

B. R. G. M.
Département Géostatistique

NOTE GÉOSTATISTIQUE N° 56

FONCTION ALEATOIRE DU TYPE TOUT OU RIEN

G. MATHERON

Octobre 1964

FONCTION ALEATOIRE DU TYPE TOUT OU RIEN

I.- DEFINITION

Une fonction aléatoire $f(x)$ est dite du type tout ou rien si elle n'est susceptible de prendre que deux valeurs numériques seulement (en général 0 et +1). Elle est de la nature d'une variable géométrique et caractérise la présence ou l'absence en chaque point d'une propriété qualitative donnée. Par exemple, un milieu poreux peut être décrit par la variable régionalisée f égale à 0 dans les pores et à +1 dans les grains, et cette variable régionalisée géométrique peut ensuite être interprétée comme une fonction aléatoire de type tout ou rien. De même, dans une formation géologique complexe, la répartition dans l'espace de chaque faciès lithologique est représentée par une telle variable régionalisée. Si l'on a k faciès, on doit introduire k variables f_i égales à 0 ou +1 en chaque point et vérifiant les relations d'exclusion :

$$(1) \quad f_i(x) f_j(x) = 0 \quad i \neq j$$

et de fermeture

$$(2) \quad \sum_{i=1}^k f_i(x) = 1$$

Cette dernière relation n'est vraie que si le point x appartient à la formation géologique étudiée : en réalité $f = \sum f_i$ est la variable géométrique affectée à cette formation. De la même manière, la structure minéralogique d'une roche grenue sera décrite comme une corégionalisation, avec autant de variables géométriques qu'il y a d'espèces minéralogiques représentées.

Pour interpréter convenablement une variable géométrique $f(x)$ de ce type par une fonction aléatoire de type tout ou rien, il faut se donner la loi de probabilité de celle-ci, c'est-à-dire les fonctions :

$$(3) \quad P_n^k(x_1, \dots, x_k; x_{k+1}, \dots, x_n) = P_r \left\{ f(x_1) = \dots = f(x_k) = 1, f(x_{k+1}) = \dots = f(x_n) = 0 \right\}$$

pour tous les entiers $k, n (k \leq n)$ et tous les points x_1, \dots, x_n . Les P_n^k ne peuvent pas être tout-à-fait quelconques. Outre la condition

$$(4) \quad 0 \leq P_n^k \leq 1$$

On doit avoir la condition évidente de cohérence :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} P_n^k(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) &= P_{n+1}^{k+1}(x_1, \dots, x_k, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &+ P_{n+1}^k(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n, x) \end{aligned} \right.$$

Enfin P_n^k est invariant pour toute permutation des k points x_1, \dots, x_k ou des $n-k$ points x_{k+1}, \dots, x_n .

Interprétée comme une équation aux différences finies, (5) permet le calcul de tous les P_{n+1}^k , connaissant les P_n^k et P_{n+1}^{n+1} (ou P_{n+1}^0). Il en résulte que P_n^k peut s'exprimer à l'aide des $P_k^k, P_{k+1}^{k+1}, \dots, P_n^n$. Pour le voir, il suffit de remarquer que l'on a :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} P_n^k(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k}) &= E \left[f(x_1) f(x_2) \dots f(x_k) [1-f(y_1)] [1-f(y_2)] \dots [1-f(y_{n-k})] \right] \\ &= P_k^k(x_1, x_2, \dots, x_k) - \sum_{i_1=1}^{n-k} P_{k+1}^{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_k, y_{i_1}) \\ &+ \sum_{i_1 < i_2} P_{k+2}^{k+2}(x_1, x_2, \dots, x_k, y_{i_1}, y_{i_2}) + \dots + (-1)^{n-k} P_n^n(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k}) \end{aligned} \right.$$

Ainsi les P_n^n suffisent à déterminer complètement la loi spatiale, c'est-à-dire les P_n^k . On le vérifie également à l'aide de la fonctionnelle caractéristique :

$$C(\varphi) = E \left[e^{i \int f(x) \varphi(x) dx} \right]$$

On a en effet

$$\left\{ \begin{aligned} C(\varphi) &= \sum c_n(\varphi) \frac{i^n}{n!} \\ c_n(\varphi) &= E \left[\left(\int f(x) \varphi(x) dx \right)^n \right] \end{aligned} \right.$$

Le moment fonctionnel $C_n(\varphi)$ s'exprime à l'aide de P_n^n :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} C_n(\varphi) &= \int E \left[f(x_1) \dots f(x_n) \right] \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int P_n^n(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \right.$$

Ceci dit, deux remarques restrictives s'imposent :

- En premier lieu, les $P_n^n(x_1 \dots x_n)$ ne peuvent pas être choisis arbitrairement. Il faut, en effet, que, par application de la relation (6) on obtienne toujours des P_n^k compris entre 0 et 1, et ceci quels que soient n , k et les points $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k}$: la recherche d'une condition nécessaire et suffisante que devrait vérifier les P_n^n pour qu'il en soit ainsi s'annonce comme singulièrement difficile.

- En deuxième lieu, la loi spatiale, c'est-à-dire les P_n^k , ne faisant intervenir qu'un nombre fini de points d'appui, ne peut représenter complètement le phénomène, et, notamment, ne permet pas l'étude de propriétés faisant intervenir une infinité de points. Or, pour des raisons d'ordre physique, la fonction $f(x)$ doit être mesurable, ou, si l'on préfère, l'ensemble des points x où $f(x) = 1$ doit être un ensemble mesurable : cette condition est en particulier requise pour que l'intégrale "quantité de métal" $\int f(x) \varphi(x) dx$ (φ fonction intégrable) ait un sens. Les P_n^k , à eux seuls, ne permettent pas d'exprimer une telle condition. Du point de vue pratique, cependant, la plupart des problèmes posés peuvent être résolus à partir de la seule fonctionnelle caractéristique, laquelle ne dépend que des P_n^n comme le montre l'équation (7).

La connaissance de tous les P_n^n sera en général nécessaire dans l'étude des problèmes où interviennent des facteurs de forme (par exemple : écoulement d'un fluide dans un milieu poreux. La perméabilité macroscopique dépend - d'une manière inextricablement complexe - de tous les P_n^n et ne peut pas se déduire des seuls P_1^1 et P_2^2). D'autre part, il n'y a aucune raison a priori pour qu'existe une règle simple permettant de déduire tous les P_n^n d'un petit nombre d'entre eux (P_1^1 et P_2^2 par exemple). Les exemples donnés ci-dessous le montrent clairement. Il ne sera donc pas possible

en-général, de se limiter à l'étude des moments d'ordre 1 et 2 comme dans la plupart des problèmes géostatistiques : c'est là, malheureusement, une source de difficultés supplémentaires souvent inextricables en pratique.

Faute de disposer d'une théorie générale, nous terminerons cette Note en citant des exemples aussi simples que possible de fonctions aléatoires de type tout ou rien.

II.- PROCESSUS MARKOVIEN DE TYPE TOUT OU RIEN

Ici la fonction aléatoire $f(t)$ est définie dans un espace à une dimension, interprété comme un temps t . $P_{ij}(t, \mathcal{T})$ désignant la probabilité d'avoir $f(\mathcal{T}) = j$ sachant que l'on avait $f_i(t) = i$, on suppose (ce sont les hypothèses classiques) qu'il existe deux fonctions positives $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{00}(t, t+\Delta t) = 1 - \alpha(t) \Delta t + o(\Delta t) \\ P_{11}(t, t+\Delta t) = 1 - \beta(t) \Delta t + o(\Delta t) \end{array} \right.$$

La deuxième équation de Kolmogorov donne ici

$$\frac{\partial P_{00}}{\partial \mathcal{T}} = -\alpha P_{00} + \beta P_{01}$$

et, comme $P_{00} + P_{01} = 1$, il vient

$$\frac{\partial P_{00}}{\partial \mathcal{T}} = \beta - (\alpha + \beta) P_{00}$$

Compte tenu de $P_{00}(t, t) = 1$, ceci s'intègre en :

$$(8) \quad P_{00}(t, \mathcal{T}) = \left[1 + \int_t^{\mathcal{T}} \beta(u) e^{\int_t^u (\alpha(v) + \beta(v)) dv} du \right] e^{-\int_t^{\mathcal{T}} [\alpha(u) + \beta(u)] du}$$

Si α et β sont des constantes, ce qui correspond au cas stationnaire $P(t, \mathcal{T})$

$P(t, \mathcal{T}) = P(\mathcal{T} - t)$, cette relation se simplifie beaucoup :

$$(9) \quad P_{00}(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} e^{-(\alpha + \beta)t}$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \\ p = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \\ \lambda = \alpha + \beta \end{array} \right.$$

La matrice de transition du cas stationnaire s'écrit :

$$(10) \quad P(t) = \begin{pmatrix} q + p e^{-\lambda t} & p(1 - e^{-\lambda t}) \\ q(1 - e^{-\lambda t}) & p + q e^{-\lambda t} \end{pmatrix}$$

p et q sont les probabilités a priori de $f = 1$ et $f = 0$ et $\rho(t) = e^{-\lambda t}$ apparaît comme le coefficient de corrélation de $f(a)$ et $f(a+t)$ (quel que soit a). La matrice (10) vérifie naturellement la relation :

$$P(t + t') = P(t) P(t')$$

Il est remarquable que toute fonction aléatoire markovienne stationnaire de type tout ou rien ait obligatoirement une loi temporelle de forme (10), avec, notamment, une covariance ou un variogramme exponentiel.

Les P_n^n se déduisent immédiatement de (10) :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_n^n(t_1, t_2, \dots, t_n) = p \left(p + q e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \right) \dots \left(p + q e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \right) \\ (t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n) \end{array} \right.$$

Malgré la simplicité de ces formules, il n'est pas aisé de former, dans le cas général, l'expression de la fonctionnelle caractéristique $C(\varphi)$. Compte tenu du fait que P_n^n doit être invariant pour toute permutation de t_1, t_2, \dots, t_n , l'expression (7) du moment fonctionnel $C_n(\varphi)$ s'écrit :

$$C_n(\varphi) = n! p \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t_n) dt_n \int_{-\infty}^{t_n} \varphi(t_{n-1}) \left[p + q e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \right] dt_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{t_2} \varphi(t_1) p + q e^{-\lambda(t_2 - t_1)} dt_1$$

Or il faut bien voir que le P_n^n écrit en (11) correspond au cas le plus simple que l'on puisse imaginer : cas stationnaire et markovien dans un espace à une seule dimension. Si l'on interprète les segments où $f(t) = +1$ et $f(t) = 0$ comme des grains de minerai et de stérile, les granulométries sont en $e^{-\alpha t}$ et $e^{-\beta t}$, tandis que le variogramme est en $e^{-\lambda t}$. Comme $\lambda = \alpha + \beta$, la portée est de l'ordre de grandeur de la granulométrie. Les relations (11) décrivent un schéma où, pratiquement, l'indépendance est atteinte pour des distances de l'ordre du diamètre des grains. Elles ne peuvent pas rendre compte d'une macrorégionalisation, mais seulement de la structure d'un effet de pépite.

Si α et β ne sont pas supposés stationnaires, les résultats se compliquent un peu. On aura, selon (8) :

$$(12) \quad P(t, \mathcal{C}) = \left[1 + \int_t^{\mathcal{C}} \alpha(u) e^{\int_t^u (\alpha(v) + \beta(v)) dv} du \right] e^{-\int_t^{\mathcal{C}} (\alpha(u) + \beta(u)) du}$$

Il n'est pas évident que la probabilité a priori $p(t)$ existe. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que $P_{1,1}(t, \mathcal{C})$ tende vers une limite $p(\mathcal{C})$ lorsque t tend vers $-\infty$, et cela impose sans doute quelques conditions à $\alpha(t)$ et $\beta(t)$. Ces conditions étant supposées remplies, on a (avec $q = 1-p$)

$$\alpha p = q$$

$$p + q = 1$$

d'où

$$p = \frac{\beta(t)}{\alpha(t) + \beta(t)}$$

Le moment P_n^n s'écrit alors :

$$(13) \quad P_n^n(t_1, t_2, \dots, t_n) = p(t_1) P_{1,1}(t_1, t_2) P_{1,1}(t_2, t_3) \dots P_{1,1}(t_{n-1}, t_n)$$

Chaque $P_{1,1}$ étant calculé selon (12).

Enfin, si $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont elles-mêmes données comme des fonctions aléatoires stationnaires, on obtiendra, en prenant les valeurs probables en α et β des P_n^n de la relation (13), un nouveau schéma de fonction aléatoire stationnaire (mais non markovienne) de type tout ou rien. Mais cette opération de passage aux espérances mathématiques conduit, comme on le voit sur (12) et (13), à des fonctionnelles fort

complexes des lois temporelles de α et β .

Malgré cette extrême complexité, le schéma obtenu ne concerne qu'un espace à une seule dimension et ne peut pas se généraliser à plusieurs dimensions.

III.- SCHEMAS BOOLEENS

Pour définir un schéma booléen, nous partons d'une mesure aléatoire $dN(x)$ poissonnienne et à accroissements indépendants. Si $\theta(x)$ est la densité de variance, il y a une probabilité $\theta(x) \Delta x$ pour que l'intégrale de $dN(x)$ dans le volume élémentaire Δx soit nulle. Dans un domaine A quelconque il y a une probabilité

$$P(A) = e^{-\int_A \theta(x) dx}$$

pour que $\int_A dN(x) = 0$ (pour qu'il n'y ait aucune particule élémentaire dans A). Si $k(x)$ désigne la variable géométrique associée à un domaine A , (dont le centre de gravité peut être supposé placé à l'origine), alors la fonction aléatoire

$$f_A(x) = \int k(y-x) dN(y)$$

représente le nombre de particules du processus poissonien $dN(y)$ tombées dans le domaine translaté de A et centré au point x , et il y a une probabilité

$$P_0(x) = e^{-\int k(y-x) \theta(y) dy} = e^{-k * \theta}$$

pour que $f_A(x) = 0$

Posons par définition

$$\begin{cases} f(x) = f_A(x) & \text{si } f_A(x) = 0 \\ f(x) = 1 & \text{si } f_A(x) \neq 0 \end{cases}$$

$f(x)$ est une fonction aléatoire de type tout ou rien. $P_n^0(x_1 \dots x_n)$ peut se calculer: en effet, P_n^0 représente la probabilité pour que l'union des domaines A_i égaux à A et centrés aux points x_i ne contienne aucune particule du processus poissonien élémentaire $dN(x)$. La variable géométrique associée à cette union est :

$$1 - \prod_{i=1}^n [1 - k(x-x_i)] = \sum k(x-x_i) - \sum_{i_1 < i_2} k(x-x_{i_1}) k(x-x_{i_2}) + \dots + (-1)^{n-1} k(x-x_1) k(x-x_2) \dots k(x-x_n)$$

Par suite on a immédiatement :

$$(14) \quad P_n^0(x_1, \dots, x_n) = e^{-\int [1 - \prod_{i=1}^n (1 - k(x-x_i))] \theta(x) dx}$$

Si θ est une constante (cas stationnaire), on posera

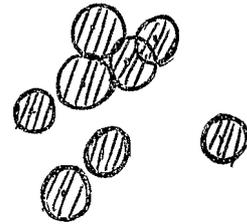
$$K_n(x_1, \dots, x_n) = \int k(x-x_1) \dots k(x-x_n) dx$$

K_n représente le volume de l'intersection d'ordre n des n translats A_i de A centrés aux points x_i (K_1 est le volume de A et K_2 son covariogramme géométrique).

Dans ce cas

$$(15) \quad P_n^0(x_1, \dots, x_n) = e^{-\theta \left[nK_1 - \sum_{i_1 < i_2} K_2(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + (-1)^{n-1} K_n(x_1, \dots, x_n) \right]}$$

La signification de (15) est la suivante : des germes ponctuels sont implantés au hasard avec une densité constante. Chacun d'eux est l'origine d'un cristal égal à A . Lorsque deux ou plusieurs cristaux se chevauchent on a toujours : $f = 1$ (addition booléenne), ce qui peut s'interpréter en disant que les cristaux accolés se sont gênés mutuellement dans leur développement.



Ainsi la formule (15), déjà complexe (le P_n^0 que l'on en déduit à l'aide de (6) est encore plus compliqué) représente simplement des cristaux de dimensions et d'orientation fixes implantés au hasard avec une densité moyenne constante. La portée est ici encore égale à la dimension granulométrique.

La probabilité a priori de $f(x) = 1$ (c'est aussi la valeur probable de $f(x)$) est :

$$p = e^{-\theta K_1}$$

Le moment d'ordre 2, (en posant $K(x_1-x_2) = K_2(x_1, x_2)$, covariogramme géométrique de A) est :

$$M_2(h) = p^2 e^{\theta K(h)}$$

Par suite la covariance $C(h)$ de $f(x)$ est :

$$(16) \quad C(h) = M_2(h) - p^2 = p^2 \left[e^{\theta K(h)} - 1 \right]$$

Elle s'annule bien avec $K(h)$.

Il est possible, toutefois, de faire apparaître une macrorégionalisation, si l'on suppose que la densité $\theta(x)$ est elle-même une fonction aléatoire stationnaire (de portée grande vis-à-vis de la granulométrie). Alors le P_n^0 s'obtient en prenant la valeur probable de (14) relativement à $\theta(x)$: c'est une fonctionnelle de la loi spatiale de θ , d'ailleurs étroitement liée à la fonctionnelle caractéristique :

$$C(\varphi) = \mathbb{E} \left[e^{i \int \theta(x) \varphi(x) dx} \right]$$

On a, en effet :

$$(17) \quad P_n^0(x_1, \dots, x_n) = C \left[i \left(1 - \prod_{j=1}^n (1 - k(x-x_j)) \right) \right]$$

Par exemple, prenons comme $\theta(x)$ la régularisée par une fonction α (de portée grande) d'un processus poissonien à accroissements indépendants : $C(\varphi)$ est donnée par

$$\log C(\varphi) = \lambda \int (e^{i\alpha * \varphi} - 1) dx = \lambda \int \left[e^{i \int \alpha(x-y) \varphi(y) dy} - 1 \right] dy$$

On aura, d'après (17) :

$$\log P_1^0 = \log q = \lambda \int \left[e^{-\int \alpha(x-y) k(y) dy} - 1 \right] dx$$

$$\left\{ \log P_2^0 = \lambda \int \left[e^{-\int \alpha(x-y) [k(y-x_1) + k(y-x_2) - k(y-x_1) k(y-x_2)] dy} - 1 \right] dx \right.$$

IV.- MILIEU A GRANULOMETRIE VARIABLE

Les formules (14) ou (17) représentent un milieu homogranulaire, régionalisé seulement par l'intermédiaire de $\theta(x)$, densité moyenne du nombre de grains. Il est possible d'introduire une granulométrie variable (aléatoire). Pour exprimer une granulométrie aléatoire, on peut procéder de la manière suivante : Soit un germe placé à l'origine. Au terme de son développement supposé libre (donc en l'absence d'autres cristaux dont le développement aurait gêné le sien) le cristal est représenté par une variable géométrique $k(x)$ égale à 1 dans le cristal et à 0 à l'extérieur. Mais ici $k(x)$ est considéré comme une fonction aléatoire. Sa loi spatiale est donnée par les fonctions

$$(18) \quad \overline{W}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_r \left\{ k(x_1) = k(x_2) = \dots = k(x_n) = 0 \right\}$$

qui représentent la probabilité pour que n points $x_1 \dots x_n$ soient extérieurs au cristal.

On pourra construire des \overline{W}_n en se donnant un contour de base et en le soumettant à une rotation et à une homothétie aléatoires (ou éventuellement à d'autres transformations aléatoires). Les grains seront semblables entre eux, mais n'auront ni même taille ni même orientation. Par exemple, si ce contour est une sphère de rayon R aléatoire, avec

$$F(\rho) = P_r \left\{ R \leq \rho \right\}$$

on aura

$$\overline{W}_n(x_1 \dots x_n) = F \left[\text{Min}(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \right]$$

Si le germe est placé au point y , on aura :

$$\overline{W}_n(x_1 - y, \dots, x_n - y) = \text{Pr} \left\{ k(x_1) = \dots = k(x_n) = 0 \right\}$$

Les germes sont maintenant implantés au hasard, selon un schéma Poissonien d' $N(x)$ à accroissements indépendants et densité régionalisée $\theta(x)$. Soient n points $x_1 \dots x_n$. Cherchons la probabilité pour qu'aucun d'eux ne soit englobé dans aucun cristal. Considérons un point y et un petit volume Δy centré en y . Il y a une probabilité :

$$1 - \theta(y) \Delta y$$

pour qu'il n'y ait pas de germe en Δy , et une probabilité :

$$\theta(y) \overline{w}_n(x_1-y, \dots, x_n-y) \Delta y$$

pour qu'il y ait un germe dans Δy , mais que le cristal correspondant n'englobe aucun des points $x_1 \dots x_n$. Au total, il y a une probabilité :

$$1 - \theta(y) \Delta y + \theta(y) \overline{w}_n \Delta y = e^{-\theta(y)(1-\overline{w}_n) \Delta y}$$

pour qu'aucun de ces points ne soient englobés dans un cristal germé dans Δy .

Par suite :

$$(19) \quad P_n^0(x_1 \dots x_n) = e^{-\int \theta(y) [1 - \overline{w}_n(x_1-y, \dots, x_n-y)] dy}$$

représente la probabilité cherchée ! on voit que (19) est une généralisation immédiate de (14). Si $\theta(x)$ est elle-même régionalisée avec une fonctionnelle caractéristique $C(\varphi)$, on aura, comme en (17) :

$$(20) \quad P_n^0(x_1 \dots x_n) = C \left[i(1 - \overline{w}_n(x_1-y, \dots, x_n-y)) \right]$$

G. MATHERON

Octobre 1964