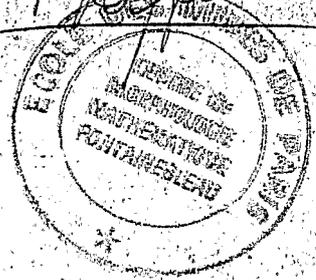


M. P. Raffitte



B. R. G. M. N-58
Département Géostatistique

NOTE GÉOSTATISTIQUE N° 61
ELEMENTS DE GEOMETRIE SEMI-MARKOVIENNE

Août 1965 G. MATHERON

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 61

ELEMENTS DE GEOMETRIE SEMI-MARKOVIENNE

Table des Matières

	<u>Pages</u>
<u>I.- PROPRIETE SEMI-MARKOVIENNE FORTE</u>	2
<u>II.- LOI DU PREMIER POINT DE CONTACT - 2 dimensions</u>	4
a/ Cas du schéma booléen à grains circulaires	5
b/ Cas général d'un schéma semi-markovien fort	8
<u>III.- LOI DU PREMIER POINT DE CONTACT - 3 dimensions.</u>	12
a/ Préliminaires Géométriques	12
b/ Cas du schéma booléen à grains sphériques	14
c/ Cas du schéma semi-markovien fort	16
<u>IV.- LE SCHEMA ISOTROPE A CANALICULES INDEPENDANTS.</u>	24
<u>V.- EXEMPLE D'UN SCHEMA MARKOVIEN QUI N'EST PAS MARKOVIEN FORT</u>	26

ELEMENTS DE GEOMETRIE SEMI-MARKOVIENNE

Nous nous proposons, dans cette Note, de calculer le moment fonctionnel $Q(B)$ (c'est-à-dire la probabilité pour que l'ensemble B soit contenu dans les pores) dans un milieu poreux aléatoire isotrope possédant la propriété semi-markovienne forte, lorsque l'ensemble B est convexe. A deux dimensions, $Q(B)$ ne dépend que de l'aire et du périmètre de B . A trois dimensions, outre le volume et la surface interviendra une troisième caractéristique géométrique très simple. Les résultats obtenus, et certains modes de raisonnement utilisés rappellent la géométrie aléatoire de G. DARMOY, d'où le titre de la Note. Outre le moment $Q(B)$ lui-même, nous nous intéresserons aussi à la loi du premier point de contact, c'est-à-dire à la probabilité conditionnelle pour que, B étant dans les pores, un volume élémentaire $dS \delta R$, construit sur l'élément dS en un point M de la surface limite de B rencontre les grains : elle ne dépendra que des rayons de courbure en M .

L'intérêt de ce genre de recherche n'est pas purement géométrique. On peut penser, en effet, que cette loi du premier point de contact n'est pas sans signification hydrodynamique. Si l'on prend pour B une famille de sphères de rayons croissants, la loi du premier point de contact est aussi celle du rayon vecteur joignant un point x des pores au grain le plus proche. Soient R et α^i le module et les cosinus directeurs de ce rayon vecteur. Une expression telle que :

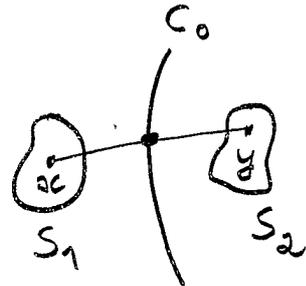
$$(1) \quad k^{ij} = g^{ij} E(R^2) - E(R^2 \alpha^i \alpha^j)$$

possède le caractère tensoriel, se modifie comme une vraie perméabilité (en L^2) dans une similitude, et coïncide à un facteur près avec la vraie perméabilité dans le cas d'un milieu à canalicules (2 dimensions) ou à fissures planes (3 dimensions) indépendantes. Naturellement, seules des études expérimentales pourront nous indiquer si la relation (1), ou une autre du même type, présente un intérêt physique. En attendant, nous étudierons la loi du premier point de contact en nous limitant au cas isotrope, c'est-à-dire au cas où tous les moments fonctionnels sont invariants par rotation. Nous supposerons de plus que le schéma possède la propriété semi-markovienne forte, que nous allons maintenant définir.

I.- PROPRIETE SEMI-MARKOVIENNE FORTE.

Dans "Granulométries en place et milieux poreux aléatoires" nous avons établi le caractère semi-markovien du schéma-booléen à grain convexe : sur toute droite D, il y a indépendance conditionnelle entre évènements observables à droite et à gauche d'un point z_0 de D dès que z_0 est dans les pores.

Plus généralement, soit un ensemble C_0 séparant deux ensembles S_1 et S_2 . On entend par là que toute droite joignant un point x de S_1 et un point y de S_2 rencontre C_0 en un point au moins situé entre x et y . Nous allons montrer qu'il y a indépendance conditionnelle entre tout évènement intéressant S_1 et tout évènement intéressant S_2 lorsque l'on sait que C_0 est dans les pores.



Un schéma vérifiant cette propriété sera dit semi-markovien fort. Tout schéma semi-markovien fort est évidemment semi-markovien. Mais la réciproque est fautive, nous en verrons un contre exemple.

Montrons que les schémas booléens à grains convexes possèdent effectivement la propriété semi-markovienne forte.

a) Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis de point séparés par un ensemble C . Désignons par les notations habituelles :

$$\begin{aligned} \prod_{\xi} (B_1; B_2) &= P \left\{ B_1 \subset A_{\xi}, B_2 \cap A_{\xi} = \emptyset \right\} \\ \chi_{\xi}(B) &= P(B \cap A_{\xi} = \emptyset) \end{aligned}$$

The diagram shows two sets, E_1 and E_2 , represented as circles, separated by a curved boundary C .

les moments fonctionnels du grain convexe primaire germé en ξ . On a :

$$\begin{aligned} \chi_{\xi}(C) &= \chi_{\xi}(C \cup E_1 \cup E_2) + P \left\{ E_1 \cap A_{\xi} \neq \emptyset, C \cap A_{\xi} = \emptyset \right\} \\ &\quad + P \left\{ E_2 \cap A_{\xi} \neq \emptyset, C \cap A_{\xi} = \emptyset \right\} \end{aligned}$$

En effet, $P \left\{ E_1 \cap A_\xi \neq \emptyset, E_2 \cap A_\xi \neq \emptyset, C \cap A_\xi = \emptyset \right\}$ est nulle à cause de la convexité du grain primaire A_ξ et du fait que C sépare E_1 et E_2 . Mais on a aussi :

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_\xi(C) &= \chi_\xi(E_1 \cup C) + P \left\{ E_1 \cap A_\xi \neq \emptyset, C \cap A_\xi = \emptyset \right\} \\ \chi_\xi(C) &= \chi_\xi(E_2 \cup C) + P \left\{ E_2 \cap A_\xi \neq \emptyset, C \cap A_\xi = \emptyset \right\} \end{aligned} \right.$$

De ces trois relations nous déduisons :

$$\chi_\xi(C \cup E_1 \cup E_2) + \chi_\xi(C) = \chi_\xi(E_1 \cup C) + \chi_\xi(E_2 \cup C) = R_\xi$$

Effectuons l'opération

$$\exp \left[- \theta \int (2 - R_\xi) d\xi \right]$$

A gauche, on obtient $Q(C \cup E_1 \cup E_2)$ $Q(C)$ et à droite $Q(E_1 \cup C)$ $Q(E_2 \cup C)$, la lettre Q désignant les moments du schéma obtenu après passage en booléen. D'où la relation

$$(2) \quad \frac{Q(E_1 \cup C \cup E_2)}{Q(E_1 \cup C)} = \frac{Q(C \cup E_2)}{Q(C)}$$

b) Soit maintenant X un événement concernant E_1 et Y un événement concernant E_2 . Comme E_1 et E_2 sont finis, X et Y sont du type :

$X =$ " les points x_{1_1}, \dots, x_{1_k} de E_1 sont dans les grains A et les points

x_{j_1}, \dots, x_{j_p} de E_1 sont dans les pores A^c " .

$Y =$ " ...

La probabilité $P(Y, C \subset A^c)$ pour que Y se réalise et que C soit dans les pores se déduit de $Q(C \cup E_2)$ par des opérations de différence finie qui ne portent que sur

les points de E_2 . Appliquées à $Q(E_1 \cup C \cup E_2)$ ces mêmes opérations conduisent à $P(Y, C \subset A^c, E_1 \subset A^c)$. Par suite nous tirons de (2) :

$$\frac{P(Y, C \subset A^c, E_1 \subset A^c)}{Q(E_1 \cup C)} = \frac{P(Y, C \subset A^c)}{Q(C)}$$

Ce qui s'écrit aussi

$$(3) \quad \frac{P(Y, C \subset A^c, E_1 \subset A^c)}{P(Y, C \subset A^c)} = \frac{Q(E_1 \cup C)}{Q(C)}$$

Le raisonnement se réitère : une même suite d'opérations de différences finies portant uniquement sur les points de E_1 fait passer

de $Q(E_1 \cup C)$ à $P(X, C \subset A^c)$

et de $P(Y, C \subset A^c, E_1 \subset A^c)$ à $P(X, Y, C \subset A^c)$

Par suite, on déduit de (3)

$$\frac{P(X, Y, C \subset A^c)}{P(Y, C \subset A^c)} = \frac{P(X, C \subset A^c)}{Q(C)}$$

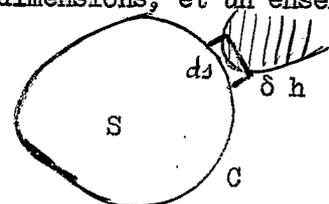
Cette relation établit la propriété semi-markovienne forte dans le cas des schémas booléens à grains convexes.

Dans les deux paragraphes suivants, nous allons établir les lois du premier point de contact sous la seule hypothèse que le schéma vérifie la propriété semi-markovienne forte. Le caractère très géométrique des résultats obtenus s'interprêtera de manière particulièrement satisfaisante dans le cas d'un schéma booléen à grains convexes, mais possèdera un degré plus élevé de généralité.

II.- LOI DU PREMIER POINT DE CONTACT - 2 DIMENSIONS.

Etant donné un schéma semi-markovien isotrope à 2 dimensions, et un ensemble convexe S limité par un contour fermé C , nous nous proposons de calculer :

- la probabilité $Q(S)$ pour que S soit



contenu dans les pores.

- la probabilité $f(s)$ ds δh pour que, S étant contenu dans les pores, l'élément d'aire ds δh rencontre les grains.

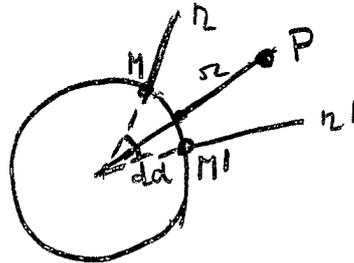
Examinons d'abord le cas particulier du schéma booléen à grains circulaires, qui permet des raisonnements géométriques élémentaires.

a/ Cas du schéma booléen à grains circulaires.

Soit θ la densité de germes, $F(r)$ la granulométrie (probabilité pour qu'un grain circulaire donné ait un rayon $< r$), m_1 et m_2 les deux premiers moments de $F(r)$.

Calculons $Q(S)$

Pour que S soit contenu dans les pores, il faut, en premier lieu, qu'aucun grain n'ait germé à l'intérieur de S, ce qui a lieu avec la probabilité $e^{-\theta S}$. En deuxième lieu, aucun grain germé à l'extérieur ne doit recouper C. Soit un élément $ds = MM'$ en un point du contour C où le rayon de courbure est $\frac{ds}{d\alpha} = R$. Si P est un point du secteur $nMM'n'$, on doit écrire :



- ou bien aucun grain n'a germé autour de P : probabilité $1 - \theta dxdy$.
- ou bien un grain a germé, mais son rayon est inférieur à la distance $r - R$ de P et de M : probabilité $\theta F(r-R)dxdy$

D'où :

$$Q(S) = e^{-\theta S} - \theta \int_{R-S}^{\infty} [1 - F(r)] dxdy$$

Prenons d'abord l'intégrale dans le secteur $nMM'n'$:

$$d\alpha \int_R^{\infty} [1 - F(r-R)] r dr = \left[m_1 R + \frac{m_2}{2} \right] d\alpha$$

Intégrons ensuite sur le contour C :

$$\int_C \left(m_1 R + \frac{m_2}{2} \right) d\alpha = \int_C \left(m_1 ds + \frac{m_2}{2} d\alpha \right) = 2 m_1 L + \pi m_2$$

On voit apparaître le périmètre $2L$ du contour C. On obtient finalement :

$$Q(S) = e^{-\theta \pi m_2 - \theta S - 2m_1 \theta L}$$

Soit, en introduisant la porosité $q = e^{-\theta \pi m_2}$

$$(2) \quad Q(S) = q e^{-\theta S - 2m_1 \theta L}$$

Ainsi, $Q(S)$ ne dépend de la géométrie de l'ensemble convexe S que par l'intermédiaire de sa surface S et de son périmètre $2L$. D'autre part, il ne dépend de la granulométrie des grains primaires que par l'intermédiaire des deux premiers moments. Ce résultat remarquable sera étendu aux schémas booléens à grains convexes quelconques (non circulaires) à deux dimensions, et recevra une extension convenable dans le cas de trois dimensions.

Calculons $f(s)$ ds δh , probabilité conditionnelle pour que, S étant contenu dans les pores, l'élément d'aire $ds \delta h$ rencontre un grain,

autrement dit qu'il existe un point P dans le secteur $nMM'n'$ où a germé un grain de rayon compris entre $r - R - \delta h$ et $r - R$: ces événements ont des probabilités infiniment petites $F'(r-R)\delta h \theta dx dy$, donc additives au premier ordre. L'intégrale

$$\theta \delta h \int_{nMM'n'} F'(r-R) dx dy$$

représente donc la probabilité cherchée, d'où :

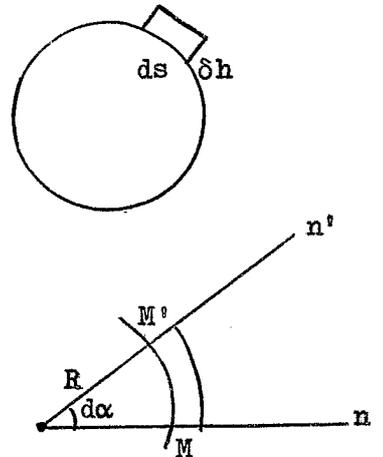
$$f(s) ds \delta h = \theta \delta h d\alpha \int_R^{\infty} F'(r-R) r dr = \theta \delta h d\alpha (m_1 + R)$$

ou

$$(3) \quad f(s) = \theta \left(1 + \frac{m_1}{R}\right)$$

Vérifions la compatibilité de (2) et (3). Si $\delta h(s)$ désigne, en tout point s , la distance des contours des ensembles convexes S et S' très voisins et tels que $S \subset S'$, on doit avoir

$$(4) \quad Q(S) - Q(S') = Q(S) \int_C f(s) \delta h(s) ds$$



Or

$$Q(S) - Q(S') = Q(S) \left[\theta \delta S + 2 \frac{m_1}{R} \theta \delta \mathcal{L} \right]$$

et

$$\theta \int_C \left(1 + \frac{m_1}{R} \right) \delta h(s) ds = \theta \delta S + \theta m_1 \int_C d\alpha \delta h(s)$$

Or, on vérifie immédiatement l'égalité

$$(5) \quad \int_C \delta h(s) d\alpha = \delta(2\mathcal{L})$$

de sorte que (4) est bien vérifiée.

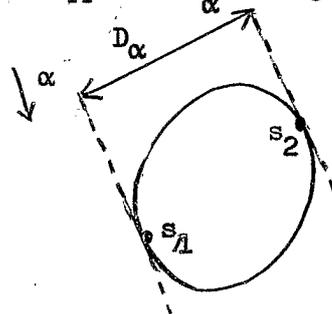
Interprétation géométrique de (5).

A chaque direction α correspond un diamètre apparent D_α . Désignons par

$$D_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_\alpha d\alpha$$

le diamètre moyen. On a :

$$\delta D_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(D_\alpha) d\alpha$$



Mais la variation $\delta(D_\alpha)$ est égale à la somme $\delta h(s_1) + \delta h(s_2)$, s_1 et s_2 désignant les points de contact des tangentes à C parallèles à α . D'où

$$\delta D_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\delta h(s_1) + \delta h(s_2)] d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta h(s) d\alpha = \frac{1}{\pi} \delta(2\mathcal{L})$$

Ceci étant vrai quelle que soit la variation $\delta h(s)$, il en résulte que l'on a $D_0 = \frac{2\mathcal{L}}{\pi} + C_0$. Mais la constante C_0 est nécessairement nulle, comme on le voit en prenant une famille décroissante d'ensembles homothétiques de S . D'où la relation :

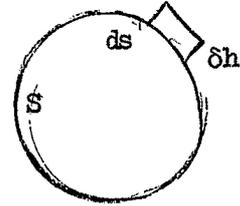
$$(6) \quad D_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_\alpha d\alpha = \frac{2\mathcal{L}}{\pi}$$

b/ Cas général d'un schéma semi-markovien fort.

- Désignons comme ci-dessus par :

- $Q(S)$ la probabilité pour que S soit contenu dans les pores.

- $\varphi(s) ds \delta h$ la probabilité conditionnelle pour que l'élément d'aire $ds \delta h$ rencontre un grain, sachant que S est contenu dans les pores.



L'élément d'arc ds sépare l'ensemble S et l'aire $ds \delta h$. La propriété semi-markovienne forte nous indique donc que $\varphi(s) ds \delta h$ ne peut dépendre que des caractéristiques de l'élément d'arc ds , c'est-à-dire de sa longueur ds et de son rayon de courbure $R = \frac{ds}{d\alpha}$. Elle n'est pas modifiée, en particulier, si l'on remplace S par le cercle osculateur en ds , de rayon R . Autrement dit $\varphi(s)$ est en réalité une fonction $\varphi(R)$ du seul rayon de courbure. Si l'on sait calculer la probabilité $Q(R)$ pour qu'un cercle de rayon R soit dans les pores, on en déduira la loi du premier point de contact $\varphi(R)$ pour un ensemble convexe quelconque.

Si, en effet $Q(R)$ est la probabilité pour que le cercle de rayon R soit contenu dans les pores, $- Q'(R)dR$ sera la probabilité pour que le cercle de rayon R soit un cercle limite. Le schéma étant isotrope, la direction α du rayon vecteur du point de contact du cercle limite possède une probabilité uniforme sur le cercle de rayon unité. On a donc :

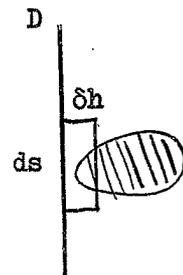
$$Q(R) \varphi(R) ds \delta R = - Q'(R) \frac{d\alpha}{2\pi} \delta R = - \frac{ds \delta R}{2\pi R} Q'(R)$$

D'où

$$(7) \quad \varphi(R) = - \frac{1}{2\pi R} \frac{Q'(R)}{Q(R)}$$

Ceci dit, considérons les deux cas de figures élémentaires suivants :

1/- Soit un élément d'aire $ds \delta h$ construit sur l'élément rectiligne ds ($R = \infty$) d'une droite D . La probabilité pour que cet élément d'aire contienne le point limite à gauche d'un grain, lorsque l'on sait que ds est dans les pores, est $\theta ds \delta h$. Cela est immédiat pour le schéma booléen à grain convexe. Avant



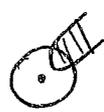
passage en booléen on peut, sans modifier le schéma final, imposer au grain convexe primaire une translation aléatoire amenant son point limite à gauche à l'emplacement du germe. Dans ce schéma équivalent, germe et point limite à gauche coïncident, de sorte que la probabilité en question est bien Θ ds δh . Ainsi

$$\varphi(\infty) = - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi R} \frac{Q'(R)}{Q(R)} = \Theta$$

Dans le cas d'un schéma semi-markovien fort quelconque, on pose simplement $\varphi(\infty) = \Theta$

2/- Soit maintenant un cercle de rayon δh très petit, de centre 0.

La probabilité pour que ce petit cercle rencontre un grain et que le centre 0 soit dans les pores est :



$$Q(0) - Q(\delta h) = - Q'(0) \delta h$$

Plus précisément, et en raison de l'isotropie, la probabilité pour que le premier contact ait lieu dans un petit secteur $d\alpha$ du cercle de rayon δh est donnée par :

$$\frac{-Q'(0)}{2\pi} \delta h d\alpha$$

Ceci se voit aussi à partir de la formule (7). En effet :

$$\varphi(R) ds \delta h = - \frac{1}{2\pi R} \frac{Q'(R)}{Q(R)} ds \delta h = - \frac{1}{2\pi} \frac{Q'(R)}{Q(R)} d\alpha \delta h$$

et cette expression, pour $R = 0$, se réduit à $-\frac{1}{2\pi} \frac{Q'(0)}{Q(0)} d\alpha \delta h$

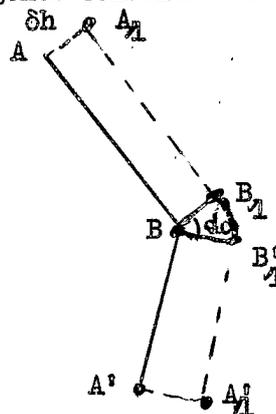
Ces deux cas de figure permettent de reconstituer la loi générale. Considérons, en effet, le cercle de centre R comme limite de polygones convexes. L'élément ds se schématise comme deux petits segments de droite dont les normales font un angle $d\alpha$.

L'évènement auquel nous nous intéressons

"A B A' est dans les pores, mais le polygone

A A₁ B₁ B'₁ A'₁ A'' B rencontre un grain"

se décompose en trois évènements



exclusifs au premier ordre (A B A' étant dans les pores) :

- 1 grain présente dans A A₁ B₁ B son point limite relativement à AB
- " " " " A' A' B' B " " A' B
- un grain présente dans le secteur B B₁ B' son point le plus proche de B.

Au premier ordre, les probabilités de ces trois événements sont additives. On a donc :

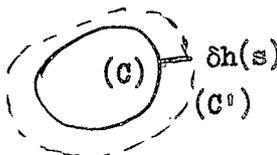
$$\varphi(R) ds \delta h = \theta ds \delta h - \frac{1}{2\pi} \frac{Q'(0)}{Q(0)} dx \delta h$$

D'où

$$(8) \quad \phi(R) = \theta - \frac{1}{2\pi R} \frac{Q'(0)}{Q(0)}$$

Compte tenu de (7), on obtient Q(R) par une quadrature immédiate. Mais, en fait, on peut déduire directement de (8) l'expression de Q(S) pour un ensemble S convexe quelconque. En effet, soit S' un ensemble convexe contenant S, très voisin de S, et $\delta h(s)$ la distance à C' du point de C d'abscisse curviligne s. On a :

$$Q(S) - Q(S') = -\delta Q(S) = Q(S) \int_C \phi(R) ds \delta h(s) = Q(S) \int_C \theta \delta h(s) \delta s - \frac{Q(S)}{2\pi} \frac{Q'(0)}{Q(0)} \int_C \delta h(s) dx$$



$$= Q(S) \left[\theta \delta s - \frac{1}{2\pi} \frac{Q'(0)}{Q(0)} \delta(2L) \right]$$

Ceci s'intègre immédiatement sous la forme :

$$Q(S) = c e^{-\theta S + \frac{1}{2\pi} \frac{Q'(0)}{Q(0)} 2L}$$

Il suffit de prendre un homothétique infiniment petit de S pour obtenir C = Q(0) = q. D'où :

$$Q(S) = q e^{-\theta S + \frac{1}{2\pi} \frac{Q'(0)}{Q(0)} 2L}$$

Posant

$$(9) \quad m_1 = - \frac{1}{2\pi\theta} \frac{Q'(0)}{Q(0)}$$

On obtient la relation :

$$(10) \quad Q(S) = q e^{-\theta S - 2 m_1 \theta \mathcal{L}}$$

qui généralise (2).

Interprétons le coefficient m_1 dans le cas du schéma booléen à grains convexes.

Prenons pour S un segment de droite de longueur l , -
donc un ensemble convexe de surface nulle et de périmètre $2l$. La formule (10) se réduit à :

$$Q(l) = q e^{-2 m_1 \theta l}$$

D'autre part, on sait (cf. Granulométries en place et milieux poreux aléatoires) que l'on a :

$$Q(l) = q e^{\theta K'(0)l}$$

- $K'(0)$ étant l'espérance mathématique du diamètre apparent du grain convexe primaire. Par identification

$$(11) \quad 2 m_1 = -K'(0)$$

on voit que $2 m_1$ est l'espérance mathématique du diamètre apparent du grain convexe primaire. Dans le cas du schéma circulaire, on avait obtenu directement m_1 comme premier moment de la granulométrie, c'est-à-dire comme espérance mathématique du rayon du grain circulaire primaire. Ainsi, la formule généralisée (10) conserve intégralement la signification géométrique des paramètres qui y figurent.

Enfin, de (7) et de (10) on déduit immédiatement la loi liée du premier point de contact sous la forme

$$\varphi(s) ds \delta h = \theta \left(1 + \frac{m_1}{R} \right) ds \delta h = \theta ds \delta h + \theta m_1 dx \delta h$$

qui généralise exactement (3).

III.- LOI DU PREMIER POINT DE CONTACT - 3 DIMENSIONS.

Les résultats du paragraphe précédent se transposent dans le cas à trois dimensions, moyennant quelques complications provenant essentiellement du fait qu'il y a maintenant deux rayons de courbures principaux R_1 et R_2 à considérer en chaque point de la surface limite S d'un volume convexe V . Nous étudierons en premier lieu le schéma à grains sphériques, et ensuite le schéma semi-markovien fort le plus général.

a/ Préliminaires Géométriques.

Soit V un volume convexe, S sa surface limite et $dS = ds_1 ds_2$ un élément d'aire de S construit selon les éléments d'arcs ds_1, ds_2 pris selon les lignes de courbure, R_1 et R_2 les deux rayons de courbure correspondants.

Soit $dS' = ds'_1 ds'_2$ l'élément de la surface parallèle obtenue en déplaçant les points de dS de la longueur h dans la direction de la normale. On a :

$$\frac{ds_1}{R_1} = \frac{ds'_1}{R_1+h} \qquad \frac{ds_2}{R_2} = \frac{ds'_2}{R_2+h}$$

D'où :

$$dS' = ds'_1 ds'_2 = \left(1 + \frac{h}{R_1}\right) \left(1 + \frac{h}{R_2}\right) ds_1 ds_2$$

Soit :

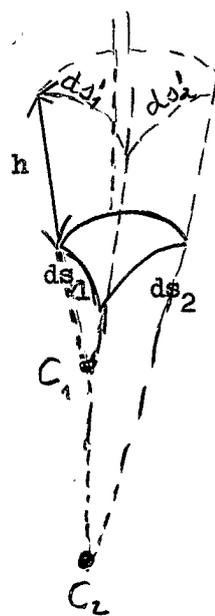
$$dS' = \left[1 + h \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{h^2}{R_1 R_2} \right] dS$$

Cette formule laisse prévoir que la courbure moyenne $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ et la courbure totale $\frac{1}{R_1 R_2}$ vont jouer un rôle déterminant.

Soient V et V' deux volumes convexes avec $V \subset V'$, tels que $\delta h(M)$ soit la distance, très petite, du point M de la surface S de V à la surface S' de V' . Intéressons-nous aux variations du volume et de la surface :

$$\delta V = V' - V$$

$$\delta S = S' - S$$



pour une fonction $\delta h(M)$ quelconque définie sur S . On a, en premier lieu :

$$\delta V = \iint_S \delta h(M) dS$$

En deuxième lieu, on déduit de (12) la variation de S :

$$(13) \quad \delta S = \iint_S \delta h \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS$$

Ainsi $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS \delta h$ est la variation élémentaire de la surface limite.

Nous nous intéresserons spécialement à l'intégrale de la courbure moyenne, quantité ayant la dimension d'une longueur que nous désignerons par $2a$:

$$(14) \quad 2a = \iint_S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS$$

Cherchons la variation de l'élément :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS = d\alpha_1 ds_2 + d\alpha_2 ds_1$$

Les angles $d\alpha_1$ et $d\alpha_2$ ne varient pas, tandis que les arcs ds_1 et ds_2 ont les variations :

$$\delta ds_1 = \delta h d\alpha_1$$

$$\delta ds_2 = \delta h d\alpha_2$$

D'où

$$\delta \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS \right] = 2 \delta h d\alpha_1 d\alpha_2 = 2 \delta h \frac{ds_1}{R_1} \frac{ds_2}{R_2}$$

Rappelons la formule de Gauss :

$$d\omega = \frac{dS}{R_1 R_2}$$

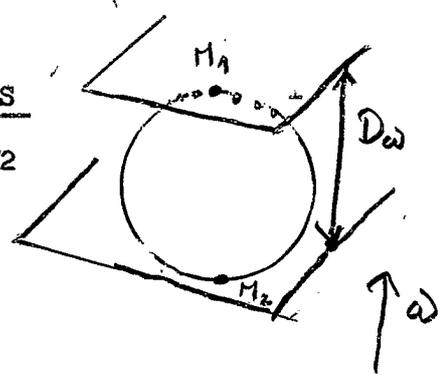
reliant la courbure totale à l'élément d'angle solide $d\omega$ balayé par les normales. Il vient :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS \right] &= 2 \delta h d\omega = 2 \delta h \frac{dS}{R_1 R_2} \\ \delta(2A) &= 2 \iint_S \delta h d\omega = 2 \iint_S \frac{\delta h dS}{R_1 R_2} \end{aligned} \right.$$

Diamètre apparent moyen

Dans chaque direction ω , le volume convexe possède un diamètre apparent D_ω .
Soit D_0 le diamètre apparent moyen :

$$D_0 = \frac{A}{4\pi} \iint_S D_\omega d\omega = \frac{A}{4\pi} \iint_S D_\omega \frac{dS}{R_1 R_2}$$



Dans la variation $\delta h(M)$, on a :

$$\delta D_\omega = \delta h(M_1) + \delta h(M_2)$$

M_1 et M_2 désignant les points de S ayant leurs normales dans la direction ω .
On en déduit (théorème de MINKOWSKI):

$$\delta D_0 = \frac{2}{4\pi} \iint_S \frac{\delta h dS}{R_1 R_2} = \frac{1}{4\pi} \delta(2A)$$

et, par une intégration immédiate

$$(16) \quad D_0 = \frac{2A}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS$$

b/ Cas du schéma booléen à grains sphériques.

Soit à calculer la probabilité $Q(V)$ pour que le volume V soit contenu dans les pores. On écrit tout d'abord qu'aucun grain n'a germé dans V : probabilité $e^{-\theta V}$. Ensuite, pour chaque élément dS de la surface, on écrit qu'aucun grain sphérique germé dans le volume extérieur balayé par les normales à dS n'a atteint l'élément dS , ce qui a lieu, d'après (12), avec la probabilité :

$$e^{-\int_S \theta \int_0^\infty [1 - F(h)] dS' dh} = e^{-\int_S \theta dS \int_0^\infty [1 - F(h)] \left[1 + h \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{h^2}{R_1 R_2} \right] dh}$$

$$= e^{-\int_S \theta dS \left[m_1 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{m_3}{3} \frac{1}{R_1 R_2} \right]}$$

m_1, m_2 et m_3 désignant les 3 premiers moments de la granulométrie. Il vient ainsi :

$$Q(V) = e^{-\frac{4}{3}\pi m_3 \theta - m_1 \theta S - m_2 \theta A - \theta V}$$

ou, en introduisant la porosité

$$q = e^{-\frac{4}{3}\pi m_3 \theta}$$

$$(16) \quad Q(V) = q e^{-\theta V - m_1 \theta S - m_2 \theta A}$$

Loi du point de contact.

Calculons maintenant la probabilité $\Phi(M) dS \delta h$ pour que l'élément de volume $dS \delta h$ rencontre un grain lorsque l'on sait que V est dans les pores. On écrit qu'un grain a germé dans le volume engendré par les normales extérieures de dS et possède un rayon égal à sa distance x à dS , d'où

$$\begin{aligned} \Phi(M) dS \delta h &= \theta \delta h \int_0^V dS' dF(x) \\ &= \theta dS \delta h \int_0^\infty \left[1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) h + \frac{h^2}{R_1 R_2} \right] dF \\ &= \theta dS \delta h \left[1 + m_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{m_2}{R_1 R_2} \right] \end{aligned}$$

D'où :

$$(17) \quad \Phi(M) = \theta \left[1 + m_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{m_2}{R_1 R_2} \right]$$

On observe une circonstance analogue au phénomène déjà signalé dans le cas à deux dimensions : les lois $Q(V)$ et $\Phi(M)$ ne dépendent de la granulométrie primaire que par l'intermédiaire de ses trois premiers moments, et de la géométrie du volume convexe V que par l'intermédiaire de ses rayons de courbure, pour $\Phi(M)$, et des trois quantités V, S et \mathcal{A} pour $Q(V)$. Ce résultat remarquable peut s'étendre au cas du schéma semi-markovien fort le plus général.

c/- Cas du schéma semi-markovien fort.

Par des raisonnements très analogues à ceux qui ont déjà été faits, pour les schémas à deux dimensions, on déduit de la propriété semi-markovienne forte que la loi liée $\Phi(M)$ du point de contact ne dépend, en réalité, que des deux rayons de courbure R_1 et R_2 en M à la surface limite S du volume convexe V . Ceci ne suffit pas, cependant, pour affirmer que cette loi est de la forme (17). On est conduit à envisager les trois cas de figure élémentaires ci-dessous :

1/- Soit un élément de volume $dS \delta h$ construit sur un élément d'aire plane dS parallèle à un plan P . Dans un schéma booléen, la probabilité pour qu'il existe un grain dont le point limite relativement à la direction du plan P tombe dans $dS \delta h$ est $\theta dS \delta h$. On le voit exactement comme dans le cas à deux dimensions, en remplaçant le schéma primaire par un schéma où ce point limite coïncide avec la position du germe. Dans un schéma semi-markovien fort, cette probabilité est encore de la forme $\theta ds \delta h$, θ étant une constante (qu'on ne peut plus interpréter comme densité de germes).



2/- Soit un petit cylindre de révolution, de rayon δR et de hauteur dx ayant une droite D comme axe. La probabilité pour qu'il existe un grain dont le point limite relativement à D (i.e : le point de contact avec ce grain du premier cylindre de révolution d'axe D le rencontrant) tombe dans le petit cylindre



$d x \delta R$ est de la forme $\lambda dx \delta R$, la constante λ étant indépendante de la direction D à cause de l'isotropie.

Plus précisément, la probabilité pour que ce point limite tombe dans un secteur cylindrique d'angle $d\alpha$ découpé dans ce petit cylindre est égale à :

$$\frac{\lambda}{2\pi} dx \delta R d\alpha$$

3/-

Soit une sphère de centre O , de rayon très petit δR . La probabilité pour qu'il existe un grain dont le point limite relativement à O (i.e : le point de ce grain situé à distance minimale de O , O n'appartenant pas à ce grain) est de la forme $\mu \delta R$, où μ est une constante. Plus précisément, en raison de l'isotropie, la probabilité pour que ce point limite tombe dans l'angle solide $d\Omega$ limité à cette petite sphère, est égale à :

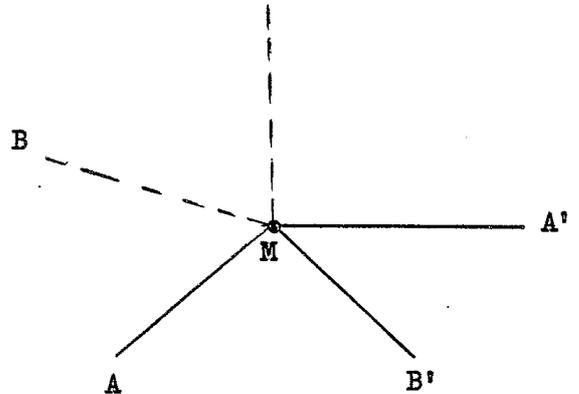
$$\mu \delta R \frac{d\Omega}{4\pi}$$

A partir de ces trois cas de figure élémentaires, on peut reconstruire la formule (17) dans le cas général. On considère pour cela la surface S comme limite de polyèdres dont les faces sont construites sur les lignes de courbure. En un point M de S les lignes de courbure sont remplacées par les angles très plats $A M A'$ et $B M B'$. La rotation des normales selon $A M A'$ et $B M B'$ est égale à :

$$d\alpha = \frac{ds_1}{R_1} \quad d\beta = \frac{ds_2}{R_2}$$

respectivement. La loi $\phi(M)$ se construit facilement. Pour qu'un grain possède un

point limite dans le volume de hauteur δh construit sur le tétraèdre plat $MAA'BB'$, il faut qu'il possède un point limite soit par rapport à une des faces AMB , etc ..., soit par rapport à une des arêtes, soit par rapport au sommet M .



- La première éventualité, d'après le cas de figure élémentaire n°1, a la probabilité $\theta dS \delta h$

- La deuxième éventualité correspond au cas de figure n°2. Pour l'arête MA , la rotation de la normale principale selon la deuxième ligne de courbure $B'MB$ étant

$d\beta = \frac{ds_2}{R_2}$, on obtient la probabilité :

$$\frac{\lambda}{2\pi} MA \delta h \frac{ds_2}{R_2}$$

et, pour l'ensemble des quatre arêtes :

$$\frac{\lambda}{2\pi} \delta h \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ds_1 ds_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \delta h \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS$$

- La troisième éventualité correspond au cas de figure n° 3. Comme les normales à dS engendrent l'angle solide $d\omega = \frac{dS}{R_1 R_2}$, on obtient cette fois la probabilité :

$$\frac{1}{4\pi} \mu \delta h d\omega = \frac{1}{4\pi} \mu \delta h \frac{dS}{R_1 R_2}$$

Finalement, il vient :

$$(18) \quad \phi(M) = \theta + \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R_1 R_2}$$

Pour parfaire l'analogie avec (17) on posera :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = \frac{\lambda}{2\pi \theta} \\ m_2 = \frac{\mu}{4\pi \theta} \end{array} \right.$$

D'où :

$$(20) \quad \phi(M) dS \delta h = \theta \left[1 + m_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{m_2}{R_1 R_2} \right] dS \delta h$$

La loi $Q(V)$ - probabilité pour que V soit dans les pores - s'en déduit. En effet, pour une variation $\delta h(M)$ du volume convexe V , on obtient en intégrant (20)

$$-\delta Q(V) = Q(V) \iint_S \phi(M) dS \delta h$$

Utilisant les relations géométriques (13) et (15), nous trouvons

$$-\delta Q(V) = Q(V) \left[\theta \delta V + \theta m_1 \delta S + m_2 \delta a \right]$$

ce qui s'intègre immédiatement :

$$Q(V) = c e^{-\theta V - m_1 \theta S - m_2 \theta a}$$

Il suffit de faire tendre V homothétiquement vers 0 pour trouver $C = q$.

Par suite, on a bien

$$(21) \quad Q(V) = q e^{-\theta V - m_1 \theta S - m_2 \theta A}$$

Interprétation des paramètres m_1 et m_2 dans le cas du schéma booleen à grains convexes.

Montrons maintenant que les paramètres m_1 et m_2 que nous avons introduit possèdent la même interprétation granulométrique que dans le cas des grains sphériques : dans ce dernier cas, $2 m_1$ et πm_2 étaient les espérances mathématiques du diamètre apparent et du contour apparent d'un grain sphérique primaire. Cette interprétation subsiste ici. Pour le voir, considérons le cas où le volume V se réduit à une aire plane convexe de surface S' . On a $V = 0$ et $S = 2 S'$ (parce qu'on doit compter dans S les deux "faces" de l'aire plane S'). Calculons A .

La formule générale

$$A = \frac{1}{2} \iint_S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS = \frac{1}{2} \iint_S (ds_2 d\alpha_1 + ds_1 d\alpha_2)$$

se simplifie ici. En effet, dans S' on a $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$. L'intégrale s'effectue, en réalité, sur le contour C de S' . L'un des rayons de courbure (R_1 par exemple) y est nul, et l'autre infini : le terme $ds_1 d\alpha_2$ donne 0 , tandis que l'autre se réduit à

$$\frac{1}{2} \int_C \pi ds$$

puisque la rotation de la normale est égale à π lorsque l'on passe d'une face de S' à l'autre. Finalement, il vient :

$$A = \pi L$$

$2L$ désignant, comme toujours, le périmètre de C (contour de S'). Ainsi, on a :

$$(22) \quad Q(S') = q e^{-2m_1 \theta S' - \pi m_2 \theta L}$$

Particularisons davantage encore, en prenant pour S' un segment de droite de longueur l : ici $S' = 0$ et $l = L$, de sorte que l'on a :

$$Q(l) = q e^{-\pi m_2 \theta l}$$

Or on sait que $q(l)$ est de la forme

$$q(l) = q e^{+ \theta K'(0) l}$$

où $- K'(0)$ est l'espérance mathématique de l'aire du contour apparent du grain convexe primaire. L'identification

$$\pi m_2 = - K'(0)$$

montre que l'expression πm_2 possède bien la signification géométrique qui était déjà la sienne dans le cas des schémas à grains sphériques.

Pour interpréter le paramètre m_1 , nous considérerons le schéma booléen à grains convexes induit sur un plan. Désignons par θ', m_1' etc ... les paramètres de ce schéma induit à 2 dimensions. La densité θ' de germes induits se déduit de θ et de l'espérance mathématique $E(D)$ du diamètre apparent du grain convexe primaire à 3 dimensions par la relation :

$$(23) \quad \theta' = \theta E(D)$$

Mais la relation (10) s'applique au schéma à 2 dimensions, d'où :

$$(24) \quad q(S') = q e^{-\theta' S' - 2 m_1' \theta' \mathcal{L}}$$

identifiant (22) et (24), on obtient :

$$(25) \quad \theta' = 2 m_1' \theta$$

Comparant à (23), il vient $2 m_1' = E(D)$: L'expression $2 m_1'$ représente l'espérance mathématique du diamètre apparent du grain convexe primaire exactement comme dans le cas du schéma à grains sphériques.

Remarque - L'identification de (22) et de (24) permet de généraliser certaines des règles de passage d'une granulométrie induite à la granulométrie originelle, telles qu'elles ont été établies par ailleurs dans le cas des grains sphériques. Identifiant les termes en \mathcal{L} , nous obtenons :

$$2 m_1' \theta' = \pi m_2 \theta$$

soit, compte tenu de (25) :

$$(26) \quad m_1' = \frac{\pi}{4} \frac{m_2}{m_1}$$

Cette relation est identique à celle qui donne le premier moment de la granulométrie induite en fonction des deux premiers moments de la granulométrie originelle des grains sphériques. Mais elle s'applique ici à des grains convexes de formes quelconques (sous réserve qu'il y ait isotropie statistique, c'est-à-dire par exemple que ces grains soient orientés au hasard).

Ecrire sous la forme

$$\pi m_2 = (2 m_1')(2m_1)$$

Cette relation permet d'énoncer la propriété suivante :

L'espérance mathématique de l'aire du contour apparent du grain convexe primaire est égale au produit des espérances mathématiques des diamètres apparents du grain primaire et du grain induit.

D'autre part, si l'on désigne par

$$K(0) = \frac{4}{3} \pi m_3$$

l'espérance mathématique du volume du grain primaire, l'identification

$$q = e^{-\frac{4}{3} \pi m_3 \theta} = e^{-\pi m_2' \theta'}$$

donne

$$\theta_{m_3} = \frac{3}{4} \theta' m_2'$$

Compte tenu de (25), on obtient :

$$(27) \quad m_2' = \frac{2}{3} \frac{m_3}{m_1}$$

On reconnaît en (27) un deuxième cas particulier de la formule

$$m_\alpha' = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2})} \frac{m_{\alpha+1}}{m_1}$$

établie dans le cas des grains sphériques. Ecrire sous la forme

$$\frac{4}{3} \pi m_3 = (\pi m_2') (2 m_1)$$

cette même formule permet d'énoncer la propriété suivante :

L'espérance mathématique du volume du grain primaire est égal au produit des es-

espérances mathématiques du diamètre apparent du grain primaire et de l'aire du grain induit.

En dernier lieu considérons la covariance.

$$C(h) = Q(x, x + h)$$

ou probabilité pour que les deux points x et $x + h$ soient dans les pores. Elle a évidemment même valeur dans les schémas booléens originel et induit. Désignons par $K_3(h)$ et $K_2(h)$ les espérances mathématiques du volume (de l'aire) de l'intersection d'un grain primaire avec son translaté par h dans le schéma originel à 3 dimensions et dans le schéma induit à deux dimensions. L'identification

$$C(h) = q^2 e^{\theta K_3(h)} = q^2 e^{\theta K_2(h)}$$

donne

$$\theta K_3(h) = \theta K_2(h)$$

d'où, compte tenu de (25)

$$(28) \quad K_3(h) = 2 m_1 K_2(h)$$

En faisant $h = 0$, on retrouve (27). Dérivant en h et faisant ensuite $h = 0$ on retrouve (26). Ainsi, la formule unique (28) résume les résultats obtenus en ce qui concerne le passage de la granulométrie originelle à la granulométrie induite.

Remarque.- Loi du nombre de grains primaires rencontrés.

Soit un schéma booléen (à grains quelconques) et un ensemble B quelconque. Désignant par $\chi_\xi(B)$ la probabilité pour que B ne rencontre pas un grain primaire germé en ξ , on sait que :

$$p_0 = Q(B) = e^{-\theta \int [1 - \chi_\xi(B)] d\xi}$$

est la probabilité pour que B ne rencontre aucun grain après passage en booléen. Calculons de même la probabilité p_1 pour que B rencontre un grain primaire exactement. Cet événement est somme des événements suivants :

" un grain a germé en ξ et a rencontré B , aucun autre grain n'a rencontré B "

de probabilité

$$Q(B) [1 - \chi_\xi(B)] \theta d\xi$$

D'où

$$p_1 = \theta \int [1 - \chi_\xi(B)] d\xi Q(B)$$

De même, soit p_n la probabilité pour que B rencontre exactement n grains primaires. Cet évènement est somme d'évènements du type

" n grains ont germé aux points $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ et rencontré B, aucun autre grain n'a rencontré B "

de probabilité

$$Q(B) \left[1 - \chi_{\xi_1}(B) \right] \dots \left[1 - \chi_{\xi_n}(B) \right] \theta^n d\xi_1 \dots d\xi_n$$

On doit sommer ces probabilités pour toutes les positions de $\xi_1 \dots \xi_n$, en prenant garde que l'évènement relatif aux grains germés en $\xi_1 \dots \xi_n$ est ainsi compté $n!$ fois. D'où

$$p_n = \frac{\theta^n}{n!} \left[\int \left[1 - \chi_{\xi}(B) \right] d\xi \right]^n Q(B)$$

Ainsi le nombre de grains primaires rencontrés par B est une variable de Poisson de paramètre

$$\lambda = \theta \int \left[1 - \chi_{\xi}(B) \right] d\xi$$

Dans le cas particulier où le schéma booléen est à grains convexes et où B est lui-même convexe, on a, d'après les paragraphes précédents, les expressions très simples suivantes pour λ , selon que l'espace est à 2 ou 3 dimensions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \theta \left[S + 2 m_1 L + \pi m_2 \right] \\ \lambda = \theta \left[V + m_1 S + m_2 a + \frac{4}{3} \pi m_3 \right] \end{array} \right.$$

Si B se réduit à un point, on voit, q désignant la porosité, que pour un schéma booléen quelconque la probabilité pour qu'un point appartienne à l'intersection de n grains primaires est égal à :

$$p_n = \frac{1}{n!} \left(\log \frac{1}{q} \right)^n q$$

IV.- LE SCHEMA ISOTROPE A CANALICULES INDEPENDANTS.

Un tel schéma, où les canalicules (qui jouent le rôle des pores) sont mis en place indépendamment les uns des autres est un cas particulier de schéma booléen à grains convexes, à ceci près que l'on doit échanger les rôles des grains et des pores. Ici, en effet, ce sont les pores convexes (les canalicules) qui sont implantés indépendamment dans le milieu initialement plein. Autrement dit, ce milieu possède la propriété semi-markovienne forte relativement aux grains. La granulométrie des traversées des grains sera donc exponentielle et, plus généralement, la probabilité $P(B)$ pour qu'un ensemble convexe B soit contenu dans les grains sera donnée par les formules exponentielles des paragraphes précédents. Pour réduire les calculs, nous nous limiterons au cas à deux dimensions, mais le cas à 3 dimensions pourrait être traité de manière analogue.

A proprement parler, les canalicules étant infinis, la densité de germes θ est nulle. Pour définir le schéma de manière précise, nous désignerons par $F_\alpha(\ell)$ la probabilité pour que la largeur d'un canalicule de direction α soit inférieure à ℓ (granulométrie primaire des canalicules), et par $\lambda_\alpha d\alpha$ la densité poissonnienne (infinitement petite) du schéma induit, sur un axe $x'x$ perpendiculaire à la direction α des canalicules, par l'axe (ou l'un des bords) des canalicules. Nous limitant au cas isotrope, nous supposerons que

$$F_\alpha(\ell) = F(\ell)$$

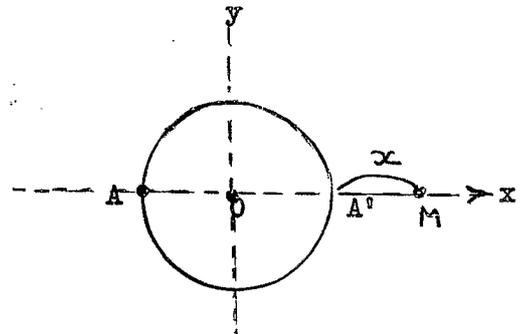
$$\lambda_\alpha = \lambda$$

ne dépendent pas de α .

Calculons alors $P(R)$, probabilité pour qu'un cercle de rayon R ne rencontre aucun canalicule. Raisonnons d'abord sur les canalicules de direction α prise comme axe des y . Aucune extrémité droite ne doit

germer entre A et A' : probabilité $e^{-2R\lambda d\alpha}$. A droite de A' , en tout point M distant de x de A' on écrit qu'aucune extrémité droite n'a germé ou, si une extrémité droite a germé, que la largeur du canalicule est inférieure à x : probabilité

$$1 - \lambda dx d\alpha + \lambda dx d\alpha F(x) = e^{-\lambda d\alpha [1 - F(x)] dx}$$



Finalement, aucun canalicule de direction α ne rencontre le cercle avec la probabilité

$$e^{-2R\lambda d\alpha - \lambda d\alpha \int_0^{\infty} [1-F(x)] dx} = e^{-\lambda(\ell + 2R)d\alpha}$$

Nous désignons par ℓ la largeur moyenne des canalicules

$$\ell = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} [1-F(x)] dx$$

Intégrant ensuite en α de 0 à π , il vient

$$(29) \quad P(R) = e^{-2\pi\lambda R - \pi\lambda\ell}$$

Pour $R = 0$, nous obtenons la probabilité p pour qu'un point soit dans les grains

$$(30) \quad p = P(0) = e^{-\pi\lambda\ell}$$

Elle ne dépend que de la largeur moyenne ℓ des canalicules, et non de leur granulométrie. Finalement (29) est remplacé par :

$$(31) \quad P(R) = p e^{-2\pi\lambda R}$$

Le milieu étant semi-markovien fort, on a, d'après (10), pour tout ensemble convexe de surface S et de périmètre $2\mathcal{L}$

$$P(S) = p e^{-\theta S - 2m_1\theta\mathcal{L}}$$

En identifiant à (30), on voit que $\theta = 0$, ce qui était évident a priori, et que $m_1\theta$ coïncide avec λ . Finalement

$$(32) \quad P(S) = p e^{-2\lambda\mathcal{L}}$$

$P(S)$ ne dépend que du périmètre de l'ensemble convexe S . Pour un segment de droite de longueur h , il vient

$$(33) \quad P(h) = p e^{-2\lambda h}$$

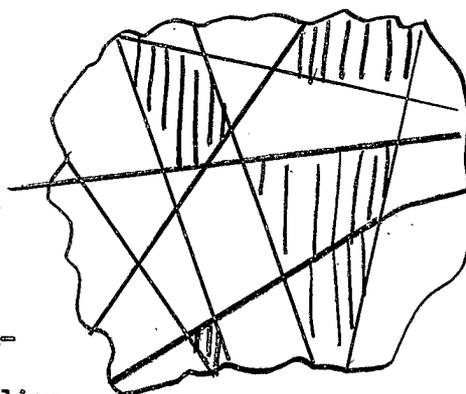
et l'on voit ainsi que la granulométrie des traversées des grains (en nombre) est donnée par l'exponentielle $e^{-2\lambda h}$. Elle est indépendante de la granulométrie des canalicules et ne dépend que de leur densité poissonnienne λ . La granulométrie des canalicules n'intervient que par sa valeur moyenne dans la formule (30) donnant la probabilité p .

D'où cette conclusion d'apparence paradoxale : si l'on augmente de manière d'ailleurs quelconque la largeur des canalicules, on diminue le nombre des grains (on dimi-

nue p) mais on ne modifie pas la granulométrie des traversées des grains. Celle-ci est en particulier la même si $\ell = 0$ ($p = 1$) c'est-à-dire si les canalicules sont réduits à des droites de largeur nulle.

V.- EXEMPLE D'UN SCHEMA MARKOVIEEN QUI N'EST PAS MARKOVIEEN FORT.

Supposons que les canalicules du paragraphe précédent soient infiniment minces, c'est-à-dire réduits à des droites. On obtient ainsi une partition du plan en polygones convexes aléatoires. Pour chacun de ces polygones tirons au sort, indépendamment des autres, son appartenance aux " grains " ou aux " pores ". Soit p la probabilité pour qu'un polygone appartienne aux grains, et $q = 1 - p$ la probabilité pour qu'il appartienne aux pores. On obtient ainsi un schéma de milieu



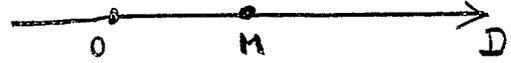
poreux, bien différent des précédents, où les grains et les pores jouent des rôles symétriques. Nous allons montrer que ce schéma possède la propriété semi-markovienne à la fois vis-à-vis des grains et vis-à-vis des pores. Cela signifie exactement que ce schéma induit sur toute droite D du plan un processus de Markov à deux états. Un schéma possédant cette propriété sera dit markovien. Mais nous verrons que le schéma markovien ainsi défini ne possède pas la propriété markovienne forte (en particulier les résultats des paragraphes 2 et 3 ne lui sont pas applicables)

Schéma induit sur une droite D.

Sur une droite D donnée, les points de séparation, c'est-à-dire les intersections de D avec les droites aléatoires du schéma, dessinent un processus poissonien. En effet, les canalicules de direction α donnent un schéma poissonien de paramètre $\lambda \sin \alpha d \alpha$ (on a pris la direction de D comme origine pour les angles α). La somme de ces processus de Poisson est un processus de Poisson de paramètre

$$\mu = \lambda \int_0^\pi \sin \alpha d \alpha = 2 \lambda$$

Le schéma induit est alors manifestement markovien. Soit, en effet, un point 0 de D dont on sait qu'il est, par exemple, dans les grains, et un point M situé à droite de 0. Quels que soient les renseignements disponibles à gauche de 0, deux circonstances seulement sont possibles :



- ou bien aucun point de séparation n'est tombé entre 0 et M, et alors nécessairement M est dans les grains (probabilité $e^{-\mu h}$ avec $h = 0M$),
- ou bien un point au moins de séparation est tombé entre 0 et M (probabilité $1 - e^{-\mu h}$)
La probabilité pour que M soit dans les grains est alors p.

Finalement, 0 étant dans les grains, et quels que soient les événements connus à gauche de 0, la probabilité pour que M soit dans les grains est :

$$P(M \in A / 0 \in A) = e^{-\mu h} + p(1 - e^{-\mu h}) = p + q e^{-\mu h}$$

Ainsi, le schéma induit est le processus de Markov ayant la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} q + p e^{-\mu h} & p - p e^{-\mu h} \\ q - q e^{-\mu h} & p + q e^{-\mu h} \end{pmatrix}$$

Les granulométries des traversées des grains et des pores sont toutes deux exponentielles. Calculons, par exemple, la probabilité $P(h)$ pour que le segment de longueur h soit dans les grains. Soient 0 et H ses extrémités. On doit faire la somme des événements : " n points de séparations tombent entre 0 et H, et chacun des n + 1 segments ainsi délimités sont dans les grains " de probabilités.



$$p^{n+1} \frac{(\mu h)^n}{n!} e^{-\mu h}$$

D'où

$$P(h) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{n+1} \frac{(\mu h)^n}{n!} e^{-\mu h} = p e^{-q \mu h}$$

De même, la granulométrie des pores se déduira de

$$Q(h) = q e^{-p \mu h}$$

Montrons maintenant que ce schéma markovien n'est pas markovien fort. En effet, s'il était markovien fort on obtiendrait, pour tout ensemble convexe S , le moment fonctionnel $Q(S)$ sous la forme

$$(34) \quad Q(S) = q e^{-\pi \lambda^2 p q^2 S - 2 p \lambda L}$$

Cette expression s'obtient facilement par des raisonnements calqués sur ceux du paragraphe II. Mais on a aussi :

$$(35) \quad Q(S) = \sum_{N=1}^{\infty} p_N q^N$$

où p_N désigne la probabilité pour que les droites aléatoires divisent S en N quartiers. Les p_N sont évidemment indépendants de p et q . Si l'on remplace q par s , $Q(S)$, en tant que fonction de s , coïncide donc avec la fonction génératrice $\Phi(s)$ du nombre N de quartiers. Si donc le schéma était semi-markovien fort, et si par suite la relation (34) était vraie, on aurait

$$\Phi(s) = s e^{-\pi \lambda^2 S s^2 + \pi \lambda^2 S s^3 - 2 \lambda L + 2 \lambda L s}$$

On vérifiera facilement que cette expression n'est pas une fonction génératrice (le coefficient du terme en s^4 peut être négatif). Par suite le schéma n'est pas markovien fort.

Loi des arêtes, des noeuds et des quartiers.

Etant donné un domaine convexe S , désignons par

- a le nombre des arêtes interceptées par S
- n " " noeuds contenus dans S
- N " " quartiers en lesquels S est divisé par les arêtes.

Par arête, on entend une droite aléatoire du schéma, et par noeud l'intersection de deux arêtes. Un raisonnement immédiat donne :

$$(36) \quad N = 1 + n + a$$

Si l'on connaissait la loi simultanée des arêtes et des noeuds, on en déduirait la loi de N et par suite, d'après (35), le moment $Q(S)$.

La loi du nombre α d'arêtes s'obtient facilement. En effet, si D_α désigne le diamètre apparent de S dans la direction α , le nombre d'arêtes de direction α interceptées par S est une variable de Poisson de paramètres λD_α d α . Le nombre total α d'arêtes interceptées est donc une variable de Poisson de paramètre :

$$(37) \quad \lambda \int_0^\pi D_\alpha d\alpha = 2\lambda L = \mu L$$

Ainsi la probabilité d'avoir α arêtes est $\frac{(\mu L)^\alpha}{\alpha!} e^{-\mu L}$

Désignons par $P_{n,\alpha}$ la probabilité d'avoir n noeuds, conditionnellement lorsqu'il y a α arêtes, et par $\Phi_\alpha(s)$ la fonction génératrice correspondante

$$\Phi_\alpha(s) = \sum P_{n,\alpha} s^n$$

La probabilité P_n d'avoir n noeuds, et la fonction génératrice correspondante sont alors :

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} P_n &= \sum_\alpha \frac{(\mu L)^\alpha}{\alpha!} e^{-\mu L} P_{n,\alpha} \\ \Psi(s) &= \sum_\alpha \frac{(\mu L)^\alpha}{\alpha!} e^{-\mu L} \Phi_\alpha(s) = \sum_n P_n s^n \end{aligned} \right.$$

Enfin la probabilité d'avoir n noeuds et α arêtes est

$$P_{n,\alpha} \frac{(\mu L)^\alpha}{\alpha!} e^{-\mu L}$$

avec la fonction génératrice à 2 variables

$$(39) \quad G(s,t) = \sum_{n,\alpha} P_{n,\alpha} s^n t^\alpha = \sum_\alpha \frac{(\mu L t)^\alpha}{\alpha!} e^{-\mu L} \Phi_\alpha(s)$$

On voit - au facteur $e^{-\mu L}$ près - que $G(s,t)$ se déduit de $\Psi(s)$ en remplaçant μ par μt ($P_{n,\alpha}$ ne dépend pas de μ) :

$$(40) \quad G(s,t) = e^{-\mu L (1-t)} \Psi(s, \mu t)$$

La relation (40) montre qu'il suffirait de connaître la loi Ψ des noeuds pour en déduire la loi G simultanée des noeuds et des arêtes. D'après (36), le nombre N

de quartiers a de son coté la fonction génératrice :

$$s G(s,s) = s e^{-\mu \mathcal{L}(1-s)} \psi(s, \mu s)$$

qui se déduit directement de la loi des noeuds. Enfin, d'après (35) il suffira de remplacer s par q pour obtenir le moment fonctionnel $Q(S)$

$$Q(S) = q e^{-\mu \mathcal{L}(1-q)} \psi(q, \mu q)$$

On vérifiera que l'expression (fausse) écrite en (34) correspond à une loi des noeuds poissonienne de paramètre $\pi \lambda^2 S = \frac{\pi}{4} \mu^2 S$. Il est exact d'ailleurs que $\pi \lambda^2 S$ représente l'espérance mathématique du nombre n des noeuds. Mais les noeuds ne peuvent pas être poissoniens : cela se comprend, d'ailleurs, puisque les noeuds s'alignent sur les arêtes ! leurs implantations ne peuvent pas être indépendantes les unes des autres.

Nous ne connaissons malheureusement pas la forme explicite de cette loi ψ .

G. MATHERON

Août 1965