N-50

BUREAU DE RECHERCHES GEOLOGIQUES ET MINIERES

Département GEOSTATISTIQUE

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 52

Janvier 1964

G. MATHERON et

Ph. FORMERY

N-50

B. R. G. M.

DEPARTEMENT GEOSTATISTIQUE
et
RECHERCHE OPERATIONNELLE

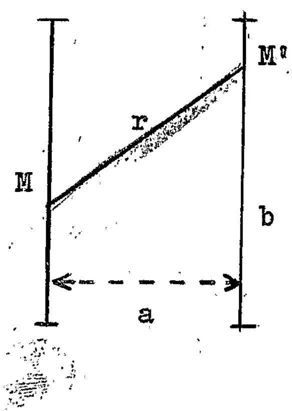
NOTE GEOSTATISTIQUE N° 52

VARIOGRAMME INTRINSEQUE REPRESENTE PAR UNE FONCTION DE BESSEL, modifiée de seconde espèce

$$1 - \gamma(r) = r^{\lambda} K_{-\lambda}(r)$$

Cette note se propose de calculer la valeur moyenne d'un variogramme ponctuel de la forme :

$$1 - r^{\lambda} K_{-\lambda}(r) \qquad r = MM'$$



sur deux segments de droite de hauteur b et distants de a.

La valeur moyenne $\gamma(a, b)$ sur les deux segments a pour expression :

$$A - \gamma(a, b) = \frac{2}{b^2} \int_0^b (b-x)(x^2+a^2)^{\frac{\lambda}{2}} K_{-1}(\sqrt{a^2+x^2})dx$$

A représentant la valeur à l'origine de $r^{\lambda} k_{-1}(r)$ c'est-à-dire $2^{\lambda-1}\,\Gamma(\lambda)$

On en déduira, ensuite les fonctions usuelles, utiles pour le calcul des variances d'estimation, au moyen d'intégrations par rapport à la variable $\underline{a}$:

- La valeur moyenne $\chi(a, b)$ de $\gamma(r)$ lorsque M décrit l'un des segments et M' le rectangle $a \times b$:

$$\chi(a, b) = \frac{1}{a}\int_0^a \gamma(u, b)du$$

... / ...

- La valeur moyenne $F(a,b)$ de $\gamma(r)$ lorsque M et M' occupent toutes les positions possibles dans le rectangle a x b.

$$F(a,b) = \frac{2}{a^2}\int_0^a u\,\chi\,(u,b)du$$

- Et en passant, la covariance du rectangle a x b avec l'un de ses sommets :

$$K(a,b) = \frac{1}{2b}\,\frac{\partial\left[b^2\chi(a,b)\right]}{\partial b}$$

Un cas particulier fondamental correspond au cas $\lambda = \frac{1}{2}$

$$r^{\frac{1}{2}}K_{-\frac{1}{2}}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-r}$$

La clef de notre méthode de calcul est l'établissement du développement de :

$$(a^2 + x^2)^{\frac{\lambda}{2}}\;K_{-\lambda}(\sqrt{a^2 + x^2})$$

en série de fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce à une variable du type $x^{\nu}K_{-\nu}(x)$

C'est-à-dire la mise en évidence d'une fonction génératrice pour les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce.

I.- FONCTION GENERATRICE DES FONCTIONS DE BESSEL MODIFIEES DE SECONDE ESPECE

Développement de

$$(a^2 + x^2)^{\frac{\lambda}{2}}\;K_{-\lambda}(\sqrt{a^2+ x^2})$$

Posons :

$$t = \frac{a^2}{x^2}$$

On peut écrire :

$$(a^2+x^2)^{\frac{\lambda}{2}} K_{-\lambda}(\sqrt{a^2+x^2}) = (x\sqrt{1+t})^{\lambda} K_{-\lambda}(x\sqrt{1+t}) = x^{2\lambda}(1+t)^{\lambda}(x\sqrt{1+t})^{-\lambda} K_{\lambda}(x\sqrt{1+t})$$

Ceci posé, rappelons que la transformée de Fourier de $x^{-\lambda} K_{\lambda}(x)$ a pour expression :

$$\mathcal{F} x^{-\lambda} K_{\lambda}(x) = \sqrt{\pi}\, 2^{-\lambda}\, \Gamma(\tfrac{1}{2}-\lambda)(1+4\pi^2u^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$$

et prenons la transformée de Fourier, selon la variable x(symétrisée), de

$$(1+t)^{\lambda}(x\sqrt{1+t})^{-\lambda} K_{\lambda}(x\sqrt{1+t})$$

$$\mathcal{F}(1+t)^{\lambda}(x\sqrt{1+t})^{-\lambda} K_{\lambda}(x\sqrt{1+t}) = (1+t)^{\lambda-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\, 2^{-\lambda}\, \Gamma(\tfrac{1}{2}-\lambda)\left(1+\frac{4\pi^2u^2}{1+t}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}\, 2^{-\lambda}\, \Gamma(\tfrac{1}{2}-\lambda)(1+4\pi^2u^2+t)^{\lambda-\frac{1}{2}}$$

Cette transformée de Fourier peut être développée en t au moyen de la série du binôme :

$$\mathcal{F}(1+t)^{\lambda}(x\sqrt{1+t})^{-\lambda} K_{\lambda}(x\sqrt{1+t}) = \sqrt{\pi}\, 2^{-\lambda}\, \Gamma(\tfrac{1}{2}-\lambda)(1+4\pi^2u^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{t}{1+4\pi^2u^2}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\pi}\, 2^{-\lambda}\, \Gamma(\tfrac{1}{2}-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}-\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda)}(1+4\pi^2u^2)^{\lambda-n-\frac{1}{2}}\frac{t^n}{n!}$$

$$= \sqrt{\pi}\, 2^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, \Gamma(n+\tfrac{1}{2}-\lambda)(1+4\pi^2u^2)^{\lambda-n-\frac{1}{2}}\frac{t^n}{n!}$$

Or, d'après l'expression de la transformée de Fourier de $x^{n-\lambda} K_{\lambda-n}(x)$

$$\mathcal{F} x^{n-\lambda} K_{\lambda-n}(x) = 2^{n-\lambda}\sqrt{\pi}\, \Gamma(n+\tfrac{1}{2}-\lambda)(1+4\pi^2u^2)^{\lambda-n-\frac{1}{2}}$$

on a :

$$\mathcal{F}(1+t)^{\lambda}(x\sqrt{1+t})^{-\lambda} K_{\lambda}(x\sqrt{1+t}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\, n!}\, t^n\, \mathcal{F} x^{n-\lambda} K_{\lambda-n}(x)$$

Et par inversion des transformées de Fourier :

$$(1+t)^{\lambda}(x\sqrt{1+t})^{-\lambda} K_{\lambda}(x\sqrt{1+t}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\, n!}\, t^n\, x^{n-\lambda} K_{\lambda-n}(x)$$

soit en revenant aux variables a^2 et x^2, après avoir multiplié les deux membres par $x^{2\lambda}$, on voit apparaître une série de fonctions de Bessel, modifiées de seconde espèce, valable quel que soit λ positif, nul ou négatif.

$$(a^2+x^2)^{\frac{\lambda}{2}} \; K_{-\lambda}\,(\sqrt{a^2+x^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\, n!} \; x^{2\lambda} \, \frac{a^{2n}}{x^{2n}} \; x^{n-\lambda} \, K_{\lambda-n}(x)$$

$$\boxed{(a^2+x^2)^{\frac{\lambda}{2}} \; K_{-\lambda}\,(\sqrt{a^2+x^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{a^2}{2}\right)^n x^{\lambda-n} \, K_{n-\lambda}(x)}$$

En particulier, pour $\lambda = \frac{1}{2}$

$$e^{-\sqrt{a^2+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{a^2}{2}\right)^n x^{\frac{1}{2}-n} \; K_{n-\frac{1}{2}}(x)$$

II.- PRIMITIVES ET PRIMITIVES SECONDES DES FONCTIONS DE BESSEL, MODIFIEES DE SECONDE ESPECE.

Afin d'alléger les notations, nous allons donner des noms aux diverses fonctions qui vont s'introduire dans le calcul. μ étant un nombre quelconque positif nul ou négatif, nous désignerons par :

$P_{\mu}(x) = x^{\mu} \, K_{-\mu}(x)$ la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce, d'indice μ.

Le développement fondamental s'écrit alors :

$$P_{\lambda}(\sqrt{a^2+x^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{a^2}{2}\right)^n P_{\lambda-n}(x)$$

$Q_{\mu}(x) = \int_x^{\infty} x^{\mu} \, K_{-\mu}(x)\, dx$ une primitive changée de signe de la fonction de Bessel d'indice μ.

L'intégrale a toujours un sens, car $x^{\mu} \, K_{-\mu}(x)$ ne peut devenir infini qu'à l'origine si μ est négatif ou nul.

$$\underline{R_\mu(x) = \int_x^\infty Q_\mu(x)dx = \int_x^\infty du \int_u^\infty v^\mu K_{-\mu}(v)dv = \int_x^\infty (u-x)\, u^\mu K_{-\mu}(u)du}$$

une primitive seconde de $x^\mu K_{-\mu}(x)$.

Indiquons quelques propriétés de ces fonctions - et essentiellement des relations permettant de les déduire les unes des autres.

$$P_\mu(x) = x^\mu K_{-\mu}(x)$$

peut se trouver dans les tables lorsque μ est positif. Lorsque μ est négatif, la fonction est définie par

$$P_\mu(x) = \frac{1}{x^{-2\mu}} x^{-\mu} K_\mu(x)$$

On a pour $\underline{\mu \geq 0}$

$$\underline{P_\mu(0)} = \frac{2^{\mu-1}\pi}{\sin \mu\pi} \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} = \underline{2^{\mu-1}\,\Gamma(\mu)}$$

On a d'autre part :

$$\underline{Q_\mu(0)} = \int_0^\infty x^\mu K_{-\mu}(x)\,dx = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{u=0}\left[x^\mu K_{-\mu}(x)\right] = \underline{2^{\mu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})}$$

Quant à :

$$R_\mu(0) = \int_{x=0}^\infty (u-x)\, u^\mu K_{-\mu}(u)du = \int_0^\infty u^\mu K_{-\mu}(u)udu = \left[\frac{2\pi}{2\pi}\int_0^\infty (\sqrt{r^2+\rho^2})^\mu K_{-\mu}(\sqrt{r^2+\rho^2})\rho d\rho\right]_{r=0}$$

il représente au facteur 2π près la montée d'ordre 2 sur $r^\mu K_{-\mu}(r)$ pour la valeur 0 de l'argument r. Or une telle montée s'obtient en changeant dans la fonction de Bessel l'indice μ en $\mu + \frac{p}{2}$ (p étant le nombre de montées) au facteur $(2\pi)^{\frac{p}{2}}$ près (cf. Les variables régionalisées et leur estimation, chapitre II, formule II,1,6). On en déduit :

$$\underline{R_\mu(0)} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \left[r^{\mu+1} K_{-\mu-1}(r)\right]_{r=0} = \underline{2^\mu\,\Gamma(\mu+1)}$$

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS P, Q, R.

Nous allons déduire des relations entre P,Q,R, utiles pour leur calcul, à partir de relations classiques entre fonctions K :

$$\begin{cases} K_{\mu-1}(x) + K_{\mu+1}(x) = -2\, K'_{\mu}(x) \\ K_{\mu-1}(x) - K_{\mu+1}(x) = -\frac{2\mu}{x}\, K_{\mu}(x) \end{cases}$$

Desquelles, on déduit par addition :

$$K_{\mu-1}(x) = -K'_{\mu}(x) - \frac{\mu}{x} K_{\mu}(x)$$

$$-x.\left[x^{\mu-1} K_{1-\mu}(x)\right] = x^{\mu} K'_{-\mu}(x) + \mu\, x^{\mu-1} K_{-\mu}(x) = \frac{d}{dx}\left[x^{\mu} K_{-\mu}(x)\right]$$

Soit :

$$\underline{\frac{d}{dx} P_{\mu}(x) = -x\, P_{\mu-1}(x)}$$

Quant à la seconde relation, elle peut s'écrire :

$$x^2 \left[x^{\mu-1} K_{1-\mu}(x)\right] - x^{\mu+1} K_{-\mu-1}(x) = -2\,\mu\, x^{\mu} K_{-\mu}(x)$$

$$\underline{P_{\mu+1}(x) - x^2 P_{\mu-1}(x) = 2\,\mu\, P_{\mu}(x)}$$

1°) Relation de récurrence entre les Q(x)

La seconde relation devient, en tenant compte de la première :

$$P_{\mu+1}(x) + x \frac{d}{dx} P_{\mu}(x) = 2\,\mu\, P_{\mu}(x)$$

$$P_{\mu+1}(x) + \frac{d}{dx}\left[x\, P_{\mu}(x)\right] = (2\mu+1)\, P_{\mu}(x)$$

En intégrant et tenant compte de ce que toutes les fonctions s'annulent à l'infini :

$$-Q_{\mu+1}(x) + x\, P_{\mu}(x) = -(2\mu+1)\, Q_{\mu}(x)$$

$$\boxed{Q_{\mu+1}(x) - (2\mu + 1)\, Q_\mu(x) = x\, P_\mu(x)}$$

que nous utiliserons plus commodément sous la forme :

$$(2\mu - 1)\, Q_{\mu-1}(x) = Q_\mu(x) - x\, P_{\mu-1}(x)$$

2°) Relation de récurrence entre les $R(x)$

Par intégration de la relation entre les $Q(x)$:

$$R_{\mu+1}(x) - (2\mu + 1)\, R_\mu(x) = \int_x^\infty x\, P_\mu(x)dx$$

Et d'après la relation de dérivation des $P(x)$

$$\boxed{R_{\mu+1}(x) - (2\mu + 1)\, R_\mu(x) = P_{\mu+1}(x)}$$

que nous utiliserons surtout sous la forme :

$$(2\mu - 1)\, R_{\mu-1}(x) = R_\mu(x) - P_\mu(x)$$

3°) Relation entre les $Q(x)$ et les $R(x)$ de même indice.

On a, d'après la relation de dérivation

$$\frac{d}{dx} P_{\mu+1}(x) = - x\, P_\mu(x)$$

que l'on peut écrire :

$$\frac{d}{dx} P_{\mu+1}(x) = x \frac{d}{dx} Q_\mu(x) = \frac{d}{dx} \left[x\, Q_\mu(x) \right] - Q_\mu(x)$$

En intégrant et tenant compte de la nullité des fonctions à l'infini

$$P_{\mu+1}(x) = x\, Q_\mu(x) + \int_x^\infty Q_\mu(x)dx$$

$$\boxed{R_\mu(x) + x\, Q_\mu(x) = P_{\mu+1}(x)}$$

Il en résulte que $Q_\mu(x)$ et $R_\mu(x)$ se déduisent immédiatement l'une de l'autre à l'aide des fonctions de Bessel de seconde espèce.

En pratique, on pourra se contenter du calcul des fonctions $R_\mu(x)$ d'indice compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2}$$

En effet, on peut prendre, lorsque μ est inférieur à $\frac{1}{2}$, pour $P_\mu(x)$ la représentation intégrale (cf. Les variables régionalisées et leur estimation, chapitre II,1,16).

$$P_\mu(x) = x^\mu K_{-\mu}(x) = \frac{2^\mu \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)} \int_1^\infty e^{-ux} (u^2-1)^{-\mu-\frac{1}{2}} du$$

convergente lorsque μ est inférieur à $\frac{1}{2}$, on a alors

$$Q_\mu(x) = \frac{2^\mu \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)} \int_1^\infty e^{-ux} (u^2-1)^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{du}{u}$$ et

$$R_\mu(x) = \frac{2^\mu \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)} \int_1^\infty e^{-ux} (u^2-1)^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2}$$

Si $\mu = \frac{1}{2}$, l'intégrale n'est pas convergente, mais on a alors :

$$P_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}} K_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-x}$$ d'où

$$P_{\frac{1}{2}}(x) = Q_{\frac{1}{2}}(x) = R_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-x}$$

Pour $\mu = -\frac{1}{2}$, on a immédiatement

$$P_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{e^{-x}}{x}$$

$$Q_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_1^\infty e^{-ux} \frac{du}{u}$$ fonction intégro-exponentielle

$$R_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_1^\infty e^{-ux} \frac{du}{u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[e^{-x} - x \int_1^\infty e^{-ux} \frac{du}{u} \right]$$

On vérifie que la relation :

$$R_\mu(x) + x\,Q_\mu(x) = P_{\mu+1}(x)$$

qui prend ici la forme

$$R_{-\frac{1}{2}}(x) + x\,Q_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\;e^{-x}$$

est bien vérifiée.

On a enfin, pour $\mu = 0$

$$\left\{\begin{aligned} P_0(x) &= K_0(x) \\ Q_0(x) &= \int_x^\infty K_0(x)dx \\ R_0(x) &= x\,K_{-1}(x) - x\int_x^\infty K_0(x)dx \end{aligned}\right.$$

En conclusion, le calcul de toutes les fonctions $Q_\mu(x)$ et $R_\mu(x)$ se ramène au calcul de la fonction $R_\mu(x)$ pour μ compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ par la représentation intégrale :

$$R_\mu(x) = \frac{2^\mu\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}\int_1^\infty \frac{e^{-ux}}{(u^2-1)^{\mu+\frac{1}{2}}}\,\frac{du}{u^2} \qquad -\tfrac{1}{2} < \mu < \tfrac{1}{2}$$

On en déduit en effet tous les $R_\mu(x)$ par la relation de récurrence

$$(2\mu-1)\,R_{\mu-1}(x) = R_\mu(x) - P_\mu(x)$$

puis tous les $Q_\mu(x)$ à partir des $R_\mu(x)$:

$$x\,Q_\mu(x) = P_{\mu+1}(x) - R_\mu(x) = R_{\mu+1}(x) - 2(\mu+1)\,R_\mu(x)$$

On connaît d'ores et déjà sans tabulation, si ce n'est celle de $\int_x^\infty K_0(x)dx$ dont le développement s'obtient immédiatement par intégration de celui de $K_0(x)$, toutes les fonctions $Q_\mu(x)$ et $R_\mu(x)$ d'indices entiers et demi-entiers.

DEVELOPPEMENT DE $\gamma(a,b)$ en fonction de Bessel de b.

La méthode repose sur le développement de la fonction de Bessel $P_\mu(\sqrt{a^2+u^2})$ en série de fonctions de Bessel de u.

$$P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{a^2}{2}\right)^n P_{\lambda-n}(u)$$

qui s'intègre en

$$\int_x^{\infty} P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2})du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{a^2}{2}\right)^n Q_{\lambda-n}(x)$$

et en :

$$\int_x^{\infty} dx \int_u^{\infty} P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2})du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{a^2}{2}\right)^n R_{\lambda-n}(x) = \int_x^{\infty}(u-x)\, P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2})du$$

Ceci posé, on a :

$$A-\gamma(a,b) = \frac{2}{b^2}\int_0^b (b-u)\, P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2})du$$

que l'on peut couper en deux, afin d'isoler les irrégularités au voisinage de l'origine :

$$A-\gamma(a,b) = \frac{2}{b^2}\int_b^{\infty}(u-b)\, P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2})du + \frac{2}{b^2}\int_0^{\infty}(b-u)\, P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2})du$$

La première intégrale: $$\frac{2}{b^2}\int_b^{\infty}(u-b)\, P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2})du = \frac{2}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{a^2}{2}\right)^n R_{\lambda-n}(b)\right.$$

Quant à la dernière intégrale, elle n'est autre que la différence d'une montée d'ordre 1 et d'une montée d'ordre 2 sur la fonction $r^\lambda K_{-\lambda}(r)$. Ces montées donnent encore des fonctions de Bessel modifiées d'indices respectifs $\lambda+\frac{1}{2}$ et $\lambda+1$ (cf. Les variables régionalisées et leur estimation, chapitre I,4,7 et II,1,6). On a ainsi de façon précise :

$$2\int_0^{\infty} P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2})\, du = \sqrt{2\pi}\, a^{\lambda+\frac{1}{2}} K_{-\lambda-\frac{1}{2}}(a) = \sqrt{2\pi}\, P_{\lambda+\frac{1}{2}}(a)$$

$$2\pi\int_0^{\infty} u\, P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2})du = 2\pi\, a^{\lambda+1} K_{-\lambda-1}(a) = 2\pi\, P_{\lambda+1}(a)$$

D'où l'expression de la valeur moyenne du variogramme sur l'ensemble des deux segments rectilignes :

$$\boxed{A\text{-}\gamma(a,b) = \frac{\sqrt{2\pi}}{b} P_{\lambda+\frac{1}{2}}(a) - \frac{2}{b^2} P_{\lambda+1}(a) + \frac{2}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{a^2}{2}\right)^n R_{\lambda-n}(b)}$$

On peut obtenir un autre développement de $\gamma(a,b)$ en développant $P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2})$ en fonctions de Bessel, non plus de u, mais de a :

$$P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{u^2}{2}\right)^n P_{\lambda-n}(a)$$

$$A\text{-}\gamma(a,b) = \frac{2}{b^2}\int_0^b (b-u)\, P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2})du = \frac{2}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) \frac{b^{2n+2}}{2^n} P_{\lambda-n}(a)$$

$$\boxed{A\text{-}\gamma(a,b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+1)!} \left(\frac{b^2}{2}\right) P_{\lambda-n}(a)}$$

IV.- EXPRESSION DES FONCTIONS USUELLES $\chi(a,b)$, $F(a,b)$, $K(a,b)$

$\chi(a,b)$, $F(a,b)$ s'obtiennent par intégration, par rapport à <u>a</u>, du développement de $\gamma(a,b)$ en série de fonctions de Bessel de <u>b</u>(premier développement).

$$\chi(a,b) = \frac{1}{a}\int_0^a \gamma(u,b)du$$

$$F(a,b) = \frac{2}{a^2}\int_0^a u\, \chi(u,b)du$$

K(a,b) s'obtient, par exemple, à partir de $\chi(a,b)$

$$K(a,b) = \frac{1}{2b}\frac{\partial\left[b^2\, \chi(a,b)\right]}{\partial b}$$

La série s'intègre immédiatement. Par ailleurs, un terme tel que $P_\mu(a)$ s'intègre de 0 à a, compte-tenu des valeurs de $Q_\mu(0)$ et de $R_\mu(0)$ établies au second paragraphe :

$$\frac{1}{a}\int_0^a P_\mu(u)du = \frac{1}{a}\int_0^\infty P_\mu(u)du - \frac{1}{a}\int_a^\infty P_\mu(u)du = \frac{1}{a}\,Q_\mu(0) - \frac{1}{a}\,Q_\mu(a) = \frac{\sqrt{\pi}\;2^{\mu-1}\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{a} - \frac{1}{a}\,Q_\mu(a)$$

$$\frac{2}{a^2}\int_0^a dx\int_0^u P_\mu(u)du = \frac{2}{a}\,Q_\mu(0) - \frac{2}{a^2}\left[R_\mu(0)-R_\mu(a)\right] = 2\left[\frac{\sqrt{\pi}\;2^{\mu-1}\quad(\mu+\frac{1}{2})}{a} - \frac{2^\mu\quad(\mu+1)}{a^2} + \frac{1}{a^2}\,R_\mu(a)\right]$$

D'où :

$$\boxed{A-\chi(a;b) = \frac{\sqrt{2\pi}}{b}\left[\frac{\sqrt{\pi}\;2^{\lambda-\frac{1}{2}}\,\Gamma(\lambda+1) - Q_{\lambda+\frac{1}{2}}(a)}{a}\right] - \frac{2}{b^2}\left[\frac{\sqrt{\pi}\;2^{\lambda}\,\Gamma(\lambda+\frac{3}{2}) - Q_{\lambda+1}(a)}{a}\right] + \frac{2}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}\left(\frac{a^2}{2}\right)^n R_{\lambda-n}(b)}$$

$$\boxed{A-F(a,b) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{b}\left[\frac{\sqrt{\pi}\;2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda+1)}{a} + \frac{R_{\lambda+\frac{1}{2}}(a) - 2^{\lambda+\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}{a^2}\right] - \frac{4}{b^2}\left[\frac{\sqrt{\pi}\;2^{\lambda}\,\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}{a} + \frac{R_{\lambda+1}(a) - 2^{\lambda+1}\,\Gamma(\lambda+2)}{a^2}\right] + \frac{2}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+1)!}\left(\frac{a^2}{2}\right)^n R_{\lambda-n}(b)}$$

$$\boxed{A-K(a,b) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}}{b}\left[\frac{\sqrt{\pi}\;2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda+1) - Q_{\lambda+\frac{1}{2}}(a)}{a}\right] - \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}\left(\frac{a^2}{2}\right)^n Q_{\lambda-n}(b)}$$

A ce point du calcul, on remarque que $F(a,b)$ est une fonction symétrique. Il en résulte que l'on peut obtenir de nouveaux développements pour $\chi(a;b)$ et $\gamma(a;b)$ en dérivant l'expression de F après avoir permuté a et b :

$$\chi(a;b) = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{a^2}{2}\,F(b,a)\right]$$

$$\gamma(a;b) = \frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[\frac{a^2}{2}\,F(b,a)\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[a\,\chi(a;b)\right]$$

$$\boxed{A-\chi(a,b)=\frac{\sqrt{2\pi}}{a}\left[\frac{\sqrt{\pi}\;2^{\lambda-\frac{1}{2}}\,\Gamma(\lambda+1)}{b}+\frac{R_{\lambda+\frac{1}{2}}(b)-2^{\lambda+\frac{1}{2}}\,\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}{b^2}\right]-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+1)!}\left(\frac{b^2}{2}\right)^n Q_{\lambda-n}(a)}$$

$$A-\gamma(a,b)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+1)!}\left(\frac{b^2}{2}\right)^n P_{\lambda-n}(a)$$

On retrouve ainsi, au bout du cycle d'intégrations et de dérivations, l'expression de $\gamma(a,b)$, que nous avions obtenue directement en développant $P_\lambda(\sqrt{a^2+u^2})$ en série de fonction de Bessel de a (deuxième développement de $\gamma(a,b)$.

$F(a,b)$ et $K(a,b)$ sont des fonctions symétriques de a et de b. Pour chacune des autres fonctions $\gamma(a,b)$ et $\chi(a,b)$ nous avons obtenu deux développements, l'un en série de fonctions de Bessel de b, l'autre en série de fonctions de Bessel de a. Les développements en série de fonctions de Bessel de b, c'est-à-dire ordonnés suivant les puissances croissantes de a^2 doivent être utilisés lorsque $a \leq b$, pour lesquels ils sont rapidement convergents, ce sont les développements à courte distance ; par contre, les développements en série de fonctions de Bessel de a, c'est-à-dire, ordonnés suivant les puissances croissantes de b^2 doivent être utilisés lorsque $b \leq a$, pour lesquels ils convergent rapidement, ce sont les développements à longue distance. D'ailleurs $\frac{a^2}{b^2}$ dans le premier cas et $\frac{b^2}{a^2}$ dans le second ne sont autres que la valeur du t en fonction duquel nous avions développé :

$$(1+t)^\lambda\,(x\sqrt{1+t})^{-\lambda}\;K_\lambda(x\sqrt{1+t})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^n P_{n-\lambda}(x)$$

dans le premier paragraphe. t rapport du carré des dimensions du rectangle a x b régit la rapidité de la convergence et non les valeurs absolues de ces dimensions.

On remarquera en outre que si λ est entier ou demi-entier, tous les indices des fonctions Q et R qui s'introduisent dans le calcul sont entiers ou demi-entiers et les développements peuvent s'établir sans tabulation, puisque toutes les fonctions Q et R peuvent s'obtenir au moyen des fonctions de Bessel modifiées P et des fonctions :

$$R_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\infty}e^{-ux}\frac{du}{u^2}\quad;\quad R_0(x)=x\,K_{-1}(x)-x\int_x^{\infty}K_0(x)dx\;;\;R_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-x}$$

a l'aide des formules :

$$R_{k+\frac{1}{2}}(x) - 2k\, R_{k-\frac{1}{2}}(x) = P_{k+\frac{1}{2}}(x) \qquad k \text{ positif, nul ou négatif.}$$

Q étant défini à partir de R par :

$$x\, Q_{k-\frac{1}{2}}(x) = P_{k+\frac{1}{2}}(x) - R_{k-\frac{1}{2}}(x) \qquad \text{ou encore}$$

$$x\, Q_{k-\frac{1}{2}}(x) = R_{k+\frac{1}{2}}(x) - (2k+1)\, R_{k-\frac{1}{2}}(x)$$

En particulier pour $\lambda = \frac{1}{2}$ le variogramme ponctuel n'est autre qu'un variogramme exponentiel :

$$r^{\frac{1}{2}} K_{-\frac{1}{2}}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; e^{-r}$$

V.- VALEUR A L'ORIGINE DES FONCTIONS $\gamma(a,b)$, $\chi(a,b)$, $F(a,b)$, $K(a,b)$

D'après la définition même de ces fonctions, leur valeur à l'origine (lorsque a tend vers 0) : $\gamma(0,b)$, $\chi(0,b)$ et $F(0,b)$ sont égales. Faisant $a = 0$ dans le développement de $\gamma(a,b)$, on a leur expression

$$A = \gamma(0,b) = \frac{\sqrt{2\pi}}{b} P_{\lambda+\frac{1}{2}}(0) - \frac{2}{b^2} P_{\lambda+1}(0) + \frac{2}{b^2} R_\lambda(b) = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^\lambda \Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{b} - \frac{2^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)}{b^2} + \frac{2\, R_\lambda(b)}{b^2}$$

Cette dernière expression n'est autre que la valeur moyenne de la fonction :

$$P_\lambda(x) = x^\lambda K_{-\lambda}(x)$$

sur un segment de longueur b, dont l'expression a été donnée dans ce même paragraphe :

$$A = \gamma(0,b) = \frac{2}{b^2}\int_0^b dx \int_0^u P_\lambda(u)\,du = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^\lambda \Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{b} - \frac{2}{b^2}\left[2^\lambda \Gamma(\lambda+1) - R_\lambda(b)\right]$$

c'est-à-dire le résultat précédent.

Quant à la valeur de $A - K(a,b)$ à l'origine, elle s'obtient à partir de l'expression de $A-K(a,b)$, en notant que :

$$\frac{\sqrt{\pi}\, 2^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda+1) - Q_{\lambda+\frac{1}{2}}(a)}{a} = \frac{Q_{\lambda+\frac{1}{2}}(0) - Q_{\lambda+\frac{1}{2}}(a)}{a} \longrightarrow -Q'_{\lambda+\frac{1}{2}}(0) = P_{\lambda+\frac{1}{2}}(0)$$

$$= 2^{\lambda-\frac{1}{2}}\ (\lambda+\tfrac{1}{2})$$

$$A - K(0,b) = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{\lambda-1}}{b}\ \Gamma(\lambda+\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{b}\ Q_{\lambda}(b)$$

Ce que l'on peut vérifier puisque $A - K(0,b)$ est la valeur moyenne de $x^{\lambda}K_{-\lambda}(x)$ sur l'intervalle $(0,b)$

$$A - K(0,b) = \frac{1}{b}\int_0^b P_{\lambda}(u)du = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{\lambda-1}\ \Gamma(\lambda+\frac{1}{2}) - Q_{\lambda}(b)}{b}$$

VI.- COMPORTEMENT DU VARIOGRAMME AU VOISINAGE DE L'ORIGINE.

Reprenons l'expression du variogramme :

$$A-\gamma(a,b) = \frac{\sqrt{2\pi}}{b}\ P_{\lambda+\frac{1}{2}}(a) - \frac{2}{b^2}\ P_{\lambda+1}(a) + \frac{2}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\ (\frac{a^2}{2})^n\ R_{\lambda-n}(b)$$

Ce variogramme comporte une partie régulière provenant des parties régulières de $P_{\lambda+\frac{1}{2}}(a)$ et de $P_{\lambda+1}(a)$ ainsi que de la série. Il comporte en outre une partie irrégulière dans le coefficient de $\frac{1}{b}$ provenant de $P_{\lambda+\frac{1}{2}}(a)$ et une partie <u>moins irrégulière</u> dans le coefficient de $\frac{1}{b^2}$ provenant de $P_{\lambda+1}(a)$. Dans le calcul des variances d'estimation, ces parties irrégulières jouent un rôle privilégié. Aussi mettons-nous ici en évidence le terme le plus irrégulier dans le coefficient de $\frac{1}{b}$ et dans celui de $\frac{1}{b^2}$. On pourra se référer à l'Annexe C 3 : formules (C-2-3) et (C-2-5) des "Variables régionalisées et leur estimation".

<u>Si λ n'est ni un entier, ni un demi-entier:</u>

$$\gamma(a,b) - \gamma(0,b) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2^{\lambda+1}\cos\lambda\pi\ \Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}\ \frac{a^{2\lambda+1}}{b} + \frac{\pi}{2^{\lambda+1}\sin\lambda\pi\,\Gamma(\lambda+2)}\ \frac{a^{2\lambda+2}}{b^2} + \ldots .$$

Si λ est un entier :

$$\gamma(a,b) - \gamma(0,b) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2^{\lambda+1}\cos\lambda\pi\;\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}\,\frac{a}{b}^{2\lambda+1} + \frac{(-1)^{\lambda+1}}{2^{\lambda}\;\Gamma(\lambda+2)}\,\frac{a}{b^2}^{2\lambda+2}\log\frac{b}{a} + \dots$$

Si λ est demi-entier :

$$\gamma(a,b) - \gamma(0,b) = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\lambda}\;\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}\,\frac{a}{b}^{2\lambda+1}\log\frac{b}{a} + \frac{\pi}{2^{\lambda+1}\sin\lambda\pi\;\Gamma(\lambda+2)}\,\frac{a}{b^2}^{2\lambda+2} + \dots$$

Le terme b écrit sous le symbole logarithme a été introduit pour des raisons d'homogénéité.

A titre de vérification de nos formules, proposons-nous, de retrouver, à partir des expressions précédentes les termes les plus irréguliers de la montée d'un variogramme en r^{λ}.

Le terme le plus irrégulier de $r^{\frac{\lambda}{2}} K_{-\frac{\lambda}{2}}(r)$, si λ n'est pas un entier pair, est :

$$-\frac{\pi}{2^{\frac{1}{2}\lambda+1}\;(\frac{\lambda}{2}+1)\sin\frac{\lambda\pi}{2}}\,r^{\lambda}$$

Il en résulte, qu'au sens des termes les plus irréguliers, le variogramme $\gamma_{\lambda}(r)$ est équivalent à :

$$\gamma_{\lambda}(r) \sim \frac{2^{\frac{\lambda}{2}+1}\;\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1)\sin\frac{\lambda\pi}{2}}{\pi}\Big[\gamma(a,b) - \gamma(0,b)\Big]_{\frac{\lambda}{2}}$$

c'est-à-dire d'après les formules précédentes :

1°) λ n'est pas un entier ($\frac{\lambda}{2}$ n'est ni entier, ni demi-entier), la première formule s'applique :

$$\gamma_{\lambda}(r) \sim \sqrt{\pi}\;\frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1)}{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{2})}\;\frac{\sin\frac{\lambda\pi}{2}}{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}\;\frac{a^{\lambda+1}}{b} + \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1)}{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+2)}\;\frac{a^{\lambda+2}}{b^2}$$

Or, d'après la formule des compléments

$$\frac{\sin\frac{\lambda\pi}{2}}{\cos\frac{\lambda\pi}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{2})\,\Gamma(-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1)\,\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}$$

au sens des termes les plus irréguliers $\gamma_\lambda(r) \sim \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\frac{1+\lambda}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} \frac{a^{\lambda+1}}{b} + \frac{2}{\lambda+2} \frac{a^{\lambda+2}}{b^2}$

2°) λ est un entier impair $\lambda = 2p-1$ ($\frac{\lambda}{2}$ est demi-entier), la troisième formule s'applique :

$$\gamma_\lambda(r) = (-1)^{p-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)} \cdot \sin\left[(2p-1)\frac{\pi}{2}\right] \frac{a^{2p}}{b} \log\frac{b}{a} + \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{3}{2})} \frac{a^{2p+1}}{b^2}$$

$$\gamma_\lambda(r) \sim \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{a^{2p}}{b} \log\frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{2p+1} \frac{a^{2p+1}}{b^2}$$

En particulier pour $\lambda = p = 1$

$$\gamma_1(r) \sim \frac{a^2}{b} \log\frac{b}{a} + \frac{2}{3} \frac{a^3}{b^2}$$

On a ainsi retrouvé les termes les plus irréguliers, coefficients de $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{b^2}$ dans la montée d'un variogramme en r^λ. cf. chapitre XI, formules (XI,2,8), (XI,2,10), (XI,2,11).

VII.- VARIANCE D'UN RECTANGLE - VARIANCES D'EXTENSION.

En pratique, on ajustera sur le phénomène expérimental un variogramme $\gamma(r)$ de la forme :

$$A - \gamma(r) = C\left(\frac{r}{u}\right)^\lambda K_{-\lambda}\left(\frac{r}{u}\right)$$

A désignant la valeur à l'origine $2^{\lambda-1}\,\Gamma(\lambda)\,C$

On peut d'ailleurs prendre à la limite $\lambda = 0$, c'est-à-dire la fonction $C\,K_0(\frac{r}{u})$. puisqu'en réalité, seule la quantité $A - \gamma(r)$ intervient dans le calcul de la variance d'un élément dans un autre, ou dans le calcul des variances d'estimation, autrement dit $\gamma(r)$ à une constante près, qu'à la limite, on peut prendre infinie.

Les expressions précédentes s'appliquent à condition de mesurer les grandeurs géométriques au moyen de l'unité u. Un rectangle de côtés h et l aura ainsi pour mesures en unités u

$$\frac{h}{u} \quad \text{et} \quad \frac{\ell}{u}$$

- Variance d'un rectangle $h \times \ell$ dans un rectangle $H \times L$:

$$\sigma^2 = C \left[F\left(\frac{H}{u}, \frac{L}{u}\right) - F\left(\frac{h}{u}, \frac{\ell}{u}\right) \right]$$

- Variance d'extension d'un traçage médian de longueur ℓ, dans une relevée de hauteur h

$$\sigma^2_{E_1} = C \left[2\chi\left(\frac{h}{2u} ; \frac{\ell}{2u}\right) - F\left(\frac{h}{u}, \frac{\ell}{u}\right) - \gamma\left(0; \frac{\ell}{u}\right) \right]$$

$\gamma(0;\frac{\ell}{u})$ désigne la valeur de F pour h nul :

$$\gamma\left(0;\frac{\ell}{u}\right) = 2^{\lambda-1}\Gamma(\lambda) - \sqrt{\pi}\, 2^{\lambda}\, \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \frac{u}{\ell} + 2 \left[2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1) - R_{\lambda}\left(\frac{\ell}{u}\right) \right] \frac{u^2}{l^2} \, .$$

- Variance d'extension d'un sondage central dans un panneau carré de côté h.

$$\sigma^2_{E_2} = C \left[2\, K\left(\frac{h}{2u}, \frac{h}{2u}\right) - F\left(\frac{h}{u}, \frac{h}{u}\right) \right]$$

VIII.- VARIOGRAMME REPRESENTE PAR UNE EXPONENTIELLE NEGATIVE $\gamma(r) = C' \; 1 - e^{-\frac{r}{u}}$: Cas $\lambda = \frac{1}{2}$

Ont été jointes à cette note trois abaques relatives au schéma de type "exponentielle négative" $(\lambda = \frac{1}{2})$:

$$C\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \gamma(r) = C\left(\frac{r}{u}\right)^{\frac{1}{2}} K_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{u}\right)$$

$$\gamma(r) = C\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 - e^{-\frac{r}{u}} \right] = C'(1 - e^{-\frac{r}{u}})$$

Les abaques présentent les trois fonctions dont il vient d'être question :

- Abaque 1 : $\frac{1}{C'} F(\frac{h}{u}, \frac{\ell}{u})$
- Abaque 2 : $\frac{1}{C'} \sigma_{E_1}^2$
- Abaque 3 : $\frac{1}{C'} \sigma_{E_2}^2$

G. MATHERON et PH. FORMERY

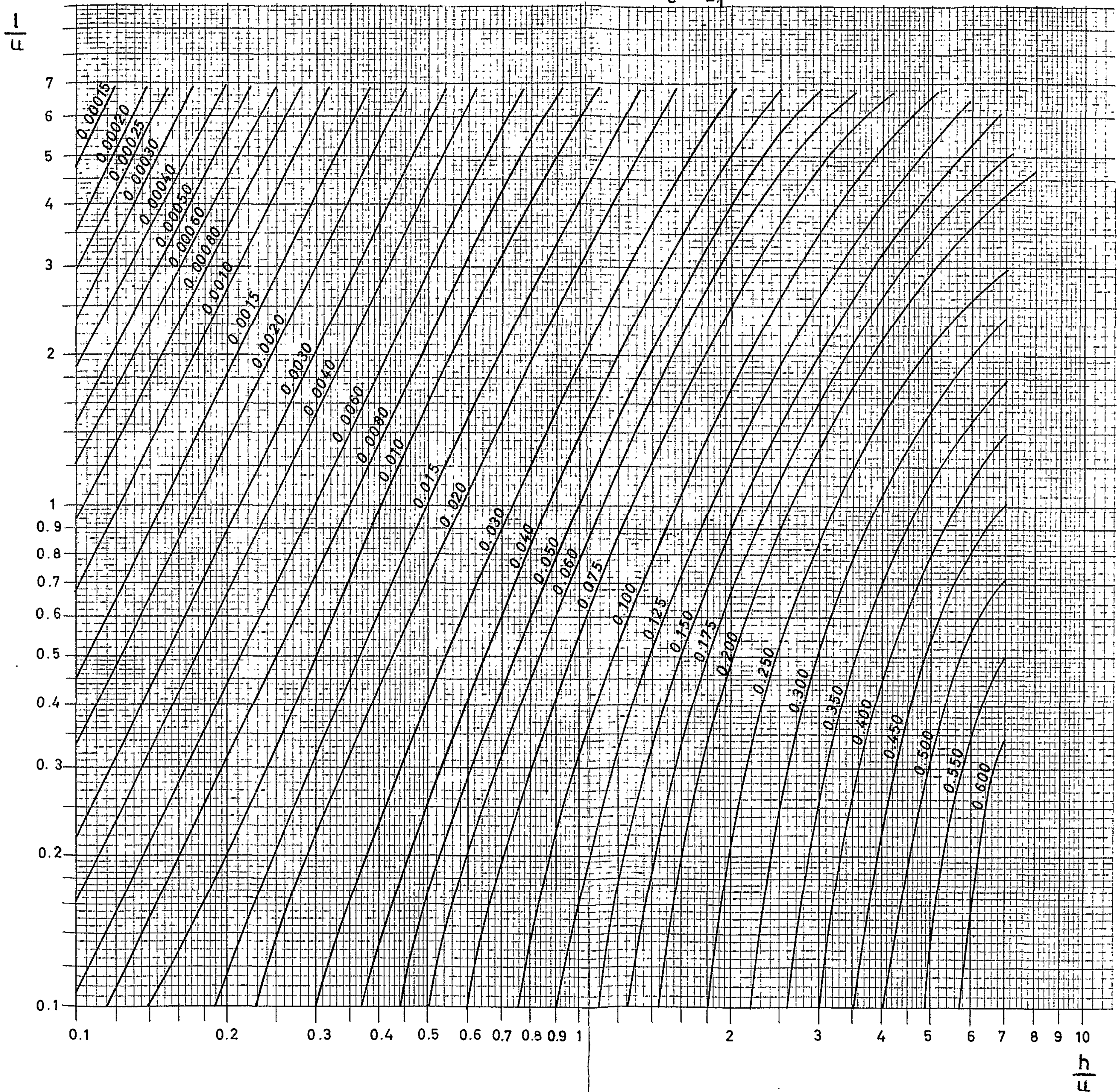
Janvier 1964

__Nota__ : Le détail des tableaux de calcul est donné dans la NOTE GEOSTATISTIQUE N° 51.

ABAQUE 2

Variance d'extension d'un segment l dans un rectangle l x h

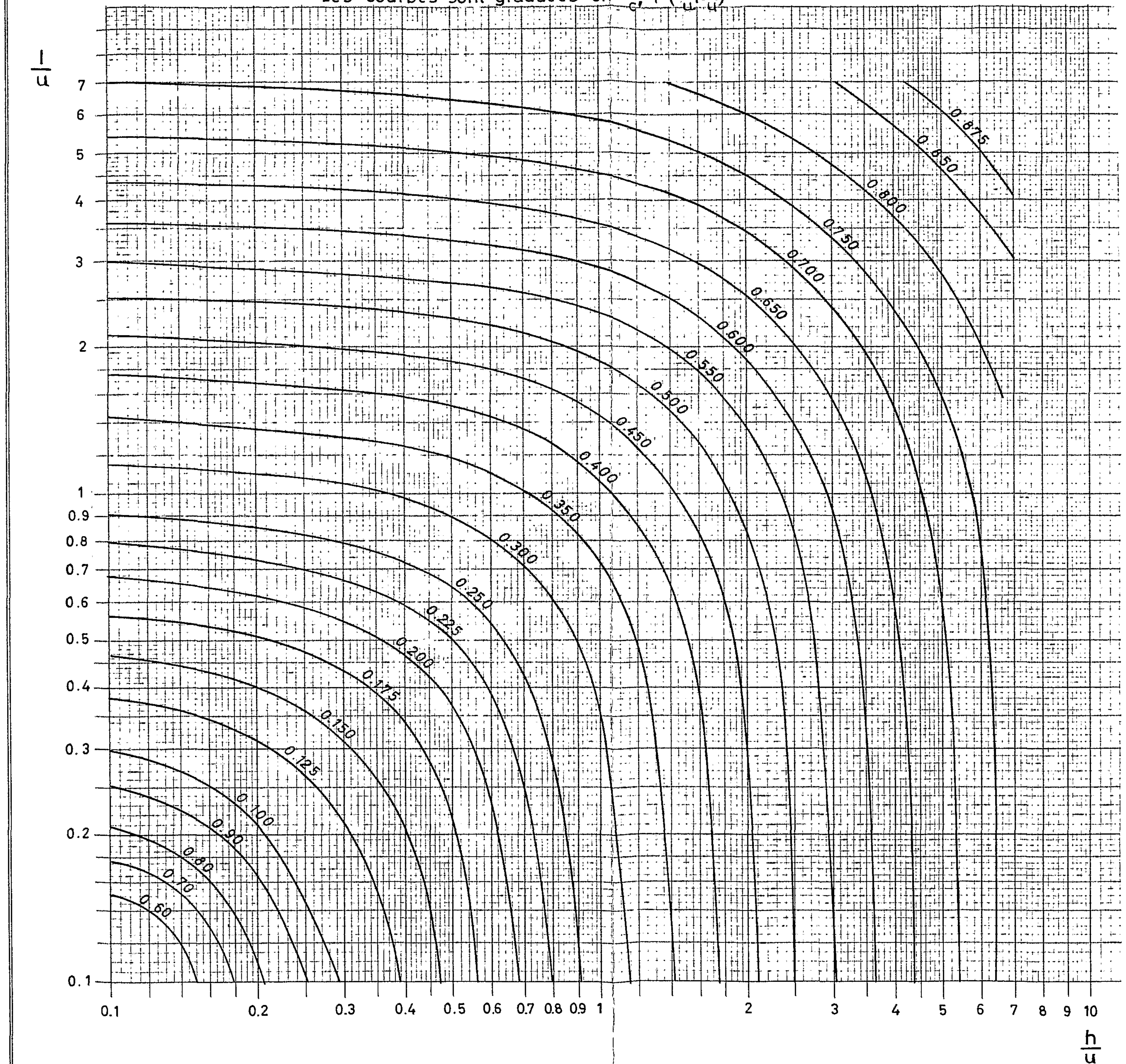
(les courbes sont graduées en $\frac{1}{c'} \sigma^2_{E_1}$)



ABAQUE 1

Fonction $\frac{1}{c'} F(\frac{h}{u}, \frac{l}{u})$

Les courbes sont graduées en $\frac{1}{c'} F(\frac{h}{u}, \frac{l}{u})$



ABAQUE 3

Variance d'extension $\frac{1}{c}\ \sigma^2_{E_2}$ d'un sondage dans un panneau carré de coté h