement correspondant aux accroissements  $\Delta \xi^i$  ont l'invariance tensorielle, ainsi que les  $u^i u^j$  : par suite  $\lambda^i$  et  $\gamma^{ij}$  sont un vecteur et tenseur et les relations (10) permettent de remonter de 5<sup>ter</sup> et 6<sup>ter</sup> aux formes tensorielles 5bis et 6bis.

Cas particulier

Dans le cas homogène et isotrope (euclidien ou riemannien) l'équation (7) s'écrit sous forme tensorielle :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{c}{2} \nabla_{ij} g^{ij}_f$$

soit

$$\sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{c}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} g^{ij} \partial_j f$$

si l'on prend  $\rho = f \sqrt{g}$ , cette équation s'écrit :

$$(11) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{c}{2} \partial_i \sqrt{g} g^{ij} \partial_j \frac{\rho}{\sqrt{g}}$$

Si la solution de (7) est connue, on en déduira, par passages en coordonnées curvilignes, la solution de (11), les  $g^{ij}$  étant les coefficients de la forme quadratique euclidienne associée aux coordonnées curvilignes. Nous verrons dans un instant que (11) représente un cas particulier de l'équation générale de la chaleur.

Exemple :  
A une seule dimension  $\frac{1}{\sqrt{2 \pi c t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2 c t}}$  est solution de :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Le changement de variable

$$x = \int_{\eta}^{\xi} \frac{d\xi}{a(\xi)}$$

où  $a(\xi)$ , pourvu qu'elle soit positive, peut être discontinue, montre que

$$(12) \quad f(\eta, \xi; t) = \frac{1}{a(\xi)} \frac{1}{\sqrt{2 \pi c t}} \exp \left[ -\frac{1}{2 c t} \left( \int_{\eta}^{\xi} \frac{d\xi}{a(\xi)} \right)^2 \right]$$

est solution de

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} a(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} a(\xi) f(\eta, \xi; t)$$

avec les conditions aux limites habituelles : on notera que,  $a(\xi)$  pouvant très bien n'être pas continue, il en est de même de la solution  $f$ . Par contre le produit  $a f$  (qui sera interprété ci-dessous comme une température) est toujours continu.

#### IV.- EQUATIONS DE LA CHALEUR ET DE L'HYDRAULIQUE.

Si  $c(x) = \frac{1}{a(x)}$  désigne la capacité calorifique, et  $f(x, t)$  la densité de chaleur au point  $x = (x^1 \dots x^n)$  et au temps  $t$ , la température en  $x$  est :

$$T(x, t) = a(x) f(x, t)$$

Dans la propagation de la chaleur, on admet que le flux  $\bar{q} = (q^1 \dots q^n)$  de

quantité de chaleur est fonction linéaire du gradient de la température; autrement dit, en chaque point, il existe un tenseur  $k^{ij}$  de conductibilité tel que l'on ait :

$$q^i(x) = k^{ij}(x) \partial_j [a(x) f(x,t)]$$

L'équation de conservation de la quantité de chaleur :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div } q = \frac{\partial \ell}{\partial t} + \partial_i q^i = 0$$

conduit immédiatement à l'équation suivante :

$$(14) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \partial_i (k^{ij} \partial_j a f)$$

Sous forme tensorielle générale, ceci s'écrira :

$$(15) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla_i k^{ij} \nabla_j a f$$

ou, sous forme explicite

$$\frac{\partial}{\partial t} f \sqrt{g} = \partial_i \sqrt{g} k^{ij} \partial_j f a$$

Posant  $\rho = f \sqrt{g}$  (de manière que  $\rho dx_1 \dots dx_n$  représente la quantité de chaleur contenue dans l'élément de volume construit sur les  $dx^i$ ), on aura :

$$(16) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \partial_i \sqrt{g} k^{ij} \partial_j \frac{a}{\sqrt{g}} \rho$$

En comparant (14) et (16), on voit que la courbure du système de coordonnées se manifeste dans le remplacement apparent de  $k^{ij}$  par  $k^{ij} \sqrt{g}$  et de  $a$  par  $\frac{a}{\sqrt{g}}$

D'autre part, si l'on compare (11) et (14), on voit que, s'il existe un tenseur de composantes contravariantes  $g^{ij}$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{g} g^{ij} = k^{ij} \\ \frac{1}{\sqrt{g}} = a \end{array} \right.$$

l'équation (14) s'identifiera avec l'équation du cas homogène et isotrope dans l'espace (en général riemannien) de métrique  $g_{ij}$ . Comme  $\text{Det } |g^{ij}| = \frac{1}{g}$ , cette identification sera possible si, et seulement si, on a (à un facteur constant près)

$$(17) \quad \text{Det } |k^{ij}|$$

Physiquement, d'ailleurs, cette condition est peu satisfaisante : comme  $a$  est l'inverse de la capacité calorifique, elle implique que capacité et conductibilité (ou, dans le cas hydraulique, porosité et perméabilité) varient en sens inverse.

#### Equation de l'hydraulique

Soit un milieu poreux, de porosité  $\omega(x)$  dans lequel circule un fluide de densité vraie  $\rho(x)$ , sous la pression  $p(x)$ . La quantité de matière contenue dans le volume  $dx$  est  $\omega\rho dx$ , de sorte que c'est la quantité conservative  $\omega\rho$  qui doit être identifiée à la densité de chaleur  $f(x)$  envisagée ci-dessus. On s'intéressera, d'ailleurs, en réalité non à  $\rho$  et  $p$  mais à la propagation des variations de ces quantités relativement à un état d'équilibre. En particulier, si au temps  $t = 0$  et à l'origine on prélève une quantité unité de fluide, on devra s'intéresser à la propagation dans l'espace de ce déficit, qui sera représentée par la densité  $\omega\rho(x, t)$  conservative de déficit.

La loi de Darcy indique que le flux  $\bar{q}$  est fonction linéaire du gradient de la pression. Autrement dit, il existe un tenseur  $k^{ij}(x)$  tel que l'on ait en tout point :

$$q^i = - k^{ij} \partial_j p$$

Par ailleurs  $p$  - variation de pression - est supposée proportionnelle à  $\rho$  - variation de densité, soit  $p = \alpha\rho$ . En regroupant la constante  $\alpha$  avec  $k^{ij}$ , on obtient :

$$q^i = - k^{ij} \partial_j \rho$$

Enfin, la conservation de la quantité de fluide s'exprime par :

$$\frac{\partial(\omega\rho)}{\partial t} + \text{div}q = 0$$

D'où finalement la relation :

$$(18) \quad \frac{\partial (\omega \rho)}{\partial t} = \partial_i k^{ij} \partial_j \rho$$

Posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \rho = f(x, t) \\ \omega = \frac{1}{a} \end{array} \right.$$

on obtient

$$(19) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \partial_i k^{ij} \partial_j a f$$

C'est-à-dire la même équation qu'en (14). D'où le tableau de correspondance :

| <u>Chaleur</u>                     | <u>Hydraulique</u>  |
|------------------------------------|---|
| quantité de chaleur                | quantité de fluide  |
| densité de chaleur $f$             | densité "macroscopique" $\omega \rho$   |
| conductibilité $k^{ij}$            | perméabilité $k^{ij}$   |
| capacité calorifique $\frac{1}{a}$ | porosité $\omega = \frac{1}{a}$   |
| Température $T = a f$              | densité microscopique $\rho$ , ou mieux,<br>à un facteur constant près, <u>pression</u> |

#### Comparaison avec l'équation de Kolmogorov

Dans l'équation (14) de la chaleur, les dérivations sont faites relativement aux coordonnées actuelles : c'est donc à la deuxième équation de Kolmogorov que l'on doit songer. De fait, (14) peut s'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \partial_{ij} (k^{ij} a f) - \partial_i a f \partial_j k^{ij}$$

Si nous posons :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^i = a \partial_j k^{ij} \\ \gamma^{ij} = 2 a k^{ij} \end{array} \right.$$

Cette équation s'identifie avec (6), de sorte que l'équation de la chaleur

est un cas particulier de l'équation de Kolmogorov. En termes d'hydraulique, la première équation (20) s'interprétera en disant que la dérive est égale au produit de la porosité par la divergence du tenseur des perméabilités.

Inversement,  $\lambda^i$  et  $\bar{\nu}^{ij}$  étant données, il n'est pas possible, en général, de calculer  $a$  et  $k^{ij}$  d'après (20), de manière à ramener l'équation de Kolmogorov à celle de la chaleur. Pour que cela soit possible, il faut que l'on ait :

$$\partial_j \bar{\nu}^{ij} = 2a \partial_j k^{ij} + 2 k^{ij} \partial_j a = 2 \lambda^i + \bar{\nu}^{ij} \partial_j \log a$$

Il doit exister un scalaire  $a$  tel que l'on ait :

$$(21) \quad \partial_j \bar{\nu}^{ij} = 2 \lambda^i + \bar{\nu}^{ij} \partial_j \log a$$

Résolvant le système (21) en  $\partial_j \log a$  et en exprimant les conditions d'intégrabilité en  $\lambda^i$  et  $\bar{\nu}^{ij}$ , on obtient les conditions nécessaires cherchées, et l'on voit aussitôt qu'elles sont aussi suffisantes.

La signification physique de l'équation (21) est liée au principe de réciprocité qui va être exposé.

#### V.- PRINCIPE DE RECIPROCITE.

Posons-nous le problème suivant :  $f(y, x, t)$  étant la solution des équations de Kolmogorov, quelle condition doit vérifier les  $\lambda^i$  et les  $\bar{\nu}^{ij}$  pour qu'il existe une fonction  $h(x)$  telle que l'on ait (pour tout  $x$ , tout  $y$  et tout  $t$ ) :

$$(22) \quad h(x) f(y, x, t) = h(y) f(x, y, t)$$

Lorsque (22) sera réalisée, nous dirons que le principe de réciprocité est vérifié. Si (22) est vérifiée, comme  $f(y, x, t)$  vérifie la première équation de Kolmogorov écrite en  $y$ , il en résulte que  $h(y) f(x, y, t)$  vérifie cette même équation. En échangeant  $x$  et  $y$ , on voit que  $h(x) f(y, x, t)$  vérifie la première équation par rapport à  $x$  (à l'état actuel). Sous entendant  $y$  pour plus de clarté, écrivons  $f(x, t)$  au lieu de

$f(y, x, t)$ . Ainsi  $f(x, t)$  doit vérifier (6) et, en même temps  $h(x) f(x, t)$  doit vérifier (4). On doit donc avoir simultanément

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{2} \partial_{ij} \sqrt{ij} f - \partial_i \lambda^i f \\ &= \frac{1}{h(x)} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{ij} \partial_{ij} hf + \lambda^i \partial_i hf \right] \end{aligned} \right.$$

Posant

$$\mu^i = \sqrt{ij} \partial_j \log h + 2 \lambda^i - \partial_j \sqrt{ij}$$

on vérifie facilement qu'en égalant les deux expressions de  $\frac{\partial f}{\partial t}$  dans (23) on obtient la condition

$$\mu^i \partial_i f + \frac{1}{2} f \left[ \partial_i \mu^i + \mu^i \partial_i \log h \right] = 0$$

avec la solution évidente  $\mu^i = 0$  (il ne semble pas qu'il puisse en exister d'autre), c'est-à-dire :

$$\partial_j \sqrt{ij} = 2 \lambda^i + \sqrt{ij} \partial_j \log h$$

Cette condition ne diffère pas de (21) avec :

$$(24) \quad h = a$$

Supposons maintenant remplie cette condition (21). Alors,  $\lambda^i$  et  $\sqrt{ij}$  peuvent se mettre sous la forme (20) et par suite la deuxième équation de Kolmogorov peut s'écrire :

$$(25) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \partial_i k^{ij} \partial_j a f$$

La première équation de Kolmogorov, s'écrit à son tour :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sqrt{ij} \partial_{ij} f + \lambda^i \partial_i f \\ &= a k^{ij} \partial_{ij} f + a (\partial_j k^{ij}) \partial_i f \end{aligned}$$

Soit

$$(26) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = a \partial_i k^{ij} \partial_j f$$

Autrement dit si une fonction  $f(x, t)$  vérifie (25), alors  $a(x) f(x, t)$  vérifie (26). Si donc  $f(y, x, t)$  est la solution de (25) correspondant à la condition initiale : masse unité en  $y$  au temps  $t = 0$ , la fonction  $a(x) f(y, x, t)$  vérifie (26) en  $x$  et doit donc être comparée avec  $f(x, y, t)$  solution de la même équation (en  $x$ ) et correspondant à la condition initiale : masse unité en  $x$  au temps  $t = 0$ , or, en  $t = 0$ , on a  $a(x) f(y, x, 0) = a(y) \delta(y-x) = a(x) \delta(y-x)$ . Au facteur  $a(y)$  près, la condition en  $t = 0$  est donc vérifiée. Considérons donc la fonction  $\frac{a(x)}{a(y)} f(y, x, t)$ . Comme

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{a(x)}{a(y)} f(y, x, t) dy = \int a(x) (\partial_i k^{ij} \partial_j f) dy$$

puisque  $f(y, x, t)$  vérifie (26) en  $y$ , et que cette expression est nulle, puisque  $k^{ij} \partial_j f$  est nulle à l'infini, on voit que cette intégrale est indépendante du temps, de sorte que la deuxième condition aux limites est vérifiée et que  $\frac{a(x)}{a(y)} f(y, x, t)$  doit être identifiée à  $f(x, y, t)$ .

Soit :

$$(27) \quad a(x) f(y, x, t) = a(y) f(x, y, t)$$

Ainsi les conditions (21) expriment que le principe de réciprocité est vérifié : l'équation de la chaleur est la seule forme de l'équation de Kolmogorov pour laquelle il en soit ainsi.

Physiquement,  $a$  étant l'inverse d'une capacité calorifique,  $af$  est une température. Désignons par  $T_y(x, t)$  la température observée au point  $x$  et au temps  $t$  lorsqu'une quantité de chaleur unité a été placée en  $y$  au temps 0. Le principe de réciprocité s'écrit :

$$(28) \quad T_y(x, t) = T_x(y, t)$$

Dans l'interprétation hydraulique, c'est aux pressions que s'appliquera la relation de réciprocité (28).

VI.- CAS D'INTEGRABILITE

Nous citerons simplement les résultats classiques relatifs aux cas suivants :  
équations à coefficients constants sans second membre et avec second membre, équations à dérive variable (mais tenseur des moments constant).

Equation sans second membre à coefficients constants

Elle se ramène au type :

$$(29) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{c}{2} \Delta f$$

La solution élémentaire est soumise aux conditions aux limites :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x,0) = \delta(x) \\ \int f(x,t) dx = 1 \end{array} \right.$$

La transformée de Fourier de  $f$ , prise relativement à  $x$  (à  $t$  fixé) est une fonction  $\bar{\Phi}(u,t)$  qui vérifie l'équation transformée de (29) :

$$(31) \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} = -2\pi^2 c |u|^2 \bar{\Phi}(u,t)$$

avec les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}(u,0) = 1 \\ \bar{\Phi}(0,t) = 1 \end{array} \right.$$

Comme la solution générale de l'équation différentielle (31) est de la forme  $B(u) e^{-2\pi^2 c |u|^2 t}$ , ces conditions sont vérifiées avec  $B(u) = 1$  :

D'où le résultat :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}(u,t) = e^{-2\pi^2 c |u|^2 t} \\ f(x,t) = (2\pi c t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2ct}} \end{array} \right.$$

Ainsi, la solution élémentaire de (29) n'est autre que l'exponentielle de Gauss. A partir de la solution élémentaire, on peut construire d'autres solutions correspondant à des conditions aux limites plus générales. Au lieu de (30), prenons :

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, 0) = f_0(x) \\ \int f(x, t) dx = \int f_0(x) dx \end{array} \right.$$

Ces relations imposent à  $f(x, t)$  d'être conservative et de coïncider avec une fonction donnée  $f_0(x)$  au temps initial  $t = 0$ . Avec les transformées de Fourier, ces conditions s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}(u, 0) = \bar{\Phi}_0(u) \\ \bar{o}(0, t) = \bar{\Phi}_0(0) \end{array} \right.$$

On a donc :

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}(u, t) = \bar{\Phi}_0(u) e^{-2\pi^2 c |u|^2 t} \\ f(x, t) = \int f_0(x-y) \frac{1}{(2\pi ct)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{2ct}} dy \end{array} \right.$$

Pour plus de concision, désignons par  $\alpha(x, t)$  l'exponentielle de Gauss qui représente la solution élémentaire. On a :

$$(35) \quad f(x, t) = f_0 * \alpha$$

Le signe  $*$  représente la convolution dans l'espace  $R^n$  de la variable  $x$ .

Equation à second membre et coefficients constants

Considérons cette fois l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div } q = M(x, t)$$

avec  $q = -\frac{c}{2} \text{ grad } f$ . On voit que l'équation avec second membre

$$(36) \quad \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{c}{2} \Delta f = M(x, t)$$

représente la propagation de la chaleur en présence de la densité <sup>(1)</sup> de sour-

---

(1) On doit entendre par là que la quantité de chaleur introduite dans un volume  $V$  entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  est  $\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V M(x, t) dx$ .

ce  $M(x, t)$ . On vérifie d'ailleurs immédiatement que la solution écrite en (32) vérifie non pas (29) mais

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{c}{2} \Delta f = \delta(x) \delta(t)$$

Ainsi on obtiendra des solutions de (36) en effectuant dans l'espace-temps  $R^{n+1}$  la convolution de  $M(x, t)$  par l'exponentielle de Gauss  $\alpha(x, t)$ , étant entendu que l'on doit prendre  $\alpha(x, t) \equiv 0$  pour  $t < 0$ . La solution de (36) doit donc être:

$$(37) \quad f(x, t) = \int dy \int_{-\infty}^t \alpha(x-y, t-h) M(y, h) dh$$

Sous forme symbolique, on écrira

$$(38) \quad f(x, t) = \alpha \circledast M$$

Le symbole  $\circledast$  représentant la convolution dans  $R^{n+1}$

Si  $M(x, t)$  ne dépend pas de  $t$ , la solution (37) représente (en termes hydrauliques, le régime permanent engendré par les sources permanentes de densité  $M(x)$ ). Si la source est ponctuelle, et placée à l'origine, on a  $M(x) = \delta(x)$  et (37) se réduit à :

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^t \alpha(x, t-h) dh$$

Dans d'autres circonstances, au contraire, on s'intéresse au cas où la densité de source  $M(x, t)$  est introduite au temps  $t = 0$ . On a alors  $M(x, t) \equiv 0$  pour  $t < 0$ , et la solution s'écrit :

$$(39) \quad f(x, t) = \int dy \int_0^t \alpha(x-y, t-h) M(y, h) dh$$

cherchons l'expression de  $f_0(x) = f(x, 0)$ . Effectuant la transformation de Fourier dans  $R^n$  (en  $x$ ) sur (39), on obtient

$$\underline{f}(u, t) = \int_0^t \underline{\mu}(u, h) e^{-2\pi^2 c u^2 (t-h)} dh$$

D'où  $\underline{f}(u, 0) = 0$ . On conclut que la solution (39) de l'équation avec second



Autres conditions initiales : si au temps  $t = 0$  la masse unité est placée en un point  $z$  quelconque, et non plus à l'origine, on a la condition  $f(x, 0) = \delta(x-z)$ . La solution s'obtient en remplaçant  $\alpha(x, t)$  par  $\alpha(x-z, t)$  : Posons :

$$(43) \quad \begin{aligned} f_0(z, x, t) &= \alpha(x-z, t) \\ f_n(z, x, t) &= - \int_0^t dy \int_0^t \alpha(x-y-z, t-h) \partial_i \lambda^i f_{n-1}(z, y, h) dh \end{aligned}$$

La solution cherchée est :

$$(44) \quad f(z, x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z, x, t)$$

Enfin, si, au temps  $t = 0$ , on veut observer la densité  $\varphi(x)$ , la solution sera de la forme :

$$\int \varphi(z) f(z, x, t) dz$$

L'équation (44) donne la solution de la deuxième équation de Kolmogorov, et celle-ci vérifie nécessairement la première équation de Kolmogorov (en  $z$ ). On peut aussi observer la démarche inverse, c'est-à-dire construire la solution de la première équation de Kolmogorov : elle vérifiera nécessairement la seconde. Posant :

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} f_0^*(y, x, t) &= \alpha(y-x, t) \\ f_n^*(y, x, t) &= \int dz \int_0^t \alpha(y-x-z, t-h) \lambda^i \partial_i f_{n-1}^*(z, x, h) dh \end{aligned} \right.$$

on aura donc aussi :

$$(46) \quad f(u, x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(y, x, t)$$

Ces méthodes théoriques élégantes sont difficiles à manier numériquement. D'autre part, elles ne s'appliquent qu'au cas où  $\bar{\nu}^{ij}$  est un tenseur constant, c'est-à-dire, comme on le voit en se reportant aux relations (20), au cas où porosité  $\frac{q}{a}$  et perméabilité  $k^{ij}$  sont proportionnelles. Il sera souvent nécessaire de recourir à

des méthodes d'approximation plus pragmatiques, dont le principe sera donné au paragraphe suivant.

Cas où porosité et perméabilité sont régionalisées

Pour simplifier, limitons-nous au cas où la perméabilité est isotrope (mais non constante), soit  $k^{ij} = k(x) \delta^{ij}$  : l'équation de la chaleur, ou de l'hydraulique, s'écrit alors :

$$(47) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \text{div } k \text{ grad } a \text{ } f$$

supposons que  $a(x)$  et  $k(x)$  soient des variables régionalisées obéissant à un schéma intrinsèque. Alors la solution  $f(y, x, t)$ , à  $y$  et  $t$  fixés, apparaît elle aussi comme une variable régionalisée, mais elle ne peut évidemment pas posséder le caractère intrinsèque. Dans sa généralité, le problème à résoudre est le suivant : connaissant les lois de répartition  $F_1(a_1 \dots a_k, x_1 \dots x_k)$  et  $F_2(k_1 \dots k_m, x_1 \dots x_m)$  de  $a$  et  $k$  (pour des points  $x_i$  en nombre quelconque), trouver la loi  $F(f_1 \dots f_n, x_1, t_1; \dots, x_n, t_n)$  de répartitions des valeurs  $f_i$  prise par la solution  $f(y, x, t)$  en un nombre quelconque de points  $(x_i, t_i)$  d'espace  $x$  temps : en pratique, il suffirait de connaître les lois  $F$  correspondant à des points contemporains ( $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$ ) Il y a peu d'espoir d'arriver à résoudre un pareil problème.

En deuxième lieu, on peut se demander si les moments d'ordre 2 :

$$\begin{cases} m(x, t) = E [ f(x, t) ] \\ K(x, x'; t, t') = E [ f(x, t) f(x', t') ] \end{cases}$$

( $y$  est sous-entendu dans cette écriture) ne peuvent pas se déduire des seuls moments d'ordre 1 et 2 de  $a(x)$  et  $k(x)$ . Malheureusement, il n'en est rien,  $m$  et  $K$  dépendent de tous les moments de  $a$  et  $k$ , et non pas seulement des moments des deux premiers ordres.

Cela peut se voir sur la forme des équations (43)(44) qui donnent la solution théorique de l'équation (47) dans le cas où  $a$   $k = \frac{c}{2}$  est une constante (perméabilité  $k$  et porosité  $\frac{1}{a}$  étant alors proportionnelles). Dans ce cas, les équations (20) donnent :

$$\lambda^i = \frac{c}{2} \partial_i \log k$$

de sorte que la dérive est proportionnelle au gradient du logarithme de la perméabilité. Pour utiliser (43) et (44), on voit de plus que les  $\lambda^i$  et leurs dérivées premières doivent être bornés. Admettant cette hypothèse (qui impose des conditions très restrictives à la fonction aléatoire  $k(x)$ ), on obtiendra le moment d'ordre 1  $m(x, t)$  en prenant les valeurs probables des relations (43). Posons :

$$m_n = E[f_n(x, t)] = - E \left[ \int dy \int_0^t \alpha(x-y-z, t-h) \partial_i \lambda^i f_{n-1}(y, h) dh \right]$$

On a évidemment

$$m_0 = \alpha(x-z, t)$$

$$m_1 = - E(\lambda^i) \int dy \int \alpha(x-y-z, t-h) \partial_i \alpha(y-z, h) dh$$

On a, en réalité,  $m_1 = 0$ , car  $E(\lambda^i)$  est nulle,  $\lambda^i$  étant le gradient d'une fonction aléatoire stationnaire  $\log k$ . Mais l'expression de  $m_2$  fait intervenir les moments d'ordre 2 des  $\lambda^i$ , et, plus généralement,  $m_n$  les moments d'ordre  $n$ .

Les représentations transitives rencontrent la même difficulté. Le covariogramme transitif  $g(h, t)$  de  $f(x, t)$ , en effet, a une valeur probable qui dépend de tous les moments des  $\lambda^i$ . Il y a peu d'espoir d'obtenir des résultats par cette voie.

#### Milieu quasi homogène

Pour essayer de voir de quelle manière la solution, dans le cas régionalisé, s'écarte de l'exponentielle de Gauss, imaginons que  $a(x)$  et  $k(x)$  ne puissent différer de leurs valeurs moyennes que de quantités très petites.

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x) = a_0 + \lambda \alpha(x) \\ k(x) = k_0 + \lambda \beta(x) \end{array} \right.$$

$\lambda$  étant très petit,  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  étant des régionalisations a priori quelconques. Il est alors possible d'obtenir la solution sous la forme d'un développement de la forme :

$$f(x, t) = f_0 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \dots + \lambda^n f_n$$

La partie principale  $f_0$  sera toujours une exponentielle de Gauss, et le calcul des  $f_n$  se fera par itération (avec des difficultés croissantes). Nous nous limiterons, pour abréger les notations, au cas où porosité et perméabilité sont proportionnelles. Posant

$$\begin{cases} a_0 k_0 = \frac{c}{2} \\ k(x) = k_0 e^{\lambda \bar{W}(x)} \end{cases}$$

l'équation aux dérivées partielles se met sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{c}{2} \left[ \Delta f - \lambda \operatorname{div}(f \operatorname{grad} \bar{W}) \right]$$

La méthode d'itération conduit aux équations (43)

$$\begin{cases} f_0(x, t) = \alpha(x, t) \\ f_n(x, t) = - \int_0^t dy \int_0^y \alpha(x-y, t-h) \operatorname{div} \left[ f_{n-1}(y, h) \operatorname{grad} \bar{W}(y) \right] dh \end{cases}$$

On a pris  $z = 0$ , ce qui revient à prendre l'origine au point où on a déposé la masse unité initiale, et on a posé

$$\alpha(x, t) = (2\pi ct)^{-\frac{n}{2}} \exp \left[ - \frac{|x|^2}{2ct} \right]$$

Limitons-nous au deuxième ordre (les termes en  $\lambda^3$  étant négligés). Alors on trouve :

$$\begin{aligned} m(x, t) &= E \left[ f(x, t) \right] = E(f_0) + \lambda E(f_1) + \lambda^2 E(f_2) \\ m_2(x, y, t) &= E \left[ f(x, t) f(y, t) \right] = E \left[ f_0(x) f_0(y, t) \right] \\ &+ \lambda E \left[ f_0(x) f_1(y) + f_0(y) f_1(x) \right] + \lambda^2 E \left[ f_2(x) f_0(y) + f_0(x) f_2(y) + f_1(x) f_1(y) \right] \end{aligned}$$

Pour abréger, nous sous entendrons  $t$  qui est fixé. On a vu que :

$$\begin{cases} E \left[ f_0(x) \right] = \alpha(x) \\ E \left[ f_1(x) \right] = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} m(x) = \alpha(x) + \lambda^2 E(f_2) \\ m_2(x,y) = \alpha(x) \alpha(y) + \lambda^2 \left[ \alpha(y) E(f_2(x)) + \alpha(x) E(f_2(y)) + E[f_1(x)f_1(y)] \right] \end{array} \right.$$

Au lieu de  $m_2(x,y)$ , on peut introduire la covariance  $K(x,y) = m_2(x,y) - m(x)m(y)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} m(x) = \alpha(x) + \lambda^2 E[f_2(x)] \\ K(x,y) = \lambda^2 E[f_1(x) f_1(y)] \end{array} \right.$$

On voit que les perturbations sont d'ordre deux relativement à  $\lambda$  (les perturbations au premier ordre sont identiquement nulles). Tout revient donc à calculer  $E(f_2)$  et  $E[f_1(x) f_1(y)]$ . On a

$$\begin{aligned} f_1(x) &= - \int dz \int_0^t \alpha(x-z, t-h) \operatorname{div} [\alpha(z, h) \operatorname{grad} \mathbb{W}(z)] dh \\ &= \int dz \int_0^t \alpha(z, h) \overline{\operatorname{grad} \mathbb{W}(z)} \cdot \overline{\operatorname{grad} \alpha(x-z, t-h)} dh \\ &= - \int dz \int_0^t \mathbb{W}(z) \operatorname{div} [\alpha(z, h) \operatorname{grad} \alpha(x-z, t-h)] dh \end{aligned}$$

Posant

$$c(z-z') = E [\mathbb{W}(z) \mathbb{W}(z')] ]$$

on obtient ainsi

$$K(x,y) = \lambda^2 \iint dz dz' \iint_0^t \iint_0^t c(z-z') \operatorname{div} [\alpha(z, h) \operatorname{grad} \alpha(x-z, t-h)] \operatorname{div} [\alpha(z', h') \operatorname{grad} \alpha(y-z', t'-h')] dh dh'$$

$E(f_2)$  s'exprimera de la même manière à l'aide d'une fonctionnelle de  $c(z-z')$ . Nous n'insisterons pas davantage dans cette voie, et passerons à d'autres méthodes d'approximation, mieux adaptées au calcul numérique et fondées sur la théorie de la promenade aléatoire.

VII. - PROMENADE ALEATOIRE.

Le principe d'approximation consiste à remplacer le mouvement brownien continu décrit par les équations de Kolmogorov par un processus stochastique discontinu, dans lequel la particule effectue des petits déplacements aléatoires à des instants séparés par des intervalles de temps constants  $\Delta t$ .

Désignons par  $\alpha(y, x)$  la densité de probabilité de présence de la particule en  $x$  au temps  $t + \Delta t$ , sachant qu'elle était en  $y$  en  $t$ . Les mouvements ayant lieu aux temps  $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \dots, t_n = n \Delta t \dots$ , on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} f(y, x, t_1) = \alpha(y, x) \\ f(y, x, t_2) = \int \alpha(y, z) \alpha(z, x) dz = \alpha_2(y, x) \\ \dots \dots \dots \\ f(y, x, t_n) = \alpha_n(y, x) = \int \alpha(y, z) \alpha_n(z, x) dz = \int \alpha_n(y, z) \alpha(z, x) dz \end{array} \right.$$

Par itérations successives, le calcul des  $\alpha_n(y, x)$  est possible. Lorsque le nombre  $n$  des itérations sera assez grand,  $\Delta t$  étant petit vis-à-vis de  $t_n$ , ce processus discontinu représentera une bonne approximation d'un processus continu dont il est facile de déterminer les paramètres.

Posons, en effet :

$$\left\{ \begin{array}{l} m^i(y) = E(x^i - y^i | y) = \int x^i \alpha(y, x) dx - y^i \\ \sigma^{ij}(y) = E[(x^i - y^i)(x^j - y^j) | y] = \int (x^i - y^i)(x^j - y^j) \alpha(y, x) dx \end{array} \right.$$

Le mouvement brownien continu dont on a une approximation est celui qui obéit à l'équation de Kolmogorov avec une dérive et un tenseur des moments donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^i = \frac{m^i(y)}{\Delta t} \\ \sigma^{ij} = \frac{\sigma^{ij}(y)}{\Delta t} \end{array} \right.$$

En pratique, la loi élémentaire  $\alpha(y, x)$  la plus simple possible est celle

où la particule ne peut, tous les  $\Delta t$ , qu'effectuer un mouvement de translation d'amplitude  $\pm \varepsilon$  parallèlement à un axe de coordonnée. Désignons par :

$p_i(y)$  la probabilité de la translation  $+\varepsilon$  parallèlement à  $x^i$  ( $x^i - y^i = +\varepsilon$ )  
 $q_i(y)$  " " "  $-\varepsilon$  " ( $x^i - y^i = -\varepsilon$ )  
 $(1 - \overline{W}(y))$  " " pour que la particule reste en  $y$  ( $x^i - y^i = 0$  quel que soit  $i$ )

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i(y) = \varepsilon [p_i(y) - q_i(y)] \\ \sigma^{ij}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \varepsilon^2(p_i + q_i) & \text{si } i = j \end{cases} \end{array} \right.$$

On aura ainsi  $\gamma^{ij} = \frac{\varepsilon^2}{\Delta t} (p_i + q_i)$ , d'où résulte que  $\varepsilon^2$  doit être un infiniment petit du même ordre que  $\Delta t$ . Posons :

$$\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} = c$$

Pour que la dérive reste finie,  $p_i - q_i$  doit être lui-même un infiniment petit de l'ordre de  $\varepsilon$ . Prenons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i + q_i = \overline{W}_i(y) \\ p_i - q_i = \varepsilon d_i(y) \end{array} \right.$$

On en tirera :

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^i = c d_i(y) \\ \gamma^{ii} = c \overline{W}_i(y) \end{array} \right.$$

Les  $\overline{W}_i$  doivent être positifs, de somme inférieure à 1, et on doit avoir

$$\sum_i \overline{W}_i(y) = \overline{W}(y)$$

Les  $d_i(y)$  peuvent être quelconques, sous réserve que l'on ait

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{w}_i - \varepsilon d_i(y) = 2 q_i \geq 0 \\ \overline{w}_i + \varepsilon d_i(y) = 2 p_i \leq 2 \end{array} \right.$$

Lorsque  $\varepsilon$  est réellement très petit, ces conditions sont remplies : mais, en pratique, on adopte  $\varepsilon$  comme unité de longueur ( $\varepsilon = 1$ ) et  $\Delta t$  comme unité de temps ( $\Delta t = 1$ ). Il faudra veiller à ce que les conditions (49) soient numériquement remplies. Avec ces unités de longueur, on a  $c = 1$ , et l'équation de Kolmogorov est :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\overline{w}_i f) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} d_i f$$

Nous nous limiterons au cas isotrope (mais non homogène), soit

$$\overline{w}_i(y) = \frac{1}{n} \overline{w}(y)$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2n} \Delta \overline{w} f - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} d_i f$$

Il reste à exprimer que cette équation est du type de la chaleur (avec une perméabilité isotrope  $k(x)$ ) ; autrement on doit avoir, d'après les relations (20) :

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{w}}{n} = 2 a k \\ d_i = a \frac{\partial k}{\partial x_i} \end{array} \right.$$

On en tire :

$$\frac{d_i}{\overline{w}} = \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x_i} \log k$$

Le vecteur  $\frac{d_i}{\overline{w}}$  doit être proportionnel au gradient de la perméabilité. Dans la pratique, on se donnera les régionalisations  $a$  et  $k$ , on en déduira  $\overline{w}$  et  $d_i$  par les relations (51), et on calculera ensuite  $p_i$  et  $q_i$ . L'équation de Kolmogorov (50) sera alors remplacée par une équation aux différences finies que l'on résoudra par itération.

Désignons par  $P^k(i_1, i_2, \dots, i_n)$  la probabilité pour que la particule soit

au point de coordonnées  $(i_1 \dots i_n)$  à la  $k^{\text{ième}}$  itération. On a :

$$(52) \left\{ \begin{aligned} P^k(i_1, \dots, i_n) &= p_1(i_1-1, i_2, \dots, i_n) P^{k-1}(i_1-1, i_2, \dots, i_n) + q_1(i_1+1, i_2, \dots, i_n) P^{k-1}(i_1+1, i_2, \dots, i_n) \\ &+ \dots + p_n(i_1, \dots, i_{n-1}, i_n-1) P^{k-1}(i_1, \dots, i_{n-1}, i_n-1) + q_n(i_1, \dots, i_{n-1}, i_n+1) P^{k-1}(i_1, \dots, i_{n-1}, i_n+1) \\ &+ \left[ 1 - \overline{W}(i_1, i_2, \dots, i_n) \right] P^{k-1}(i_1, i_2, \dots, i_n) \end{aligned} \right.$$

### Cas particulier

Si l'on prend  $\overline{W} = 1$  (la particule ne peut pas rester en place), le terme en  $1 - \overline{W}$  disparaît dans (52). Ce cas correspond à une porosité proportionnelle à la perméabilité, et à une équation de Kolmogorov à  $\nabla^{ij}$  constant. La dérive  $d$  est alors donnée par :

$$d = \frac{1}{2n} \text{ grad } \log k$$

Enfin, si de plus, la perméabilité est constante, la dérive est nulle, et l'on retombe sur l'équation à coefficients constants, dont la solution est l'exponentielle de Gauss. Dans l'approximation discontinue, les  $\Delta x^i$  sont des variables binomiales : Ainsi, dans ce cas particulier, le nombre  $n$  d'itérations requis n'est autre que le nombre de répétition de l'alternative répétée de Bernouilli nécessaire pour que la convergence vers la loi normale soit pratiquement réalisée : on sait que cela a lieu pour des valeurs de  $n$  relativement peu élevées ( $n = 20$ , par exemple). On peut penser (mais ce n'est pas démontré) que, dans le cas général, le nombre d'itérations requis pour que la solution de (52) ne se distingue pas de celle de (51) doit être, du même ordre de grandeur.

### Promenade aléatoire isotrope dans un espace de Riemann.

La méthode précédente s'applique aussi dans le cas d'un espace de Riemann. A titre d'exemple, traitons le cas d'une promenade aléatoire isotrope. Voici ce qu'il faut entendre par là. En chaque point de coordonnées  $x^i$ , choisissons  $n$  directions orthogonales de vecteurs unitaires  $u_\lambda$ , les composantes contravariantes des  $u_\lambda$  étant  $u_\lambda^i$  dans le repère naturel du point  $x^i$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{ij} u_{\lambda}^i u_{\lambda}^j = 1 \\ g_{ij} u_{\lambda}^i u_{\mu}^j = 0 \quad (\lambda \neq \mu) \end{array} \right.$$

La particule étant en  $x^i$  au temps  $t$ , il y a une probabilité  $\frac{1}{2^n}$  pour qu'elle se trouve en  $t + \Delta t$  sur la géodésique passant par  $x^i$  et tangente à  $u_{\lambda}$  au point situé à la distance  $+ \varepsilon$  (ou  $- \varepsilon$ ) de  $x^i$ , distance mesurée sur cette géodésique. L'équation d'une telle géodésique, paramétrée à l'aide de la distance  $s$  au point  $x^i$ , est

$$x^i(s) = x^i + u_{\lambda}^i \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d^2 x^i}{ds^2} \Delta s^2$$

avec

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = - \Gamma_{kh}^i u_{\lambda}^k u_{\lambda}^h$$

D'où l'on tire, en prenant  $\Delta s = \pm \varepsilon$

$$\Delta x^i = \pm \varepsilon u_{\lambda}^i - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Gamma_{kh}^i u_{\lambda}^k u_{\lambda}^h$$

On en déduit les quantités  $\ell^i$  et  $\gamma^{ij}$  qui figurent dans l'équation de Kolmogorov sous la forme (6ter):

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell^i = \frac{1}{\Delta t} E(\Delta x^i) = - \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon^2}{\Delta t} \sum_{\lambda} \Gamma_{kh}^i u_{\lambda}^k u_{\lambda}^h \\ \gamma^{ij} = \frac{1}{\Delta t} E(\Delta x^i \Delta x^j) = \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon^2}{\Delta t} \sum_{\lambda} u_{\lambda}^i u_{\lambda}^j \end{array} \right.$$

Pour calculer la somme  $\sum_{\lambda} u_{\lambda}^i u_{\lambda}^j$  remarquons que, si nous rapportons l'espace euclidien osculateur en  $x^i$  aux vecteurs  $u_{\lambda}$ , la métrique est donnée par :

$$\gamma_{\lambda\mu} = u_{\lambda}^i u_{\mu}^j = g_{ij} u_{\lambda}^i u_{\mu}^j$$

Comme la matrice  $u_{\lambda}^i$  représente le changement d'axes de coordonnées  $u_{\lambda} = u_{\lambda}^i e_i$ , on a aussi

$$g^{ij} = u_{\lambda}^i u_{\mu}^j \gamma^{\lambda\mu}$$

Comme, enfin, les  $u_{\lambda}$  sont orthonormées, il vient :

$$\sum_{\lambda} u_{\lambda}^i u_{\lambda}^j = u_{\lambda}^i u_{\mu}^j \gamma^{\lambda\mu} = g^{ij}$$

D'où finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell^i = - \frac{1}{2n} \frac{\varepsilon^2}{\Delta t} \Gamma_{k \quad h}^i g^{kh} \\ \nabla^{ij} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\Delta t} g^{ij} \end{array} \right.$$

Ces quantités ne dépendent pas du choix des géodésiques orthogonales. Il suffit de porter ces valeurs dans (10) pour obtenir le vecteur dérive  $\lambda^i$ :

$$\lambda^i = \ell^i + \frac{1}{2} \Gamma_{k \quad j}^i \nabla^{kj} = 0$$

La dérive est nulle. Portant ces résultats dans (6bis), nous obtenons l'équation de Kolmogorov sous forme tensorielle.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2n} \frac{\varepsilon^2}{\Delta t} \nabla_{ij} g^{ij} f$$

Posant  $\frac{\varepsilon^2}{\Delta t} = c$ , et introduisant le laplacien  $\Delta f = \nabla_{ij} g^{ij} f$ , il vient

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{c}{2n} \Delta f$$

On retrouve bien l'équation qui représente la diffusion homogène et isotrope dans l'espace de Riemann, et, inversement, la méthode de la promenade aléatoire peut conduire à une solution approchée de cette équation.

#### VIII.- GENESE DES PARAMETRES MACROSCOPIQUES

Les rapports entre porosité et perméabilité restent assez énigmatiques. La raison en est, évidemment, que la perméabilité ne dépend pas seulement du volume global des vides du milieu poreux, mais, avant tout, de la forme géométrique des pores, et de leurs relations de connexité. A volume de vide égal, on peut avoir des pores entièrement isolés et un milieu imperméable, ou un réseau entièrement connexe et un mi-

lieu perméable. Il ne peut donc pas y avoir de relation univoque entre porosité et perméabilité : dans chaque cas particulier, l'expérience montre seulement une corrélation positive (entre porosité et logarithme de la perméabilité), et une droite de régression dont les paramètres dépendent du milieu étudié.

Les indications qui suivent ne lèvent pas l'énigme, mais pourraient servir de points de départ à des études expérimentales qui feraient correspondre une perméabilité macroscopique à un réseau de pores de caractéristiques données. Dans une hypothèse simplifiée, on peut imaginer que le fluide se meuve librement dans les pores et que les grains constituent des barrières. Dans les pores, par conséquent, l'écoulement est soumis à l'équation du cas homogène et isotrope :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{c}{2} \Delta f$$

et la structure poreuse du milieu se manifeste seulement par des conditions aux limites, d'ailleurs extraordinairement complexes (flux nul à la surface de chacun des grains). On peut décrire l'ensemble pores-grains par une variable géométrique  $\omega(x)$  égale à 0 dans les grains et à 1 dans les pores, et assimiler  $\omega(x)$  à une réalisation d'une fonction aléatoire stationnaire. Dans un volume  $\Delta x = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$  de dimensions grandes vis-à-vis de la portée (mais peut être petites à l'échelle macroscopique) on peut admettre que l'ergodicité apparaît : toute fonctionnelle de  $\omega(x)$ , prise en moyenne spatiale dans ce volume  $\Delta x$ , coïncide alors pratiquement avec sa valeur probable, qui est une constante si  $\omega(x)$  est stationnaire.

Prenons un intervalle de temps  $\Delta t$  de référence, tel que  $c\Delta t$  soit plus grand que le carré de la plus grande dimension de  $\Delta x$ , et désignons par  $\alpha(y, x, t)$  la solution de (53) avec les conditions aux limites : masse unité en  $y$  au temps 0, flux nul à la surface des grains, et considérons la répartition  $\alpha(y, x, \Delta t)$  au bout du temps  $\Delta t$  : elle intéresse un volume supérieur à  $\Delta x$ . Naturellement  $\alpha(y, x, \Delta t)$  est fonction très irrégulière de  $y$  et de  $x$ . Mais, dans l'observation macroscopique (et si le volume  $\Delta x$  est petit) on n'observe pas  $\alpha(y, x, \Delta t)$ , mais sa moyenne spatiale dans un volume élémentaire grand vis-à-vis de la dimension des pores, par exemple un volume égal à  $\Delta x$ . On observe donc :

$$\beta(y, x; \Delta t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\Delta y} \int_{\Delta x} \alpha(y + v, x + u; \Delta t) du dv$$

D'après l'hypothèse d'ergodicité  $\beta(y, x; \Delta t)$  coïncide avec sa valeur probable : c'est donc une répartition invariante par translation, de la forme  $\beta(x-y; \Delta t)$ . A cette échelle, le milieu est doué de paramètres macroscopiques constants. Si l'on pose :

$$\lambda^i = \frac{1}{\Delta t} \int x^i \beta(x, \Delta t) dx$$

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{\Delta t} \int x^i x^j \beta(x, \Delta t) dx$$

l'écoulement macroscopique (observé sur des volumes et des temps grands vis-à-vis de  $\Delta x$  et  $\Delta t$ ) obéira à l'équation de Kolmogorov (6) avec  $\lambda^i$  et  $\gamma^{ij}$  constant : du caractère stationnaire du milieu, il résulte d'ailleurs que  $\lambda^i$  est nul. Par contre  $\gamma^{ij}$  n'a aucune raison de présenter la symétrie sphérique. Le milieu macroscopique sera homogène, mais non isotrope. Ainsi, grâce à la fonction de transition  $\beta(x-y; \Delta t)$  relative à l'échelle intermédiaire des  $\Delta x$  et  $\Delta t$ , le milieu est doué d'une perméabilité constante.

$$k^{ij} = \frac{1}{2} \overline{\gamma}^{ij}$$

où  $\overline{\gamma}$  est la porosité moyenne. Comme on ne sait pas déterminer  $\beta$ , on ne pourra pas relier  $k^{ij}$ , par une formule théorique, aux caractéristiques du réseau des pores. Mais il sera possible de le faire numériquement, en résolvant l'équation (54) par la méthode de la promenade aléatoire, la surface des grains fonctionnant comme une paroi réfléchissante.

G. MATHÉRON

Octobre 1964