

B. R. G. M.
Département Géostatistique

N-60

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 63 .

GENESE ET SIGNIFICATION ENERGETIQUE DE LA LOI DE DARCY

Novembre 1965

G. MATHERON

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 63

GENESE ET SIGNIFICATION ENERGETIQUE DE LA LOI DE DARCY

<u>Table des Matières</u>	<u>Pages</u>
<u>Introduction</u>	1
 <u>I.- GENESE DE LA LOI DE DARCY</u>	 2
1.- Niveau granulométrique et équation de Navier	2
2.- Niveau macroscopique et loi de Darcy	3
3.- Système de solutions privilégiées	4
4.- Génèse de la loi de Darcy	5
 <u>II.- SIGNIFICATION ENERGETIQUE DES PERMEABILITES</u>	 7
1.- Introduction des fonctions aléatoires	7
2.- La densité de puissance consommée	9
3.- Symétrie de $Q^{il} \eta_i P^\Delta$	12
4.- Expression des perméabilités macroscopiques K^{ij}	13

GENESE ET SIGNIFICATION ENERGETIQUE DE LA LOI DE DARCY

Résumé

Cette étude tente de montrer pourquoi les écoulements macroscopiquement observables dans un milieu poreux macroscopiquement homogène obéissent nécessairement à la loi de Darcy. On suppose que seuls sont observables, au niveau macroscopique, les écoulements pouvant être considérés comme localement uniformes. Le flux et le gradient de tels écoulements sont des combinaisons linéaires, à coefficients $\vec{w}_l(x)$ lentement variables dans l'espace (à l'échelle de la granulométrie), et l'élimination des $\vec{w}_l(x)$ entre les grandeurs macroscopiques conduit à un système linéaire qui n'est autre que la loi de Darcy.

Dans une deuxième partie, les résultats obtenus sont reformulés en termes de fonctions aléatoires. L'étude de la puissance consommée par les forces de viscosité met en évidence une densité tensorielle W_{ls} dont l'espérance mathématique est proportionnelle à la perméabilité macroscopique K_{ls} , et montre que la matrice des K_{ls} est symétrique et définie positive.

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 63

GENESE ET SIGNIFICATION ENERGETIQUE DE LA LOI DE DARCY

Introduction

On sait que, dans un milieu poreux macroscopiquement homogène, les écoulements de filtration macroscopiquement observables obéissent à la loi de Darcy. Cette loi, purement " phénoménologique " exprime qu'il existe un système de relations linéaires entre les composantes du flux et du gradient de pression. Considéré au niveau granulo-métrique, ce même milieu n'apparaît plus comme homogène, et les écoulements dont il est le théâtre n'obéissent plus à la loi de Darcy, mais à l'équation, moins simple, de Navier. Dans une première partie nous tentons de montrer que la loi de Darcy n'est pas une conséquence de l'équation de Navier, mais résulte d'une condition a priori selon laquelle seuls sont observables, au niveau macroscopique, des écoulements pouvant être considérés comme localement uniformes. Dans une deuxième partie, nous formulons les résultats précédents dans le langage de la théorie des fonctions aléatoires, et nous nous attachons à mettre en évidence la signification énergétique des perméabilités.

I.- GENESE DE LA LOI DE DARCY

L'étude d'un milieu poreux, et des écoulements de filtration dont il est le théâtre, peut être entreprise à différents niveaux, auxquels correspondent différentes échelles d'observation. Outre un niveau microscopique, qui est celui des particules élémentaires, on doit distinguer un niveau granulométrique et un niveau macroscopique.

1/- Niveau granulométrique et équation de Navier

Le niveau granulométrique correspond à des éléments de volume, grands à l'échelle des particules élémentaires, mais petits à l'échelle des dimensions granulométriques. C'est à ce niveau que la mécanique statistique permet de définir la pression $p(x)$ et la vitesse $v^i(x)$ d'un écoulement en tout point x appartenant aux pores. Le milieu lui-même est caractérisé par la porosité ponctuelle $\Omega(x)$, qui est une fonction en tout ou rien, égale à 1 si le point x est dans les pores, et à 0 si le point x est dans les grains. L'écoulement, de son côté, obéit à l'équation de Navier :

$$(1) \quad \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho v^j v_i) - \mu \Delta v_i = -\partial_i p + f_i$$

à laquelle on doit ajouter l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v^i) = 0$$

ρ désignant la masse spécifique du fluide, p la pression, μ la viscosité, et f_i la densité de forces. Dans tous les cas usuels, $f_i = -\partial_i \Phi$ dérive d'un potentiel Φ . Si l'on remplace la pression p par la charge $p + \Phi$, le terme f_i disparaît du second membre de (1). Dans la suite de cette étude, nous prendrons donc $f_i = 0$, et nous désignerons par p la charge elle-même et non plus la pression.

L'équation (1) de Navier n'est pas linéaire, à cause de la présence du terme quadratique en v^j qui figure dans son premier membre. Mais on sait que les écoulements de filtration sont, le plus souvent, suffisamment lents pour que ce terme quadratique puisse être négligé. Si, de plus, l'écoulement est supposé permanent, et le fluide incompressible ($\rho = \text{cte}$), l'équation de Navier et l'équation de continuité, toutes deux linéaires, s'écrivent :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_i p = \mu \Delta v_i \\ \partial_i v^i = 0 \end{array} \right.$$

A ces équations, valables en tout point x des pores, on doit ajouter des conditions aux limites, d'ailleurs extraordinairement complexes, exprimant que la vitesse v_i s'annule à la surface de séparation des grains et des pores.

2/- Niveau macroscopique et Loi de Darcy

Le niveau macroscopique, de son côté, correspond à des éléments de volume grands vis-à-vis des dimensions granulométriques. Les grandeurs macroscopiques sont définies à cette échelle par des moyennes spatiales convenables (ou par des espérances mathématiques) portant sur les quantités analogues déjà introduites au niveau granulométrique. Ce sont la charge P et le flux Q^i . L'opération qui fait passer des grandeurs p, v^i aux quantités macroscopiques P et Q^i sera explicitée par la suite. Pour l'instant, nous noterons simplement que c'est une opération linéaire. Par suite, si l'on connaît n solutions distinctes des équations (2), soient $\partial_j p^l$ et v^{il} ($l=1, 2 \dots n$ dans l'espace à n dimensions) et les quantités macroscopiques correspondantes $\partial_j P^l$ et Q^{il} , pour tout système de constantes ω_l , les quantités

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^i = \omega_l v^{il} \\ \partial_j p = \omega_l \partial_j p^l \end{array} \right.$$

constitueront une solution du système (2), à laquelle correspondront les quantités macroscopiques

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q^i = \omega_l Q^{il} \\ \partial_j P = \omega_l \partial_j P^l \end{array} \right.$$

Supposons maintenant que le milieu poreux puisse être considéré comme homogène au niveau macroscopique. On constate alors, expérimentalement, que tout écoulement observable à ce niveau, obéit à la loi de Darcy. Cette loi, complétée par l'équation de continuité, conduit au système :

$$(5) \quad \begin{cases} Q^i = -K^{ij} \partial_j P \\ \partial_i Q^i = 0 \end{cases}$$

où les K^{ij} constituent les composantes du tenseur des perméabilités.

On sait que la loi de Darcy - relation purement " phénoménologique " - ne peut, en aucune manière, se déduire de l'équation de Navier. Les systèmes (2) et (5) ne présentent aucun lien logique. Leur seul caractère commun est leur linéarité. On soupçonne que l'équation phénoménologique de Darcy doit être une conséquence, non pas de l'équation de Navier (2) elle-même, mais seulement du caractère linéaire de cette équation et de certaines conditions, générales et formelles, auxquelles doit être soumise l'opération de changement d'échelle faisant passer du niveau granulométrique au niveau macroscopique. C'est qu'en effet, n'importe quel écoulement microscopique ne correspond pas à un phénomène macroscopique observable. On peut penser que seuls seront observables macroscopiquement des écoulements pouvant être considérés comme localement uniformes au niveau macroscopique, c'est-à-dire assimilables à des écoulements uniformes pour une échelle intermédiaire, correspondant à des dimensions, peut être petites au niveau macroscopique, mais suffisamment grandes au niveau granulométrique pour que les propriétés du milieu y soient statistiquement homogénéisées par effet d'ergodicité. Un écoulement qui ne serait pas de ce type se présenterait à l'expérimentateur comme la superposition de deux composantes : la première, localement uniforme, vérifierait les exigences formulées ci-dessus. La deuxième apparaîtrait comme une sorte de fourmillement aléatoire de résultante moyenne nulle, c'est-à-dire comme une sorte de turbulence. On sait que les écoulements de filtration sont toujours assez lents pour que de telles turbulences ne se manifestent pas.

3/- Système de solutions privilégiées.

Parmi ces écoulements localement uniformes au niveau macroscopique, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux écoulements rigoureusement uniformes, caractérisés par un flux Q^{il} et un gradient $\partial_j P$ macroscopiques constants. L'espace étant à n dimensions, nous admettrons qu'il existe un système de n solutions indépendantes $\partial_j P^l, v^{il}$ ($l = 1, 2, \dots, n$) de l'équation de Navier correspondant à des écoulements macroscopiques uniformes, c'est-à-dire à des flux Q^{il} et des gradients $\partial_j P^l$ constants. Ces solutions seront dites privilégiées.

Comme les équations (2) sont linéaires, ainsi que l'opération faisant passer du niveau granulométrique au niveau macroscopique, toute combinaison linéaire du type (3) des solutions privilégiées est elle même une solution et représente un écou-

lement macroscopiquement uniforme, le flux et le gradient macroscopiques constants étant donnés par (4).

Il en résulte d'ailleurs un certain arbitraire dans le choix du système des solutions privilégiées, puisque celui-ci n'est défini qu'à une substitution linéaire près. Pour lever cet arbitraire, nous pouvons imposer aux $\partial_j P^\ell$ de coïncider avec les composantes mixtes d'un tenseur choisi d'avance; par exemple le tenseur de Kronecker δ_j^ℓ ($= 0$ si $\ell \neq j$, $= 1$ si $\ell = j$). Alors les relations (3) et (4) prennent une signification tensorielle. En effet, si les ω_ℓ sont les composantes covariantes d'un vecteur quelconque, v^i et $\partial_j p$ - flux et gradient granulométriques associés à l'écoulement dont le gradient macroscopique est le vecteur ω_ℓ $\partial_j P^\ell$ - sont des vecteurs, et par suite $v^{i\ell}$, $\partial_j P^\ell$ et $q^{i\ell}$ sont des tenseurs.

Ces écoulements macroscopiquement uniformes obéissent à la loi de Darcy. On le voit en éliminant les constantes ω_ℓ entre (3) et (4). Si R_ℓ^j désigne le tenseur inverse de $\partial_j P^\ell$, la deuxième relation (4) donne

$$\omega_\ell = R_\ell^j \partial_j P$$

et, en portant dans la première, on obtient

$$q^i = R_\ell^j q^{i\ell} \partial_j P$$

Ceci n'est pas autre chose que la loi de Darcy :

$$(6) \quad q^i = - K^{ij} \partial_j P$$

avec la définition suivante du tenseur des perméabilités :

$$(7) \quad K^{ij} = - R_\ell^j q^{i\ell}$$

4/- Génèse de la Loi de Darcy

Il reste à montrer que des écoulements supposés seulement localement uniformes au niveau macroscopique vérifient encore la loi de Darcy (6) avec l'expression (7) du tenseur des perméabilités. Le flux et le gradient d'un tel écoulement peuvent encore se mettre sous la forme (3), à condition de supposer que les ω_ℓ sont, non plus des constantes, mais des fonctions $\omega_\ell(x)$ qui varient très lentement dans l'es-

pace à l'échelle de la granulométrie. En effet, les dérivées des $\omega_l(x)$ sont alors négligeables vis-à-vis des dérivées correspondantes des solutions privilégiées $v^{il}(x)$ et $\partial_j p^l(x)$ définies au niveau granulométrique, de sorte que les quantités :

$$\left\{ \begin{array}{l} v^i = \omega_l(x) v^{il} \\ \partial_j p = \omega_l(x) \partial_j p^l \end{array} \right.$$

vérifient les équations (2) à ce niveau. Comme $\omega_l(x)$ varie lentement, par hypothèse, les moyennes spatiales permettant de passer de v^i et $\partial_j p$ aux paramètres macroscopiques Q^i et $\partial_j P$ donnent, comme en (4) le résultat suivant :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q^i(x) = \omega_l(x) Q^{il} \\ \partial_j P(x) = \omega_l(x) \partial_j p^l \end{array} \right.$$

et l'élimination des $\omega_l(x)$ conduit encore à la relation (6), c'est-à-dire à la loi de Darcy, avec l'expression (7) des perméabilités.

Naturellement, les fonctions $\omega_l(x)$ ne peuvent pas être quelconques. Elles doivent être telles que, dans (8), $Q^i(x)$ vérifie la relation de conservation et que $\partial_j P(x)$ soit un gradient. Il en est ainsi si, et seulement si, $P(x)$ et $Q^i(x)$ vérifient le système de Darcy :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q^i = -K^{ij} \partial_j P \\ \partial_i Q^i = 0 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire, justement, les équations macroscopiques écrites en (5).

Ainsi, les écoulements localement uniformes au niveau macroscopique vérifient la loi de Darcy, pour la simple raison que les écoulements de ce type s'obtiennent par combinaison linéaire, avec des coefficients $\omega_l(x)$ lentement variables, des n solutions privilégiées réellement uniformes au niveau macroscopique. La loi de Darcy n'est pas du tout une conséquence des équations de Navier. Elle résulte seulement de la linéarité de ces équations, et de certaines conditions a priori selon lesquelles seuls sont observables au niveau macroscopique les écoulements localement uniformes à ce niveau.

II.- SIGNIFICATION ENERGETIQUE DES PERMEABILITES

Nous allons, maintenant, reformuler les résultats obtenus au chapitre précédent dans le langage de la théorie des fonctions aléatoires, ce qui nous permettra d'introduire un symbole E d'espérance mathématique ayant une signification bien définie. L'étude de la densité de puissance consommée par les forces de viscosité mettra ensuite en évidence la signification énergétique des perméabilités, et conduira à certaines propriétés importantes de la matrice K^{ij} (symétrie et caractère défini positif).

1.- Introduction des fonctions aléatoires

Au niveau granulométrique, un milieu poreux macroscopiquement homogène est défini par la donnée de la porosité ponctuelle $\omega(x)$, égale à 1 dans les pores et à 0 dans les grains. Etant donné l'aspect extraordinairement complexe de la géométrie du milieu à ce niveau, il est naturel d'interpréter $\omega(x)$ comme une réalisation d'une fonction aléatoire en tout ou rien. Nous supposerons de plus qu'il s'agit d'une fonction aléatoire ergodique et stationnaire. Le mot stationnaire signifie que la loi spatiale de $\omega(x)$ est invariante par translation. Le mot ergodique signifie que toute moyenne spatiale, prise sur un domaine assez grand, de $\omega(x)$ ou d'une fonctionnelle de $\omega(x)$ coïncide avec son espérance mathématique. Cette espérance mathématique, que nous noterons à l'aide du symbole traditionnel E , est toujours définie relativement à la loi de probabilité (ou loi spatiale) de $\omega(x)$. Dire que la fonction aléatoire en tout ou rien $\omega(x)$ est ergodique et stationnaire est simplement une manière plus précise d'énoncer l'hypothèse habituelle selon laquelle le milieu poreux peut être considéré comme macroscopiquement homogène.

Lorsque $\omega(x)$ est supposée connue, les solutions q^i , $\partial_i p$ de l'équation de Navier sont parfaitement déterminées, et apparaissent comme des fonctionnelles, d'ailleurs très complexes, de $\omega(x)$ et des conditions aux limites. Lorsque $\omega(x)$ est considérée comme une fonction aléatoire, v^i et $\partial_i p$ deviennent elles aussi, par l'intermédiaire de ces mêmes fonctionnelles, des fonctions aléatoires. Nous nous intéresserons exclusivement aux solutions v^i , $\partial_i p$ qui apparaissent comme des fonctions aléatoires stationnaires, et nous admettrons qu'elles possèdent également la propriété ergodique. Ces solutions stationnaires ne sont pas autre chose que les solutions macroscopiquement uniformes du chapitre précédent.

Physiquement, le flux macroscopique Q^i est une moyenne spatiale du flux $q^i = \rho v^i$ défini, dans les pores, au niveau granulométrique. Par suite de l'hypothèse ergodique, nous prendrons donc :

$$(9) \quad Q^i = E(\rho v^i)$$

De même, la pression macroscopique P est une moyenne spatiale, prise dans le volume des pores, de la pression p du fluide. Par ergodicité, nous définirons donc P comme l'espérance mathématique conditionnelle de $p(x)$ lorsque le point x appartient aux pores :

$$(10) \quad P = E \left[p(x) \mid \omega(x) = 1 \right] = \frac{E(\omega p)}{E(\omega)}$$

D'une manière générale, $p(x)$ et $v^i(x)$ sont définis uniquement dans les pores. Nous les supposons identiquement nuls dans les grains, de manière à étendre leur définition à l'espace entier. En raison des conditions aux limites imposées à l'équation de Navier, v^i s'annule à la surface de séparation des grains et des pores, et reste, par suite, continue dans l'espace entier. L'équation de continuité

$$(11) \quad \partial_i v^i = 0$$

est donc valable dans l'espace entier. Par contre $p(x)$ subit une discontinuité à la traversée de la surface de séparation. Ses dérivées doivent être prises au sens des distributions. Nulles dans les grains, identiques dans les pores aux dérivées usuelles, elles coïncident, sur la surface de séparation, avec une mesure de Dirac portée par cette surface. Comme les v^i s'annulent sur cette surface, toute expression du type $v^i \partial_j p$ coïncide avec la fonction usuelle, de même expression, définie dans les pores et nulle dans les grains.

Ainsi l'équation de Navier, valable dans les pores au sens usuel, ne peut être étendue à l'espace entier qu'à une mesure de Dirac près portée par la surface de séparation. Par contre, l'équation

$$(12) \quad v^i \partial_i p = \mu v^i \Delta v_i + v^i \left[\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \partial_j (\rho v^j v_i) \right]$$

est vérifiée dans l'espace entier.

Nous admettrons, comme au chapitre précédent, qu'il existe un système de solutions privilégiées $v^{il}, \partial_j p^l$ caractérisées par un flux et un gradient macroscopiques constants

$$(13) \quad \begin{cases} Q^{il} = \rho E(v^{il}) \\ \partial_j p^l = \partial_j \frac{E(\omega p^l)}{E(\omega)} \end{cases}$$

et nous choisissons, pour les constantes $\partial_j p^l$, les composantes mixtes d'un tenseur quelconque (le plus souvent ce sera le tenseur de Kronecker δ_j^l) de manière à bénéficier de l'invariance tensorielle.

Enfin, en ce qui concerne la pression p^l de la solution privilégiée d'indice l , nous supposons qu'elle est de la forme :

$$(14) \quad p^l = x^j \omega(x) \partial_j p^l + \omega(x) \lambda^l$$

où $\omega \lambda^l$ est une fonction aléatoire ergodique et stationnaire, nulle dans les pores, et d'espérance mathématique nulle. Cette hypothèse, manifestement compatible avec la deuxième relation (13), est un peu plus forte que les précédentes, et n'est peut être pas réellement indispensable. Nous l'adopterons cependant pour des raisons de simplicité.

2/- La densité de puissance consommée

Le tenseur de déformation e_{ij} se définit, sous forme covariante, en symétrisant le gradient des vitesses :

$$(15) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} [\partial_i v_j + \partial_j v_i]$$

et permet d'exprimer la densité de puissance consommée par les forces de viscosité sous la forme classique

$$(16) \quad W = 2 \mu e^{ij} e_{ij} = 2 \mu e^{ij} \partial_i v_j$$

En raison de la continuité des v_j à la traversée des surfaces de séparation des grains et des pores, cette expression, identiquement nulle dans les grains, est valable dans l'espace entier. Il est donc légitime de prendre l'espérance mathématique des deux membres de (16). Il vient :

$$E(W) = 2 \mu E(e^{ij} \partial_i v_j) = 2 \mu E[\partial_i (e^{ij} v_j)] - 2 \mu E(v_j \partial_i e^{ij})$$

Comme les v_j sont supposés stationnaires, il en est de même des e^{ij} , et par suite

$$E[\partial_i (e^{ij} v_j)] = \partial_i E(e^{ij} v_j) = 0$$

D'autre part, compte tenu de la relation (11), on a :

$$\partial_i e^{ij} = \frac{1}{2} \Delta v^j$$

Δ désignant le laplacien. Ainsi, il vient :

$$(17) \quad E(W) = -\mu E(v_j \Delta v^j).$$

Pour évaluer le deuxième membre de (17), nous pouvons utiliser l'équation (12) valable dans l'espace entier. D'ailleurs $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ est nulle, puisqu'il s'agit d'écoulements permanents. D'autre part, compte tenu de l'équation de continuité (11), on a :

$$\rho v^i \partial_j (v^j v_i) = \rho v^i v^j \partial_j v_i = \frac{1}{2} \rho v^j \partial_j (v^i v_i) = \frac{1}{2} \rho \partial_j (v^j v^i v_i)$$

et l'espérance de ce terme est nulle à cause du caractère stationnaire. Finalement, l'équation (12) donne :

$$\mu E(v^i \Delta v_i) = E(v^i \partial_i p)$$

Portant dans (17), nous obtenons :

$$(18) \quad E(W) = -E(v^i \partial_i p)$$

Ainsi la densité de puissance consommée par les forces de viscosité coïncide, en espérance, avec le produit scalaire de la vitesse et du gradient de charge, pris au niveau granulométrique.

Mais, d'autre part, à cause de la relation de conservation (11), on a aussi :

$$E(v^i \partial_i p) = E\left[\partial_i (v^i p)\right] = \partial_i E(v^i p)$$

Comme p est la charge associée à une solution stationnaire, donc de la forme $\omega_\ell \partial_j p^\ell$, la relation (14) nous donne :

$$p = x^j \omega \partial_j P + \omega \lambda$$

où $\partial_j P$ est le gradient macroscopique constant, et λ une fonction aléatoire ergodique et stationnaire. Par suite, il vient :

$$E(v^i p) = x^j \partial_j P E(v^i) + E(\lambda v^i)$$

et

$$\partial_i E(v^i p) = \partial_i P E(v^i) = \frac{1}{\rho} q^i \partial_i P$$

Ainsi la densité de puissance consommée s'exprime aussi à l'aide du produit scalaire du flux et du gradient macroscopiques constants, et (18) devient :

(19)

$$E(W) = - E(v^i \partial_i p) = - \frac{1}{\rho} q^i \partial_i P$$

Supposons maintenant la solution stationnaire mise sous la forme (3) c'est-à-dire sous la forme d'une combinaison linéaire de n solutions privilégiées, avec des coefficients w_l constants. On obtient :

$$(20) \quad E(W) = - w_l w_\lambda E(v^{il} \partial_i p^\lambda) = - \frac{w_l w_\lambda}{\rho} q^{il} \partial_i p^\lambda$$

D'autre part, si $e^{ij,l}$ désigne le tenseur de déformation associé, selon (15), à la solution privilégiée v^{il} , on a, d'après (16)

$$W = 2 \mu e^{ij,l} e_{ij}^\lambda w_l w_\lambda = 2 \mu e^{ij,\lambda} e_{ij}^l w_l w_\lambda$$

Soit :

$$(21) \quad \begin{cases} W = W^{ls} w_l w_s \\ W^{ls} = W^{sl} = 2 \mu e^{ij,l} e_{ij}^s \end{cases}$$

Nous voyons ainsi apparaître une densité tensorielle de puissance consommée, W^{ls} , manifestement symétrique relativement aux indices l et s . Par identification du coefficient de $w_l w_s$ dans les deux membres de la relation (20), nous obtenons :

$$(22) \quad E(W^{ls}) = - \frac{1}{2} \left[E(v^{il} \partial_i p^\lambda) + E(v^{is} \partial_i p^l) \right] = - \frac{1}{2\rho} \left[q^{il} \partial_i p^\lambda + q^{is} \partial_i p^l \right]$$

Autrement dit, la densité tensorielle de puissance coïncide, en espérance, avec la partie symétrisée du tenseur $q^{il} \partial_i p^\lambda$. Nous allons montrer qu'en fait ce tenseur est lui-même symétrique en l et s .

3/Symétrie de $q^{il} \partial_i p^l$

Pour établir cette symétrie, partons de l'espérance de la densité tensorielle symétrique $W^{ls} = W^{sl}$ écrite en (21).

$$\begin{aligned} E(W^{ls}) &= 2 \mu E(e^{ij,l} \partial_i v_j^s) \\ &= 2 \mu \partial_i E(e^{ij,l} v_j^s) - 2 \mu E(v_j^s \partial_i e^{ij,l}) \end{aligned}$$

Le premier terme est nul, puisqu'il s'agit de fonctions aléatoires stationnaires. Le deuxième peut s'évaluer à partir de l'équation de Navier, puisque v_j^s est nulle sur la surface de séparation des grains et des pores. On obtient facilement :

$$\begin{aligned} 2 \mu v_j^s \partial_i e^{ij,l} &= \mu v_j^s \Delta v^{jl} \\ &= \rho v_j^s \frac{\partial v^{jl}}{\partial t} + \rho v_j^s v^{il} \partial_i v^{jl} + v^{jl} \partial_j p^l \end{aligned}$$

Le premier terme est nul, puisqu'il s'agit d'un écoulement permanent. Le deuxième est négligeable. Il correspond, en effet, au terme quadratique de l'équation de Navier, toujours négligeable pour les écoulements de filtration. C'est d'ailleurs seulement dans la mesure où ce terme est réellement négligeable que les équations de Navier prennent la forme linéaire écrite en (2), et que, par suite, le phénomène macroscopique peut obéir à la loi de Darcy.

Passant aux espérances mathématiques, nous obtenons

$$E(W^{ls}) = -E(v^{jl} \partial_j p^l)$$

D'autre part, en utilisant la relation (14) et l'équation de continuité, on obtient, comme au paragraphe précédent :

$$E(v^{jl} \partial_j p^l) = \partial_j E(p^l v^{jl}) = \frac{1}{\rho} q^{jl} \partial_j p^l$$

Finalement, la relation (19) se généralise à la densité tensorielle symétrique W^{ls} sous la forme :

$$(23) \quad E(W^{ls}) = -E(v^{jl} \partial_j p^l) = -\frac{1}{\rho} q^{jl} \partial_j p^l$$

Cette relation, qui remplace (22), entraîne également la symétrie des deuxième et troisième membre.

4/- Expression des perméabilités macroscopiques K^{ij} .

Les perméabilités macroscopiques s'obtiennent en résolvant le système :

$$Q^{il} = - K^{ij} \partial_j P^l$$

Supposons, ce qui est toujours loisible, que les solutions privilégiées aient été choisies de manière à ce que les gradients macroscopiques constants $\partial_j P^l$ coïncident avec les composantes δ_j^l du tenseur de Kronecker.

$$(24) \quad \partial_j P^l = \delta_j^l$$

Alors K^{il} coïncide, au signe près, avec le flux macroscopique Q^{il} de la solution privilégiée d'indice l

$$K^{il} = - Q^{il}$$

D'autre part, considérons l'expression (23) de la densité tensorielle de puissance : compte tenu de (24), on obtient

$$E(W^{ls}) = - \frac{1}{\rho} Q^{ls}$$

Finalement, il vient :

(25)

$$K^{ls} = - Q^{ls} = \rho E(W^{ls})$$

Cette relation, qui met en évidence la signification énergétique des perméabilités, montre également que la matrice des K^{ij} est symétrique et définie positive.

En effet, elle est symétrique, puisque la densité tensorielle W^{ls} de puissance consommée est elle-même symétrique. De plus, la puissance consommée par les forces de viscosité, de densité :

$$W = \omega_l \omega_s W^{ls}$$

est nécessairement positive, quels que soient les ω_l et par suite W^{ls} est définie positive. Il en est donc de même de son espérance et par suite aussi, d'après (25), de la matrice des perméabilités K^{ij} .

G. MATHERON

Novembre 1965