

B. R. G. M.

Département Géostatistique

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 57

ETUDE THEORIQUE DES GRANULOMETRIES

G. MATHERON

Décembre 1964

ETUDE THEORIQUE DES GRANULOMETRIES

I.- INTRODUCTION ET GENERALITES.

Dans l'étude des milieux régionalisés en tout ou rien s'introduit nécessairement, sous forme plus ou moins élaborée, une notion de granulométrie. Nous utiliserons une définition probabiliste de la granulométrie, en interprétant chaque grain comme une réalisation d'une fonction aléatoire en tout ou rien.

Soit (dans l'espace à n dimensions R^n) un grain germé à l'origine des coordonnées. En tant que fonction aléatoire en tout ou rien, il est défini par la donnée de la loi spatiale, c'est-à-dire des quantités $P_k(x_1, \dots, x_k)$ donnant la probabilité pour que k points déterminés x_1, \dots, x_k soient (par exemple) extérieurs au grain. Dans le concept usuel de granulométrie, seule intervient la probabilité $P_1(x)$ pour que le point x soit extérieur au grain.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les cosinus directeurs du point courant x et $r = |x|$ son rayon vecteur. On peut représenter x par ses coordonnées "polaires" (r, α) . Dans la direction α , le grain possède un rayon R_α . Pour $r > R_\alpha$ x est extérieur. Pour $r < R_\alpha$, il est intérieur (nous écartons ici l'éventualité, peu plausible puisque 0 est le point où le grain a germé), où la droite de direction α couperait le grain selon plusieurs intervalles disjoints). Pour $r = R_\alpha$ convenons de dire que le point est encore intérieur. Alors :

$$P_1(x) = P(R_\alpha < r) = F_\alpha(r)$$

La probabilité pour que x soit extérieur coïncide avec la fonction de répartition $F_\alpha(r) = P(R_\alpha < r)$ du rayon R_α du grain dans la direction α .

Nous supposons, dans ce qui suit, que $F_\alpha(r)$ ne dépend pas de la direction α du rayon vecteur, autrement dit que la granulométrie est isotrope. Il en est naturellement ainsi lorsque les grains sont assimilables à des sphères. Mais cette condition suffisante n'est nullement nécessaire. Les grains peuvent être de forme très quelcon-

ques et très anisotrope (allongée, aplatie, etc ...). Si l'orientation de ces grains est quelconque, plus précisément si chaque direction principale d'un grain de contour géométrique donné peut, avec une probabilité uniforme s'aligner avec une direction quelconque α de l'espace, $F_{\alpha}(r)$ ne dépendra pas de α et la granulométrie sera isotrope. S'il y a anisotropie (direction d'allongement préférentielle des grains dans l'espace) une transformation linéaire des coordonnées permettra en général de se ramener au cas isotrope.

La fonction de répartition $F(r)$ associée à une granulométrie isotrope coïncide exactement, lorsque les grains sont des sphères, avec la courbe cumulative usuelle à condition d'exprimer les granulométries en nombre de grains, et non pas en poids (et en rayon r au lieu de diamètres d). Lorsque les grains ne sont pas des sphères, $F(r)$ est apparentée à cette courbe granulométrique, mais ne coïncide pas exactement avec elle. Nous n'examinerons pas ici les rapports entre ces deux notions. Le lecteur pourra supposer, s'il le veut, que nous nous limitons au cas des grains sphériques, où les deux notions coïncident, encore qu'à notre sentiment la fonction $F(r)$ possède, dans le cas général, au moins autant de signification physique que la granulométrie usuelle (La granulométrie usuelle est la fonction de répartition du plus grand diamètre du grain, $F(r)$ celle du diamètre moyen, calculée en prenant la moyenne de R_{α} dans toutes les directions α).

Usuellement, les granulométries sont exprimées en poids et non en nombre. Soit $G(r)$ la fonction donnant, en pourcentage du poids total, le poids de la fraction granulométrique $R < r$. Dans l'espace à 3 dimensions, on passe de l'une à l'autre par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} d G(r) = \frac{1}{m_3} r^3 d F(r) \\ d F(r) = \frac{1}{M_{-3}} r^{-3} d G(r) \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} m_3 = \int_0^{\infty} r^3 d F(r) \\ M_{-3} = \int_0^{\infty} r^{-3} d G(r) \end{array} \right.$$

Soit, explicitement :

$$\left\{ \begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{m_3} \int_0^r \rho^3 dF(\rho) \\ F(r) &= \frac{1}{M_{-3}} \int_0^r \rho^{-3} dG(\rho) \end{aligned} \right.$$

Plus généralement, soient, dans R^n , $F_n(r)$ et $G_n(r)$ des granulométries en nombre et en mesure (volume si $n = 3$, surface si $n = 2$, longueur si $n = 1$) respectivement. Désignons par $m_k(n)$ et $M_k(n)$ les moments de ces lois :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} m_k(n) &= \int_0^\infty r^k dF_n(r) \\ M_k(n) &= \int_0^\infty r^k dG_n(r) \end{aligned} \right.$$

On passe de F_n à G_n et réciproquement par :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} G_n(r) &= \frac{1}{m_n(n)} \int_0^r \rho^n dF_n(\rho) \\ F_n(r) &= \frac{1}{M_{-n}(n)} \int_0^r \rho^{-n} dG_n(\rho) \end{aligned} \right.$$

et, entre les moments de ces lois, on a les relations :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} M_k(n) &= \frac{m_{k+n}(n)}{m_n(n)} \\ m_k(n) &= \frac{M_{k-n}(n)}{M_{-n}(n)} \end{aligned} \right.$$

II.- MONTEE ET DESCENTE POUR LES GRANULOMETRIES.

Les pétrographes se sont longtemps demandé s'il était possible, ayant mesuré une granulométrie sur lame mince, de reconstituer la granulométrie originelle dans l'espace à trois dimensions, et comment procéder à cette reconstitution. Plus généralement, toute granulométrie $F_n(r)$ dans un espace à n dimensions R^n induit dans chaque sous espace R^{n-k} à $(n - k)$ dimensions une granulométrie que nous désignerons

par $F_{n-k}(r)$. Nous nous proposons d'établir les formules de passage de F_n à F_{n-k} et nous verrons qu'elles se ramènent à l'opération de montée d'ordre k effectuée sur $[1 - F_n(r)]$. Le passage inverse, c'est-à-dire la reconstitution de F_n à partir de F_{n-k} sera donc possible à l'aide de l'opération inverse, qui est la descente d'ordre k . Nous donnerons les formules de résolution explicite dans les deux cas intéressants en pratique ($n = 3$, et $k = 1$ ou 2) pour F_n et ses moments. Les formules correspondantes pour les granulométries en mesure G_n s'en déduiront à l'aide de (2) et (3).

Passage de F_n à F_{n-k} Soit θ_n le nombre moyen de germes par unité de volume dans R^n

(dans une interprétation aléatoire - qui n'a rien d'obligatoire - on peut admettre que les germes sont implantés selon un schéma poissonien de densité θ_n constante. La seule hypothèse réellement requise est la constance, ou la quasi-constance, de θ_n dans une zone, entourant le point où l'on travaille, et grande vis-à-vis de la dimension moyenne des grains.)

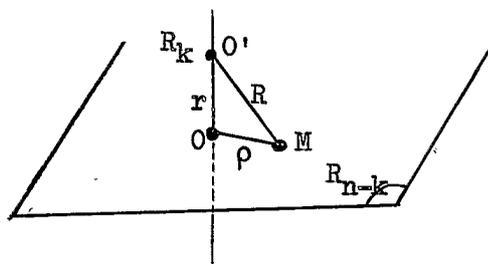
Soit R_{n-k} le sous-espace de R_n (lame mince) auquel on s'intéresse, et R_k

le sous-espace supplémentaire.

Soit un grain centré en O' dans

R_k à la distance $r = oo'$ de l'origine, et soit $R = O'M$,

M étant un point courant de R_{n-k} .



$$F_n(R) = F_n(\sqrt{r^2 + \rho^2})$$

est la probabilité pour que M soit extérieur à un tel grain. $1 - F_n(r)$ est la probabilité pour que O soit intérieur à ce grain, c'est-à-dire pour que ce grain induise un grain dans R_{n-k} . La probabilité pour qu'il y ait un grain induit de rayon $< \rho = OM$ est donc :

$$F_n(\sqrt{r^2 + \rho^2}) = F_n(r)$$

Par ailleurs le nombre de grains présents dans R_k à la distance r de l'origine est $\theta_n S_k r^{k-1} dr$, S_k désignant la surface de l'hypersphère de rayon unité dans R_k

$$S_k = \frac{k \pi^{k/2}}{\Gamma(1 + \frac{k}{2})} = \frac{2 \pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2})}$$

Par suite la densité ϑ_{n-k} de germes pour la granulométrie induite est :

$$\begin{aligned}\vartheta_{n-k} &= \vartheta_n S_k \int_0^{\infty} r^{k-1} [1 - F_n(r)] dr \\ &= \vartheta_n \frac{S_k}{k} \int_0^{\infty} r^k dF_n(r)\end{aligned}$$

Soit

$$V_k = \frac{S_k}{k} = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(1 + \frac{k}{2})}$$

le volume de l'hypersphère de rayon unité dans R_k , et soit $m_k(n)$ le moment d'ordre k de F_n :

$$(4) \quad \vartheta_{n-k} = \vartheta_n V_k m_k(n)$$

De même, la granulométrie induite $F_{n-k}(\rho)$ est :

$$\begin{aligned}F_{n-k}(\rho) &= \frac{\vartheta_n}{\vartheta_{n-k}} \int_0^{\infty} [F_n(\sqrt{r^2 + \rho^2}) - F_n(r)] S_k r^{k-1} dr \\ &= \frac{k}{m_k(n)} \int_0^{\infty} [F_n(\sqrt{r^2 + \rho^2}) - F_n(r)] r^{k-1} dr\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned}1 - F_{n-k}(\rho) &= \frac{k}{m_k(n)} \int_0^{\infty} [1 - F_n(\sqrt{r^2 + \rho^2})] r^{k-1} dr \\ &= \frac{k}{m_k(n)} \int_{\rho}^{\infty} [1 - F_n(u)] (u^2 - \rho^2)^{\frac{k}{2}-1} u du\end{aligned}\right.$$

A un facteur constant près, on reconnaît l'expression de la montée d'ordre k .

Désignons par I_k l'opérateur de montée d'ordre k qui, à toute fonction $g_n(r)$, associe la fonction $g_{n-k} = I_k g_n$:

$$g_{n-k}(\rho) = S_k \int_{\rho}^{\infty} g_n(u) (u^2 - \rho^2)^{\frac{k}{2}-1} u du$$

La formule de passage (5) peut s'écrire :

$$(6) \quad 1 - F_{n-k}(\rho) = \frac{k}{m_k(n) S_k} I_k [1 - F_n(r)] = \frac{1}{m_k(n) V_k} I_k [1 - F_n(r)]$$

L'opération inverse de la montée I_k est la descente I_{-k} de même ordre k .
Le passage inverse de F_{n-k} à F_n est donc résolu par la formule :

$$(7) \quad 1 - F_n(r) = V_k m_k(n) I_{-k} [1 - F_{n-k}(\rho)]$$

Cas particulier $k = 2$. (pour $n = 3$, F_{n-2} représente la fonction de répartition des demi-traversées des grains, ou granulométrie (en nombre) à une seule dimension). La formule de passage est remarquablement simple. En effet, la montée d'ordre 2 est une intégrale ordinaire :

$$\varepsilon_{n-2}(\rho) = I_2 \varepsilon_n = 2 \pi \int_{\rho}^{\infty} \varepsilon_n(u) u du$$

et son inverse, la descente d'ordre 2, est une dérivée ordinaire :

$$\varepsilon_n(\rho) = I_{-2} \varepsilon_{n-2} = - \frac{1}{2\pi\rho} \frac{d}{d\rho} \varepsilon_{n-2}(\rho)$$

La formule (6) s'écrit :

$$(8) \quad 1 - F_{n-2}(\rho) = \frac{2}{m_2(n)} \int_{\rho}^{\infty} [1 - F_n(u)] u du$$

Pour l'inverser, il est commode d'introduire la densité f_{n-2} associée à F_{n-2} , qui existe nécessairement d'après la formule (8) elle-même.

$$f_{n-2}(\rho) = \frac{d}{d\rho} F_{n-2}(\rho)$$

D'où :

$$(9) \quad F_n(\rho) = 1 - \frac{m_2(n)}{2\rho} f_{n-2}(\rho)$$

$m_2(n)$ est liée à la pente à l'origine de l'histogramme $f_{n-2}(\rho)$. En effet :

$$\frac{1}{m_2(n)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f_{n-2}(\rho)}{2\rho} = \frac{1}{2} f'_{n-2}(0)$$

Ainsi, la fonction granulométrique $F_3(\rho)$ à 3 dimensions se déduit d'une manière remarquablement simple de l'histogramme des traversées (granulométrie à une dimension).

Cas particulier $k = 1$ (avec $n = 3$, F_{n-1} est la granulométrie déduite des mesures effectuées sur une section plane, par exemple une lame mince). La formule de passage est ici un peu plus complexe. La montée d'ordre 1 s'écrit :

$$\varepsilon_{n-1}(\rho) = I_{-1} \varepsilon_n = 2 \int_{\rho}^{\infty} \varepsilon_n(u) \frac{u \, du}{\sqrt{u^2 - \rho^2}}$$

Son inverse, qui est la descente d'ordre 1, I_{+1} , s'obtient facilement, comme on sait, en effectuant d'abord une descente d'ordre 2 sur ε_{n-1} , qui conduit à

$$\varepsilon_{n+1}(\rho) = -\frac{1}{2\pi\rho} \frac{d}{d\rho} \varepsilon_{n-1}(\rho)$$

puis une remontée d'ordre 1, d'où :

$$\varepsilon_n(\rho) = I_{+1} \varepsilon_{n+1} = -\frac{1}{\pi} \int_{\rho}^{\infty} \varepsilon'_{n-1}(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - \rho^2}}$$

Ainsi la formule (6) va donner

$$(10) \quad 1 - F_{n-1} = \frac{1}{m_1(n)} \int_{\rho}^{\infty} [1 - F_n(u)] \frac{udu}{\sqrt{u^2 - \rho^2}}$$

et la formule (7), de son côté, en posant :

$$f_{n-1}(\rho) = \frac{d}{d\rho} F_{n-1}(\rho)$$

permet d'obtenir la fonction granulométrique originelle $F_n(\rho)$ à partir de l'histogramme $f_{n-1}(\rho)$ des lames minces :

$$(11) \quad 1 - F_n(\rho) = \frac{2 m_1(n)}{\pi} \int_{\rho}^{\infty} f_{n-1}(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - \rho^2}}$$

On calculera $m_1(n)$ en annulant ρ dans la relation (11), soit :

$$\frac{\pi}{2} = m_1(n) \int_0^{\infty} \frac{1}{u} f_{n-1}(u) \, du$$

Calcul des moments

Il est souvent commode de pouvoir calculer directement les moments $m_k(n)$ de la loi F_n en fonction des moments expérimentaux $m_k(n-k)$ de la loi F_{n-k} .

Ce passage direct est facile. En effet, multiplions les relations (5) par $\rho^{\alpha-1}$ et intégrons en ρ de 0 à l'infini. A gauche, il vient (avec $\alpha > 0$)

$$\int_0^{\infty} \rho^{\alpha-1} [1 - F_{n-k}(\rho)] d\rho = \int_0^{\infty} \frac{\rho^\alpha}{\alpha} d F_{n-k}(\rho) = \frac{1}{\alpha} m_\alpha(n-k)$$

A droite, on doit calculer l'intégrale double :

$$\begin{aligned} \frac{k}{m_k(n)} \int_0^{\infty} \rho^{\alpha-1} d\rho \int_\rho^{\infty} [1 - F_n(u)] (u^2 - \rho^2)^{\frac{k}{2}-1} u du \\ = \frac{k}{m_k(n)} \int_0^{\infty} [1 - F_n(u)] u du \int_0^u (u^2 - \rho^2)^{\frac{k}{2}-1} \rho^{\alpha-1} d\rho \\ = \frac{k}{m_k(n)} \frac{\Gamma(\frac{k}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{2 \Gamma(\frac{\alpha+k}{2})} \int_0^{\infty} [1 - F_n(u)] u^{k+\alpha-1} du \\ = \frac{k}{m_k(n)} \frac{\Gamma(\frac{k}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{2 \Gamma(\frac{\alpha+k}{2})} \frac{m_{k+\alpha}(n)}{k+\alpha} \end{aligned}$$

D'où, finalement :

$$(12) \quad m_\alpha(n-k) = \frac{\Gamma(1 + \frac{k}{2}) \Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha+k}{2})} \frac{m_{k+\alpha}(n)}{m_k(n)}$$

Inversement, il est facile de reconstituer $m_\alpha(n)$ à partir de $m_{\alpha-k}(n-k)$.
On a, en premier lieu :

$$(13) \quad m_\alpha(n) = m_{\alpha-k}(n-k) m_k(n) \frac{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1 + \frac{k}{2}) \Gamma(1 + \frac{\alpha-k}{2})}$$

Prenons $\alpha = 0$. Si k est un entier impair :

$$1 = m_{-k}^{(n-k)} m_k^{(n)} \frac{1}{\Gamma(1 + \frac{k}{2}) \Gamma(1 - \frac{k}{2})}$$

on obtient :

$$(14) \quad m_{\alpha}^{(n)} = \frac{m_{\alpha-k}^{(n-k)}}{m_{-k}^{(n-k)}} \frac{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}) \Gamma(1 - \frac{k}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha - k}{2})}$$

Pour k entier pair, la formule ci-dessus n'est plus applicable. Il faut procéder à un passage à la limite sur lequel nous n'insistons pas. Pour $k = 2$, on a vu que l'on avait :

$$m_2^{(n)} = \frac{2}{f_{n-2}^{(0)}}$$

et il suffit de porter cette valeur dans (13). En résumé, pour $k = 1$ et $k = 2$, on a :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} m_{\alpha}^{(n)} &= \frac{m_{\alpha-1}^{(n-1)}}{m_{-1}^{(n-1)}} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{1 + \alpha}{2})} \\ m_{\alpha}^{(n)} &= \frac{m_{\alpha-2}^{(n-2)}}{f_{n-2}^{(0)}} \alpha \end{aligned} \right.$$

Moments des granulométries en poids. Les moments M_k des granulométries exprimées en poids se déduisent immédiatement des relations (3) et (13). On obtient :

$$\begin{aligned} M_{\alpha}^{(n)} &= \frac{m_{\alpha+n}^{(n)}}{m_n^{(n)}} = \frac{m_{\alpha+n-k}^{(n-k)}}{m_{n-k}^{(n-k)}} \frac{\Gamma(1 + \frac{\alpha + n}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} \frac{\Gamma(1 + \frac{n-k}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha + n - k}{2})} \\ &= M_{\alpha}^{(n-k)} \frac{\Gamma(1 + \frac{\alpha + n}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} \frac{\Gamma(1 + \frac{n-k}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha + n - k}{2})} \end{aligned}$$

Ainsi les moments de même ordre α se déduisent très simplement les uns des autres, selon la formule :

$$(16) \quad \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha+n}{2})} M_{\alpha}(n) = \frac{\Gamma(1 + \frac{n-k}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha+n-k}{2})} M_{\alpha}(n-k)$$

Conservation de la Porosité.

Dans R_n , il y a par unité de volume (à n dimensions) θ_n germes, soit un volume total occupé par les grains :

$$\lambda_n = \theta_n V_n m_n(n)$$

De même, dans R_{n-k} , par unité de volume (à $n-k$ dimensions), le volume occupé par les grains est :

$$\lambda_{n-k} = \theta_{n-k} V_{n-k} m_{n-k}(n-k)$$

De (4), nous tirons, en premier lieu :

$$\lambda_{n-k} = \theta_n V_k V_{n-k} m_k(n) m_{n-k}(n-k)$$

D'après (13), on a aussi :

$$m_n(n) = m_{n-k}(n-k) m_k(n) \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{\Gamma(1 + \frac{k}{2}) \Gamma(1 + \frac{n-k}{2})}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \lambda_{n-k} &= \theta_n V_k V_{n-k} m_n(n) \frac{\Gamma(1 + \frac{k}{2}) \Gamma(1 + \frac{n-k}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} \\ &= \theta_n \frac{\prod^{k/2}}{\Gamma(1 + \frac{k}{2})} \frac{\prod^{\frac{n-k}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{n-k}{2})} \frac{\Gamma(1 + \frac{k}{2}) \Gamma(1 + \frac{n-k}{2})}{(1 + \frac{n}{2})} m_n(n) = \theta_n V_n m_n(n) \end{aligned}$$

D'où :

$$(17) \quad \lambda_n = \lambda_{n-k}$$

relation qui exprime la conservation de la porosité, et qui peut s'écrire aussi,

d'après ce qui précède, sous la forme remarquable :

$$(18) \quad V_n m_n(n) = V_k m_k(n) V_{n-k} m_{n-k}(n-k)$$

Le premier membre est l'espérance mathématique du volume d'un grain dans R_n . Le deuxième est le produit de l'espérance de l'hypersurface du contour apparent dans R_k de ce même grain par celle du volume du grain induit dans R_{n-k} .

Avec $k=1$ et $n=3$, $V_n m_n(n)$ est le volume moyen (ou probable) d'un grain. $V_k m_k(n)$ est son diamètre probable. $V_{n-k} m_{n-k}(n-k)$ est la surface moyenne de la granulométrie induite telle qu'elle apparaît sur une lame mince.

Volume probable dans $R_n =$ Diamètre probable dans $R_n \times$ Surface probable dans R_{n-1} .

III.- APPLICATION AUX SCHEMAS BOOLEENS.

Appliquons les notions précédentes aux schémas booléens tels qu'ils ont été définis dans la NOTE GEOSTATISTIQUE N° 56.

Soit donc, dans R^n , des germes supposés répartis selon un schéma Poissonien à accroissements indépendants. Chaque grain se développe, à partir de son germe, selon un processus de croissance aléatoire, et son contour se trouve caractérisé par la donnée des fonctions

$$\overline{W}_k(x_1, \dots, x_k)$$

représentant la probabilité pour que k points donnés soient tous extérieurs au grain supposé germé à l'origine 0 des coordonnées. Nous supposons ici que les \overline{W}_n possèdent la symétrie sphérique. En particulier, $\overline{W}_1(x)$ est une fonction de $|x| = r$ qui coïncide avec la granulométrie $F_n(r)$ introduite ci-dessus.

Au lieu des \overline{W}_k , il peut être commode d'introduire la fonctionnelle caractéristique :

$$\Gamma(\varphi) = E \left[e^{i \int_{R^n} f(x) \varphi(x) dx} \right]$$

où $f(x)$ est la fonction aléatoire en tout ou rien associée au grain germé en 0 (supposé unique).

La probabilité d'avoir $\int_{R_n} f(x) \varphi(x) dx = 0$, c'est-à-dire pour que le support de la fonction φ ne rencontre pas le grain est la fonctionnelle :

$$(19) \quad \overline{\omega}(\varphi) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Gamma(i \alpha \varphi)$$

On suppose que chacun des grains se développe, à partir de son germe implanté de manière poissonnienne, indépendamment des autres grains (même s'ils se rencontrent). Le schéma booléen s'obtient en affectant aux grains la réunion ensembliste de tous les grains ainsi germés. Il correspond à la fonction aléatoire :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ n'appartient à aucun grain germé,} \\ 1 & \text{si } x \text{ appartient à au moins un grain.} \end{cases}$$

La probabilité $P_k(x_1 \dots x_k)$ d'avoir $f(x_1) = \dots = f(x_k) = 0$ est :

$$\log P_k(x_1 \dots x_k) = \theta_n \int_{R_n} \left[\overline{\omega}_k(x_1 - y, x_2 - y, \dots, x_k - y) - 1 \right] dy$$

La porosité est $P_1(x) = \omega_n$. Elle est indépendante de x , et on a :

$$\log \omega_n = -\theta_n \int \left[1 - \overline{\omega}_1(y) \right] dy = -\theta_n S_n \int_0^\infty \left[1 - F_n(r) \right] r^{n-1} dr$$

Soit :

$$(20) \quad \begin{cases} \log \omega_n = -\theta_n V_n m_n(n) \\ \omega_n = e^{-\lambda_n} \end{cases}$$

La relation (17) montre que cette porosité est invariante à la montée.

Ainsi, le schéma induit dans R_{n-k} par le schéma booléen construit dans R_n à partir de θ_n et F_n est identique au schéma booléen construit directement dans R_{n-k} à partir de θ_{n-k} et F_{n-k} .

De fait, il est très clair que, si x_1, \dots, x_ℓ sont ℓ points de R_{n-k} la probabilité $P_\ell(x_1, \dots, x_\ell)$ pour qu'aucun de ces points n'appartienne à un grain est la même dans le schéma booléen construit dans R_n , et dans le schéma induit dans R_{n-k} .

Soit encore

$$(21) \quad N + N' = C' = 1 + C$$

Pour étudier un tel milieu dans le cas $n = 2$ (lame mince) J. SERRA propose le dispositif expérimental suivant :

Un spot lumineux circulaire de diamètre λ balaye la lame mince. Si les grains sont opaques et les pores transparents (conventionnellement, nous prendrons $\lambda < 0$ dans ce cas qui va correspondre à un élargissement des pores ou à une érosion des grains) la lumière passe si, et seulement si le spot rencontre le milieu P. Le spot étant centré en x , et $f(x) = 0$ si $x \in P$, $f(x) = 1$ si $x \in G$, on a ainsi une nouvelle fonction en tout ou rien.

$$f_{\lambda}(x) = 0 \quad \text{si la lumière passe (si le spot rencontre P)}$$

$$f_{\lambda}(x) = 1 \quad \text{si elle ne passe pas (si le spot est contenu dans G)}.$$

Avec les grains transparents et les pores opaques (conventionnellement, $\lambda > 0$: ce cas décrit une dilatation des grains ou un étranglement des pores), nous prendrons

$$f_{\lambda}(x) = 0 \quad \text{si la lumière ne passe pas (spot contenu dans P)}$$

$$f_{\lambda}(x) = 1 \quad \text{si elle passe (le spot rencontre G)}.$$

Soit $S_i(\lambda)$ la surface d'une composante connexe G_i avec la valeur λ du paramètre de Serra, $2\mathcal{L}_i(\lambda)$ son périmètre (y compris, si $C_i(\lambda) > 1$, le périmètre intérieur). Pour une variation $\delta\lambda$ on a (algébriquement)

$$\delta S_i = 2\mathcal{L}_i \delta\lambda + \pi(2 - C_i) \delta\lambda^2$$

$$D'où, avec $S(\lambda) = \sum S_i(\lambda)$$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2} = 2 N(\lambda) - C(\lambda)$$

Soit, compte tenu de (21)

$$(22) \quad \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2} = N(\lambda) - N'(\lambda) + 1$$

La dérivée seconde de $S(\lambda)$ donne la différence entre les nombres $N(\lambda)$ et $N^i(\lambda)$ des composantes connexes des grains et des pores.

Cas particulier

Si $N^i(0) = 1$ (pas d'inclusion), pour $\lambda < 0$ $N^i(\lambda)$ reste égal à 1 et il reste

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2} = N(\lambda) \quad (\lambda < 0)$$

On remarque que $|\lambda|$ croissant, $\Delta N = +1$ chaque fois qu'un grain s'étrangle, et $\Delta N = -1$ chaque fois qu'un grain disparaît.

Pour $\lambda > 0$, au contraire, $N^i(\lambda)$ peut varier dans les deux sens car les grains, en se rejoignant, peuvent enfermer une inclusion. $N(\lambda)$, au contraire, ne peut que diminuer, chaque fois qu'une communication s'établit entre 2 grains disjoints.

Chaque fois qu'un chenal se ferme (λ croissant) on a :

- soit $\Delta N = -1$ si les grains qui se rejoignent n'étaient pas connexes,
- soit $\Delta N^i = +1$ si une connexion supplémentaire est établie dans un même grain.

Dans les deux cas $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2}$ diminue d'une unité.

Par contre, chaque fois qu'une inclusion est éliminée, $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2}$ augmente d'une unité.

S'il y a un intervalle $(0, \lambda_0)$ tel qu'aucune inclusion ne disparaisse avant $\lambda > \lambda_0$, dans cet intervalle $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2}$ décroît de façon monotone, et sa variation reflète le nombre de chenaux successivement fermés !

$$N(0) - N(\lambda) = \left[\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2} \right]_{\lambda}^0 \quad (\lambda < \lambda_0)$$

indique le nombre de chenaux de largeur $\leq \frac{\lambda}{2}$.

Application de la transformation de Serra au schéma booléen.

La porosité, rapport des vides à la surface totale, mesurée sur lame mince est ici une fonction de λ , soit $\omega(\lambda)$

Pour $\lambda > 0$ (dilatation des grains) on a :

$$\begin{aligned} \log \omega(\lambda) &= - 2 \pi \theta \int_0^{\infty} [1 - F(r-\lambda)] r dr \\ &= - \pi \lambda^2 \theta - 2 \pi \theta \int_0^{\infty} [1 - F(u)] (u + \lambda) du \end{aligned}$$

soit

$$(23) \quad \log \omega(\lambda) = - \pi \theta E(r+\lambda)^2 = - \pi \theta [\lambda^2 + 2\lambda m_1 + m_2]$$

Pour $\lambda > 0$ la granulométrie n'intervient que par ses deux premiers moments, qui sont ainsi accessibles expérimentalement.

Soit $\bar{V}(\lambda)$ et $\bar{V}'(\lambda)$ les nombres de grains et de pores par unité de surface

(22) s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 \log \omega(\lambda)}{\partial \lambda^2} = \bar{V}'(\lambda) - \bar{V}(\lambda)$$

D'où, pour $\lambda > 0$

$$\theta \omega(\lambda) [-1 + 2\pi\theta(\lambda + m_1)] = \bar{V}'(\lambda) - \bar{V}(\lambda)$$

Pour $\lambda < 0$ (élargissement des pores) la granulométrie intervient explicitement.

On a ici

$$\begin{aligned} \log \omega(\lambda) &= - 2 \pi \theta \int_0^{\infty} [1 - F(r-\lambda)] r dr \\ &= - \pi \theta \int_0^{\infty} (r+\lambda)^2 dF(r) \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$(24) \quad \frac{\partial^2 \log \omega(\lambda)}{\partial \lambda^2} = - 2 \pi \theta [1 - F(-\lambda)] \quad (\lambda < 0)$$

Ainsi, il est possible de reconstruire la granulométrie originelle (antérieure au passage en booléen) à partir de la porosité $\omega(\lambda)$ ($\lambda < 0$).

On a aussi :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 \omega(\lambda)}{\partial \lambda^2} = \bar{V}'(\lambda) - \bar{V}(\lambda)$$

Ainsi la différence entre nombres de pores et de grains peut s'exprimer à partir de la granulométrie originelle $F(\lambda)$.

V.- FORMALISME DE LA TRANSFORMATION DE SERRA.

La transformation de Serra peut être représentée comme une loi de composition définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(R^n)$ des sous-ensembles de l'espace euclidien R^n (plus généralement, R^n pourra être remplacé par un espace vectorel quelconque).

Soient $A, B \in \mathcal{P}(R^n)$ des ensembles de R^n . A est, par exemple, l'ensemble $\{x : f(x) = 1\}$ où la variable en tout ou rien $f(x)$ n'est pas nulle, et

$B = \{x : k(x) = 1\}$ le spot centré à l'origine. Mais cette interprétation n'est pas obligatoire, et, dans la définition suivante, A et B jouent des rôles symétriques. Désignons par $A \oplus B$ l'ensemble :

$$(25) \quad A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

des vecteurs z de la forme $z = x + y$, où x décrit A et y décrit B .

Lorsque C est un ensemble, et a un vecteur, le translaté de C par a sera désigné par C_a :

$$C_a = \bigcup_{x \in C} (x + a) = \{a\} \oplus C$$

Avec cette notation, (25) peut s'écrire :

$$(26) \quad A \oplus B = \bigcup_{x \in A} B_x = \bigcup_{y \in B} A_y$$

En particulier, on a :

$$B_x = \bigcup_{y \in B} (x + y) = B \oplus \{x\}$$

L'opération \oplus est associative et commutative. On a, par exemple :

$$(A \oplus B) \oplus C = \left\{ x + y + z \mid x \in A, y \in B, z \in C \right\}$$

et un tel ensemble, dont la définition est symétrique en A, B, C, ne dépend pas de l'ordre dans lequel les ensembles ont été pris, ou les opérations effectuées.

Elle possède un élément neutre, l'ensemble $\{0\}$ constitué par le seul vecteur 0, et un élément permis, l'ensemble vide \emptyset . En effet, on a toujours :

$$B \oplus \{0\} = B$$

$$B \oplus \emptyset = \{x + y \mid x \in B, y \in \emptyset\} = \emptyset$$

(la dernière égalité provenant de ce qu'il n'existe aucun vecteur $y \in \emptyset$).

L'opération \oplus n'admet pas d'inverse. Etant donné un ensemble A, on ne peut pas trouver d'ensemble A' tel que $A \oplus A' = \{0\}$. Ainsi, nous n'avons pas une structure de groupe, mais seulement une structure de demi-groupe.

Dans la suite, on introduira l'opérateur \mathcal{J}_B défini par :

$$(27) \quad \mathcal{J}_B A = A \oplus \overset{\vee}{B}$$

où $\overset{\vee}{B} = \bigcup_{x \in B} \{-x\}$ est le transposé de B, et on dira que $\mathcal{J}_B A$ est le transformé de Serra de A par B. Dans cette notation, la symétrie de l'opération $A \oplus \overset{\vee}{B}$ est rompue, en apparence, et on rejoint le point de vue initial où A est une régionalisation en tout ou rien et B un spot. L'opérateur \mathcal{J}_B représente la dilatation de A par B. De l'associativité et de la commutativité de \oplus , on déduit :

$$\mathcal{J}_C \mathcal{J}_B A = \mathcal{J}_{B \oplus C} A = \mathcal{J}_C (A \oplus \overset{\vee}{B}) = \mathcal{J}_B \mathcal{J}_C A \quad \text{etc ...}$$

Relativement à l'union ensembliste, on a :

$$A \oplus (B \cup C) = \bigcup_{x \in A} (B_x \cup C_x) = \left(\bigcup_{x \in A} B_x \right) \cup \left(\bigcup_{x \in A} C_x \right)$$

Soit

$$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$$

Ainsi l'opération \oplus distribue l'union ensembliste, et on a :

$$(28) \quad \mathcal{I}_B (A \cup A') = \mathcal{I}_B A \cup \mathcal{I}_B A'$$

La réciproque n'est pas vraie, et l'union ne distribue pas \oplus .

Vis-à-vis de l'intersection ensembliste, on a seulement l'inclusion (en général stricte) :

$$\mathcal{I}_B (A \cap A') \subset (\mathcal{I}_B A) \cap (\mathcal{I}_B A')$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_B (A \cap A') &= \bigvee_B \oplus (A \cap A') = \bigcup_{x \in B} \bigvee_x (A \cap A'_x) \\ (\mathcal{I}_B A) \cap (\mathcal{I}_B A') &= (\bigvee_B \oplus A) \cap (\bigvee_B \oplus A') = \bigcup_{x \in B} \bigvee_{y \in B} (A_x \cap A'_y) \end{aligned}$$

Représentation analytique de la transformation de Serra.

Soient $k_A(x)$, $k_B(x)$ les variables géométriques (fonctions caractéristiques ensemblistes) des ensembles A , B ... L'algèbre de Boole associée à l'union et à l'intersection les opérations Sup et Inf respectivement :

$$\begin{cases} k_{A \cup B}(x) = \text{Sup} [k_A(x), k_B(x)] = k_A + k_B - k_A k_B \\ k_{A \cap B} = \text{Inf} [k_A, k_B] = k_A k_B \end{cases}$$

Pour l'ensemble $A_x = \bigcup_{y \in A} (x+y)$ translaté de A par x , on trouve :

$$k_{A_x}(z) = k_A(z-x)$$

Par suite :

$$k_{A \oplus B}(z) = \text{Sup}_{x \in A} k_B(z) = \text{Sup}_{x \in A} k_B(z-x)$$

et finalement :

$$(29) \quad k_A \oplus B(z) = \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}^n} k_A(x) k_B(z-x) = \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}^n} k_B(x) k_A(z-x)$$

Il suffit de comparer avec la convolution usuelle :

$$k_A * k_B = \int_{\mathbb{R}^n} k_A(x) k_B(z-x) dx$$

pour voir que $k_A \oplus B$ a la signification d'une convolution booléenne de k_A par k_B , (dans la mesure où, dans l'algèbre de Boole, l'addition ordinaire est remplacée par l'opération Sup).

Pour qu'un échantillon ponctuel prélevé en z appartienne à $A \oplus B$, il faut et il suffit que l'on ait $z = x + y$, $x \in A$, $y \in B$, soit aussi $z-y = x$, c'est-à-dire que les deux ensembles :

$$\bigcup_{y \in B} (z-y) \text{ et } A$$

doivent se couper. Désignons par $\bigvee B$ le transposé de B :

$$\bigvee B = \bigcup_{y \in B} (-y)$$

On a l'équivalence :

$$(30) \quad z \in A \oplus B \iff A \cap \bigvee_{B_z} \neq \emptyset$$

Ainsi, l'échantillon ponctuel prélevé en z tombe dans $A \oplus B$ si, et seulement si, l'échantillon \bigvee_{B_z} (échantillon égal au transposé de B et implanté au point z) rencontre A .

On vérifie immédiatement que (30) et (29) sont équivalents.

L'équivalence (30) permet de comprendre pourquoi, dans l'opérateur

$$\mathcal{I}_B A = A \oplus \bigvee B$$

c'est le transposé de B qui doit intervenir. On a, en effet :

$$z \in \mathcal{I}_B A \iff A \cap \bigvee_{B_z} \neq \emptyset$$

Le point z appartient à $\mathcal{I}_B A$ si, et seulement si, l'échantillon \bigvee_{B_z} (égal à B et implanté en z) rencontre A . Nous écrirons aussi :

$$(31) \quad \mathcal{I}_B A = \left\{ z \mid A \cap \bigvee_{B_z} \neq \emptyset \right\}$$

Le complémentaire de $\mathcal{J}_B A$ est l'ensemble :

$$(32) \quad \overline{\mathcal{J}_B A} = \{z \mid B_z \subset \bar{A}\}$$

des points z tels que l'échantillon B_z soit contenu dans le complémentaire de A .

Transformation associée.

Faute de pouvoir définir une opération inverse de \mathcal{J}_B , nous utiliserons une opération \mathcal{J}'_B telle que le complémentaire de $\mathcal{J}'_B A$ coïncide avec la transformée par B du complémentaire de A , soit :

$$\overline{\mathcal{J}'_B A} = \mathcal{J}_B \bar{A}$$

Explicitement, ceci donne :

$$(33) \quad \mathcal{J}'_B A = \overline{A \oplus \bar{B}}$$

ou encore, d'après (32)

$$(34) \quad \mathcal{J}'_B A = \{z \mid B_z \subset A\}$$

Ainsi $\mathcal{J}'_B A$ est l'ensemble des points z tels que le spot B_z soit contenu dans A . De même que $\mathcal{J}_B A$ représentait la dilatation de A par B , $\mathcal{J}'_B A$ représente l'érosion de A par B .

De (34) se déduisent les équivalences :

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{J}'_B A &\iff B_z \subset A \\ &\iff \forall y \in B, y + z \in A \\ &\iff \forall y \in B \quad z \in A \oplus \{-y\} = A_{-y} \end{aligned}$$

D'où une troisième expression de l'opération \mathcal{J}'_B :

$$(35) \quad \mathcal{J}'_B A = \bigcap_{y \in B} A_{-y} = \bigcap_{y \in B} A_y$$

Opération $A \ominus B$ - De même que l'on avait :

$$A \oplus B = \mathcal{J}_B^V A$$

nous poserons, par définition :

$$A \ominus B = \mathcal{J}_B^V A$$

D'après les résultats précédents, on a :

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} A \ominus B &= \overline{(\bar{A} \oplus B)} \\ &= \left\{ z \mid \bigvee_{z \in B} C A \right\} \\ &= \bigcap_{y \in B} A_y \end{aligned} \right.$$

Sous forme analytique, avec les variables géométriques :

$$(37) \quad k_A \ominus B (z) = \prod_{x \in B} k_A(z-x) = \inf_{x \in A} k_A(z-x)$$

Covariogramme géométrique généralisé. Le covariogramme associé à A est défini par :

$$K(h) = \int k_A(x) k_A(x+h) dx$$

Prenons pour B l'ensemble $\{0, h\}$. On a :

$$k_A(x) k_A(x+h) = \prod_{y \in B}^V k_A(x-y) = k_A \ominus B^V (x)$$

Par suite :

$$K(h) = \int k_A \ominus B^V (x) dx$$

Ainsi, la transformation $\mathcal{J}_B^V A = A \ominus B^V$ permet une très vaste généralisation de la notion de covariogramme. On appellera covariogramme généralisé de la régionalisation en tout ou rien A la fonction d'ensemble K(B).

$$(38) \quad K(B) = \int k_A \ominus B^V (x) dx = \text{Mes} \left[\mathcal{J}_B^V A \right]$$

associant à tout ensemble B la mesure de l'ensemble A érodé par B, c'est-à-dire la mesure de l'intersection de tous les translatés de A par les vecteurs y de B.

On peut également, en effet, écrire (38) sous la forme :

$$(39) \quad K(B) = \text{Mes} \left[\bigcap_{y \in B}^V A_y \right] = \int \left[\prod_{y \in B} k_A(x+y) \right] dx$$

Lorsque B est constitué de n points seulement

$$B = \{0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$$

on obtient la mesure de l'intersection d'ordre n de B avec ses traduits par les vecteurs $= a_1, \dots, = a_{n-1}$:

$$K(a_1, \dots, a_{n-1}) = \int k(x) k(x+a_1) \dots k(x+a_{n-1}) dx$$

De la même manière, nous pouvons aussi définir la fonction d'ensemble :

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} S(B) &= \int k_A \oplus_B^{\vee} (x) dx = \text{Mes} \left[\int_B A \right] \\ &= \text{Mes} \left[\bigcup_{y \in B} A_y \right] \end{aligned} \right.$$

qui donne la mesure de la réunion de ces mêmes traduits, et n'a pas d'équivalents dans la théorie transitive.

Moments fonctionnels d'une fonction aléatoire en tout ou rien.

Interprétons maintenant $f(x) = k_A(x)$ comme une fonction aléatoire. La loi spatiale est déterminée par les moments fonctionnels :

$$P_k(x_1, \dots, x_k) = P \left[f(x_1) = \dots = f(x_k) = 1 \right] = E \left[f(x_1) f(x_2) \dots f(x_k) \right]$$

et, plus généralement, par la fonction d'ensemble :

$$(41) \quad P(B) = P \left[x \in B \Rightarrow f(x) = 1 \right] = E \left[\prod_{x \in B} f(x) \right]$$

Soit $B_z = B \oplus z$ le traduit de B par z. On a :

$$P(B_z) = E \left[\prod_{x \in B} f(x+z) \right] = E \left[k_A \ominus_B^{\vee} (z) \right]$$

Ainsi, si l'on remplace la régionalisation $f(x)$ associée à A par la régionalisation $f_B(x)$ associée à la transformée $\int_B A$, on a simplement :

$$(42) \quad P(B_z) = E \left[f_B(z) \right]$$

et, dans le cas stationnaire :

$$P(B) = E \left[f_B(z) \right]$$

Le moment fonctionnel d'ordre B est remplacé par le moment du premier ordre associé à f_B .

Il n'est pas inutile, avant de passer à la définition de l'ouverture et de la fermeture associée à une transformation de Serra, de résumer et de préciser les règles de Calcul des opérations \oplus et \ominus .

VI.- REGLES DE CALCUL POUR LES OPERATIONS \oplus ET \ominus .

1.- Les formules suivantes ont déjà été établies :

$$A \oplus B = \bigcup_{x \in A} B_x = \bigcup_{x \in B} A_x = \left\{ z \mid A \cap \bigvee_z B_z \neq \emptyset \right\}$$

$$A \ominus B = \overline{(A \oplus B)} = \bigcap_{x \in B} A_x = \left\{ z \mid \bigvee_z B_z \subset A \right\}$$

2.- On en déduit immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A \oplus B) \ominus C = \bigcap_{y \in C} \bigcup_{x \in B} A_{x+y} \\ (A \ominus C) \oplus B = \bigcup_{x \in B} \bigcap_{y \in C} A_{x+y} \end{array} \right.$$

Sous forme logique, ceci peut s'écrire :

$$z \in (A \oplus B) \ominus C \iff \forall y \in C, \exists x \in B : z \in A_{x+y}$$

$$z \in (A \ominus C) \oplus B \iff \exists x \in B : \forall y \in C, z \in A_{x+y}$$

Il en résulte l'inclusion (en général stricte)

$$(43) \quad (A \ominus C) \oplus B \subset (A \oplus B) \ominus C$$

dont le sens intuitif est évident : l'érosion de A par C fait disparaître des portions de A, isolées et de taille petite devant C, qu'une dilatation ultérieure par B ne peut pas restituer. Ces mêmes portions, au contraire, lorsque la dilatation par B est effectuée avant l'érosion par C peuvent très bien subsister.

3.- Par contre, on a l'égalité :

$$(A \ominus B) \ominus C = (A \ominus C) \ominus B = A \ominus (B \oplus C).$$

En effet, on a par exemple :

$$(A \ominus B) \ominus C = \bigcap_{x \in C} [A \ominus B]_x = \bigcap_{x \in C} \bigcap_{y \in B} A_{y+x}$$

$$A \ominus (B \oplus C) = \bigcap_{z \in B \oplus C} A_z = \bigcap_{\substack{x \in C \\ y \in B}} A_{x+y}$$

4.- Relativement à l'inclusion, on a les règles suivantes, dont la démonstration est immédiate :

$$B \subset B' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \oplus B \subset A \oplus B' \\ A \ominus B \supset A \ominus B' \\ B \ominus A \subset B' \ominus A \end{array} \right.$$

5.- On a la règle suivante :

$$B \ominus \bigvee B \supset \{0\}$$

mais non, en général, l'égalité. En effet :

$$z \in B \ominus \bigvee B \iff B_z \subset B$$

et, comme $B_0 = B$, $0 \in B \ominus \bigvee B$. Mais l'inclusion peut être stricte. Tout ce que l'on peut dire est ceci : si $z \in B \ominus \bigvee B$, on a :

$$\forall x \in B, z + x \in B$$

et par suite aussi $x + 2z \in B$ et, par une récurrence immédiate, $x + n z \in B$.

Autrement dit :

$$z \in B \ominus \bigvee B \implies n z \in B \ominus \bigvee B \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Par exemple, si $B = \{1, 2, \dots\}$ est constitué des points d'abscisses entières positives d'un axe de coordonnée, on a $B_z \subset B$ pour tout $z \in B$.

$$\text{Ainsi } B \subset B \ominus^{\vee} B$$

Cependant, si B est borné, on a l'égalité

$$B \ominus^{\vee} B = \{0\}$$

car alors $B \ominus^{\vee} B$ est borné et, pour $z \neq 0$, ne peut pas contenir la série entière des $n z$.

6.- Pour $B \subset C$, $B \ominus^{\vee} C = \bigcap_{z \in C} B$ n'est pas forcément vide.

En effet, soit d'abord $z \neq 0$, $z \in B \ominus^{\vee} C$. On a :

$$\forall x \in C, z + x \in B \Rightarrow z + x \in C \Rightarrow x + 2z \in C$$

et, par récurrence, $\Rightarrow x + n z \in C$

$$\text{Donc, si } z \in B \ominus^{\vee} C, n z \in B \ominus^{\vee} C \quad (n = 1, 2, \dots)$$

On peut, comme ci-dessus, prendre $B = \{1, 2, \dots\}$ et $C = \{0, 1, 2, \dots\}$ et constater que $B \subset B \ominus^{\vee} C$, de sorte que $B \ominus^{\vee} C$ n'est pas vide.

Par contre, $0 \in B \ominus^{\vee} C$, si, et seulement si, $B = C$, car :

$$\forall x \in C, x + 0 \in B \Rightarrow C \subset B, \text{ d'où l'égalité.}$$

Alors si B est borné et si l'inclusion $B \subset C$ est stricte, on a nécessairement

$$B \ominus^{\vee} C = \emptyset$$

En effet, l'inclusion étant stricte, $0 \notin B \ominus^{\vee} C$, et, par ailleurs, $B \ominus^{\vee} C$ étant borné, ne peut pas contenir la série des $n z$ pour $z \neq 0$.

VII.- OUVERTURE ET FERMETURE ASSOCIEES A UNE TRANSFORMATION DE SERRA.

Un ensemble B étant supposé choisi, à tout ensemble A, nous pouvons faire correspondre les ensembles suivants :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{\omega} = \int_B^{\vee} \int_B^{\prime} A = (A \ominus B) \oplus B \\ A_f = \int_B^{\vee} \int_B A = (A \oplus B) \ominus B \end{array} \right.$$

Nous dirons que A_{ω} est l'ouverture de A selon B et A_f la fermeture de A selon B, les opérateurs d'ouverture et de fermeture étant $\int_B^{\vee} \int_B^{\prime}$ et $\int_B^{\vee} \int_B$ respectivement.

Montrons qu'il s'agit effectivement d'une ouverture et d'une fermeture algébrique.

En premier lieu, remarquons que les deux opérations sont duales l'une de l'autre, c'est-à-dire que l'on a :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\bar{A})_{\omega} = \overline{(A_f)} \\ (\bar{A})_f = \overline{(A_{\omega})} \end{array} \right.$$

En effet, on a par exemple :

$$\overline{(A_f)} = \overline{(A \oplus B) \ominus B} = \overline{(A \oplus B)} \oplus B = (\bar{A} \ominus B) \oplus B = (\bar{A})_{\omega}$$

Il nous suffit donc de démontrer que l'application $\bar{A} \rightarrow A_f$ est une fermeture, c'est-à-dire est une opération croissante, isotone et idempotente.

C'est une opération croissante. On a :

$$A \subset A_f$$

En effet, d'après la règle de calcul 2, on a :

$$(46) \quad A_f = \bigcap_{y \in B} \bigcup_{x \in B} A_{y-x}$$

Soit $z \in A$. Quel que soit $y \in B$, on peut prendre $x = y \in B$ et z appartient à $A_{y-x} = A_0 = A$. Donc $z \in A_f$ et $A \subset A_f$.

C'est une opération isotone. On a :

$$(47) \quad A \subset A' \implies A_f \subset A'_f$$

Il suffit, pour le voir, de se reporter à l'expression (46) et de remarquer que pour tout x et tout y $A_{y-x} \subset A'_{y-x}$.

C'est une opération idempotente. On a :

$$(48) \quad (A_f)_f = A_f$$

En effet :

$$(A_f)_f = \left(\left[(A \oplus B) \ominus B \right] \oplus B \right) \ominus B = (A \oplus B)_{\omega'} \ominus B$$

L'indice ω' désigne ici l'ouverture selon B (ouverture transposée). Toute fermeture étant croissante, toute ouverture est décroissante, comme on le voit par dualité. D'où :

$$(A \oplus B)_{\omega'} \subset A \oplus B$$

et, d'après les règles de calcul

$$(A_f)_f \subset (A \oplus B) \ominus B = A_f$$

Comme on a l'inclusion inverse, l'égalité (48) en résulte.

Conséquence

- 1.- Si $F_i (i \in I)$ est une famille (finie ou non, dénombrable ou non) de fermés selon B l'intersection

$$\bigcap_{i \in I} F_i$$

est fermée selon B. De même si $\Omega_i (i \in I)$ est une famille d'ouverts selon B la réunion :

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i$$

est un ensemble ouvert selon B.

- 2.- La famille des ouverts selon B coïncide avec la famille des ensembles de la forme $A \oplus B$ (A , sous ensemble quelconque de R^n) et la famille des fermés selon B

avec la famille des ensembles de la forme $A \ominus B$.

En effet, si Ω est ouvert, il est par définition de la forme $(A' \ominus \overset{\vee}{B}) \oplus B$, donc de la forme $A \oplus B$ avec $A = A' \ominus \overset{\vee}{B}$. Réciproquement $A \oplus B$ est ouvert quel que soit A . En effet, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} [(A \oplus B) \ominus \overset{\vee}{B}] \oplus B = A_{f'} \oplus B \supset A \oplus B \\ [(A \oplus B) \ominus \overset{\vee}{B}] \oplus B = (A \oplus B)_{\omega} \subset A \oplus B \end{array} \right.$$

d'où l'égalité, et la relation

$$(49) \quad A \oplus B = A_{f'} \oplus B = (A \oplus B)_{\omega}$$

De même, pour les fermés

$$A \ominus B = A_{\omega'} \ominus B = (A \ominus B)_f$$

Ainsi B lui-même est toujours un ouvert selon B , car

$$B = \{0\} \oplus B$$

est de la forme $A \oplus B$ et :

$$(B \ominus \overset{\vee}{B}) \oplus B = B$$

3.- Si B est un ouvert topologique, tout ouvert selon B est un ouvert topologique, et tout fermé selon B est un fermé topologique.

En effet, tout ouvert selon B est de la forme

$$A \oplus B = \bigcup_{x \in A} B_x$$

C est par suite un ouvert topologique (comme union d'ouverts topologiques). La proposition relative aux fermés s'en déduit par passage aux complémentaires.

4.- Si $B \subset C$ et si C est un ouvert selon B (si C est de la forme $B' \oplus B$), on a, en désignant par $f_B, f_C, \omega_B, \omega_C$ les fermetures (ouvertures) selon B et C :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{f_B} \subset A_{f_C} \\ A_{\omega_B} \supset A_{\omega_C} \end{array} \right.$$

En effet, soit $z \in A_{f_B}$. On a (par définition)

$$\bigvee_{B_z} \subset A \oplus \bigvee B$$

On en déduit :

$$\bigvee_{B_z} \oplus (\bigvee C \ominus B) \subset A \oplus \bigvee B \oplus (\bigvee C \ominus B)$$

Mais $\bigvee B \oplus (\bigvee C \ominus B) = (\bigvee C \ominus B) \oplus \bigvee B$ est l'ouverture de $\bigvee C$ selon $\bigvee B$, c'est-à-dire $\bigvee C$ lui-même, car $\bigvee C$ est ouvert selon $\bigvee B$ comme on le vérifie facilement :

$$(\bigvee C \ominus B) \oplus \bigvee B = [(\bigvee B \oplus \bigvee B) \ominus B] \oplus \bigvee B = \bigvee B \oplus \bigvee B = \bigvee C$$

L'inclusion précédente donne donc

$$\bigvee_{C_z} \subset A \oplus \bigvee C$$

c'est-à-dire $z \in A_{f_C}$. Par suite $A_{f_B} \subset A_{f_C}$. L'inclusion relative aux ouverts s'obtient immédiatement en passant aux complémentaires.

5.- Ouverture et fermeture selon une boule.

Soit $B_\lambda = \{x : |x| < \frac{\lambda}{2}\}$ la boule (ouverte au sens topologique) de diamètre λ .

On a immédiatement :

$$(50) \quad B_\lambda \oplus B_\mu = B_{\lambda + \mu}$$

Ainsi $B_{\lambda+\mu}$ est ouvert selon B_λ (ou B_μ) et la conséquence 4 est applicable. Par ailleurs $B_\lambda = B_\lambda$, de sorte que les signes de transposition peuvent être partout supprimés.

Remarquons, en passant, que $B_{\lambda+\mu} \ominus B_\mu$ n'est pas égal à B_λ , mais à la boule fermée B'_λ de diamètre λ , qui est la fermeture topologique de B_λ ($B'_\lambda = \{x : |x| \leq \frac{\lambda}{2}\}$)

Plaçons-nous dans le cas où l'ensemble A est mesurable, et soit $S = S(o)$ sa mesure. Désignons par :

$S(\lambda)$ la mesure de A_{f_λ} (fermeture de A selon B_λ)

$S(-\lambda)$ la mesure de A_{ω_λ} (ouverture de A selon B_λ).

$S(\lambda)$ est une fonction non décroissante de λ .

En effet, soit $0 < \lambda \leq \mu$. D'après (50), B_μ est ouvert selon B_λ , et, d'après la conséquence 4, on a les inclusions :

$$A_{f_\lambda} \subset A_{f_\mu}$$

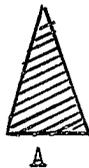
$$A_{\omega_\lambda} \supset A_{\omega_\mu}$$

Par suite, on a aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l} S(\lambda) \leq S(\mu) \\ S(-\lambda) \geq S(-\mu) \end{array} \right.$$

Cette propriété montre que $S(\lambda)$ possède les caractéristiques d'une courbe granulométrique cumulée. Elle en possède aussi la signification physique, comme nous allons le voir, et c'est pourquoi nous lui donnerons le nom de courbe granulométrique généralisée de la régionalisation en tout ou rien A.

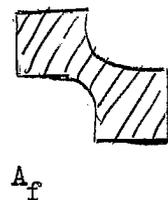
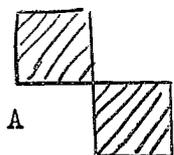
L'ouverture A_{ω_λ} régularise le contour de A, en éliminant les angles et saillants de dimension inférieure à λ , et aussi les grains isolés de diamètre inférieur à λ .



La fermeture, au contraire, élimine les inclusions et les chenaux de dimension inférieure à λ



Autre exemple



On voit comment une telle transformation se relie à une analyse granulométrique.

Pour $\lambda > 0$, $S(\lambda + \Delta\lambda) - S(\lambda)$ mesure la surface occupée par les portions de pore (de \bar{A}), telles que des inclusions des chenaux étroits, des golfes, etc ... de dimension comprise entre λ et $\lambda + \Delta\lambda$. Ainsi la partie positive ($\lambda > 0$) de la courbe $S(\lambda)$ caractérise la granulométrie (au sens large) des pores.

Pour $\lambda > 0$, au contraire, $S(-\lambda)$ représente la granulométrie des grains (de A). En effet, $S(-\lambda) - S(-\lambda - \Delta\lambda)$ mesure la surface occupée par les portions de grains (petits grains isolés, isthmes étroits, promontoires avancés ou saillant anguleux, etc).. de dimension comprise entre λ et $\lambda + \Delta\lambda$.

Expérimentalement, il semble possible de construire la courbe $S(\lambda)$ par des procédés photométriques simples. Soit, par exemple, à déterminer $S(\lambda)$ pour $\lambda \leq 0$, c'est-à-dire l'aire de $A \omega_\lambda$. On part d'une plaque où A (les grains) est opaque et \bar{A} (les pores) transparent. On balaye la plaque à l'aide d'un spot lumineux de diamètre λ , et la lumière transmise est reçue sur une pellicule photo. Le négatif donne $\bar{A} \oplus B_\lambda$ en noir et $A \ominus B_\lambda$ en transparent. On remplace la plaque initiale par ce négatif et on recommence l'opération, en plaçant cette fois une cellule photoélectrique derrière le dispositif. L'intensité lumineuse transmise est proportionnelle à l'aire de $(A \ominus B_\lambda) \oplus B_\lambda = A \omega_\lambda$, c'est-à-dire à $S(-\lambda)$.

De même, l'aire $S(\lambda)$ de $A_f \omega_\lambda$ s'obtiendra à partir du négatif de la plaque initiale, c'est-à-dire une plaque où les grains sont en transparent et les pores en opaque. Le dispositif donne l'aire de $(\bar{A}) \omega_\lambda$, qui est le complément $S - S(\lambda)$ de $S(\lambda)$ vis-à-vis de l'aire S de la plaque.

G. MATHERON

Décembre 1964