

B. R. G. M.

DEPARTEMENT GEOSTATISTIQUE

" ... sunt ergo corpora certa quae spatium pleno
possint distinguere inane "

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 58

AXIOMATIQUE DES MILIEUX POREUX ALEATOIRES

G. MATHERON

Janvier 1965.

AXIOMATIQUE DES MILIEUX POREUX ALEATOIRES

Table des Matières

	<u>Pages</u>
<u>I.- COMPLEMENTS SUR LA TRANSFORMATION DE SERRA.</u>	
1.- Relations des opérations $\oplus$ et $\ominus$ avec l'union et l'intersection.	1
2.- Propriétés topologiques	1
3.- Propriétés liées à la convexité	4
4.- Composition d'ouvertures et de fermetures	6
5.- Propriétés liées à la connexité	7
 <u>II.- AXIOMATIQUE DES MILIEUX POREUX ALEATOIRES</u>	
1.- Choix d'une σ -algèbre et d'une topologie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$	10
1 - a./ Topologie $\mathcal{V}_K^{K'}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$	12
1 - b./ σ -algèbre $\mathcal{A}$ des $\mathcal{V}_K^{K'}$ sur $(\mathbb{R}^n)$	14
2.- Choix d'une σ -algèbre et d'une topologie sur $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^n)$	16
Classe Ω	18
Séparabilité	19
Classe Ω'	20
3.- Définition de la σ -algèbre $\mathcal{J}$ sur Ω	23
4.- Mesurabilité d'un milieu poreux aléatoire	25
Transformation de Serra $A \overset{\oplus}{\cup} B, A \overset{\ominus}{\cup} B$	27
Cas de $A \overset{\oplus}{\cup} B$	28
Cas de $A \overset{\ominus}{\cup} B$	30
Cas d'une fermeture selon $\bar{B}$	31
Cas d'une ouverture selon $\bar{B}$	31
5.- σ -algèbre $\mathcal{J}$ sur l'ensemble $\mathcal{H}$ des ouverts-fermés $\bar{\bar{A}}$	37

I.- COMPLEMENTS SUR LA TRANSFORMATION DE SERRA

I.- RELATIONS DES OPERATIONS $\oplus$ et $\ominus$ AVEC L'UNION ET L'INTERSECTION

On a établi, dans la Note 57, que l'opération $\oplus$ distribue la réunion ensembliste. On en déduit la première des trois égalités ci-dessous, les deux autres s'en déduisant par passage au complémentaire :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C) \\ A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C) \\ (B \cap C) \ominus A = (B \ominus A) \cap (C \ominus A) \end{array} \right.$$

Vis-à-vis de l'intersection, l'opération $\oplus$ n'est pas distributive. On obtient les trois inclusions suivantes, en général strictes, dont la première a été établie dans la Note 57 et conduit aux deux autres par passage au complémentaire :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \oplus (B \cap C) \subset (A \oplus B) \cap (A \oplus C) \\ A \ominus (B \cap C) \supset (A \ominus B) \cup (A \ominus C) \\ (B \cup C) \ominus A \supset (B \ominus A) \cup (C \ominus A) \end{array} \right.$$

II.- PROPRIETES TOPOLOGIQUES.

a/ A étant un ensemble de R^n , nous désignerons par $\bar{A}$ sa fermeture topologique et $\overset{\circ}{A}$ son ouverture topologique (le complémentaire sera écrit $\{A \text{ ou } A^c\}$). Soient $\overset{\circ}{B}_\lambda$ et $\bar{B}_\lambda$ les boules ouverte et fermée respectivement, de rayon λ et de centre O . On a :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{A} = \bigcup_{\lambda > 0} A \ominus \overset{\circ}{B}_\lambda = \bigcup_{\lambda > 0} A \ominus \bar{B}_\lambda \\ \bar{A} = \bigcap_{\lambda > 0} A \oplus \overset{\circ}{B}_\lambda = \bigcap_{\lambda > 0} A \oplus \bar{B}_\lambda \end{array} \right.$$

Ces relations se déduisent l'une de l'autre par dualité, de sorte qu'il suffit d'établir, par exemple, la première. Or, on a les équivalences :

$$x \in \bigcup_{\lambda > 0} A \ominus \overset{\circ}{B}_\lambda \Leftrightarrow \exists \lambda > 0, \overset{\circ}{B}_\lambda(x) \subset A \Leftrightarrow \bar{x} \in \overset{\circ}{A}$$

$$x \in \bigcup_{\lambda > 0} A \ominus \bar{B}_\lambda \Leftrightarrow \exists \lambda > 0, \bar{B}_\lambda(x) \subset A \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A}$$

b) On sait que $\overset{\circ}{B}$ étant un ouvert quelconque, et $\bar{B}$ un fermé quelconque :

$$\left\{ \begin{array}{ll} A \oplus \overset{\circ}{B} & \text{est ouvert} \\ A \ominus \overset{\circ}{B} & \text{est fermé} \\ \bar{B} \ominus A & \text{est fermé} \end{array} \right. \quad (\text{quel que soit } A)$$

D'autre part, dans l'expression $A \oplus \overset{\circ}{B}$ on peut remplacer A par sa fermeture topologique $\bar{A}$. Avec les passages au complémentaire, on a ainsi les trois relations :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A \oplus \overset{\circ}{B} = \bar{A} \oplus \overset{\circ}{B} \\ A \ominus \overset{\circ}{B} = \bar{A} \ominus \overset{\circ}{B} \\ \bar{B} \ominus A = \bar{B} \ominus \bar{A} \end{array} \right.$$

$$\text{En effet, } z \in A \ominus \overset{\circ}{B} \Leftrightarrow \overset{\circ}{B}_z \subset A \Leftrightarrow \overset{\circ}{B}_z \subset \bar{A} \Leftrightarrow z \in \bar{A} \ominus \overset{\circ}{B}$$

c) Si $\bar{A}$ est fermé et K compact (donc fermé et borné) $\bar{A} \oplus K$ est fermé.

En effet, soit $z \notin \bar{A} \oplus K$, c'est-à-dire $\bigcap_z \bar{A} \cap K_z$ disjoints. Comme $\bar{A}$ est fermé, et K_z compact, on peut trouver une boule B_ε telle que $K_z \oplus B_\varepsilon$ et $\bar{A}$ soient disjoints. Mais :

$$\left(\bigcap_z K_z \oplus B_\varepsilon \right) \cap \bar{A} = \emptyset \Leftrightarrow z \notin \bar{A} \oplus K \oplus B_\varepsilon \Leftrightarrow B_\varepsilon(z) \cap \bar{A} \oplus K = \emptyset$$

Par suite $\bar{A} \oplus K$ est fermé.

Si K est un fermé quelconque non compact (non borné) la propriété cesse d'être vraie. Si l'on prend pour $\bar{A}$ la demi hyperbole $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) et pour K l'axe des x , $\bar{A} \oplus K$ est le demi plan ouvert $y > 0$.

Par dualité, on obtient pour tout compact K :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{A} \oplus K & \text{est fermé} \\ \overset{\circ}{A} \ominus K & \text{est ouvert} \\ \beta K \ominus \bar{A} & \text{est ouvert.} \end{array} \right.$$

d/ Si B est borné, la fermeture de $A \oplus B$ est égale à $\bar{A} \oplus \bar{B}$

D'après c/, $\bar{A} \oplus \bar{B}$ est fermé et contient $A \oplus B$, donc contient aussi la fermeture de $A \oplus B$:

$$\bar{A} \oplus \bar{B} \supset \overline{A \oplus B}$$

Montrons l'inclusion inverse. Des relations (3) on tire :

$$\overline{A \oplus B} = \bigcap_{\lambda > 0} A \oplus B \oplus \overset{\circ}{B}_{\lambda}$$

De la première relation (4), on tire $B \oplus \overset{\circ}{B}_{\lambda} = \bar{B} \oplus \overset{\circ}{B}_{\lambda}$ et, ce dernier ensemble étant ouvert, $A \oplus B \oplus \overset{\circ}{B}_{\lambda} = A \oplus (\bar{B} \oplus \overset{\circ}{B}_{\lambda}) = \bar{A} \oplus \bar{B} \oplus \overset{\circ}{B}_{\lambda}$

D'où :

$$\overline{A \oplus B} = \bigcap_{\lambda > 0} \bar{A} \oplus \bar{B} \oplus \overset{\circ}{B}_{\lambda} = \overline{\bar{A} \oplus \bar{B}} \supset \bar{A} \oplus \bar{B}$$

Par dualité, on obtient pour tout ensemble B borné :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{A \oplus B} = \bar{A} \oplus \bar{B} \\ \overline{A \ominus B} = \overset{\circ}{A} \ominus \bar{B} \\ \overline{\beta B \ominus A} = \beta B \ominus \bar{A} \end{array} \right.$$

Ces relations s'appliquent en particulier aux boules. Avec $\lambda \geq \mu$, on a :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{o}{B}_\lambda \oplus \overset{o}{B}_\mu = \bar{B}_\lambda \oplus \overset{o}{B}_\mu = \overset{o}{B}_\lambda \oplus \bar{B}_\mu = \overset{o}{B}_{\lambda+\mu} \\ \bar{B}_\lambda \oplus \bar{B}_\mu = \bar{B}_{\lambda+\mu} \\ \bar{B}_\lambda \ominus \bar{B}_\mu = \bar{B}_\lambda \ominus \overset{o}{B}_\mu = \overset{o}{B}_\lambda \ominus \overset{o}{B}_\mu = \bar{B}_{\lambda-\mu} \\ \overset{o}{B}_\lambda \ominus \bar{B}_\mu = \overset{o}{B}_{\lambda-\mu} \end{array} \right.$$

III.- PROPRIETES LIEES A LA CONVEXITE.

a/ Si A est convexe (et B quelconque), $A \ominus B$ est convexe.

En effet $A \ominus B = \bigcap_{x \in B} \overset{v}{A}_x$ est convexe comme intersection des convexes A_x .

b/ Si A et B sont convexes, $A \oplus B$ est convexe.

En effet, si $z_1, z_2 \in A \oplus B$ on a

$$\begin{array}{ll} z_1 = a_1 + b_1 & a_1, a_2 \in A \\ z_2 = a_2 + b_2 & b_1, b_2 \in B \end{array}$$

Alors, pour $0 \leq \lambda \leq 1$, on a

$$\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 = \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 + \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 = a + b$$

Mais $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 = a \in A$ et $\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 = b \in B$ puisque A et B sont convexes, et $\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 = z \in A \oplus B$.

c/ Si A et B sont convexes l'ouverture et la fermeture de A selon B sont également convexes.

Cela résulte immédiatement de a) et b).

d/ Si $\bar{A}$ est un ensemble convexe topologiquement fermé et B un ensemble borné quelconque, $\bar{A}$ est fermé selon B :

$$(7) \quad (\bar{A} \oplus \overset{v}{B}) \ominus B = \bar{A}$$

En effet, soit $z \in (\bar{A} \oplus^V B) \ominus B = \bar{A}_f$, c'est-à-dire $B_z \subset \bar{A} \oplus^V B$, soit encore :

$$\forall u \in B, \exists a \in \bar{A}, b \in B : z + u = a + b$$

Partant de $u \in B$, on obtient ainsi deux suites $a_n \in \bar{A}$ et $b_n \in B$ vérifiant :

$$\begin{aligned} z + u &= a_1 + b_1 \\ z + b_1 &= a_2 + b_2 \\ &\dots \dots \dots \\ z + b_{n-1} &= a_n + b_n \end{aligned}$$

D'où :

$$z + \frac{u}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{b_n}{n}$$

Comme B est borné, $\frac{u}{n}$ et $\frac{b_n}{n}$ tendent vers 0 et

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

Mais, comme $\bar{A}$ est convexe, $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \in \bar{A}$. Comme $\bar{A}$ est fermé, $z \in \bar{A}$ et on a $\bar{A}_f \subset \bar{A}$. Comme on a aussi l'inclusion inverse, (7) en résulte.

Si A est supposé convexe (mais non nécessairement fermé topologique) et B borné quelconque, le même raisonnement donne :

$$A \subset A_f \subset \bar{A}$$

Cependant, pour A convexe quelconque, et B ouvert borné, on a encore :

$$A_f = \bar{A}$$

Car A_f est alors un fermé topologique contenant A , donc contenant également $\bar{A}$.

En résumé :

- Tout convexe topologiquement fermé est fermé selon tout ensemble borné.
- Tout convexe est fermé selon tout ensemble borné topologiquement ouvert.

IV.- COMPOSITION D'OUVERTURES ET DE FERMETURES

Dans le cas général où A, B et C sont quelconques la composition des fermetures selon B et C :

$$(A \omega_B) \omega_C = \left(\left[(A \ominus \overset{V}{B}) \oplus B \right] \ominus \overset{V}{C} \right) \oplus C$$

ne conduit qu'à des inclusions.

$$(A \omega_B) \omega_C \subset A \omega_B \cap A \omega_C$$

$$(A \omega_B) \omega_C \supset A \omega_{B \oplus C}$$

La dernière inclusion se démontre en remarquant que

$$A \omega_{B \oplus C} = \left[A \ominus (\overset{V}{B} \oplus \overset{V}{C}) \right] \oplus B \oplus C$$

est ouvert à la fois selon B et selon C. Etant ouvert selon B, il est contenu dans $A \omega_B$. Etant ouvert selon C, il est contenu dans $(A \omega_B) \omega_C$

Mais, si C est ouvert selon B, on a :

$$(8) \quad (A \omega_B) \omega_C = A \omega_C$$

et, si B est ouvert selon C :

$$(9) \quad (A \omega_B) \omega_C = A \omega_B$$

La relation (9) est évidente : car, si B est ouvert selon C (est de la forme $B' \oplus C$), $A \omega_B$ est ouvert selon C (il est de la forme $(A \ominus \overset{V}{B}) \oplus B' \oplus C$)

Pour montrer (8), supposons que C soit de la forme $C' \oplus B$. On a :

$$(A \omega_B) \omega_C = \left[(A \omega_B \ominus \overset{V}{B}) \ominus \overset{V}{C'} \right] \oplus C$$

Mais :

$$A \omega_B \ominus \overset{V}{B} = (A \ominus \overset{V}{B} \oplus B) \ominus \overset{V}{B} = A \ominus \overset{V}{B}$$

D'où :

$$(A\omega_B)\omega_C = \left[(A \ominus^V B) \ominus^V C' \right] \oplus C = \left[A \ominus^V (B \oplus^V C') \right] \oplus C = A\omega_C$$

Ces relations s'appliquent, en particulier, aux boules ouvertes. Si $A\omega_\lambda$ est l'ouverture de A selon $\overset{0}{B}_\lambda$, on a, en posant :

$$\mu = \text{Sup}(\lambda, \lambda')$$

$$(A\omega_\lambda)\omega_{\lambda'} = A\omega_\mu$$

Par dualité, les mêmes propriétés s'appliquent aux fermetures :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} C\omega_B = C \implies (A_{f_B})_{f_C} = A_{f_C} \\ B\omega_C = B \implies (A_{f_B})_{f_C} = A_{f_B} \end{array} \right.$$

V.- PROPRIETES LIEES A LA CONNEXITE.

On rappelle qu'un ensemble A est connexe si pour toute partition de A par deux ouverts Ω_1 et Ω_2 disjoints sur A on a soit $A \subset \Omega_1$ soit $A \subset \Omega_2$:

$$\begin{aligned} A \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ \implies A \cap \Omega_1 = \emptyset \quad \text{ou} \quad A \cap \Omega_2 = \emptyset \\ A \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \end{aligned}$$

Tout ensemble A peut être mis sous la forme :

$$A = \bigcup_{i \in I} C_i$$

où les C_i , connexes et disjoints, sont appelés composantes connexes de A. Les C_i sont les ensembles connexes maximaux contenus dans A. Pour tout connexe C, on a :

$$C_i \subset C \subset A \implies C = C_i$$

Tout point x de A appartient à un C_i (et un seul), caractérisé comme le

plus grand connexe contenant x et contenu dans A , ou comme l'union de tous les connexes inclus dans A et contenant x .

a/ Si A et B sont connexes, $A \oplus B$ est connexe.

Supposons, $0 \in B$ (quitte à faire une translation). Alors $A \subset A \oplus B$. Etant connexe, A est contenu dans une composante connexe C de $A \oplus B$. Si $x \in A$, $A \cup B_x$ est connexe (comme union de connexes non disjoints). Par suite B_x est contenu dans la composante connexe C . Alors :

$$A \oplus B = \bigcup_{x \in A} B_x \subset C$$

D'où l'égalité .

On remarquera que $A \ominus B$, par contre, peut très bien ne pas être connexe.

b/ Soit A un ensemble, C_i ses composantes connexes, et B un ensemble connexe, on a :

$$(11) \quad A \ominus B = \bigcup_{i \in I} (C_i \ominus B)$$

En effet, $C_i \subset A \Rightarrow C_i \ominus B \subset A \ominus B$. et

$$\bigcup_i C_i \ominus B \subset A \ominus B$$

L'inclusion inverse (qui est fausse en général) est vérifiée ici du fait que les C_i sont les composantes connexes de A . Soit, en effet, $z \in A \ominus B$, c'est-à-dire $\bigvee B_z \subset A$, et soit C_i la composante connexe contenant z . Comme $\bigvee B_z$ est connexe, $\bigvee B_z$ est contenu dans la composante C_i et $z \in C_i \ominus B$. Par suite :

$$A \ominus B \subset \bigcup_i C_i \ominus B$$

c/ Vis-à-vis de l'ouverture selon une partie connexe B, les composantes connexes C_i d'un ensemble quelconque A se comportent indépendamment. On a :

$$A \omega_B = \bigcup_i (C_i) \omega_B$$

En effet, d'après b/ on a d'abord :

$$A \ominus^V B = \bigcup_i C_i \ominus^V B$$

Par suite :

$$(A \ominus^V B) \oplus B = \left(\bigcup_i C_i \ominus^V B \right) \oplus B = \bigcup_i \left[(C_i \ominus^V B) \oplus B \right]$$

Les composantes connexes de A sont l'équivalent des grains individualisés dans un milieu poreux. L'ouverture de A selon B donne un renseignement de nature granulométrique au sens strict, somme des renseignements que fournirait chaque grain ouvert isolément. Il n'y a pas interférence entre les différents grains.

Vis-à-vis de la fermeture, au contraire, des interférences se produisent inévitablement. La fermeture apporte un renseignement d'ordre textural (dépendant des relations entre grains). La fermeture de A, cependant, est l'ouverture de βA c'est-à-dire des pores, et chaque composante connexe des pores se comporte indépendamment. En ce sens il est tout à fait légitime de dire que la fermeture des grains détermine la granulométrie des pores.

*
* *

II.- AXIOMATIQUE DES MILIEUX POREUX ALEATOIRES

Il est nécessaire de procéder au moins à un examen rapide des bases axiomatiques sur lesquelles peut s'édifier une théorie des fonctions aléatoires en tout ou rien. Il s'agit :

1°) De choisir un sous ensemble Ω de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Ω sera l'ensemble des événements élémentaires ω . Chaque événement élémentaire ω est identique à un sous-ensemble A_ω de $\mathbb{R}^n$ appartenant à la classe Ω . Cette classe Ω ne coïncidera pas avec $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, mais ne devra contenir que des ensembles A_ω de structure relativement simple, susceptibles de représenter la réalité d'un milieu poreux. Par exemple, un ensemble tel que "l'ensemble de tous les points de coordonnées irrationnelles" ne devra pas faire partie de Ω .

2°) Définir une σ -algèbre $\mathcal{F}$ sur Ω et

3°) Montrer qu'il est possible de définir une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et, notamment, que toute loi spatiale définie par ses moments fonctionnels $P_n(x_1, \dots, x_n)$ peut se prolonger en une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Cette méthode axiomatique conduit à définir une application

$$k(x, \omega) : (\mathbb{R}^n \times \Omega) \longrightarrow \{0, 1\}$$

qui, à tout élément (x, ω) du produit $\mathbb{R}^n \times \Omega$ fait correspondre le nombre 0 ou 1 :

$$k(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_\omega \\ 0 & \text{si } x \notin A_\omega \end{cases}$$

Cette application doit d'être telle qu'à $x = x_0$ fixé $k(x_0, \omega)$ soit une variable aléatoire (sur Ω), autrement dit $k(x, \omega)$ doit être mesurable en ω . Nous nous imposerons, en fait, la condition suivante, beaucoup plus forte : l'application

$$k(x, \omega) : (\mathbb{R}^n \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

du produit $\mathbb{R}^n \times \Omega$ muni de la σ -algèbre produit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ (σ -algèbre engendrée dans

$\mathbb{R}^n \times \Omega$ par les ensembles $B \times S$ où B décrit la σ -algèbre de Borel $\mathcal{B}$ et S la σ -algèbre $\mathcal{J}$ de Ω) dans $\{0,1\}$ doit être elle-même mesurable (condition de mesurabilité).

L'intérêt de cette condition supplémentaire est la suivante : Etant admis que les A_ω sont mesurables ($A_\omega \in \mathcal{B}$), l'intégrale

$$X(\omega) = \int_{A_\omega} dF(x) = \int k(x, \omega) dF(x)$$

est définie pour toute mesure positive F et dépend de ω . Si la condition ci-dessus est remplie, $X(\omega)$ est une fonction mesurable (pour $\mathcal{J}$) de ω , c'est-à-dire une variable aléatoire. De plus on a alors :

$$E(X) = \int E[k(x, \omega)] dF(x) = \int P(x \in A) dF(x)$$

En particulier, prenant pour F la mesure associée à un ensemble mesurable B quelconque, on aura :

$$E[\text{Mes } A_\omega \cap B] = \int_B P(x \in A) dx$$

$P(x \in A)$ est la probabilité pour que $x \in A_\omega$. Ainsi la condition de mesurabilité de $k(x, \omega)$ permet de fonder l'inférence statistique.

1.- Choix d'une σ -algèbre et d'une topologie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

La loi spatiale d'une fonction aléatoire en tout ou rien est constituée par l'ensemble des

$$P_n^k(x_1 \dots x_k; x_{k+1}, \dots x_n) = P\left(\bigvee_{x_1, \dots, x_k}^{x_{k+1}, \dots, x_n}\right)$$

où $\bigvee_{x_1, \dots, x_k}^{x_{k+1}, \dots, x_n}$ est l'évènement : " $x_1, \dots, x_k \in A_\omega, x_{k+1}, \dots, x_n \notin A_\omega$ ". Si $K = \{x_1 \dots x_k\}$

et $K' = \{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ sont deux parties finies quelconques de $\mathbb{R}^n$, nous voyons que la famille :

$$\mathcal{V}_K^{K'} = \left\{ A : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), K \subset A, A \cap K' = \emptyset \right\}$$

des ensembles A de $\mathbb{R}^n$ contenant K et disjoints de K' doit appartenir à toute σ -algèbre utilisable sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, puisque la loi spatiale est définie comme l'ensemble

des $P(V_K^{K'})$.

A l'aide des $V_K^{K'} (K, K' \text{ finies})$, il est possible de constituer une topologie et une σ -algèbre sur $\mathcal{P}(R^n)$.

1-a/- Topologie des $V_K^{K'}$ sur $\mathcal{P}(R^n)$. Appelons $\mathcal{V}$ l'ensemble des $V_K^{K'}$, où K et K' dé-

crivent les parties finies de R^n . $\mathcal{V}$ vérifie les axiomes des systèmes de voisinages :

1 - Nous dirons que $V_K^{K'}$ est voisinage de A si $A \in V_K^{K'}$ (si $K \subset A$ et $K' \cap A = \emptyset$)

2 - Si $V_K^{K'}$ est voisinage de A et si $B \in V_K^{K'}$, $V_K^{K'}$ est voisinage de B (ainsi les $V_K^{K'}$ sont des voisinages ouverts).

3 - Si $V_{K_1}^{K'_1}$ et $V_{K_2}^{K'_2}$ sont des voisinages de A , leur intersection est un voisinage de A . Cela résulte de la formule évidente :

$$(12) \quad V_{K_1}^{K'_1} \cap V_{K_2}^{K'_2} = V_{K_1 \cup K_2}^{K'_1 \cup K'_2}$$

La formule (12) montre en outre que la famille $\mathcal{V}$ est stable pour l'intersection finie.

La topologie ainsi définie est séparée.

En effet soit A et A' deux ensembles distincts de R^n . Il existe au moins un point x tel que $x \in A$ et $x \notin A'$ (ou $x \notin A$ et $x \in A'$). Alors $V_x^\emptyset$ est un voisinage de A , $V_{\emptyset}^{x'}$ un voisinage de A' , et $V_x^\emptyset \cap V_{\emptyset}^{x'} = V_x^{x'}$ est vide.

Par contre, cette topologie n'est pas connexe.

En effet, tout $V_K^{K'}$ est à la fois ouvert et fermé. $V_K^{K'}$ est ouvert puisqu'il est voisinage de chacun de ses éléments. Il est également fermé : car

$A \notin V_{x_1 \dots x_k}^{y_1 \dots y_p}$ signifie

ou bien $\exists i : x_i \notin A$

ou bien $\exists j : y_j \in A$

Dans le premier cas $V_{\phi}^{x_i}$ est un voisinage de A disjoint de $V_{\phi}^{y_1 \dots y_p}$, dans le second cas $V_{\phi}^{y_j}$ possède la même propriété.

La convergence définie dans cette topologie est celle qui correspond à la notion usuelle de limite d'une famille d'ensembles. Montrons le dans le cas d'une suite A_n (la démonstration est la même dans le cas d'une famille filtrée). Pour la topologie $\mathcal{V}$, $A_n \rightarrow A$ signifie :

$$\forall V_{\phi}^{y_1 \dots y_p, x_1 \dots x_k} \ni A, \exists N : n \gg N \Rightarrow A_n \in V_{\phi}^{y_1 \dots y_k, x_1 \dots x_k}$$

c'est-à-dire :

$$\forall \begin{cases} x_1, \dots, x_k \in A \\ y_1, \dots, y_p \notin A \end{cases} \exists N : n \geq N \Rightarrow \begin{cases} x_1, \dots, x_k \in A_n \\ y_1, \dots, y_p \notin A_n \end{cases}$$

Ceci entraîne

$$A \subset \bigcup_N \bigcap_{n \geq N} A_n = \liminf A_n$$

$$\beta A \subset \bigcup_N \bigcap_{n \geq N} \beta A_n = \liminf \beta A_n = \beta \limsup A_n$$

soit :

$$\limsup A_n \subset A \subset \liminf A_n$$

Ainsi $\lim A_n = \limsup A_n = \liminf A_n$ existe et coïncide avec A.

Réciproquement, si $\lim A_n = A$ existe, quel que soit $x_i \in A$, on peut trouver N_i tel que $x_i \in A_n$ pour tout $n \geq N_i$, et, quel que soit $y_j \notin A$, on peut trouver N'_j tel que $y_j \notin A_n$ pour tout $n \geq N'_j$. Par suite pour tout $n \geq \sup(N_1, \dots, N_k, N'_1, \dots, N'_p)$ $A_n \in V_{\phi}^{y_1 \dots y_p, x_1 \dots x_k}$ (cette réciproque est liée au fait que les $V_K^{K'}$ sont construits sur les parties finies K, K' de R^n).

b - σ -algèbre $\mathcal{A}$ des $V_K^{K'}$ sur $\mathcal{P}(R^n)$.

Nous désignerons par $\mathcal{A}$ la σ -algèbre engendrée par les $V_K^{K'}$ sur $\mathcal{P}(R^n)$.

Nous nous proposons de montrer que toute loi spatiale $P(V_K^{K'}), (V_K^{K'} \in \mathcal{V})$ définit de manière unique une probabilité sur $(\mathcal{P}(R^n), \mathcal{A})$.

- En premier lieu, montrons que l'ensemble $\mathcal{V}$ des $V_K^{K'}$ (K, K' finis) constitue une semi-algèbre de Boole. En effet :

1°) V_K^K est la famille vide, et $V_\emptyset^\emptyset$ est $\mathcal{P}(R^n)$.

2°) $\mathcal{V}$ est stable pour l'intersection finie d'après la formule (12).

3°) Il reste à montrer que le complémentaire de tout $V_K^{K'} \in \mathcal{V}$ est réunion finie de $V_{K_i}^{K'_i} \in \mathcal{V}$ disjoints.

Or, on a :

$$V_{x_1 \dots x_k}^{y_1 \dots y_p} = V_{x_1}^\emptyset \cap \dots \cap V_{x_k}^\emptyset \cap V_\emptyset^{y_1} \cap \dots \cap V_\emptyset^{y_p}$$

Ainsi, le complémentaire de tout $V_K^{K'}$ est de la forme :

$$\begin{aligned} & V_{\emptyset}^{x_1} \cup \dots \cup V_{\emptyset}^{x_k} \cup V_{y_1}^\emptyset \cup \dots \cup V_{y_p}^\emptyset = \\ &= V_{\emptyset}^{x_1} \cup V_{x_1}^{x_2} \cup V_{x_1, x_2}^{x_3} \dots \cup V_{x_1, \dots, x_{k-1}}^{x_k} \cup V_{x_1, \dots, x_k, y_1}^\emptyset \\ & \quad \cup V_{x_1, \dots, x_k, y_2}^\emptyset \dots \cup V_{x_1, \dots, x_k, y_{p-1}}^\emptyset \end{aligned}$$

C'est une réunion finie de $V_{K_i}^{K'_i}$ disjoints.

- En second lieu, montrons que la classe $\mathcal{V}$ des $V_K^{K'}$ est une classe compacte, autrement dit que de toute famille de $V_{K_i}^{K'_i}$ ($i \in I$) d'intersection vide on peut extraire

une famille finie d'intersection vide.

En effet, posons :

$$R = \bigcup_{i \in I} K_i \quad R' = \bigcup_{i \in I} K'_i$$

et désignons encore par $V_R^{R'}$ l'ensemble des A tels que $R \subset A$ et $A \cap R' = \emptyset$ (remarquons que $V_R^{R'}$ n'appartient pas à $\mathcal{G}$, puisque R et R' ne sont pas nécessairement finies). On a :

$$\bigcap_{i \in I} V_{K_i}^{K'_i} = V_R^{R'}$$

Pour que $V_R^{R'}$ soit vide il est nécessaire et suffisant que R et R' ne soient pas disjoints. Soit donc $x \in R \cap R'$. On peut alors trouver deux indices i et j tels que :

$$x \in K_i \quad x \in K'_j$$

et l'intersection finie :

$$V_{K_i}^{K'_i} \cap V_{K_j}^{K'_j} = V_{K_i \cup K_j}^{K'_i \cup K'_j}$$

est nécessairement vide.

- En troisième lieu donnons-nous une loi spatiale $P(V_K^{K'})$, c'est-à-dire une fonction d'ensemble, additive et positive, appliquant $\mathcal{G}$ dans l'intervalle $(0,1)$, telle que $P(V_\emptyset^\emptyset) = 1$. Comme $\mathcal{G}$ constitue à la fois une classe compacte et une semi-algèbre de Boole, un résultat classique ⁽¹⁾ montre que P est σ -additive (complètement additive) sur $\mathcal{G}$. On sait qu'en pareil cas ⁽²⁾ il existe une probabilité unique prolongeant P sur la σ -algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par $\mathcal{G}$.

Ainsi est établi le résultat que nous avons en vue! toute loi spatiale se prolonge de manière unique en une probabilité sur $(\mathcal{P}(R^n) \times \mathcal{A})$. Mais on notera l'extrê-

(1) J.NEVEU "Bases mathématiques du Calcul des Probabilités", Masson, 1964. Proposition I,6,2, page 27.

(2) Id., proposition I,6,1, page 25.

me maigreur de cette σ -algèbre $\mathcal{A}$. Dans les applications, il sera nécessaire que des propositions telles que "L'ensemble ouvert B est contenu dans l'ensemble aléatoire A" définissent des événements. Or V_B^{ϕ} , où B est infini non dénombrable, n'appartient, en général pas à la σ -algèbre $\mathcal{A}$ introduite ici, et ne constitue donc pas un événement.

Pour lever cette difficulté nous devons restreindre à un sous ensemble Ω de $\mathcal{P}(R^n)$ convenablement choisi la classe des ensembles aléatoires A_ω considérés comme événements élémentaires.

Nous commencerons par restreindre les notions topologiques et algébriques précédentes au cas où R^n est remplacé par l'ensemble Q^n des points de coordonnées rationnelles de R^n (ou, plus généralement, par n'importe quel ensemble dénombrable et partout dense).

2/- Choix d'une σ -algèbre et d'une topologie sur $\mathcal{P}(Q^n)$

Nous désignerons par $\mathcal{V}'$ l'ensemble des $V_K^{K'}$:

$$V_K^{K'} = \left\{ A : A \subset Q^n, K \subset Q^n, A \cap K' \subset \phi \right\}$$

où K et K' sont des parties finies de Q^n (ensembles finis de points de coordonnées rationnelles).

Les raisonnements faits au paragraphe 1-a s'appliquent encore, et montrent que $\mathcal{V}'$ définit une topologie séparée, disconnexe où la convergence coïncide avec la convergence ensembliste usuelle.

De plus, ici, les $V_K^{K'}$ constituent une famille dénombrable. Il en résulte que $\mathcal{P}(Q^n)$ est compact pour la topologie $\mathcal{V}'$.

En effet, tout ouvert est union dénombrable de $V_{K_i}^{K'_i} \in \mathcal{V}'$ et tout fermé, par suite est intersection dénombrable d'ensembles de la forme :

$$F_i = \bigcap_{K_i} V_{K_i}^{K'_i}$$

On montre, comme au paragraphe précédent, que tout F_i est union finie d'ensembles de $\mathcal{V}'$: par suite l'ensemble de tous les F_i possibles est dénombrable.

Par ailleurs, on montre comme au paragraphe précédent que la classe $\mathcal{V}'$ est une classe compacte. On sait ⁽¹⁾ que si une classe $\mathcal{V}'$ est dénombrablement compacte, il en est de même de la classe stable pour l'union finie et l'intersection dénombrable engendrée par $\mathcal{V}'$. Par suite, les F_i constituent une famille dénombrablement compacte : de toute intersection dénombrable vide $\bigcap F_i$ on peut extraire une intersection finie vide.

Soit alors H_j une famille quelconque de fermés ($j \in J$). Chacun d'eux est de la forme :

$$H_j = \bigcap_{i \in I_j} F_i$$

et $\bigcap_{j \in J} H_j$ se met sous la forme d'une intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$, dénombrable, puisque les F_i sont dénombrables. Si cette intersection est vide, on peut trouver une famille finie $F_{i_1} \dots F_{i_k}$ d'intersection vide, et par suite aussi une famille $H_{j_1} \dots H_{j_k}$ (avec $i_1 \in I_{j_1}$) d'intersection vide, d'où la compacité.

De la même manière, considérons maintenant la σ -algèbre $\mathcal{A}'$ engendrée par $\mathcal{V}'$ sur Q^n . On montrera, exactement comme au paragraphe précédent, que $\mathcal{V}'$ est, sur Q^n , une semi-algèbre de Boole et une classe compacte, de sorte que toute loi spatiale sur Q^n (toute application positive et additive de $\mathcal{V}'$ sur l'intervalle $[0,1]$ telle que $P(\bigvee_{\phi} \phi) = 1$) se prolonge d'une manière unique en une probabilité P sur $(Q^n, \mathcal{A}')$.

A l'inverse de ce qui se passait pour $(R^n, \mathcal{A})$, la σ -algèbre $\mathcal{A}'$ est suffisamment large pour contenir les sous-ensembles de $\mathcal{P}(Q^n)$ auxquels on peut légitimement s'intéresser. En effet, si K et K' sont des sous-ensembles quelconques de Q^n , ce sont des sous-ensembles dénombrables de Q^n (puisque Q^n est dénombrable) et $\bigvee_K \in \mathcal{A}'$, de sorte que - sur Q^n - les propositions " A contient K " ou " A est disjoint de K " définissent toujours des événements de $\mathcal{A}'$, qui possèdent des probabilités définies dès que l'on s'est donné une probabilité P sur $(Q^n, \mathcal{A}')$.

(1) J. NEVEU, lemme I,6,1.

A la vérité, il serait possible d'en rester là. Dans les applications que nous avons en vue, les ensembles A , représentant les grains (ou les pores) d'un milieu poreux et que nous cherchons à représenter comme des réalisations d'un ensemble aléatoire A_ω , ne sont accessibles que par l'intermédiaire des points rationnels qu'ils contiennent et, par suite, doivent être considérés comme définis dès que l'on se donne leur intersection avec Q^n : ce qui est une manière d'exprimer qu'il est un peu illusoire de vouloir les représenter par une probabilité sur $(\mathcal{P}(R^n), \mathcal{A})$, alors qu'en fait la donnée d'une probabilité sur $(\mathcal{P}(Q^n), \mathcal{A})$ suffit à mettre en forme tout ce que l'on est réellement capable de connaître sur de tels ensembles.

Classe Ω .

Toujours du point de vue pratique, un ensemble A de R^n doit pouvoir être identifié (pratiquement) à sa fermeture (ou à son ouverture) topologique, car, dans un milieu poreux réel, il doit pouvoir être considéré comme indifférent d'attribuer soit aux grains, soit aux pores un point appartenant à la frontière des grains et des pores.

On peut donc conventionnellement se limiter aux ensembles fermés (ou ouverts) de $\mathcal{P}(R^n)$, c'est-à-dire aux ensembles tels que $\bar{A} = A$ ($\overset{\circ}{A} = A$). Ces deux points de vue sont corrélatifs, puisque $\int A$ est ouvert quand A est fermé, et réciproquement. S'intéresser aux ensembles fermés de $\mathcal{P}(R^n)$ revient à poser une fois pour toute que tout point frontière entre grains et pores est considéré comme appartenant aux grains. Par ailleurs, tout fermé étant mesurable $\mathcal{B}$, cette convention nous garantit que A sera toujours mesurable, et que par suite il sera possible de donner un sens à des intégrales spatiales telles que

$$X(\omega) = \int_{A_\omega} dF(x) = \int k(x, \omega) dF(x)$$

pour une mesure sommable arbitraire F .

De plus, et ici nous rejoignons la première limitation exprimée au début de ce chapitre - A , ensemble fermé de R^n , devant être considéré comme connu dès que l'on connaît l'ensemble des points rationnels qu'il contient, on est conduit à ne s'intéresser qu'à la classe Ω des ensembles de $\mathcal{P}(R^n)$ vérifiant :

$$(13) \quad A = \overline{A \cap Q^n}$$

Ces ensembles sont caractérisés par la propriété suivante :

Tout point de A est limite d'une suite de points rationnels de A, et, réciproquement, toute limite de points rationnels de A appartient à A.

Comme, d'autre part, $\int A$ est ouvert, on a aussi :

Tout point n'appartenant pas à A est limite de points rationnels n'appartenant pas à A. Mais ici la réciproque est fausse, puisque $\int A$ est ouvert.

Séparabilité.

Enfin, les ensembles A de la classe Ω sont séparables, ce qui signifie exactement ici :

" Pour que A contienne un ouvert B, il faut et il suffit qu'il contienne tous les rationnels de B. Pour que A soit disjoint d'un ouvert B', il faut et il suffit qu'il soit disjoint de tous les rationnels de B' "

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. En effet, pour tout ouvert, on a :

$$B \subseteq \overline{B \cap \mathbb{Q}^n}$$

puisque tout point d'un ouvert est limite de rationnels de cet ouvert. Par suite, de l'implication :

$$B \cap \mathbb{Q}^n \subseteq A \cap \mathbb{Q}^n \implies \overline{B \cap \mathbb{Q}^n} \subseteq \overline{A \cap \mathbb{Q}^n} = A$$

on déduit $B \subseteq A$.

De même, si l'ouvert B' vérifie $B' \cap \mathbb{Q}^n \cap A = \emptyset$, c'est-à-dire si aucun point rationnel de B' n'appartient à A, B' est disjoint de A. En effet, supposons $x \in B' \cap A$. Comme $x \in A$, x est limite de rationnels de A, soient $y_n \rightarrow x$, $y_n \in A \cap \mathbb{Q}^n$. Comme B' est ouvert et $x \in B'$, pour n assez grand tous les $y_n \in B'$. Par suite $A \cap B' \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$, d'où la contradiction.

On voit l'intérêt de cette notion de séparabilité. Si, pour une certaine σ -algèbre sur Ω , les propositions " $y \in A$ " ou " $y \notin A$ " définissent des événements, alors pour tout ouvert B et tout ouvert B', les propositions " $B \subseteq A$ "

et $A \cap B' = \emptyset$ " définissent un événement $S_B^{B'}$ de la σ -algèbre utilisée. En effet, on a alors :

$$S_B^{B'} = \frac{B'}{S_B \cap Q^n} = \bigcap_{y \in B \cap Q^n} \frac{\emptyset}{S_y} \bigcap_{y' \in B' \cap Q^n} \frac{y'}{S_{\emptyset}}$$

et, comme les rationnels de B sont dénombrables, $S_B^{B'}$ se construit par une suite dénombrable d'intersections d'ensembles de la σ -algèbre.

On notera enfin que, si $A = \overline{A \cap Q^n}$ est un ensemble de Ω , nécessairement $A \cap Q^n$ est un ensemble fermé de Q^n (pour la topologie induite par celle de R^n). Réciproquement, si A' est un ensemble fermé de Q^n , on peut prendre

$$A = \overline{A' \cap Q^n} = \overline{A'}$$

et on a nécessairement :

$$A' = A \cap Q^n, \quad \text{d'où} \quad A = \overline{A \cap Q^n}$$

En effet, $A \cap Q^n \supset A'$ par construction. D'autre part, si $x \in A \cap Q^n$, x est un rationnel limite de points (rationnels) de A' , donc appartient à A' puisque A' est fermé dans Q^n , d'où $A \cap Q^n \subset A'$ et l'égalité :

Ainsi, la classe Ω des ensembles de R^n auxquels nous nous intéressons est identique avec la classe obtenue en prenant la fermeture dans R^n des ensembles fermés dans Q^n :

$$A \in \Omega \iff A = \overline{A'}, \quad A' = A \cap Q^n \text{ fermé dans } Q^n.$$

Classe Ω'

Désignons par Ω' la classe des sous ensembles fermés de Q^n , à partir de laquelle s'engendre Ω par fermeture dans R^n .

Ω' est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(Q^n)$. Montrons que c'est un sous-ensemble mesurable de $\mathcal{P}(Q^n)$, pour la σ -algèbre $\mathcal{A}'$. Autrement dit, montrons que la proposition "A' est un sous-ensemble fermé de Q^n " définit un événement de $\mathcal{A}'$.

Pour que A'_ω soit fermé dans Q^n , il faut et il suffit que pour tout $y \in Q^n$ on ait :

$$\begin{cases} \text{soit} & y \in A'_\omega \\ \text{soit} & \exists N : \forall z \in B_{\frac{1}{N}}(y) \cap Q^n, \quad z \notin A'_\omega \end{cases}$$

$B_{\frac{1}{N}}(y)$ est la boule de centre y et de rayon $\frac{1}{N}$. Par suite, on a :

$$\Omega' = \bigcap_{y \in \mathbb{Q}^n} \left[\bigvee_y \bigcup_N \left(\bigcap_{z \in B_{\frac{1}{N}}(y) \cap \mathbb{Q}^n} \bigvee_z \right) \right]$$

Comme $B_{\frac{1}{N}}(y) \cap \mathbb{Q}^n$ est dénombrable, Ω' est bien un événement de $\mathcal{A}'$.

Nous appellerons $\mathcal{J}'$ la restriction à Ω' de la σ -algèbre $\mathcal{A}'$, σ -algèbre engendrée par les

$$S_K^{K'} \cap \Omega' = \left\{ A : A \subset \mathbb{Q}^n \cap \Omega', K \subset A, K' \cap A = \emptyset \right\}$$

où K et K' sont des parties finies de $\mathbb{Q}^n$.

Définition d'une probabilité sur $(\Omega', \mathcal{J}')$

Considérons l'application :

$$\alpha : \mathcal{P}(\mathbb{Q}^n) \rightarrow \Omega' : \alpha(A) = \overline{A}^d = \overline{A} \cap \mathbb{Q}^n$$

qui, à tout ensemble $A \subset \mathbb{Q}^n$, fait correspondre sa fermeture $\overline{A}^d$ dans $\mathbb{Q}^n$. Montrons que c'est une application mesurable de $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}^n), \mathcal{A}')$ dans $(\Omega', \mathcal{J}')$. Comme $\mathcal{J}'$ est engendrée par les $S_x^\emptyset = \left\{ A : A \in \Omega', x \in A \right\}$ lorsque x décrit $\mathbb{Q}^n$, il suffit de montrer que l'image inverse par α de tout $S_x^\emptyset$ est un événement de $\mathcal{A}'$. Or, pour $x \in \mathbb{Q}^n$, on a :

$$\alpha^{-1}(S_x^\emptyset) = \left\{ A : A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}^n), x \in \overline{A}^d \right\}$$

Mais l'équivalence

$$x \in \overline{A}^d \iff \forall N, \exists y \in B_{\frac{1}{N}}(x) \cap \mathbb{Q}^n : y \in A$$

où $B_{\frac{1}{N}}(x)$ désigne la boule de centre x et de rayon $\frac{1}{N}$ montre que l'on a :

$$\alpha^{-1}(S_x^\emptyset) = \bigcap_{N > 0} \bigcup_{y \in B_{\frac{1}{N}}(x) \cap \mathbb{Q}^n} \bigvee_y^\emptyset$$

Comme $V_x^\phi \in \mathcal{A}'$ et que les opérations effectuées sont dénombrables, cet ensemble appartient à $\mathcal{A}'$ et l'application α est mesurable.

Soit alors P une probabilité sur $(\mathcal{P}(Q^n), \mathcal{A}')$. La formule :

$$P'(S') = P[\alpha^{-1}(S')]$$

où $S' \in \mathcal{J}'$ définit alors une probabilité sur $(\Omega', \mathcal{J}')$: P' n'est autre que la probabilité affectée à la fermeture $\overline{A}^d$ dans Q^n de l'ensemble aléatoire A dont la probabilité est P .

On a la démarche suivante : une loi spatiale $P(V_K^{K'})$ détermine la probabilité P sur $(\mathcal{P}(Q^n), \mathcal{A}')$ de l'ensemble aléatoire A . Il lui correspond, par la formule ci-dessus, la probabilité P' sur $(\Omega', \mathcal{J}')$ de la fermeture $\overline{A}^d$ de A dans Q^n , et par suite la loi spatiale $P'(S_K^{K'})$ de $\overline{A}^d$. Ces deux lois spatiales ne sont pas, en général, identiques.

Comme $K \subset A \Rightarrow K \subset \overline{A}^d$ et $K' \cap \overline{A}^d = \emptyset \Rightarrow K' \cap A = \emptyset$, on a les inégalités :

$$P(V_K^\phi) \leq P'(S_K^\phi)$$

$$P(V_{\phi}^K) \geq P'(S_{\phi}^K)$$

qui peuvent très bien être strictes.

La loi spatiale $P'(S_K^{K'})$ est d'ailleurs soumise à des limitations que $P(V_K^{K'})$ n'a pas de raison, a priori, de respecter. En effet, si x_k est une suite de points de Q^n tendant vers un point x rationnel, on doit avoir :

$$P'(S_{x_1, x_2, \dots}^x) = \lim_{k \rightarrow \infty} P'(S_{x_1, \dots, x_k}^x) = 0$$

tandis que $P(V_{x_1, x_2, \dots}^x)$ peut très bien être différente de 0.

Cependant, si, pour tout $x \in Q^n$, l'évènement $V_{\phi}^x \cap \alpha^{-1}(S_x^\phi)$ de $\mathcal{A}'$ (défini par " $x \in \overline{A}^d$ et $x \notin A$ " ou " x est un point frontière de A ") est presque impossible pour la probabilité P , les deux lois spatiales coïncident et l'on a :

$$P(V_K^{K'}) = P'(S_K^{K'})$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait :

$$(14) \quad P \left[\bigcap_{\phi} V_{\phi}^x \cap \alpha^{-1}(S_{\phi}^x) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} P \left[\bigcap_{\phi} V_{\phi}^x \cap \left(\bigcup_{y \in B_{\frac{1}{N}}(x) \cap \mathbb{Q}^n} V_{\phi}^y \right) \right] = 0$$

Il serait intéressant de trouver une condition au moins suffisante que devrait vérifier la loi spatiale P pour que (14) ait lieu. En attendant que ce point soit éclairci, on pourra sans doute admettre, dans les applications, que (14) est effectivement vérifiée.

3/- Définition de la σ -algèbre $\mathcal{J}$ sur Ω .

Soit Ω l'ensemble des sous-ensembles A de $\mathbb{R}^n$ vérifiant (13) :

$$A = \overline{A \cap \mathbb{Q}^n}$$

Les formules $A' = \overline{A \cap \mathbb{Q}^n}$ et $A = \overline{A'}$ établissent une correspondance bijective entre Ω et Ω' . Soit $\mathcal{J}$ la σ -algèbre sur Ω image dans cette correspondance de la σ -algèbre $\mathcal{J}'$ sur Ω' . $\mathcal{J}$ est engendrée par les $S_K^{K'}$:

$$S_K^{K'} = \left\{ A \mid A \in \Omega, K \subset A, K' \cap A = \emptyset \right\}$$

où K et K' sont des parties finies de $\mathbb{R}^n$ formées de points rationnels. De même, à toute probabilité P' sur $(\Omega', \mathcal{J}')$ correspond une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{J})$. La loi spatiale $P(S_K^{K'})$ correspondante n'est cependant définie que pour des parties K et K' formées de points rationnels. Mais elle peut être prolongée pour des parties K et K' finies ou dénombrables quelconques. En effet :

a/ Si $\overset{o}{B}$ et $\overset{o}{B'}$ sont des ouverts, $\overset{o}{S}_B^{\overset{o}{B'}} \in \mathcal{J}$: La proposition : " A contient $\overset{o}{B}$ et est disjoint de $\overset{o}{B'}$ " est un événement $\overset{o}{B}$ de $\mathcal{J}$.

Cela résulte, comme nous l'avons vu de ce que les ensembles A de Ω sont séparables.

b/- Le complémentaire de $S_{\emptyset}^{\emptyset}$, soit $F_{\emptyset}^{\emptyset}$, défini par " B n'est pas contenu dans A "; ou encore " $B \cap A \neq \emptyset$ ", et le complémentaire $F_{\emptyset}^{\emptyset}$ de $S_{\emptyset}^{\emptyset}$ défini par " $B \cap A \neq \emptyset$ " sont donc également des événements de $\mathcal{J}$.

c/- Pour qu'un point x quelconque (non rationnel) soit dans A , il faut et il suffit que toute boule ouverte $B_{\frac{1}{N}}(x)$ coupe A (puisque A est fermé). De même, pour que y n'appartienne pas à A il faut et il suffit qu'il existe une boule ouverte $B_{\frac{1}{N}}(x)$ disjointe de A (puisque $\mathcal{J}A$ est ouvert). Ainsi

$$S_x^{\emptyset} = \bigcap_{N > 0} F_{\emptyset}^{\emptyset} B_{\frac{1}{N}}(x)$$

$$S_{\emptyset}^y = \bigcup_{N > 0} S_{\emptyset}^{\emptyset} B_{\frac{1}{N}}(x)$$

sont des événements de la σ -algèbre $\mathcal{J}$, et par suite aussi tout $S_K^{K'}$ où K et K' sont des parties finies ou dénombrables de points quelconques de R^n .

d/- On a même un résultat plus fort : si $K \in \Omega$ et si K' est compact, l'ensemble $S_K^{K'}$ défini par " $K \subset A$, $K' \cap A = \emptyset$ " est un événement de la σ -algèbre $\mathcal{J}$, ainsi que les ensembles $F_K^{\emptyset}$ (" $K \cap A \neq \emptyset$ ") et $F_{\emptyset}^{K'}$ (" $K' \cap A \neq \emptyset$ ").

En effet pour qu'un compact K' soit disjoint d'un fermé A , il faut et il suffit qu'il existe une boule ouverte $B_{\frac{1}{N}}^{\emptyset}$ telle que :

$$A \cap (K' \oplus B_{\frac{1}{N}}^{\emptyset}) = \emptyset$$

Alors,

$$S_{\emptyset}^{K'} = \bigcup_{N > 0} S_{\emptyset}^{K'} \oplus B_{\frac{1}{N}}^{\emptyset}$$

est un événement, puisque $K' \oplus B_{\frac{1}{N}}^{\emptyset}$ est ouvert.

De même, puisque $K \in \Omega$, tout point de K est limite de rationnels de K .

Si $K \cap Q^n$ est contenu dans A , qui est fermé, on a aussi $\overline{K \cap Q^n} = K \in A$.

Par suite :

$$S_K^\phi = S_{K \cap Q^n}^\phi$$

est un événement de $\mathcal{F}$.

4/- Mesurabilité d'un milieu poreux aléatoire.

Il reste maintenant à examiner les propriétés de mesurabilité. Considérons d'abord le cas d'un ensemble aléatoire A_ω défini sur $(\Omega', \mathcal{F}')$ (donc dans Q^n). Il lui correspond une application

$$k'(x, \omega) : [Q^n \times \Omega', \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}'] \rightarrow \{0, 1\}$$

définie par :

$$k'(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_\omega \\ 0 & \text{si } x \notin A_\omega \end{cases}$$

Cette application est mesurable pour la σ -algèbre produit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}'$, où $\mathcal{B}$ est la σ -algèbre induite sur Q^n par la σ -algèbre $\mathcal{B}$ de Borel sur R^n . En effet, l'image inverse de $\{1\}$ dans $Q^n \times \Omega'$ est :

$$\left\{ (x, \omega') : k(x, \omega') = 1 \right\} = \bigcup_{x \in Q^n} x \times S_x^\phi$$

Comme $x \in \mathcal{B}$ et $S_x^\phi \in \mathcal{F}'$ et que Q^n est dénombrable, cet ensemble est bien mesurable pour $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}'$. Par suite $k'(x, \omega)$ est mesurable.

Soit maintenant un ensemble aléatoire A_ω défini sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et

$$k(x, \omega) : (R^n \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}) \rightarrow \{0, 1\}$$

l'application correspondante définie par :

$$\begin{aligned} k(x, \omega) &= 1 & \text{si } x \in A_\omega \\ &= 0 & \text{si } x \notin A_\omega \end{aligned}$$

Montrons que cette application est mesurable pour $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$. Pour le vérifier, montrons que l'image inverse de 0 appartient à $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$.

$$k^{-1}(0) = \left\{ (x, \omega) : k(x, \omega) = 0 \right\} \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$$

Pour le voir, nous remarquerons que $\bigcup A_\omega$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ (puisque $A_\omega \in \mathcal{Q}$). Par suite à tout x de $\bigcup A_\omega$ correspond une boule $B_\varepsilon(x)$ centrée en x et disjointe de A_ω . Par suite :

$$(x, \omega) \in k^{-1}(0) \iff x \in \bigcup A_\omega \iff \exists k, \exists y \in \mathbb{Q}^n : x \in B_{\frac{1}{k}}(y) \subset \bigcup A_\omega$$

$$\iff (x, \omega) \in \bigcup_{k > 0} \bigcup_{y \in \mathbb{Q}^n} B_{\frac{1}{k}}(y) \times S_{\frac{1}{k}}^{B_{\frac{1}{k}}(y)}$$

Comme $B_{\frac{1}{k}}(y) \in \mathcal{B}$ et $S_{\frac{1}{k}}^{B_{\frac{1}{k}}(y)} \in \mathcal{F}$, et que les opérations effectuées sont en infinité $\frac{1}{k}$ dénombrables, on a bien :

$$k^{-1}(0) \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$$

de sorte que $k(x, \omega)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^n \times \Omega$.

Alors ⁽¹⁾ pour toute mesure F sommable sur $\mathbb{R}^n$ l'intégrale d'espace

$$(15) \quad X(\omega) = \int k(x, \omega) dF(x) = \int_{A_\omega} dF(x)$$

définit une variable aléatoire dont l'espérance mathématique existe et vérifie

$$(16) \quad E[X(\omega)] = \int E[k(x, \omega)] dF(x) = \int P(S_x^\phi) dF(x)$$

(1) Voir J. NEVEU, op.cit., page 86 et suiv,...

En particulier, si F est la mesure de Borel associée à un ensemble B mesurable de mesure finie, on a :

$$(17) \quad E \left[\int_B k(x, \omega) dx \right] = E \left[\text{Mes } B \cap A_\omega \right] = \int_B P(S_x^\phi) dx$$

Dans le cas stationnaire $P(S_x^\phi) = p$ est une constante, et l'on a :

$$(18) \quad E \left[\text{Mes } B \cap A_\omega \right] = p \text{ Mes } B$$

Ce résultat, qui paraît intuitif, n'a pu être établi que moyennant des restrictions axiomatiques assez sévères. Il ne faut pas croire qu'il subsisterait avec n'importe quelle σ -algèbre sur $\mathcal{P}(R^n)$

Transformation de Serra $A_\omega \oplus B$, $A_\omega \ominus B$

Prenons d'abord un ensemble ouvert $\overset{\circ}{B}$ tel que $\overset{\circ}{B} \in \Omega$ (par exemple une boule ouverte).

Nous savons que $\bigvee_{x \in B} F_x^\phi$ est un événement de $\mathcal{J}$. Or :

$$A_\omega \in F_x^\phi \iff A_\omega \cap \bigvee_{x \in B} \overset{\circ}{B}(x) \neq \emptyset \iff x \in A_\omega \oplus \overset{\circ}{B}(x)$$

Ainsi toute proposition du type " $x_1 \dots x_n \dots \in A_\omega \oplus \overset{\circ}{B}(x)$ "

et " $y_1 \dots y_k \dots \notin A_\omega \oplus \overset{\circ}{B}_x$ " définit un événement et possède une probabilité. Autrement dit, il est possible de définir la loi spatiale de $A \oplus \overset{\circ}{B}$.

De la même manière, on montre qu'il est possible de définir la loi spatiale de $A \ominus \overset{\circ}{B}$.

Si $B \in \Omega$ et si B est borné (donc compact) il résulte de même du paragraphe 3-d précédent que $A \oplus \bar{B}$ et $A \ominus \bar{B}$ possèdent également des lois spatiales.

Il en résulte que ces quatre ensembles sont des ensembles aléatoires de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ pour la σ -algèbre $\mathcal{I}$, mais non pas pour $(\Omega, \mathcal{I})$. Cependant on vérifie facilement que $\bar{A} \oplus \bar{B}$ (qui est fermé d'après les relations (5)) est dans Ω . En effet, des inclusions :

$$\bar{A} \oplus \bar{B} \supset (\bar{A} \oplus \bar{B}) \cap \mathbb{Q}^n \supset (\bar{A} \cap \mathbb{Q}^n) \oplus (\bar{B} \cap \mathbb{Q}^n)$$

on tire, en fermant selon la règle (5), et en tenant compte du fait que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont dans Ω

$$\bar{A} \oplus \bar{B} \supset \overline{(\bar{A} \oplus \bar{B}) \cap \mathbb{Q}^n} \supset \bar{A} \oplus \bar{B}$$

d'où l'égalité. Ainsi :

$$\begin{aligned} A \in \Omega \\ \bar{B} \in \Omega, \bar{B} \text{ borné} \end{aligned} \Rightarrow A \oplus \bar{B} \in \Omega$$

Par contre, en général, ni $A \overset{\circ}{\oplus} \bar{B}$ (qui est ouvert), ni $A \ominus \bar{B}$, ni $A \ominus \bar{B}$ n'appartiendront à Ω .

Préoccupons-nous maintenant de la mesurabilité de ces ensembles aléatoires transformés de A_ω .

Cas de $A \oplus \bar{B}$

Prenons d'abord le cas le plus simple, celui où $\bar{B}$ est un ensemble borné de Ω (donc fermé). Désignons par $f(x, \omega)$ sa fonction caractéristique (ensembliste). Elle est donnée, d'après la note (57), par :

$$f(x, \omega) = \sup_{z \in \bar{B}} k(x-z, \omega)$$

Comme $\bar{B}$ n'est pas dénombrable, la mesurabilité de $f(x, \omega)$ n'est pas directement lisible sur cette formule. Nous considérerons d'abord la transformée $A \oplus (\bar{B} \cap \mathbb{Q}^n)$, dont la fonction caractéristique $g(x, \omega)$:

$$g(x, \omega) = \sup_{x \in \bar{B} \cap \mathbb{Q}^n} k(x-z, \omega)$$

est mesurable sur $\mathbb{R}^n \times \Omega$, puisque $\bar{B} \cap \mathbb{Q}^n$ est dénombrable. Considérons ensuite

les inclusions évidentes :

$$(A \cap Q^n) \oplus (\bar{B} \cap Q^n) \subset [A \oplus (\bar{B} \cap Q^n)] \cap Q^n \subset A \oplus \bar{B}$$

Par fermeture on obtient : $\bar{A} \oplus \bar{B} \subset \overline{[A \oplus (\bar{B} \cap Q^n)] \cap Q^n} \subset \bar{A} \oplus \bar{B}$

D'où l'égalité :

$$\bar{A} \oplus \bar{B} = \overline{[A \oplus (\bar{B} \cap Q^n)] \cap Q^n}$$

Ainsi tout point de $\bar{A} \oplus \bar{B}$ est limite de rationnels de $A \oplus (\bar{B} \cap Q^n)$.

Nous en déduisons :

$$f(x, \omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\substack{y \in B_{\frac{1}{N}}(x) \\ \bar{N}}} g(y, \omega)$$

$g(y, \omega)$ étant mesurable, et les opérations effectuées étant cette fois dénombrables, la mesurabilité de $f(x, \omega)$ est établie.

Ainsi, la transformée $A \oplus \bar{B}$ est séparable et mesurable. Toute intégrale d'espace

$$\int_{A \oplus \bar{B}} f(x, \omega) dF(x) = \int dF(x)$$

est une variable aléatoire et vérifie :

$$E \left[\int_{A \oplus \bar{B}} dF(x) \right] = \int E[f(x, \omega)] dF(x) = \int P(F_{\frac{1}{\phi}}^x) dF(x)$$

Dans le cas stationnaire $P(F_{\frac{1}{\phi}}^x) = P(x \in A \oplus \bar{B})$ est indépendant de x . En prenant pour F la mesure de Borel associée à un ensemble mesurable C de mesure finie, on obtient :

$$(19) \quad E \left[\text{Mes} [C \cap (A \oplus \bar{B})] \right] = P(x \in A \oplus \bar{B}) \text{Mes} (C)$$

Cette relation établit la possibilité de l'inférence statistique en ce qui concerne $P(x \in A \oplus \bar{B})$.

Cas de $A \ominus \bar{B}$

La transformée $A \ominus \bar{B}$ est également mesurable, (mais non nécessairement séparable pour Q^n).

Plus généralement soit A un ensemble fermé aléatoire dont la fonction caractéristique $k(x, \omega)$ soit mesurable pour $R^n \times \Omega$ (il n'est pas nécessaire, ici, de supposer $A \in \Omega$), et $\bar{B}$ un ensemble de Ω . Alors $A \ominus \bar{B}$ est mesurable.

En effet, on a toujours

$$A \ominus \bar{B} \subset A \ominus (\bar{B} \cap Q^n)$$

Montrons que, pour $\bar{B} \in \Omega$, on a l'inclusion inverse. Soit $x \in A \ominus (\bar{B} \cap Q^n)$, c'est-à-dire par définition :

$$\bigvee_x (\bar{B} \cap Q^n)_x = \bigvee_x (\bar{B} \cap Q^n)_x \subset A$$

$\bigvee_x A$ étant fermé et $\bigvee_x \bar{B}$ appartenant, comme $\bar{B}$, à Ω , on en déduit, par fermeture $\bigvee_x \bar{B} \subset A$, c'est-à-dire $x \in A \ominus \bar{B}$. Par suite :

$$A \ominus (\bar{B} \cap Q^n) \subset A \ominus \bar{B}$$

et l'égalité en résulte :

$$A \ominus \bar{B} = A \ominus (\bar{B} \cap Q^n)$$

Soit alors $f(x, \omega)$ la fonction caractéristique associée à $A \ominus \bar{B}$. L'égalité ci-dessus, et la relation (37) de la Note 57 permettent d'écrire :

$$f(x, \omega) = \prod_{y \in B \cap Q^n} k(x-y, \omega) = \inf_{y \in B \cap Q^n} k(x-y, \omega)$$

Les opérations faites étant dénombrables $f(x, \omega)$ est mesurable sur $(R^n \times \Omega)$ en même temps que $k(x, \omega)$.

On en déduit, comme ci-dessus, que $\int_{A \ominus \bar{B}} dF(x)$ est une variable aléatoire, avec :

$$(20) \quad E \left[\int_{A \ominus \bar{B}} dF(x) \right] = \int P \left(S_{B_x}^\phi \right) dx$$

En particulier, dans le cas stationnaire, $P(S_{\frac{V}{B}x}) = P(\bigvee_x B_x \subset A) = P(x \in A \ominus \bar{B})$ est indépendante de x . On a, pour tout ensemble mesurable C :

$$(21) \quad E \left[\text{Mes} C \cap (A \ominus \bar{B}) \right] = P(x \in A \ominus \bar{B}) \text{ Mes } C$$

Ici encore l'inférence statistique est fondée.

Cas d'une fermeture selon $\bar{B}$

Le cas de la fermeture est important, puisqu'il conduit à l'étude de la granulométrie des pores. Comme on doit effectuer successivement une opération $\oplus$ et une opération $\ominus$, on doit prendre pour $\bar{B}$ un ensemble compact de Ω - par exemple une boule fermée. Posons

$$A_f = (A \oplus \bigvee \bar{B}) \ominus \bar{B}$$

Comme A est mesurable sur $R^n \times \Omega$, il en est de même d'abord de $A \oplus \bigvee \bar{B}$, d'après l'étude de l'opération $\oplus$, puis de A_f , d'après l'étude de l'opération $\ominus$. Ainsi $\int_{A_f} dF(x)$ est une variable aléatoire, et on a

$$(22) \quad E \left[\int_{A_f} dF(x) \right] = \int P(x \in A_f) dF(x)$$

En particulier, dans le cas stationnaire et pour tout ensemble $C \in \mathcal{B}$, l'inférence statistique est fondée pour la granulométrie de A selon $\bar{B}$. On a :

$$(23) \quad E \left[\text{Mes}(C \cap A_f) \right] = P(x \in A_f) \text{ Mes } (C)$$

Cas d'une ouverture selon $\bar{B}$

Le raisonnement précédent ne peut pas, malheureusement, s'étendre au cas d'une ouverture. En effet, on a vu que $A \ominus \bigvee \bar{B}$, était mesurable, mais n'appartenait pas, en général, à Ω . Or, nous n'avons établi la mesurabilité de $A \oplus \bar{B}$ que dans l'hypothèse où A et $\bar{B}$ appartiennent tous deux à Ω , A étant un ensemble aléatoire mesurable. Nous ne pouvons donc pas conclure à la mesurabilité de :

$$A_\omega = (A \ominus \bigvee \bar{B}) \oplus \bar{B}$$

Mais A_ω est le complémentaire de $(\beta A)_f$. On voit que, pour étudier une ouverture, il faut changer d'optique, et prendre pour A un ensemble ouvert, complémentaire d'un ensemble $\beta A \in \Omega$ pour lequel la fermeture conduit à un ensemble mesurable. Il est donc possible de définir ainsi une ouverture mesurable, à condition de se souvenir que les ensembles A_ω et A_f ne sont pas relatifs au même ensemble aléatoire A . Si la fermeture mesurable A_f concerne l'ensemble $A \in \Omega$, l'ouverture mesurable concernera l'ensemble ouvert $\overline{A \cup \beta Q^n}$, dont le complémentaire est $\overline{\beta A \cap Q^n} \in \Omega$. ce léger glissement axiomatique ne semble pas devoir impliquer de conséquences gênantes dans les applications.

Il serait peut-être possible de lever cette difficulté en se limitant à un sous-ensemble de $\mathcal{P}(R^n)$ encore plus restreint que Ω , par exemple celui des ensembles du type ouvert-fermé $\bar{A}$ (identique à l'ensemble des A vérifiant $A = \bar{A} \cap Q^n$ qui sont séparables non seulement sur Q^n mais sur tout ensemble dénombrable partout dense. Cette classe, plus restreinte, serait peut être aussi plus proche de la réalité, en ce sens que tous les milieux poreux réels sont manifestement du type ouvert-fermé.

Sans la traiter à fond, examinons rapidement cette nouvelle possibilité.

5/- σ -algèbre $\mathcal{J}$ sur l'ensemble $\mathcal{H}$ des ouverts-fermés $\bar{A}$.

Dans ce qui suit, nous désignerons par D un sous-ensemble dénombrable partout dense quelconque de R^n (qui ne sera pas nécessairement l'ensemble Q^n des points rationnels).

a/ Pour que A soit ouvert-fermé, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(24) \quad A = \overline{\bar{A} \cap D}$$

En effet si A est ouvert-fermé, tout point de A est limite de points intérieurs de A . Mais tout point intérieur est limite de points intérieurs appartenant à D . Ainsi $A \subset \overline{\bar{A} \cap D}$. Comme A est fermé, on a aussi l'inclusion inverse, et l'égalité.

Réciproquement, si $A = \overline{A \cap D}$, A est fermé, et tout point de A est limite de points intérieurs appartenant à D . Par suite $A \subset \overset{\circ}{A}$. Comme A est fermé, on a l'inclusion inverse et $A = \overset{\circ}{A}$.

b/ C étant un ensemble quelconque de D , nous désignerons par $\overset{\circ}{C}^d$ et $\overline{C}^d$ son ouverture et sa fermeture dans D (pour la topologie de D induite par celle de $\mathbb{R}^n$). On a manifestement :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{C}^d = \overline{C} \cap D = \overline{(C \cap D)} \\ \overset{\circ}{C}^d = \overline{C \cup \beta_D} \cap D \end{array} \right.$$

Soit $A = \overline{A \cap D}$ un ensemble de $\mathcal{H}$. Le complémentaire de A (dans $\mathbb{R}^n$) est ouvert, et chaque point de βA est limite de points de D appartenant à $\beta A = \overset{\circ}{\beta A}$. Donc

$$\overline{\beta A} = \overline{\overset{\circ}{\beta A} \cap D} = \overline{\beta A \cap D}$$

Passant aux complémentaires, on obtient

$$\overset{\circ}{A} = \overline{A \cup \beta_D}$$

Prenons l'ouverture dans D de $A \cap D$. Il vient :

$$\overset{\circ}{A \cap D}^d = \overline{A \cup \beta_D} \cap D = \overset{\circ}{A} \cap D$$

Prenons la fermeture dans D de $\overset{\circ}{A \cap D}^d$:

$$\overline{\overset{\circ}{A \cap D}^d}^d = \overline{\overset{\circ}{A} \cap D}^d = \overline{\overset{\circ}{A}} \cap D = A \cap D$$

Ainsi : si A est ouvert-fermé dans $\mathbb{R}^n$, $A \cap D$ est ouvert-fermé dans D . Réciproquement, soit A' un ensemble ouvert-fermé de D . Prenons :

$$A = \overline{\overset{\circ}{A'}}^d$$

Pour que $x \in A$, il faut et il suffit que x soit limite de points $x_n \in A'$. Mais :

$$x_n \in A' \iff \exists \varepsilon \quad \overset{o}{B}_\varepsilon(x_n) \cap D \subset \overset{od}{A'}$$

Comme pour toute boule $\overset{o}{B}_\varepsilon$ on a $\overline{\overset{o}{B}_\varepsilon} = \overset{o}{B}_\varepsilon \cap D$, on obtient :

$$x_n \in A' \implies \exists \varepsilon : \overline{\overset{o}{B}_\varepsilon(x_n)} \subset \overset{od}{A'} = A \implies x_n \in \overset{o}{A}$$

Ainsi tout point de A est limite de points de $\overset{o}{A}$, donc $A \subset \overline{\overset{o}{A}}$ et, comme A est fermé, $A = \overline{\overset{o}{A}}$.

Considérons les formules

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} A' = A \cap D \\ A = \overline{\overset{od}{A'}} \end{array} \right.$$

Elles établissent une correspondance bijective entre les ouverts-fermés de R^n et les ouverts-fermés de D . En effet, si $A' = A \cap D$, on a :

$$\overline{\overset{od}{A'}} = \overline{A \cup D} \cap D \supset \overline{A} \cap D = A$$

L'inclusion inverse étant évidente, on a bien $\overline{\overset{od}{A'}} = A$. Inversement, soit A' un ouvert-fermé de D . Prenons $A = \overline{\overset{od}{A'}}$. On a bien :

$$A \cap D = \overline{\overset{od}{A'}} \cap D = \overline{\overset{od}{A'} \cap D} = A'$$

Ainsi : Pour que A soit ouvert-fermé dans R^n , il faut et il suffit que $A \cap D$ soit ouvert-fermé dans un ensemble dénombrable partout dense quelconque D et les formules (26) établissent une correspondance bijective entre les classes $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ des ouverts-fermés sur R^n et sur D .

c/- La proposition précédente montre qu'il y a le même rapport entre les classes $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ qu'entre les classes Ω et Ω' du paragraphe 2 : Ω était la classe des A tels que $A = \overline{A \cap D}$, et Ω' la classe des fermés de Q^n . Il en résulte que la construction d'une σ -algèbre et d'une probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{I})$ va

être possible et conduira aux mêmes conclusions (séparabilité et mesurabilité) qu'aux paragraphes précédents. Montrons d'abord que la proposition " A' est ouvert-fermé dans D " définit un événement de la σ -algèbre $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{P}(D)$ engendrée par les V_x^y (x et $y \in D$).

Ce résultat est un peu plus difficile à obtenir que dans le cas de la classe Ω' . On y arrive de la manière suivante :

Pour que A_ω soit un ouvert-fermé de D, il faut et il suffit que pour tout $y \in D$ on ait :

$$\text{ou bien } y \in \overbrace{\beta A}^{\text{od}}$$

$$\text{ou bien } y \in A \text{ et toute boule } \underset{\bar{N}}{B}_1(y) \cap D \text{ coupe } \overset{\text{od}}{A}$$

Soit, sous forme logique :

$$\text{ou bien } \exists N : \underset{\bar{N}}{B}_1(y) \cap D \cap A = \emptyset$$

$$\text{ou bien } y \in A \text{ et, } \forall N, \exists z, k : z \in \underset{\bar{N}}{B}_1(y), \underset{\bar{N}}{B}_1(z) \subset A$$

Ainsi l'évènement $A_\omega \in \mathcal{H}'$ (est ouvert fermé sur D) se construit comme suit :

$$\bigcap_{y \in D} \left\{ \left[\bigcup_{N > 0} \underset{\emptyset}{V}_{\underset{\bar{N}}{B}_1(y) \cap D} \right] \cup \left[\bigcap_{N > 0} \bigcup_{z \in \underset{\bar{N}}{B}_1(y) \cap D} \bigcup_{k > 0} \underset{\emptyset}{V}_{\underset{\bar{N}}{B}_1(z) \cap D} \cap \underset{\emptyset}{V}_y \right] \right\}$$

Malgré sa structure compliquée, on voit que cet ensemble est construit à l'aide d'opérations dénombrables effectuées sur des ensembles

$$\underset{\emptyset}{V}_{\underset{\bar{N}}{B}_1(y) \cap D}, \underset{\emptyset}{V}_{\underset{\bar{N}}{B}_1(z) \cap D}, \underset{\emptyset}{V}_y$$

qui appartiennent à $\mathcal{A}'$. C'est donc un ensemble de $\mathcal{A}'$, c'est-à-dire un événement, ce

que nous voulions démontrer.

Passons aux probabilités. On considère, en premier lieu, l'application

$$\alpha : \mathcal{P}(D) \rightarrow \mathcal{H}' : \alpha(A) = \overline{A}^d$$

c'est une application mesurable de $(\mathcal{P}(D), \mathcal{A}')$ dans $(\mathcal{H}', \mathcal{C}')$, $\mathcal{C}'$ désignant la σ -algèbre sur $\mathcal{H}'$ engendrée par les :

$$T_x^\phi = \left\{ A' : A' \in \mathcal{H}', x \in A' \right\}$$

En effet, de l'équivalence

$$x \in \overline{A}^d \iff \forall N, \exists y \in B_{\frac{1}{N}}(x) \cap D : \exists k B_{\frac{1}{N}}(y) \cap D \subseteq A$$

on déduit que l'ensemble

$$\alpha^{-1}(T_x^\phi) = \bigcap_{N > 0} \bigcup_{y \in B_{\frac{1}{N}}(x) \cap D} \bigcup_{k > 0} \bigcap_{\substack{V \\ B_{\frac{1}{N}}(y) \cap D}} V^\phi$$

est mesurable pour $\mathcal{A}'$.

Alors, à toute probabilité P' sur $(\mathcal{P}(D), \mathcal{A}')$ correspond une probabilité P' sur $(\mathcal{H}', \mathcal{C}')$ définie par :

$$P'(T) = P'[\alpha^{-1}(T)] \quad \forall T \in \mathcal{C}'$$

Ensuite, on utilise la correspondance bijective :

$$A' = A \cap D$$

$$A = \overline{A'}^d$$

entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ pour définir, par la formule $P(T) = P'(T')$ une probabilité P sur $(\mathcal{H}, \mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ étant la σ -algèbre image de $\mathcal{C}'$, engendrée par les $T_x^\phi (x \in D)$.

Cette probabilité P décrit le comportement, non pas de l'ensemble aléatoire ini-

tial A , mais celui de la fermeture de son ouverture $\bar{A}$. On peut ensuite reprendre point par point tous les raisonnements des paragraphes 4 et 5 et obtenir sur $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ les mêmes résultats que sur $(\Omega, \mathcal{C})$.

G. MATHERON

Mars 1965