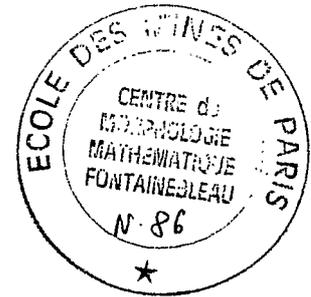


N-86

Avril 1965

"...Sunt ergo corpora certa  
quae spatium pleno possint distinguere inane."



GRANULOMETRIES EN PLACE ET MILIEUX POREUX ALEATOIRES

---

G. MATHERON

Avril 1965.

GRANULOMETRIES EN PLACE ET MILIEUX POREUX ALEATOIRES

Table des Matières

	<u>Pages</u>
Introduction . . . . .	1
<u>CHAPITRE I.- DEFINITION GEOMETRIQUE DES GRANULOMETRIES.</u> . . . . .	4
I.- LA TRANSFORMATION DE SERRA. . . . .	4
L'opération $A \oplus B$ . . . . .	6
L'opération $A \ominus B$ . . . . .	8
Représentation analytique de la transformation de Serra . . . . .	10
Règles d'inclusion . . . . .	12
II.- OUVERTURE ET FERMETURE ASSOCIEES A UNE TRANSFORMATION DE SERRA. . . . .	12
Signification géométrique de l'ouverture et de la fermeture . . . . .	15
III.- DEFINITION DES GRANULOMETRIES GENERALISEES. . . . .	16
Granulométrie selon une famille $B_\lambda$ . . . . .	17
IV.- CHANGEMENT DU NOMBRE DE DIMENSIONS POUR LA GRANULOMETRIE DE GRAINS SPHERIQUES . . . . .	21
1.- Passage de $F_n$ à la granulométrie induite $F_{n-k}$ , et inversement . . . . .	22
2.- Cas particuliers. . . . .	23
3.- Relations entre moments . . . . .	24
<u>CHAPITRE II.- LES MILIEUX POREUX ALEATOIRES.</u> . . . . .	27
I.- DEFINITION D'UN MILIEU POREUX ALEATOIRE PAR SA LOI SPATIALE . . . . .	27
Cas stationnaire . . . . .	30
Moments fonctionnels généralisés . . . . .	31
II.- DEFINITION DES GRANULOMETRIES . . . . .	32
Granulométrie des traversées . . . . .	34
III.- THEORIE DU GRAIN CONVEXE ISOLE . . . . .	37
Granulométrie des traversées . . . . .	39
Granulométrie induite sur une droite fixe . . . . .	41

Table des Matières (suite)

Pages

CHAPITRE III. - SCHEMAS BOOLEENS ET SEMI-MARKOVIENS

I.- LES SCHEMAS BOOLEENS . . . . .	45
La loi spatiale de A . . . . .	46
II.- EXEMPLE DU SCHEMA BOOLEEN CIRCULAIRE DANS $R^2$ . . . . .	48
III.- LES SCHEMAS BOOLEENS ET SEMI-MARKOVIENS A GRAINS CONVEXES . . . . .	50
1.- Schéma booléen à grains convexes . . . . .	50
2.- Caractère semi-markovien du schéma booléen à grains convexes . . . . .	52
3.- La granulométrie des grains dans un schéma semi-markovien . . . . .	55

\*  
\* \*

ANNEXE I.- COMPLEMENTS SUR LA TRANSFORMATION DE SERRA ET LES GRANULOMETRIES

60

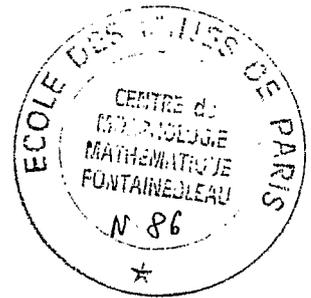
I.- Propriétés algébriques . . . . .	60
2.- Propriétés topologiques . . . . .	64

ANNEXE II.- COMPLEMENTS SUR L'AXIOMATIQUE DES MILIEUX POREUX ALEATOIRES . . . . .

69



"...Sunt ergo corpora certa  
quae spatium pleno possint distinguere inane."



GRANULOMÉTRIES EN PLACE ET MILIEUX POREUX ALÉATOIRES

---

G. MATHERON

Avril 1965.

GRANULOMETRIES EN PLACE ET MILIEUX POREUX ALEATOIRES

Table des Matières

	<u>Pages</u>
Introduction . . . . .	1
<u>CHAPITRE I.- DEFINITION GEOMETRIQUE DES GRANULOMETRIES.</u> . . . . .	4
I.- LA TRANSFORMATION DE SERRA. . . . .	4
L'opération $A \oplus B$ . . . . .	6
L'opération $A \ominus B$ . . . . .	8
Représentation analytique de la transformation de Serra . . . . .	10
Règles d'inclusion . . . . .	12
II.- OUVERTURE ET FERMETURE ASSOCIEES A UNE TRANSFORMATION DE SERRA. . . . .	12
Signification géométrique de l'ouverture et de la fermeture . . . . .	15
III.- DEFINITION DES GRANULOMETRIES GENERALISEES. . . . .	16
Granulométrie selon une famille $B_\lambda$ . . . . .	17
IV.- CHANGEMENT DU NOMBRE DE DIMENSIONS POUR LA GRANULOMETRIE DE GRAINS SPHERIQUES . . . . .	21
1.- Passage de $F_n$ à la granulométrie induite $F_{n-k}$ , et inversement . . . . .	22
2.- Cas particuliers. . . . .	23
3.- Relations entre moments . . . . .	24
<u>CHAPITRE II.- LES MILIEUX POREUX ALEATOIRES.</u> . . . . .	27
I.- DEFINITION D'UN MILIEU POREUX ALEATOIRE PAR SA LOI SPATIALE . . . . .	27
Cas stationnaire . . . . .	30
Moments fonctionnels généralisés . . . . .	31
II.- DEFINITION DES GRANULOMETRIES . . . . .	32
Granulométrie des traversées . . . . .	34
III.- THEORIE DU GRAIN CONVEXE ISOLE . . . . .	37
Granulométrie des traversées . . . . .	39
Granulométrie induite sur une droite fixe . . . . .	41

Table des Matières (suite)

Pages

CHAPITRE III. - SCHEMAS BOOLEENS ET SEMI-MARKOVIENS

I.- LES SCHEMAS BOOLEENS . . . . .	45
La loi spatiale de A . . . . .	46
II.- EXEMPLE DU SCHEMA BOOLEEN CIRCULAIRE DANS $R^2$ . . . . .	48
III.- LES SCHEMAS BOOLEENS ET SEMI-MARKOVIENS A GRAINS CONVEXES . . . . .	50
1.- Schéma booléen à grains convexes . . . . .	50
2.- Caractère semi-markovien du schéma booléen à grains convexes . . . . .	52
3.- La granulométrie des grains dans un schéma semi-markovien . . . . .	55

\*  
\* \*

ANNEXE I.- COMPLEMENTS SUR LA TRANSFORMATION DE SERRA ET LES GRANULOMETRIES

I.- Propriétés algébriques . . . . .	60
2.- Propriétés topologiques . . . . .	64

ANNEXE II.- COMPLEMENTS SUR L'AXIOMATIQUE DES MILIEUX POREUX ALEATOIRES . . . . . 69



## GRANULOMETRIES EN PLACE ET MILIEUX POREUX ALEATOIRES

### I n t r o d u c t i o n

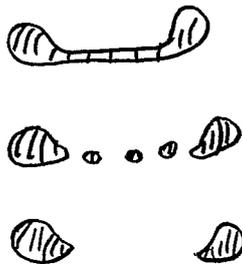
Pour qu'il soit possible de définir la granulométrie d'un matériau naturel ou artificiel, deux conditions sont requises :

- a/ le matériau doit être constitué de grains individualisables sans ambiguïté.
- b/ il doit être possible de classer les grains en fonction d'un paramètre quantitatif unique.

Dans la pratique industrielle ou en laboratoire, ces conditions sont imposées ipso facto au matériau traité par les opérations techniques auxquelles on le soumet : les grains sont libérés ou individualisés (donc définis en tant que grains) par une suite d'opérations déterminées (concassage, broyage) et séparés en classes par une autre suite d'opérations également bien définies (par exemple des tamisages). Le résultat - la courbe granulométrique - permet de comparer entre eux des matériaux différents, pourvu qu'ils soient traités de manière strictement identique : tel matériau apparaîtra comme plus grossier, ou plus hétérogène, que tel autre. Mais la granulométrie obtenue dépendra en général des conditions opératoires choisies, et, en dehors de cas particuliers très simples tels que celui des grains sphériques, ne pourra pas se relier de manière évidente à des caractéristiques géométriques précises des grains. Le classement empirique ne correspond pas, en général, à un critère conceptuel clair. Et, en effet, pour peu que leur forme soit un peu complexe, les grains ne sont pas soumis à une relation d'ordre unique. Selon que l'on met l'accent sur le plus grand diamètre, la section moyenne, le volume, etc ... on obtient différents principes de classement, entre lesquels chaque dispositif expérimental réalise une pondération variable.

D'autre part, la notion de granulométrie ne se limite pas aux matériaux préparés, mais s'étend également aux matériaux en place. Le pétrographe, l'hydrogéologue s'intéressent à la granulométrie des minéraux constitutifs d'une roche, à celle d'un

milieu poreux, etc ... A une autre échelle, le sédimentologue s'intéresse aux dimensions de lentilles gréseuses, aux puissances affectées aux différents faciès d'une série lithologique rythmique, etc ... Or une granulométrie in situ exprime bien certaines caractéristiques géométriques des grains individuels, mais ne tient pas compte des rapports des grains entre eux et de leurs dispositions mutuelles dans l'espace. Pour employer un langage pétrographique, elle renseigne sur la structure des grains, mais non sur la texture de la roche (l'arrangement des grains). De plus, la notion de grain individualisable peut devenir très floue et cesser d'être utilisable. Entre deux grains distincts, et les mêmes grains reliés par un chapelet de granules, puis par un



isthme, il y a un passage continu que la granulométrie ne peut pas exprimer. Dans un milieu poreux, la notion de grain peut même s'évanouir tout-à-fait, et de toute manière les propriétés hydrodynamiques les plus intéressantes (la perméabilité) semblent liées davantage aux

dimensions des pores qu'à celles des grains. Il convient donc d'introduire une conception plus large de la granulométrie, capable de décrire la géométrie complexe d'un milieu à deux composantes sans se référer à des "grains" individualisés. A la granulométrie des grains, il convient aussi d'adjoindre celle des pores, et c'est précisément cette granulométrie des pores qui paraît susceptible de rendre compte de l'arrangement des grains entre eux, c'est-à-dire de la texture de la roche.

Cette conception élargie de la granulométrie est certainement possible. De fait elle existe déjà. Les matériaux in situ, en effet, ne sont généralement pas accessibles dans leurs trois dimensions. On ne dispose le plus souvent que de sections (affleurements, lames minces, etc ...) à deux dimensions, et le passage de la granulométrie à deux dimensions mesurée sur une section à la vraie granulométrie à trois dimensions pose un problème difficile (que nous aborderons dans un cas particulier). Sur les sections elles-mêmes, il est souvent plus commode de mesurer non pas la taille des grains, mais leurs traversées, c'est-à-dire les longueurs des segments qu'ils interceptent sur une ou plusieurs droites parallèles à une direction donnée. La statistique de ces traversées conduit à une véritable granulométrie à une seule dimension : mais celle-ci n'est nullement liée à l'existence de grains individualisés, et peut être construite aussi bien à partir des traversées des pores, du ciment, etc ...

La première partie de ce travail sera donc consacrée à définir une conception purement géométrique de la granulométrie in situ. Celle-ci devra être indépendante de l'existence de grains individuels, s'appliquer aux pores aussi bien qu'aux grains et généraliser, par conséquent, la notion de granulométries des traversées unidimensionnelles, mais contenir également comme cas particulier la notion usuelle de granulométrie, chaque fois que celle-ci est définie sans ambiguïté (par exemple, dans le cas de grains sphériques). D'autre part, l'extrême complexité des milieux naturels que l'on cherche à décrire (constituants d'une roche, milieu poreux, succession de faciès lithologiques ...) rend à peu près inévitable le recours à un langage probabiliste. Les courbes granulométriques cumulées - bien qu'elles ne possèdent pas par elles-mêmes de contenu probabiliste - appellent, elles aussi, ce langage, dans la mesure où elles se présentent sous un aspect formellement identique aux fonctions de répartition du calcul des probabilités. Dans une deuxième partie, par conséquent, nous chercherons à décrire un tel milieu comme un ensemble aléatoire et à le caractériser par sa loi spatiale  $P(x_1, \dots, x_n)$  donnant la probabilité pour que  $n$  points déterminés de l'espace  $x_1, \dots, x_n$  appartiennent, par exemple, aux grains. Plus généralement, nous devrons introduire les moments fonctionnels  $P(B, B')$  donnant la probabilité pour que deux ensembles donnés  $B$  et  $B'$  soient contenus, le premier dans les grains, le second dans les pores, et reconstruire, à partir des  $P(B, B')$  les notions granulométriques de la première partie, qui recevront ainsi l'interprétation probabiliste qu'elles appellent. Ce programme ne pourra, malheureusement, être complètement réalisé que dans le cas particulier de la granulométrie des traversées.

Dans une troisième partie, nous présenterons, à titre d'illustration, quelques schémas ou modèles susceptibles d'être utilisés dans les applications (schéma booléen, schéma semi-markovien). Enfin, dans une annexe purement mathématique nous apporterons quelques justifications axiomatiques sommaires à la théorie des milieux poreux aléatoires exposée dans la deuxième et la troisième partie.

GRANULOMETRIES EN PLACE ET MILIEUX POREUX ALEATOIRES

---

CHAPITRE I

---

DEFINITION GEOMETRIQUE DES GRANULOMETRIES

---

I.- LA TRANSFORMATION DE SERRA.

Dans l'espace euclidien à  $n$  dimensions  $R^n$  (en pratique,  $n$  sera égal à 1, 2, ou 3, mais il est commode de ne pas spécifier à l'avance le nombre des dimensions), un milieu à deux composantes, remplissant l'espace entier, est défini par la donnée d'un ensemble  $A$  et de son complémentaire  $A^c$ . Dans la suite, nous désignerons  $A$  par l'expression "les grains" et son complémentaire  $A^c$  par l'expression "les pores" sans que cela implique d'hypothèse particulière sur la forme géométrique de  $A$  ou l'existence de "grains" individualisables. Il arrivera que  $A$  soit supposé borné, mais alors  $A^c$  (les pores) s'étendra jusqu'à l'infini, de manière que tout point de l'espace appartienne soit aux grains, soit aux pores.

D'un point de vue plus analytique, on peut également définir ce milieu par la donnée d'une fonction  $k_A(x)$ , dite fonction caractéristique de  $A$ , égale à 1 dans les grains et à 0 dans les pores :

$$(1) \quad k_A(x) = \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{array}$$

Pour décrire la géométrie complexe dessinée sur une lame mince (deux dimensions) par des grains  $A$  opaques et leur complémentaire  $A^c$  supposé transparent, J.SERRA<sup>(1)</sup> propose le dispositif expérimental suivant : un spot lumineux circulaire de rayon donné  $\lambda$  balaye la plaque. Lorsque le spot est centré en un point  $x$ , deux circonstances

---

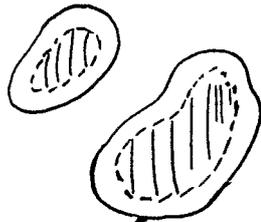
(1) J. SERRA " REMARQUES SUR UNE LAME MINCE DE MINERAI LORRAIN "- Bulletin du BRGM (sous presse).

seulement sont possibles : ou bien la lumière passe (si le spot rencontre les pores) ou bien elle ne passe pas (si le spot est contenu tout entier dans les grains).

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} k'_{\lambda}(x) = 0 & \text{si la lumière passe.} \\ k'_{\lambda}(x) = 1 & \text{si elle ne passe pas.} \end{array} \right.$$

La fonction  $k'_{\lambda}(x)$  ainsi définie est la fonction caractéristique d'un ensemble  $A'_{\lambda}$  qui se déduit de  $A$  par une sorte d'érosion, puisque seuls appartiennent

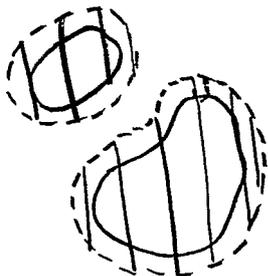


à  $A'_{\lambda}$  les points de  $A$  situés à une distance supérieure à  $\lambda$  de la frontière des grains. Cette érosion des grains peut aussi, inversement, s'interpréter comme une dilatation des pores.

De même, les grains étant cette fois supposés transparents et les pores opaques, posons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} k''_{\lambda}(x) = 0 & \text{si la lumière ne passe pas} \\ k''_{\lambda}(x) = 1 & \text{si elle passe.} \end{array} \right.$$

$k''_{\lambda}(x)$  est la fonction d'un nouvel ensemble  $A''_{\lambda}$  qui se déduit de  $A$  par dilata-



tion, puisque seuls n'appartiennent pas à  $A''_{\lambda}$  les points des pores situés à une distance supérieure à  $\lambda$  de la frontière des pores. L'opération effectuée est une dilatation des grains, ou une érosion des pores.

Pour plus de commodité, convenons de réserver les valeurs positives du paramètre  $\lambda$

à la dilatation, et les valeurs négatives à l'érosion des grains par le spot de rayon  $\lambda$ .  
Autrement dit, écrivons :

$$k_{-\lambda} \text{ et } A_{-\lambda} \quad \text{au lieu de } k'_{\lambda} \text{ et } A'_{\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

$$k_{\lambda} \text{ et } A_{\lambda} \quad \text{au lieu de } k''_{\lambda} \text{ et } A''_{\lambda}$$

Soit  $S(\lambda)$  l'aire occupée sur la lame mince par les grains dilatés selon le spot de rayon  $\lambda$  (aire de  $A_{\lambda}$ ) et  $S(-\lambda)$  l'aire occupée par les grains érodés selon le même spot (aire de  $A_{-\lambda}$ ).  $S(\lambda)$  est une fonction non décroissante de  $\lambda$ . Pour  $\lambda < \mu$ , on a manifestement les inclusions

$$A_{-\mu} \subset A_{-\lambda} \subset A \subset A_{\lambda} \subset A_{\mu}$$

et par suite les inégalités

$$S(-\mu) \leq S(-\lambda) \leq S(0) \leq S(\lambda) \leq S(\mu)$$

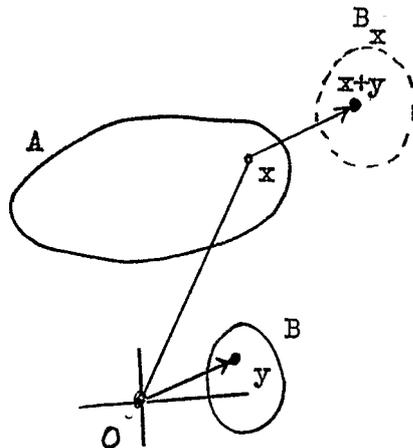
Cette propriété évoque une courbe granulométrique. Cependant  $S(\lambda)$  n'a pas encore réellement la signification d'une granulométrie. Dans le cas, en effet, où  $A$  est composé de cercles disjoints (grains circulaires) la variation  $S(\lambda + \Delta\lambda) - S(\lambda)$  ne reflète pas directement le nombre des grains de rayon compris entre  $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$ .

Toutefois, la transformation de Serra (faisant passer de  $A$  à  $A_{\lambda}$  ou  $A_{-\lambda}$ ) va constituer une étape indispensable dans la construction du concept géométrique de granulométrie. Avant de poursuivre, il convient de présenter cette transformation sous une forme plus générale et plus systématique.

#### Opération A $\oplus$ B

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles quelconques de l'espace euclidien  $R^n$ .  
 $A$  sera, par exemple, l'ensemble des grains, tandis que  $B$  va jouer le rôle du spot lumineux envisagé ci-dessus (en fait, cette interprétation n'est pas obligatoire, et,

dans les définitions suivantes, A et B interviennent symétriquement). A tout point



x de A et à tout point y de B, nous pouvons faire correspondre la somme géométrique  $x + y$ . Lorsque x et y décrivent A et B, le point  $x + y$  décrit un ensemble que nous noterons

$$A \oplus B :$$

$$(2) \quad A \oplus B = \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} (x + y)$$

L'opération ainsi définie est manifestement associative et commutative.

Lorsque C est un ensemble quelconque et z un point, il est commode de désigner par  $C_z$  l'ensemble se déduisant de C dans la translation z :

$$C_z = \bigcup_{x \in C} (x+z)$$

L'équation (2) peut s'écrire sous les deux formes suivantes :

$$(3) \quad A \oplus B = \bigcup_{x \in A} B_x = \bigcup_{y \in B} A_y$$

$A \oplus B$  est la réunion, lorsque x décrit A, des ensembles  $B_x$  déduits de B dans la translation x. C'est aussi la réunion, lorsque y décrit B, des ensembles  $A_y$  déduits de A dans la translation y.

L'opération  $A \oplus B$  est étroitement apparentée à une dilatation de A selon l'ensemble B. Plus précisément, pour qu'un point z appartienne à  $A \oplus B$ , il faut et il suffit qu'il soit de la forme  $a + b$  avec  $a \in A$  et  $b \in B$ . Autrement dit, il faut et il suffit que l'on puisse trouver un point b dans B tel que  $z - b$  appartienne à A. Désignons par  $\overset{v}{B}$  le transposé de B (son symétrique par rapport

à l'origine).

$$\overset{\vee}{B} = \bigcup_{b \in B} (-b)$$

Dire que l'on peut trouver  $b \in B$  tel que  $z - b \in A$  équivaut à dire que  $(\overset{\vee}{B})_z$  (le translaté par  $z$  de l'ensemble  $\overset{\vee}{B}$ ) rencontre  $A$ .

$$(4) \quad z \in A \oplus B \iff (\overset{\vee}{B})_z \cap A \neq \emptyset$$

Ainsi  $z$  appartiendra à  $A \oplus B$  si, et seulement si, l'échantillon égal à  $\overset{\vee}{B}$  et implanté au point  $z$  a une intersection non vide avec  $A$ . On voit que  $A \oplus B$  représente la dilatation de  $A$  par le transposé  $\overset{\vee}{B}$  de  $B$  (et non par  $B$  lui-même). Si l'on veut dilater  $A$  par  $B$  lui-même, c'est donc l'opération  $A \oplus \overset{\vee}{B}$  qu'il convient d'effectuer. Résumons ces résultats par une définition et une propriété :

Définition 1.- On appelle transformé de Serra (par dilatation) d'un ensemble  $A$  par un ensemble  $B$  l'ensemble  $C$ .

$$C = \left\{ z : B_z \cap A \neq \emptyset \right\}$$

des points  $z$  tels que l'ensemble  $B_z$  déduit de  $B$  dans la translation  $z$  rencontre l'ensemble  $A$ .

Propriété 1.- L'ensemble  $C$  ainsi défini est égal à  $A \oplus \overset{\vee}{B}$ . On a :

$$C = A \oplus \overset{\vee}{B} = \bigcup_{x \in A} (\overset{\vee}{B})_x = \bigcup_{y \in B} A_{-y}$$

L'opération  $A \ominus B$

La pseudo-addition d'ensembles  $A \oplus B$  n'admet pas d'opération inverse. Nous définirons une pseudo-soustraction  $A \ominus B$  par la formule :

$$(5) \quad A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$$

$A \ominus B$  est le complémentaire de la pseudo-somme  $A^c \oplus B$  de  $B$  et du complémentaire de  $A$ .

De la relation (3) on déduit immédiatement par passage au complémentaire :

$$(6) \quad A \ominus B = \bigcap_{y \in B} A_y$$

$A \ominus B$  est l'intersection, lorsque  $y$  décrit  $B$ , des ensembles  $A_y$  déduits de  $A$  dans la translation  $y$ .

De même, on déduit de (4) :

$$(7) \quad z \in A \ominus B \iff \bigvee_z B_z \subset A$$

$A \ominus B$  est l'ensemble des points  $z$  tels que l'échantillon égal au transposé de  $B$  et implanté en  $z$  soit tout entier contenu dans  $A$ .

D'où la définition et la propriété suivantes :

Définition 2.- On appelle transformé de Serra (par érosion) d'un ensemble  $A$  par un ensemble  $B$  l'ensemble :

$$C = \left\{ z : B_z \subset A \right\}$$

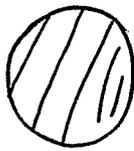
des points  $z$  tels que l'ensemble  $B_z$  déduit de  $B$  dans la translation  $z$  soit contenu dans  $A$ .

Propriété 2.- L'ensemble  $C$  ainsi défini est égal à  $A \ominus \bigvee B$ . On a :

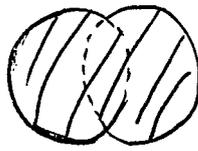
$$C = A \ominus \bigvee B = \bigcap_{y \in B} A_{-y}$$

Cas particulier - 1/- Prenons pour  $B$  l'ensemble  $B_1 = \{0, b\}$  constitué de deux points seulement : l'origine  $0$  et un point  $b$ .  $A \oplus B_1$  est la réunion  $A \cup A_b$  de  $A$  et de son translaté par  $b$ ,  $A \ominus B_1$  est l'intersection  $A \cap A_b$  de ces mêmes ensembles.

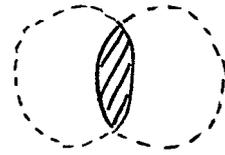
De même si  $B$  est constitué de  $p$  points  $\{0, b_1, \dots, b_{p-1}\}$   $A \oplus B$  est l'union de  $A$  et de ses translatsés  $A_{b_1} \dots A_{b_{p-1}}$ ,  $A \ominus B$  est l'intersection de  $A$  et de ses translatsés.



A



$A \oplus B_1$



$A \ominus B_1$

2/- Prenons pour  $B$  l'ensemble  $B_2 = [0, h]$  constitué de tous les points d'un segment de droite ayant son origine en  $0$  et son extrémité en un point  $h$ .  $A \oplus B_2$  est l'ensemble balayé par  $A$  lorsqu'on lui imprime la translation  $h$ .  $A \ominus B_2$  est l'ensemble des points qui appartiennent à tous les ensembles correspondant aux positions intermédiaires occupées par  $A$  dans cette translation.



A



$A \oplus B_2$



$A \ominus B_2$

3/- Si l'on prend pour  $B$  la boule  $B_\lambda = \{z : |z| < \lambda\}$  de rayon  $\lambda$ , on retrouve la transformation par dilatation ou érosion selon un spot lumineux circulaire dans le cas où l'espace est à deux dimensions.

Représentation analytique de la transformation de Serra.

Soient  $k_A(x)$  et  $k_B(x)$  les fonctions caractéristiques de  $A$  et  $B$ ,  $k_{A \oplus B}$  et  $k_{A \ominus B}$  celles de  $A \oplus B$  et  $A \ominus B$ . Comme  $A_y$  a pour fonction caractéristique  $k_A(x-y)$ , la relation (3) donne :

$$k_{A \oplus B}(x) = \sup_{y \in B} k_A(x-y) = \sup_{z \in A} k_B(x-z)$$

ce qui peut aussi s'écrire, sous une forme rappelant celle d'un produit de convolution

$$k_{A \oplus B}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} k_B(y) k_A(x-y) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} k_A(z) k_B(x-z)$$

De même, pour  $A \ominus B$ , on déduit de (6)

$$k_{A \ominus B}(x) = \inf_{y \in B} k_A(x-y) = \prod_{y \in B} k_A(x-y)$$

De même encore pour les transformés  $A \oplus B^{\vee}$  et  $A \ominus B^{\vee}$  par dilatation et érosion, on obtient :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_{A \oplus B^{\vee}}(x) = \sup_{y \in B} k_A(x+y) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} k_B(y) k_A(x+y) \\ k_{A \ominus B^{\vee}}(x) = \inf_{y \in B} k_A(x+y) = \prod_{y \in B} k_A(x+y) \end{array} \right.$$

Si  $A$  et  $B$  sont mesurables et bornés, il est possible de définir les mesures (volumes ou surfaces selon le nombre de dimensions de l'espace) des transformés  $A \oplus B^{\vee}$  et  $A \ominus B^{\vee}$ . Désignons par  $H(B)$  et  $K(B)$  ces mesures :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(B) = \text{Mes}(A \oplus B^{\vee}) = \int k_{A \oplus B^{\vee}}(x) dx \\ K(B) = \text{Mes}(A \ominus B^{\vee}) = \int k_{A \ominus B^{\vee}}(x) dx \end{array} \right.$$

Ces fonctions d'ensemble  $K(B)$  et  $H(B)$  permettent de définir des fonctions non décroissantes analogues à la fonction  $S(\lambda)$  introduite dans le cas du spot lumineux circulaire. Si  $B_\lambda$  désigne une famille d'ensembles tels que  $B_\lambda \subset B_\mu$  pour  $\lambda < \mu$  (par exemple  $B_\lambda$  pourra être la boule de rayon  $\lambda$ ), la fonction définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} S(\lambda) = H(B_\lambda) \\ S(-\lambda) = K(B_\lambda) \end{array} \right.$$

est bien non-décroissante. Mais elle ne possède pas encore une véritable signification granulométrique.

Règles d'inclusion - Nous donnons en annexe une étude plus détaillée de la transformation de Serra. Nous mentionnerons simplement ici l'inclusion :

$$(A \ominus C) \oplus B \subset (A \oplus B) \ominus C$$

Cette inclusion, généralement stricte, a un sens intuitif évident : l'érosion de A par C fait disparaître des portions de A, isolées et de petites dimensions, qu'une dilatation ultérieure par B ne peut pas restituer. Ces mêmes portions, au contraire, peuvent subsister si la dilatation par B est effectuée avant l'érosion par C.

D'autre part, les règles suivantes sont évidentes et se démontrent immédiatement : Si B est contenu dans B' on a :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \oplus B \subset A \oplus B' \\ A \ominus B \supset A \ominus B' \\ B \ominus A \subset B' \ominus A \end{array} \right.$$

## II.- OUVERTURE ET FERMETURE ASSOCIEES A UNE TRANSFORMATION DE SERRA.

Pour définir la granulométrie d'un ensemble A, nous serons conduits à effectuer sur A deux transformations successives : d'abord une érosion, puis (sur l'ensemble ainsi érodé) une dilatation, et nous dirons qu'il s'agit d'une ouverture de A ; ou bien au contraire d'abord une dilatation, et ensuite une érosion, et nous dirons qu'il s'agit d'une fermeture de A. La définition précise est la suivante :

Définition 3 - Etant donnés deux ensembles A et B, on appelle ouverture de A selon B, et on note  $A_{\omega}$  l'ensemble

$$A_{\omega} = (A \ominus \bigvee B) \oplus B$$

On appelle fermeture de A selon B et on note  $A_f$  l'ensemble

$$A_f = (A \oplus \bigvee B) \ominus B$$

Avant d'examiner la signification intuitive de cette définition, il convient de justifier la terminologie employée en montrant qu'il s'agit effectivement d'une ouverture et d'une fermeture au sens algébrique.

Tout d'abord, les deux opérations sont duales l'une de l'autre pour la complémentation. On a :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A^c)_\omega = (A_f)^c \\ (A^c)_f = (A_\omega)^c \end{array} \right.$$

En effet, on a, par exemple, en appliquant la relation (5) :

$$(A_f)^c = \left[ [A \oplus B] \ominus B \right]^c = (A \oplus B)^c \oplus B = (A^c \ominus B) \oplus B = (A^c)_\omega$$

Ainsi, ouvrir les pores équivaut à fermer les grains, et réciproquement.

Par suite, il suffit de montrer que l'application  $A \rightarrow A_f$  est une fermeture, c'est-à-dire une opération croissante, isotone et idempotente.

C'est une opération croissante. On a :

$$(11) \quad A \subset A_f$$

Compte tenu de (3) et (6), en effet,  $A_f$  se présente sous la forme :

$$(12) \quad A_f = \bigcap_{y \in B} \bigcup_{x \in B} A_{y-x}$$

Soit  $z$  un point de  $A$ . Pour tout  $y$  de  $B$ , on peut prendre  $x = y \in B$ , et  $z$  appartient à  $A_{y-x} = A_0 = A$ . Donc  $z \in A_f$  et  $A \subset A_f$ .

En passant aux complémentaires, on voit de même que l'application  $A \rightarrow A_\omega$  est décroissante

$$(13) \quad A_\omega \subset A$$

En deuxième lieu, c'est une opération isotone. Si  $A$  est contenu dans  $A'$ ,  $A_f$  est contenu dans  $A'_f$

$$(14) \quad A \subset A' \quad \Longrightarrow \quad A_f \subset A'_f$$

Il suffit de se reporter à l'expression (12) et de remarquer que, pour tout  $x$ , et tout  $y$ ,  $A_{y-x}$  est contenu dans  $A'_{y-x}$ .

De même, on a :

$$(15) \quad A \subset A' \quad \Longrightarrow \quad A_\omega \subset A'_\omega$$

Enfin c'est une opération idempotente. On a :

$$(16) \quad (A_f)_f = A_f$$

En effet, explicitons la fermeture itérée :

$$(A_f)_f = \left( \left[ (A \oplus^V B) \ominus B \right] \oplus^V B \right) \ominus B = (A \oplus^V B)_\omega \ominus B$$

L'indice  $\omega$  désigne ici l'ouverture selon  $B^V$  (ouverture transposée). Toute ouverture étant décroissante, d'après (13), on a :

$$(A \oplus^V B)_\omega \subset A \oplus^V B$$

Les règles d'inclusion (9) donnent alors :

$$(A_f)_f \subset (A \oplus^V B) \ominus B = A_f$$

Comme on a aussi l'inclusion inverse, puisque la fermeture est croissante, l'égalité (16) en résulte. De la même manière, on a aussi :

$$(17) \quad (A_\omega)_\omega = A_\omega$$

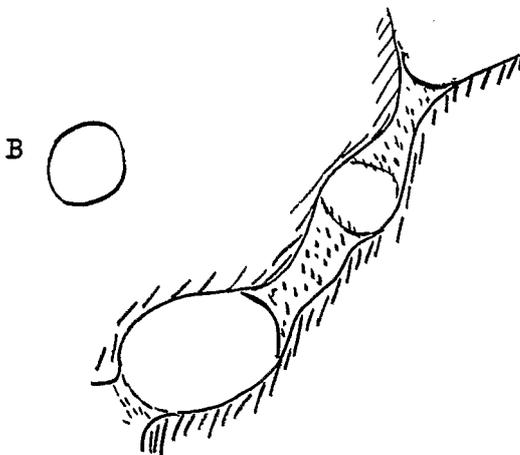
Signification géométrique de l'ouverture et de la fermeture.

L'ouverture  $A_{\omega}$  de A selon B possède une signification géométrique très intuitive. Pour le voir, remarquons qu'un point  $z$  appartient à l'ouverture  $A_{\omega}$  si, et seulement si  $(B)_z$  rencontre  $A \ominus B$  (d'après (4) et la définition de l'ouverture), donc si, et seulement si, on peut trouver un point  $b \in B$  tel que  $z - b \in A \ominus B$ . Le point  $y = z - b$  appartient à  $A \ominus B$  si et seulement si  $B_y$  est contenu dans A. Le point  $b$  appartient à B si et seulement si  $z = y + b$  appartient à  $B_y$ . Autrement dit :

Propriété 3.- Pour qu'un point  $z$  appartienne à l'ouverture  $A_{\omega}$  de A selon B, il faut et il suffit que  $z$  appartienne à un translaté  $B_y$  de B entièrement contenu dans A.

De même pour qu'un point  $z$  appartienne à la fermeture  $A_f$  de A selon B, il faut et il suffit qu'aucun translaté  $B_y$  de B contenant  $z$  ne soit disjoint de A. Ou, si l'on veut : pour qu'un point  $z$  n'appartienne pas à  $A_f$ , il faut et il suffit qu'il existe un translaté  $B_y$  de B contenant  $z$  et disjoint de A.

Autrement dit encore : l'ouverture  $A_{\omega}$  des grains A est le volume balayé par les translatsés de B contenus dans A. L'ouverture  $(A_f)^c$  des pores  $A^c$  est le volume balayé par les translatsés de B contenus dans les pores.



La figure ci-jointe illustre l'ouverture des pores selon une boule B. Elle montre, dans un canalicule faisant partie des pores, les zones exclues de l'ouverture (en pointillés) : ce sont les zones dans lesquelles il est géométriquement impossible d'implanter la boule B de manière à ce qu'elle soit entièrement contenue dans les pores : ce sont donc les zones

de dimensions inférieures au diamètre de la boule : petites inclusions, chenaux étroits, golfes resserrés, etc ... L'ouverture des pores donne ainsi une certaine image géomé-

trique de la granulométrie des pores. L'ouverture des grains fait de même pour la granulométrie des grains. Elle élimine les portions de grains de dimensions petites : petits grains isolés, promontoires aigus, isthmes étroits, etc ...

### III.- DEFINITION DES GRANULOMETRIES GENERALISEES

En effectuant ouverture et fermeture  $A_{\omega_\lambda}$  et  $A_{f_\lambda}$  selon un ensemble  $B_\lambda$  dépendant d'un paramètre unique  $\lambda$  (par exemple  $B_\lambda$  sera la boule de rayon  $\lambda$ ), il va donc être possible de définir une granulométrie, sous réserve que,  $\lambda$  croissant, les ouvertures  $A_{\omega_\lambda}$  aillent en décroissant et les fermetures  $A_{f_\lambda}$  en croissant. Cette propriété de monotonie - évidente géométriquement dans le cas des boules - n'est cependant pas vérifiée pour des  $B_\lambda$  quelconques. Les deux propriétés suivantes suffisent, cependant, à définir des classes très larges d'ensembles pour lesquels elle sera vérifiée.

Propriété 4.- La famille des ouverts selon B coïncide avec la famille des ensembles de la forme  $C \oplus B$  (C ensemble quelconque) et la famille des fermés selon B coïncide avec la famille des ensembles de la forme  $C \ominus B$ .

Raisonnons, par exemple, dans le cas des ouverts selon B. Si  $A = A_{\omega}$  est ouvert selon B, on a, par définition,  $A = C \oplus B$  avec  $C = A \ominus B$ . Réciproquement,  $C \oplus B$  est ouvert selon B. En effet, on a d'une part :

$$(C \oplus B)_{\omega} = [(C \oplus B) \ominus B] \oplus B = C_{f'} \oplus B \supset C \oplus B$$

$f'$  désignant la fermeture transposée (selon  $B$ ) qui est croissante. D'autre part :

$$(C \oplus B)_{\omega} \subset C \oplus B$$

puisque l'ouverture est décroissante. On en déduit les égalités

$$(C \oplus B)_{\omega} = C \oplus B = C_{f'} \oplus B$$

En particulier B lui-même est toujours ouvert selon B, puisque  
 $B = \left\{ \circ \right\} \oplus B$ , et on a :

$$(B \ominus B) \oplus B = B$$

Propriété 5.- Si C est ouvert selon B, les ouvertures  $A_{\omega_B}$ ,  $A_{\omega_C}$  et les fermetures  $A_{f_B}$  et  $A_{f_C}$  de tout ensemble A selon B et C vérifient les inclusions :

$$(18) \quad A_{\omega_C} \subset A_{\omega_B} \subset A \subset A_{f_B} \subset A_{f_C}$$

En effet, C étant ouvert selon B, est de la forme  $B' \oplus B$ , et son transposé  $\overset{\vee}{C}$ , égal à  $\overset{\vee}{B'} \oplus \overset{\vee}{B}$ , est ouvert selon  $\overset{\vee}{B}$ . Soit alors z un point de  $A_{f_B}$ . Par définition, on a :

$$\overset{\vee}{B}_z \subset A \oplus \overset{\vee}{B}$$

On en déduit, d'après les règles (9) :

$$\overset{\vee}{B}_z \oplus (\overset{\vee}{C} \ominus B) \subset A \oplus \overset{\vee}{B} \oplus (\overset{\vee}{C} \ominus B)$$

Mais  $\overset{\vee}{B} \oplus (\overset{\vee}{C} \ominus B) = (\overset{\vee}{C} \ominus B) \oplus \overset{\vee}{B}$  (d'après la commutativité de l'opération  $\oplus$ ) est l'ouverture de  $\overset{\vee}{C}$  selon  $\overset{\vee}{B}$ , c'est-à-dire  $\overset{\vee}{C}$  lui-même puisque  $\overset{\vee}{C}$  est ouvert selon  $\overset{\vee}{B}$ . L'inclusion ci-dessus se réduit donc à :

$$\overset{\vee}{C}_z \subset A \oplus \overset{\vee}{C}$$

ce qui signifie  $z \in A_{f_C}$ . Par suite,  $A_{f_B} \subset A_{f_C}$ . L'inclusion relative aux ouverts s'en déduit en passant aux complémentaires.

### Granulométrie selon une famille $B_\lambda$

Soit  $B_\lambda$  une famille d'ensembles dépendant d'un paramètre (positif)  $\lambda$ , et vérifiant la propriété :

$$(19) \quad B_\lambda \oplus B_\mu = B_{\lambda + \mu}$$

Dans  $R^n$ , les boules de rayon  $\lambda$  vérifient cette propriété, mais aussi les cercles de rayon  $\lambda$  situés dans un plan passant par l'origine, et les segments de droite parallèles de longueur  $2\lambda$  et centrés à l'origine. De même encore les cubes de côté  $\lambda$  centrés à l'origine, les carrés situés dans un plan passant par l'origine. etc ... et plus généralement, les homothétiques  $\lambda B$  d'un ensemble connexe  $B$  quelconque.

D'après la propriété 4,  $B_{\lambda+\mu}$  est ouvert selon  $B_\lambda$ , et par suite, d'après la propriété 5, on a les inclusions :

$$A_{\omega_{\lambda+\mu}} \subset A_{\omega_\lambda} \subset A \subset A_{f_\lambda} \subset A_{f_{\lambda+\mu}}$$

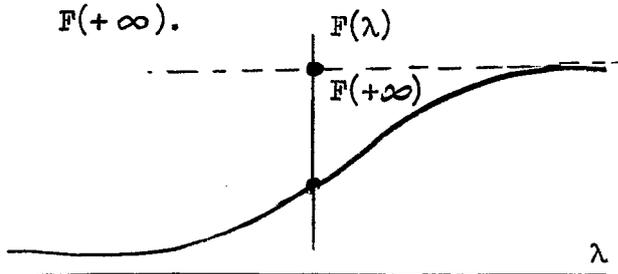
Si  $A$  est borné, et si les ensembles  $A_{\omega_\lambda}$ ,  $A_{f_\lambda}$  sont mesurables et bornés (il en est toujours ainsi si  $B_\lambda$  est topologiquement ouvert, et borné), la fonction  $F(\lambda)$  définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\lambda) = \text{Mes}(A_{f_\lambda}) \\ F(-\lambda) = \text{Mes}(A_{\omega_\lambda}) \end{array} \right.$$

est non décroissante, d'après les inclusions ci-dessus :

$$F(-\lambda-\mu) \leq F(-\lambda) \leq F(0) \leq F(\lambda) \leq F(\lambda+\mu)$$

Lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini, l'une au moins des dimensions de  $B_\lambda$  augmente indéfiniment, d'après la relation (19). Comme  $A$  est borné, aucun point de  $A$  ne peut appartenir à toutes les ouvertures  $A_{\omega_\lambda}$ , de sorte que  $A_{\omega_\lambda}$  tend vers l'ensemble vide  $\emptyset$  et  $F(-\lambda)$  tend vers 0. Par contre, on peut montrer que  $A_{f_\lambda}$  est toujours contenu dans l'enveloppe convexe de  $A$ , qui est bornée comme  $A$  (voir Annexe 1). Lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini,  $A_{f_\lambda}$  tend par conséquent vers un ensemble borné, qui sera souvent l'enveloppe convexe de  $A$ , et par suite  $F(\lambda)$  admet une limite finie  $F(+\infty)$ .



Cette courbe  $F(\lambda)$  représente en même temps la granulométrie des pores et celle des grains. La partie droite ( $\lambda > 0$ ) concerne les pores, la partie gauche les grains. Il est facile de séparer ces deux composantes.

La granulométrie des grains selon  $B_\lambda$  est représentée par la fonction croissante de 0 à 1

$$G_1(\lambda) = \frac{F(0) - F(-\lambda)}{F(0)}$$

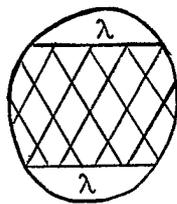
et celle des pores par la fonction, croissant également de 0 à 1 :

$$G_2(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(0)}{F(+\infty) - F(0)}$$

Ainsi est achevée la construction de la notion de granulométrie géométrique, (selon une famille  $B_\lambda$ ). On notera bien qu'à des familles  $B_\lambda$  différentes correspondront en général des granulométries distinctes. Nous plaçant dans l'espace  $R^3$  usuel à 3 dimensions, nous allons examiner les granulométries selon des vecteurs, des cercles et des boules.

#### 1.- Granulométrie des traversées des grains et des pores.

Prenons pour  $B_\lambda$  un segment de droite de longueur  $\lambda$  et de direction  $\alpha$  fixe. Alors  $G_1$  et  $G_2$  représentent les granulométries des traversées des grains et des pores dans la direction  $\alpha$ . En effet, pour qu'un point  $z$  appartienne à  $A_{\omega\lambda}$  par exemple, il faut et il suffit que  $z$  appartienne à un segment de longueur supérieure ou égale à  $\lambda$ , parallèle à la direction  $\alpha$  et contenu entièrement dans les grains.  $F(-\lambda)$



est la mesure du volume engendré par les traversées des grains de longueur  $\geq \lambda$ , et  $G_1(\lambda)$  représente, en pourcentage du volume total des grains, le volume occupé par les traversées de longueur  $< \lambda$ . C'est la granulométrie des traversées des grains au sens usuel,

exprimée en longueur et non en nombre (chaque traversée observée de longueur  $l$  est comptée non pas pour 1 mais pour un poids proportionnel à sa longueur  $l$ ). La granulométrie en nombre de ces mêmes traversées (pour laquelle chaque traversée est comptée pour 1) s'en déduit par le changement de variable :

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} dN_1(\lambda) &= m \frac{dG_1(\lambda)}{\lambda} \\ m &= \int_0^\infty \lambda dN_1(\lambda) = \frac{1}{\int_0^\infty \frac{dG_1(\lambda)}{\lambda}} \end{aligned} \right.$$

## 2.- Granulométrie selon des boules.

Lorsque  $B_\lambda$  est la boule de rayon  $\lambda$ ,  $F(-\lambda)$  représente le volume balayé par les sphères de rayon  $\lambda$  qu'il est géométriquement possible d'implanter à l'intérieur de A. Si A est constitué d'une sphère unique de rayon R, on a :

$$F(-\lambda) = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{pour } \lambda < R$$

$$F(-\lambda) = 0 \quad \text{pour } \lambda > R$$

et par suite aussi

$$G_1(\lambda) = 0 \quad \text{pour } \lambda < R$$

$$G_2(\lambda) = 1 \quad \text{pour } \lambda > R$$

$G_1(\lambda)$  est bien la courbe granulométrique associée à un grain unique de rayon R.

Si l'on a plusieurs grains sphériques disjoints,  $F(-\lambda)$  représente la somme des volumes des grains de rayons supérieurs à  $\lambda$ , et par suite  $G_1(\lambda)$  représente, exprimé en pourcentage du volume total des grains, le volume occupé par les grains de rayons inférieurs ou égaux à  $\lambda$  :  $G_1(\lambda)$  coïncide avec la courbe granulométrique cumulée usuelle.

On remarquera que  $G_2(\lambda)$  - la granulométrie des pores - dépend de la manière dont ces grains sphériques sont distribués dans l'espace et n'a pas d'équivalent dans la notion usuelle de granulométrie :  $G_2(\lambda)$  représente la répartition des intervalles d'espace séparant les différents grains, c'est-à-dire la texture du milieu.

## 3.- Granulométrie selon des cercles.

Prenons pour  $B_\lambda$  un cercle de rayon  $\lambda$  situé dans un plan fixe P. Les courbes  $G_1(\lambda)$  et  $G_2(\lambda)$  représentent la granulométrie à deux dimensions (selon les cercles  $B_\lambda$ ) que l'on observerait si l'on disposait, pour toutes données expérimentales, de la section de A par un plan parallèle à P. On voit ici se poser un problème important concernant le passage d'une granulométrie à 3 dimensions (selon des sphères) aux granulométries à 2 dimensions (selon des cercles) ou à 1 dimension (celle des traversées) seules observables expérimentalement lorsque l'on ne dispose que d'une section à deux

dimensions du milieu étudié. Ce problème n'est complètement soluble que dans le cas de grains sphériques. Nous allons le montrer dans le chapitre suivant.

IV.- CHANGEMENT DU NOMBRE DE DIMENSIONS POUR LES GRANULOMETRIES DE GRAINS SPHERIQUES.

Soient, dans l'espace à  $n$  dimensions,  $R^n$ , des grains sphériques et  $F_n(r)$  leur granulométrie exprimée en nombre :  $F_n(r)$  représente, en pourcentage du nombre total de grains, le nombre des grains de rayon inférieur à  $r$ . Sur une section à  $n-k$  dimensions, on observera une granulométrie induite  $F_{n-k}(r)$  exprimée également en nombre. Pour  $n = 3$  et  $k = 1$ ,  $F_{n-k}(r)$  est la granulométrie des cercles induits par les grains sphériques sur une section à 2 dimensions. Pour  $n = 3$  et  $k = 2$ ,  $F_{n-k}$  est la granulométrie des traversées des grains sphériques.

Usuellement, les granulométries sont exprimées non pas en nombre mais en mesure (volume dans  $R^3$ , surface dans  $R^2$ , longueur dans  $R^1$ ). Notons  $G_n(r)$  la granulométrie en mesure dans  $R^n$  associée à la granulométrie en nombre  $F_n$ . Introduisons les moments  $m_p(n)$  et  $M_p(n)$  associés à  $F_n$  et  $G_n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_p(n) = \int_0^{\infty} r^p d F_n(r) \\ M_p(n) = \int_0^{\infty} r^p d G_n(r) \end{array} \right.$$

On passe de  $F_n$  à  $G_n$  par les formules réciproques :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_n(r) = \frac{1}{m_n(r)} \int_0^r \rho^n d F_n(\rho) \\ F_n(r) = \frac{1}{M_{-n}(r)} \int_0^r \rho^{-n} d G_n(\rho) \end{array} \right.$$

Les moments, de leurs cotés, sont liés par les formules :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_k(n) = \frac{m_{k+n}(n)}{m_n(n)} \\ m_k(n) = \frac{M_{k-n}(n)}{M_{-n}(n)} \end{array} \right.$$

1.- Passage de  $F_n$  à la granulométrie induite  $F_{n-k}$  et inversement.

Prenons dans  $R^n$  une sphère particulière de rayon  $R$ , supposée centrée à l'origine, et soient  $Ox_1, \dots, Ox_n$  les axes rectangulaires de coordonnées. Les hyperplans à  $n-k$  dimensions parallèles aux axes  $Ox_{k+1}, \dots, Ox_n$  qui rencontrent cette sphère interceptent dans l'hyperplan des  $k$  premières coordonnées un domaine (le contour apparent de la sphère dans  $R^k$ ) de mesure  $\Omega_k R^k$ , la quantité

$$\Omega_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{k}{2})}$$

représentant la mesure de la sphère de rayon unité dans l'espace à  $k$  dimensions ( $\Omega_1 = 2, \Omega_2 = \pi, \Omega_3 = \frac{4}{3}\pi$  etc..). Parmi ces hyperplans, ceux qui coupent la sphère selon une sphère à  $n-k$  dimensions de rayon supérieur à  $h$  interceptent dans l'hyperplan des  $k$  premières coordonnées un domaine (une sphère à  $k$  dimensions de rayon  $\sqrt{R^2 - h^2}$ ) de mesure  $\Omega_k (R^2 - h^2)^{\frac{k}{2}}$ .

D'autre part, le nombre total de sphères de rayon compris entre  $R$  et  $R + dR$  est proportionnel à  $dF_n(R)$ . Par suite, le nombre de sections à  $n-k$  dimensions de rayon  $\gg h$  est proportionnel à :

$$\int_h^\infty (R^2 - h^2)^{\frac{k}{2}} dF_n(R)$$

tandis que le nombre total de section à  $n-k$  dimension (de rayons quelconques) est proportionnel à :

$$\int_0^\infty R^k dF_n(r) = m_k(n)$$

Ainsi, la granulométrie en nombre induite dans  $R^{n-k}$  est donnée par :

$$1 - F_{n-k}(h) = \frac{1}{m_k(n)} \int_h^\infty (R^2 - h^2)^{\frac{k}{2}} dF_n(R)$$

Il suffit d'intégrer par parties pour obtenir :

$$(23) \quad 1 - F_{n-k}(h) = \frac{k}{m_k(n)} \int_h^\infty R(R^2 - h^2)^{\frac{k}{2} - 1} [1 - F_n(R)] dR$$

A un coefficient près, on reconnaît la montée d'ordre  $k$ . Si  $I_k$  est l'opérateur de montée d'ordre  $k$ , (23) s'écrit en effet :

$$1 - F_{n-k}(h) = \frac{1}{\Omega_k m_k(n)} I_k \left[ 1 - F_n(r) \right]$$

Il suffit de multiplier par l'opérateur  $I_{-k}$  (descente d'ordre  $k$ ), qui est l'inverse de  $I_k$ , pour obtenir :

$$(24) \quad 1 - F_n(r) = \Omega_k m_k(n) I_{-k} \left[ 1 - F_{n-k}(h) \right]$$

Ainsi, dans le cas des grains sphériques, la formule (24) permet de reconstituer la granulométrie originelle  $F_n(r)$  à  $n$  dimensions à partir de la granulométrie induite  $F_{n-k}(h)$  observée dans une section à  $n-k$  dimensions.

2.- Cas particuliers. - Pour  $k = 2$ . (reconstitution de la granulométrie de sphères à 3 dimensions à partir de celles de leurs traversées) l'opérateur  $I_{-k}$  prend la forme très simple :

$$I_{-2} g(r) = - \frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} g(r)$$

Introduisons donc l'histogramme  $f_{n-2}$  des traversées

$$f_{n-2}(r) = \frac{d}{dr} F_{n-2}(r)$$

La formule (24) donne immédiatement :

$$F_n(r) = 1 - \frac{m_2(n)}{2r} f_{n-2}(r)$$

Ainsi la granulométrie à 3 dimensions se déduit de manière remarquablement simple de l'histogramme des traversées. Le moment  $m_2(n)$  se déduit de son côté de la dérivée de cet histogramme. Pour  $r$  tendant vers 0, en effet,  $F_n(r)$  tend vers 0 et par suite :

$$\frac{1}{m_2(n)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_{n-2}(r)}{2r} = \frac{1}{2} f'_{n-2}(0)$$

Pour  $k=1$  (reconstitution de la granulométrie des sphères à 3 dimensions à partir de la granulométrie des cercles observée sur une section plane) la formule de passage est un peu plus complexe. On a, en effet :

$$I_{-1} g = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} g'(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}$$

Par suite (24) donne cette fois :

$$1 - F_n(r) = \frac{2 m_1(n)}{\pi} \int_r^{\infty} f_{n-1}(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}$$

$f_{n-1}$  désignant l'histogramme  $\frac{d}{du} F_{n-1}(u)$  de la granulométrie induite.

Pour calculer  $m_1(n)$  à partir de  $f_{n-1}$ , il suffit d'annuler  $r$  dans la relation ci-dessus :

$$\frac{\pi}{2} = m_1(n) \int_r^{\infty} \frac{1}{u} f_{n-1}(u) du$$

### 3.- Relations entre moments.

Il sera souvent commode de pouvoir calculer directement les moments  $m_p(n)$  de la granulométrie originelle en fonction des moments expérimentaux  $m_p^{(n-k)}$  de la granulométrie induite.

Ce passage direct est facile. Multiplions les relations (23) par  $h^{\alpha-1}$  et intégrons de 0 à l'infini. A gauche, il vient :

$$\int_0^{\infty} h^{\alpha-1} [1 - F_{n-k}(h)] dh = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} h^{\alpha} d F_{n-k}(h) = \frac{1}{\alpha} m_{\alpha}^{(n-k)}$$

A droite, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{k}{m_k(n)} \int_0^{\infty} h^{\alpha-1} dh \int_h^{\infty} [1 - F_n(R)] (R^2 - h^2)^{\frac{k}{2}-1} R dR \\ &= \frac{k}{m_k(n)} \int_0^{\infty} [1 - F_n(R)] R dR \int_0^R (R^2 - h^2)^{\frac{k}{2}-1} h^{\alpha-1} dh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k}{m_k(n)} \frac{\Gamma(\frac{k}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{2 \Gamma(\frac{\alpha+k}{2})} \int_0^{\infty} [1 - F_n(R)] R^{k+\alpha-1} dR \\
 &= \frac{k}{m_k(n)} \frac{\Gamma(\frac{k}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{2 \Gamma(\frac{\alpha+k}{2})} \frac{m_{k+\alpha}(n)}{k+\alpha}
 \end{aligned}$$

D'où la relation cherchée entre moments :

$$(25) \quad m_{\alpha}^{(n-k)} = \frac{\Gamma(1 + \frac{k}{2}) \Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha+k}{2})} \frac{m_{k+\alpha}(n)}{m_k(n)}$$

Au lieu des granulométries en nombre, on utilise souvent les granulométries en mesure  $G_n$  qui s'en déduisent par les formules (21). Les moments en nombre  $m_p(n)$  se déduisent des moments en mesure  $M_p(n)$  par la relation (22), qui s'écrit :

$$M_{\alpha}(n) = \frac{m_{n+\alpha}(n)}{m_n(n)}$$

Remplaçant  $m_{n+\alpha}(n)$  et  $m_n(n)$  par leurs valeurs déduites de (25), il vient :

$$M_{\alpha}(n) = \frac{m_{n+\alpha}(n)}{m_n(n)} = \frac{m_{\alpha+n-k}^{(n-k)} m_k(n)}{m_{n-k}^{(n-k)} m_k(n)} \frac{\Gamma(1 + \frac{\alpha+n}{2}) \Gamma(1 + \frac{n-k}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha+n-k}{2}) \Gamma(1 + \frac{n}{2})}$$

D'où la relation :

$$(26) \quad \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n+\alpha}{2})} M_{\alpha}(n) = \frac{\Gamma(1 + \frac{n-k}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n-k+\alpha}{2})} M_{\alpha}^{(n-k)}$$

qui exprime le moment d'ordre  $\alpha$  de la granulométrie originelle à partir du moment de même ordre de la granulométrie induite.

Cas particulier. Pour  $k = 2$ , les moments de la granulométrie en poids se déduisent des moments de la granulométrie des traversées (exprimées en longueurs) par :

$$M_{\alpha}(n) = \frac{n+\alpha}{n} M_{\alpha}^{(n-2)}$$

Pour  $k = 1$ , les moments des granulométries en poids (dans  $R^3$ ) et en surface (dans  $R^2$ ) sont liés par l'équation (26) où l'on fait  $n = 3$  et  $k = 1$  :

$$M_{\alpha}(3) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{\alpha}{2}\right)} M_{\alpha}(2)$$

\*

\* \*

C H A P I T R E    I I

LES MILIEUX POREUX ALEATOIRES

I.- DEFINITION D'UN MILIEU POREUX ALEATOIRE PAR SA LOI SPATIALE.

Dans ce chapitre, le milieu poreux, caractérisé par la donnée de l'ensemble  $A$  des grains et de l'ensemble complémentaire  $A^c$  des pores - sera considéré comme une réalisation particulière d'un milieu poreux aléatoire, ou, si l'on préfère, l'ensemble  $A$  sera interprété comme une réalisation d'un ensemble aléatoire. Rejetant dans l'Annexe 2 l'examen des fondements axiomatiques de la théorie et des points de rigueur (concernant notamment la séparabilité et la mesurabilité) nous observerons ici une démarche plus intuitive. Sauf mention spéciale, les ensembles aléatoires étudiés sont définis dans l'espace euclidien  $R^n$  à  $n$  dimensions. L'exposé comprendra trois parties : définition de la loi spatiale d'un ensemble aléatoire, construction des notions granulométriques et enfin examen du cas particulier du grain convexe isolé.

Soient  $x_1, x_2 \dots x_k$  et  $y_1, y_2 \dots y_{k'}$ , deux groupes de  $k$  et  $k'$  points quelconques de l'espace  $R^n$ . Nous désignerons par :

$$P(x_1, x_2 \dots x_k; y_1, y_2 \dots y_{k'}) = P(x_1, \dots, x_k \in A, y_1, \dots, y_{k'} \notin A)$$

la probabilité pour que les  $k$  points  $x_1 \dots x_k$  appartiennent à  $A$  et que les  $k'$  points  $y_1 \dots y_{k'}$ , n'appartiennent pas à  $A$ . Cette probabilité est, naturellement, une fonction de ces  $k + k'$  points (donc une fonction de  $n(k+k')$  variables). L'ensemble de toutes ces fonctions, pour toutes les valeurs des entiers  $k$  et  $k'$  et tous les systèmes de points  $x_1 \dots x_k$  et  $y_1 \dots y_{k'}$ , constitue la loi spatiale de l'ensemble aléatoire  $A$ . Nous admettrons (voir Annexe 2) que l'ensemble aléatoire  $A$  peut être considéré comme défini par la donnée de sa loi spatiale.

Pour  $k' = 0$ , la fonction

$$P(x_1 \dots x_k) = P(x_1, x_2 \dots x_k \in A)$$

représentant la probabilité pour que  $k$  points donnés appartiennent à  $A$  sera appe-

l'ensemble aléatoire  $A$ . L'origine de cette terminologie est la suivante : si l'on désigne par  $f(x)$  la fonction caractéristique de  $A$  :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

qui est une fonction aléatoire, la probabilité pour que les  $k$  points  $x_1 \dots x_k$  appartiennent à  $A$  est égale à l'espérance mathématique du produit  $f(x_1) \dots f(x_k)$  :

$$P(x_1, \dots, x_k) = E \left[ f(x_1) f(x_2) \dots f(x_k) \right]$$

Les moments fonctionnels du complémentaire de  $A$  (les pores) seront désignés par la lettre  $Q$  :

$$Q(x_1 \dots x_k) = P(x_1 \notin A, \dots, x_k \notin A) = E \left( \left[ 1 - f(x_1) \right] \dots \left[ 1 - f(x_k) \right] \right)$$

Les fonctions  $P(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k)$  ne peuvent pas être absolument quelconques. Elles sont soumises aux trois conditions suivantes :

a/ on a nécessairement  $0 \leq P \leq 1$ , quels que soient les points  $x_1 \dots$  et  $y_1 \dots$

b/ Lorsque  $x_1 \dots x_k \in A$  et  $y_1 \dots y_k \notin A$ , tout point supplémentaire  $z$  appartient soit à  $A$ , soit à son complémentaire. D'où la condition de cohérence :

$$(1) \quad P(x_1 \dots x_k; y_1 \dots y_k) = P(x_1 \dots x_k, z; y_1 \dots y_k) + P(x_1 \dots x_k; y_1 \dots y_k, z)$$

c/ Enfin  $P$  est invariante pour toute permutation des points  $x_1 \dots x_k$  ou  $y_1 \dots y_k$ .

La condition de cohérence (1) laisse prévoir que la loi spatiale est entièrement déterminée par les moments fonctionnels. Effectivement, la fonction  $P(x_1 \dots x_k; y_1 \dots y_k)$  peut s'exprimer à l'aide des seuls moments d'ordre  $k, k+1, \dots, k+k'$ . On le voit facilement grâce aux espérances mathématiques. De

$$P(x_1 \dots x_k; y_1 \dots y_k) = E \left( f(x_1) f(x_2) \dots f(x_k) \left[ 1 - f(y_1) \right] \dots \left[ 1 - f(y_k) \right] \right)$$

on déduit, en effet, le développement :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} P(x_1 \dots x_k; y_1, \dots, y_k) &= P(x_1, \dots, x_k) - \sum_{i_1=1}^{k'} P(x_1 \dots x_k, y_{i_1}) \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k'} P(x_1, x_2, \dots, x_k, y_{i_1}, y_{i_2}) - \dots + (-1)^{k'} P(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) \end{aligned} \right.$$

En particulier, les moments fonctionnels  $Q$  des pores s'expriment à l'aide des moments fonctionnels  $P$  des grains (et réciproquement) :

$$(3) \quad Q(x_1, \dots, x_k) = 1 - \sum_{i_1=1}^k P(x_{i_1}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} P(x_{i_1}, x_{i_2}) - \dots + (-1)^k P(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Ainsi, les moments fonctionnels d'ordre 1 :  $P(x)$  - probabilité pour que  $x \in A$  - et  $Q(x)$  - probabilité pour que  $x \notin A$  - sont liés par :

$$Q(x) = 1 - P(x)$$

et les moments fonctionnels d'ordre 2 :  $P(x_1, x_2)$  - probabilité pour que  $x_1$  et  $x_2$  soient dans  $A$  - et  $Q(x_1, x_2)$  - probabilité pour que  $x_1$  et  $x_2$  soient dans les pores - sont liés par :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= 1 - P(x_1) - P(x_2) + P(x_1, x_2) \\ P(x_1, x_2) &= 1 - Q(x_1) - Q(x_2) + Q(x_1, x_2) \end{aligned} \right.$$

Par un léger abus de langage, le moment d'ordre 2 :

$$P(x_1, x_2) = E [f(x_1) f(x_2)]$$

sera désigné dans la suite comme la covariance de l'ensemble aléatoire  $A$  (à strictement parler, la covariance serait  $P(x_1, x_2) - P(x_1) P(x_2)$ ).

Cas stationnaire. - On dira que l'ensemble aléatoire  $A$  possède le caractère stationnaire lorsque sa loi spatiale est invariante par translation, c'est-à-dire lorsque, pour tout vecteur  $h$  et tout groupe de points  $x_1, \dots, y_k$ , on a :

$$P(x_1+h, \dots, x_k+h, y_1+h, \dots, y_k+h) = P(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k)$$

D'après la relation (2), il suffit d'ailleurs de vérifier que les moments fonctionnels sont invariants par translation.

Ce caractère stationnaire de  $A$  signifie que les propriétés de  $A$  sont les mêmes dans tout l'espace. Il y a homogénéité spatiale. L'ensemble  $A$  se reproduit, statistiquement, dans tout l'espace identiquement à lui-même. C'est, en principe, seulement dans le cas stationnaire que l'inférence statistique est possible (en pratique, il suffit que  $A$  puisse être considéré comme localement stationnaire, c'est-à-dire que ses caractéristiques ne varient que lentement dans l'espace). Pour procéder à l'estimation des moments fonctionnels, à partir des données expérimentales disponibles, on profitera du fait qu'il y a égalité entre les probabilités et les intégrales d'espace correspondantes. (voir Annexe 2).

Par exemple, le moment d'ordre 1,  $P(x)$ , est une constante  $p$  dans le cas stationnaire (puisque  $P(x+h) = P(x)$  pour tout vecteur  $h$ ). Pour estimer cette probabilité  $p$  constante, lorsque  $A$  est connu expérimentalement dans un domaine  $D$ , on utilise la relation :

$$p = \frac{1}{\text{Mes } D} E \left[ \int_D f(x) dx \right] = \frac{E [\text{Mes } A \cap D]}{\text{Mes } D}$$

La probabilité  $q = 1 - p$ , constante également, pour qu'un point  $x$  soit dans les pores n'est pas autre chose que la porosité du milieu poreux aléatoire stationnaire (dans le cas non stationnaire la porosité  $Q(x)$  varie dans l'espace).

De même, dans le cas stationnaire, la covariance  $P(x_1, x_2) = P(x_1+h, x_2+h)$  ne dépend que de la différence  $x_2 - x_1$ . Nous poserons souvent :

$$C(h) = P(x, x+h)$$

$C(h)$  est la covariance des points  $x$  et  $x+h$ , distants (vectoriellement) de  $h$  : elle ne dépend que du vecteur  $h$  et non du point d'appui  $x$ . On a :

$$\begin{cases} C(h) = C(-h) \\ C(0) = p \end{cases}$$

Pour estimer  $C(h)$  à partir des observations faites dans un domaine  $D$ , on doit faire la statistique du nombre de couples de points  $x, x+h$  appartenant tous deux à  $A$ .

D'un point de vue plus géométrique, on peut remarquer que  $x+h$  appartient à  $A$  si, et seulement si,  $x$  appartient au translaté  $A_{-h}$  de  $A$  par le vecteur  $-h$ . Ainsi, la covariance  $P(x, x+h)$  est aussi la probabilité pour que le point  $x$  appartienne à l'intersection  $A \cap A_{-h}$  de  $A$  et de son translaté par  $-h$ . Dans le cas stationnaire, la covariance  $C(h)$  pourra être estimée à partir de la relation :

$$C(h) = \frac{1}{\text{Mes } D} E \left[ \text{Mes} (A \cap A_{-h} \cap D) \right] = \frac{1}{\text{Mes } D} E \left[ \text{Mes} (A \cap A_h \cap D) \right]$$

#### Moments fonctionnels généralisés

Il est en général possible (voir annexe 2) de définir la probabilité :

$$P(B, B') = P(B \subset A, B' \cap A = \emptyset)$$

pour que deux ensembles donnés  $B$  et  $B'$  soient contenus le premier dans les grains, le deuxième dans les pores.  $P(B, B')$  généralise la loi spatiale  $P(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_{k'})$  : celle-ci correspond, en effet, au cas particulier où

$$B = \{ x_1, \dots, x_k \} \quad \text{et} \quad B' = \{ y_1, \dots, y_{k'} \} \quad \text{sont des ensembles de}$$

points en nombre fini. En particulier, le moment fonctionnel généralisé de l'ensemble aléatoire  $A$  :

$$P(B) = P(B \subset A)$$

donnant la probabilité pour que l'ensemble  $B$  soit contenu dans les grains, et celui de l'ensemble complémentaire  $A^c$

$$Q(B) = P(B \subset A^c) = P(A \cap B = \emptyset)$$

donnant la probabilité pour que  $B$  soit contenu dans les pores (ou, ce qui revient au même, disjoint de  $A$ ) vont jouer un rôle primordial dans la construction de la notion probabiliste de la granulométrie.

Il faut noter que, lorsque  $B$  et  $B'$  ne sont pas finis, il n'existe plus de relation analogue à (3) qui permette de passer de  $P(B)$  à  $Q(B')$  ou réciproquement.

Pour donner un contenu plus géométrique à ces moments fonctionnels, prenons pour  $B$  un ensemble contenant l'origine  $0$  et interprétons le comme un échantillon

implanté en 0. L'échantillon égal à B implanté au point x, c'est-à-dire le translaté  $B_x$  conduit à définir les probabilités  $P(B_x)$  et  $Q(B_x)$  pour que  $B_x$  soit contenu dans les grains (dans les pores). L'ensemble B étant choisi, ce sont des fonctions du point d'implantation x. Dans le cas stationnaire, ce sont des constantes. On a :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(B_x) = P(B_x \subset A) = P(x \in A \ominus B) \\ Q(B_x) = P(B_x \cap A = \emptyset) = P(x \notin A \oplus B) \end{array} \right.$$

Les relations (5) montrent comment ces moments fonctionnels généralisés se relient à la loi spatiale des transformés de Serra  $A \ominus B$  et  $A \oplus B$ . Dans le cas stationnaire,  $P(B_x)$  et  $Q(B_x)$  ne dépendent pas de x et on peut les désigner simplement par  $P(B)$  et  $Q(B)$ . Leur estimation pourra se faire à partir des relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(B) = \frac{1}{\text{Mes } D} E \left[ \text{Mes}(A \ominus B) \cap D \right] \\ 1 - Q(B) = \frac{1}{\text{Mes } D} E \left[ \text{Mes}(A \oplus B) \cap D \right] \end{array} \right.$$

## II.- DEFINITION DES GRANULOMETRIES.

Dans le premier chapitre, la granulométrie des grains A, selon une famille  $B_\lambda$  (vérifiant  $B_\lambda \oplus B_\mu = B_{\lambda+\mu}$ ) a été définie à partir de la mesure de l'ouverture de A selon  $B_\lambda$  :

$$A_{\omega_\lambda} = (A \ominus B_\lambda) \oplus B_\lambda$$

et celle des pores à partir de la mesure de la fermeture de A selon  $B_\lambda$

$$A_{\Gamma_\lambda} = (A \oplus B_\lambda) \ominus B_\lambda$$

Lorsque A est un ensemble aléatoire, la notion de mesure de l'ensemble A doit être remplacée par celle de la probabilité pour qu'un point x donné appartienne à  $A_{\omega_\lambda}$ . Il est donc naturel de définir la granulométrie à partir de la fonction non décroissante de  $\lambda$  :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x; \lambda) = P(x \in A_{\Gamma_\lambda}) \\ F(x; -\lambda) = P(x \in A_{\omega_\lambda}) \end{array} \right. \quad (\lambda > 0)$$

Dans le plupart des cas (du moins si  $B_\lambda$  ne reste pas borné pour  $\lambda \rightarrow \infty$ ) cette fonction variera de 0 à 1. Elle généralise la fonction  $F(\lambda)$  du premier chapitre. Toutefois, dans le cas non stationnaire, elle dépend du point  $x$  : la granulométrie qu'elle définit n'a qu'une valeur locale, limitée au voisinage du point  $x$ . A strictement parler, elle n'a qu'une valeur purement potentielle et échappe à l'inférence statistique : une estimation approchée reste cependant possible localement, pourvu que  $F(x, \lambda)$  ne varie que lentement en fonction du point  $x$ .

Dans le cas stationnaire,  $F(x, \lambda)$  ne dépend pas de  $x$  et peut s'écrire simplement  $F(\lambda)$ . Elle prend alors sa pleine signification granulométrique. Les granulométries  $G_1$  des grains et  $G_2$  des pores sont définies par les fonctions croissant de 0 à 1 :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} G_1(\lambda) &= \frac{F(0) - F(-\lambda)}{F(0)} = \frac{p - F(-\lambda)}{p} \\ G_2(\lambda) &= \frac{F(\lambda) - F(0)}{F(+\infty) - F(0)} = \frac{F(\lambda) - p}{q} \end{aligned} \right.$$

L'inférence statistique, à partir de données expérimentalement connues dans un domaine  $D$ , repose alors sur les formules (voir Annexe 2).

$$\left\{ \begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{E \left[ \text{Mes} (D \cap A_{F\lambda}) \right]}{\text{Mes } D} \\ F(-\lambda) &= \frac{E \left[ \text{Mes} (D \cap A_{\omega\lambda}) \right]}{\text{Mes } D} \end{aligned} \right.$$

Ainsi, les granulométries  $G_1$  et  $G_2$  coïncident, en valeur probable, avec les granulométries géométriques déterminées, selon les procédés du Ch. I, à partir d'une réalisation de l'ensemble aléatoire  $A$ .

En termes de probabilités conditionnelles, la granulométrie des grains, prise sous forme décroissante  $1 - G_1(\lambda) = \frac{F(-\lambda)}{p}$  est la probabilité pour qu'un point  $x$  appartienne à un translaté de  $B_\lambda$  entièrement contenu dans les grains (sachant que  $x \in A$ ). De même, la granulométrie des pores, prise sous la forme  $1 - G_2(\lambda) = \frac{1 - F(\lambda)}{q}$  est la probabilité pour qu'un point  $x$  des pores n'appartienne pas à  $A_{F\lambda}$  : c'est la probabilité pour que, sachant que  $x$  est dans les pores, il existe un translaté de  $B_\lambda$  contenant  $x$  et contenu dans les pores.

En notations de probabilités conditionnelles, nous avons donc :

$$(7bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_1(\lambda) = P(x \notin A_{\omega_\lambda} \mid x \in A) \\ G_2(\lambda) = P(x \in A_{\Gamma_\lambda} \mid x \notin A) \end{array} \right.$$

Les granulométries les plus intéressantes correspondent aux cas où l'on prend comme famille  $B_\lambda$  des vecteurs, des cercles ... des boules, ou encore des rectangles, des parallélépipèdes, etc ... Nous examinerons seulement le cas où  $B_\lambda$  est un vecteur de longueur  $\lambda$  de direction donnée, c'est-à-dire le cas des granulométries des traversées des grains et des pores.

#### Granulométries des traversées.

Soit un vecteur de longueur  $l$  (variable) et de direction fixe de vecteur unitaire  $\alpha$ . Le moment fonctionnel  $P([x, x + l \alpha])$  (probabilité pour que le vecteur d'origine  $x$  équipollent à  $l \alpha$  soit contenu dans les grains) sera désigné, pour abrégé, par  $P(x, l)$ . Dans le cas stationnaire, il ne dépend pas de  $x$ , et sera noté simplement  $P(l)$ .

La granulométrie des traversées des grains, d'après ce qui précède, dépend uniquement de la probabilité  $F(x, -l)$  pour que  $x$  appartienne à l'ouverture  $A_{\omega_l}$  de  $A$  selon le vecteur  $l \alpha$ . Pour éviter le signe - devant  $l$ , nous poserons :

$$H(x, l) = F(x, -l) = P(x \in A_{\omega_l})$$

Dans le cas stationnaire, cette probabilité ne dépend pas de  $x$  et sera notée  $H(l)$ .

Il existe une relation entre le moment fonctionnel  $P(x, l)$  et la fonction granulométrique  $H(x, l)$ . En effet, utilisons pour simplifier des notations à une seule dimension en nous plaçant sur une droite passant par  $x$  et parallèle à la direction  $\alpha$ .  $H(x, l)$  est la probabilité de l'évènement : " Il existe un segment de longueur  $l$  parallèle à  $\alpha$ , contenant  $x$  et contenu dans  $A$ ". Cet évènement est la somme logique des évènements incompatibles suivants :

- le segment  $[x, x+l]$  est contenu dans A.

- le segment  $[x+h-l, x+h]$  est contenu dans A, mais  $x+h+\Delta h$  n'est pas dans A ( $\Delta h$  très petit, h variant de 0 à l).

Un évènement de la deuxième catégorie possède la probabilité :

$$-\Delta h \left[ \frac{\partial}{\partial l} P(z; l) \right]_{z=x+h-l}$$

Par suite, on a :

$$(8) \quad H(x, l) = P(x; l) - \int_0^l \left[ \frac{\partial}{\partial l} P(z; l) \right]_{z=x+h-l} dh$$

(nous admettrons que la dérivée partielle  $\frac{\partial P}{\partial l}$  existe).

Dans le cas stationnaire, cette relation est particulièrement intéressante. La dérivée partielle  $\frac{\partial P}{\partial l}$  est remplacée par la dérivée simple  $P'(l) = \frac{dP(l)}{dl}$  qui ne dépend pas de h, et (8) se réduit à :

$$(9) \quad H(l) = P(l) - l \frac{dP}{dl}$$

Ainsi la granulométrie  $H(l)$  se déduit du moment fonctionnel  $P(l)$ . Inversement, d'ailleurs, compte tenu de  $H(0) = P(0) = p$ , l'équation différentielle (9) se résout sous la forme :

$$(10) \quad P(l) = - \int_l^\infty \frac{y-l}{y} dH(y)$$

(le signe moins provient de ce que la fonction H utilisée ici est décroissante).  
Les équations (9) et (10) sont intéressantes à plusieurs titres.

Du point de vue expérimental la granulométrie des traversées des grains dans une direction donnée  $\alpha$  est facile à mesurer. Soit  $N(\ell)$  cette granulométrie exprimée en nombre (c'est, en pourcentage du nombre total de grains rencontrés par une ou plusieurs droites parallèles à  $\alpha$ , le nombre observé des traversées de longueur  $L < \ell$ ). Comme  $H(\ell)$  a la signification d'une granulométrie exprimée en longueur, on a :

$$\frac{1}{y} d H(y) = - C d N(y)$$

La constante  $C$  se détermine en intégrant de 0 à l'infini :

$$\int_0^{\infty} d H(y) = - C \int_0^{\infty} y d N(y)$$

A gauche, on obtient  $- H(0) = - p$ . A droite,  $- C m$ ,  $m$  désignant la valeur moyenne (en nombre) des traversées :

$$m = \int_0^{\infty} y d N(y)$$

On en tire  $C = \frac{p}{m}$  et (10) peut s'écrire :

$$P(\ell) = \frac{p}{m} \int_{\ell}^{\infty} (y - \ell) d [1 - N(y)]$$

soit, en intégrant par parties :

$$(11) \quad P(\ell) = \frac{p}{m} \int_{\ell}^{\infty} [1 - N(y)] dy$$

Ainsi, lorsque l'on a mesuré expérimentalement la porosité  $1 - p$  et la granulométrie en nombre des traversées des grains dans une direction donnée, l'équation (11) permet de déterminer le moment fonctionnel  $P(\ell)$ .

De la même manière, la probabilité  $Q(\ell)$  pour que le vecteur de longueur  $\ell$  soit contenu dans les pores se déduit de la granulométrie en nombre  $N_2$  des traversées des pores et de la moyenne correspondante  $m_2$  par la relation :

$$(12) \quad Q(\ell) = \frac{q}{m_2} \int_{\ell}^{\infty} [1 - N_2(y)] dy$$

On remarque aussi, sur l'équation (11) que la granulométrie en nombre  $N(\ell)$  n'existe que dans la mesure où  $P(\ell)$  est dérivable. La granulométrie en longueur  $H(\ell)$  par contre, existe toujours même si  $P(\ell)$  n'est pas dérivable. Lorsque  $P(\ell)$  n'est

pas dérivable, tout segment de droite de longueur finie parallèle à  $\alpha$  contient une infinité de traversées distinctes de longueurs arbitrairement petites.

Du point de vue théorique, les moments fonctionnels  $P(\ell)$  sont en général plus faciles à former que les granulométries, et on utilisera plutôt la relation (9) pour obtenir la granulométrie (en longueur)  $H(\ell)$ . La granulométrie en nombre s'obtient en dérivant (11) :

$$\frac{P}{m} [1 - N(\ell)] = - \frac{d P(\ell)}{d \ell}$$

et en déterminant  $m$  par :

$$\frac{P}{m} = - \frac{d P(0)}{d \ell}$$

$\frac{d P(0)}{d \ell}$  est la dérivée à droite de  $P(\ell)$  en  $\ell = 0$

L'équation (10) peut aussi être obtenue par le raisonnement rapide suivant : conditionnellement, lorsque l'on sait qu'un point  $x$  appartient à une traversée de longueur comprise entre  $y$  et  $y + dy$  (ce qui a lieu avec la probabilité  $- d H(y)$ ), l'une des extrémités de cette traversée, par exemple son extrémité droite, peut être située n'importe où sur le segment  $[x, x + y]$  avec une égale probabilité. La probabilité pour que cette extrémité droite tombe à une distance de  $x$  supérieure à  $\ell$  ( $\ell \leq y$ ) est donc  $1 - \frac{\ell}{y}$ . Le théorème des probabilités composées donne donc :

$$P(\ell) = - \int_{\ell}^{\infty} \left(1 - \frac{\ell}{y}\right) d H(y)$$

c'est-à-dire (10).

### III.- THEORIE DU GRAIN CONVEXE ISOLE.

La théorie du grain convexe isolé, outre l'intérêt qu'elle présente par elle-même comme exemple simple de géométrie aléatoire, nous permettra, au chapitre suivant, de construire des ensembles aléatoires possédant la propriété semi-markovienne.

Un ensemble (non aléatoire)  $A$  est convexe lorsque deux points  $x$  et  $y$  ne peuvent appartenir tous deux à  $A$  sans que le segment de droite  $[x, y]$  appartienne

tout entier à A. Autrement dit, si  $x \in A$  et  $y \in A$ , tout point de la forme  $\lambda x + (1-\lambda)y$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) appartient à A.

Pour qu'un ensemble aléatoire A soit convexe, il est donc nécessaire que la probabilité d'avoir " $x \in A, y \in A, \lambda x + (1-\lambda)y \in A$ " ne diffère pas de la probabilité d'avoir seulement " $x \in A$  et  $y \in A$ ". Autrement dit, les moments fonctionnels d'ordre 2 et 3 vérifient la relation :

$$(13) \quad P(x, \lambda x + (1-\lambda)y, y) = P(x, y) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

Plus généralement, si  $x_1, x_2, \dots, x_k$  sont des points alignés sur une droite, et rangés sur cette droite par ordre d'abscisses croissantes, la convexité de A entraîne :

$$(14) \quad P(x_1, x_2, \dots, x_k) = P(x_1, x_k)$$

De même encore, la probabilité  $P([x, y])$  pour que le segment de droite  $[x, y]$  soit tout entier contenu dans A est égale à la probabilité pour que les deux points x et y soient dans A - c'est-à-dire à la covariance  $P(x, y)$ .

$$(15) \quad P([x, y]) = P(x, y)$$

Réciproquement, on montre facilement (sous les hypothèses définies dans l'Annexe 2, c'est-à-dire lorsque A est du type ouvert-fermé) que lorsque la condition (13) est vérifiée l'ensemble aléatoire A est presque certainement convexe (il y a une probabilité unité pour qu'il soit convexe). Naturellement la condition (13) entraîne les relations (14) et (15). Plus généralement, B étant un ensemble quelconque et C son enveloppe convexe, on aura :

$$P(C) = P(B)$$

Il est évident qu'un grain convexe aléatoire A ne peut pas posséder le caractère stationnaire. Dans ce qui suit, nous supposons même que A est (presque certainement) borné. Il suffit, pour cela, que la probabilité  $P(x)$  pour que le point x appartienne à A tende vers 0 lorsque le point x tend vers l'infini et que l'intégrale :

$$\int |x| P(x) dx$$

étendue à tout l'espace soit convergente. L'intégrale  $\int P(x) dx$ , qui converge à plus forte raison, possède une signification précise : c'est l'espérance mathématique de

la mesure (du volume) du grain A :

$$(16) \quad E [\text{Mes } A] = \int P(x) dx$$

Granulométrie des traversées

D'après la condition (15), la granulométrie des traversées va se déduire de la seule covariance  $P(x,y)$ . On a vu que  $P(x, x+h)$  représentait la probabilité pour que le point  $x$  appartienne à la fois à  $A$  et à son translaté  $A_{-h}$  dans la translation  $-h$

$$P(x, x+h) = P(x \in A \cap A_{-h})$$

L'espérance mathématique de la mesure de l'intersection  $A \cap A_{-h}$  de  $A$  et de son translaté est alors égale (voir Annexe 2) à l'intégrale de la covariance prise dans tout l'espace. Nous la désignerons par  $K(h)$ :

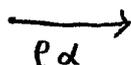
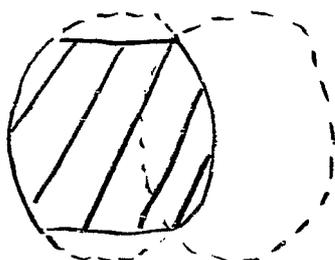
$$(17) \quad K(h) = E [\text{Mes } A \cap A_{-h}] = \int P(x, x+h) dx$$

Soit  $\alpha$  une direction (vecteur unitaire) fixe. En un point  $x$ , la granulométrie locale des traversées parallèles à  $\alpha$  est déterminée par la probabilité  $H(x, \ell)$  pour que  $x$  appartienne à une traversée de longueur  $\geq \ell$  (pour que  $x$  appartienne à l'ouverture  $A_{\omega \ell}$  de  $A$  selon le vecteur  $\ell \alpha$ ). D'après la relation (8), on a :

$$(18) \quad H(x, \ell) = P(x, x + \ell \alpha) - \int_0^\ell \left[ \frac{\partial}{\partial \ell} P(z, z + \ell \alpha) \right]_{z=x+(\lambda-\ell)\alpha} d\lambda$$

L'ensemble  $A_{\omega \ell}$  se déduit de l'ensemble convexe  $A$  en rabotant les portions

de  $A$  où les traversées parallèles à  $\alpha$  sont inférieures à  $\ell$ . Du fait de la convexité, il est en rapport étroit avec l'intersection de  $A$  et de son translaté par  $\ell \alpha$ . De fait, désignons par  $H(\ell)$  l'espérance mathématique de la mesure de  $A_{\omega \ell}$  :



$$H(\ell) = E [\text{Mes } A_{\omega \ell}] = \int H(x, \ell) dx$$

Intégrons l'expression (18) de  $H(x, l)$ . Compte tenu de :

$$\int dx \int_0^l \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} P(z, z+l\alpha) \right]_{z=x+(\lambda-l)\alpha} d\lambda = \int_0^l d\lambda \int \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} P(z, z+l\alpha) \right]_{z=x+(\lambda-l)\alpha} dx$$

$$= \int_0^l d\lambda \int \frac{\partial}{\partial \lambda} P(z, z+l\alpha) dz = l \frac{\partial}{\partial l} K(l\alpha)$$

on obtient :

$$H(l) = K(l\alpha) - l \frac{\partial}{\partial l} K(l\alpha)$$

Désignons par  $h$  le vecteur  $l\alpha$  de longueur  $l$  et de direction  $\alpha$ .

L'expression  $\frac{\partial}{\partial l} K(l\alpha)$  est la dérivée de  $K(h)$  prise dans la direction du vecteur  $h$ . Le résultat obtenu peut s'écrire :

$$H(h) = K(h) - \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial K(h)}{\partial h_i}$$

ou vectoriellement :

$$(19) \quad H(h) = K(h) - \bar{h} \overline{\text{grad } K(h)}$$

Ce résultat a la même signification que la relation (9). Prenons, pour la direction  $\alpha$  du vecteur  $h$ , celle du premier axe  $Ox_1$  de coordonnées. En écrivant  $H(l)$  et  $K(l)$  au lieu de  $H(l, 0, 0)$  et  $K(l, 0, 0)$ , on obtient :

$$H(l) = K(l) - l \frac{dK}{dl}$$

et par suite aussi :

$$K(l) = - \int_l^\infty \frac{y-l}{y} dH(y)$$

Le contour apparent de  $A$  (en projection sur un plan perpendiculaire à la direction  $\alpha$ ) occupe une surface  $S$ . Dans ce contour apparent, les traversées de longueur  $\geq l$  interceptent une surface plus petite  $S(l)$ . L'espérance mathématique de la mesure de  $S(l)$  est :

$$E[S(l)] = \int_l^\infty \frac{1}{y} dH(y) = -K'(l)$$

Ainsi, la granulométrie en nombre des traversées de A se déduit de la dérivée  $K'(\ell)$  de la fonction  $K(\ell)$ . En particulier, l'aire S du contour apparent de A a pour espérance mathématique  $-K'(0)$ .

On voit comment peuvent se généraliser au cas de grains convexes quelconques les résultats obtenus à la fin du ch. I dans le cas des grains sphériques. L'espace étant rempli de manière homogène de grains convexes disjoints de mêmes caractéristiques (ayant la même loi spatiale à une translation près donc même fonction  $K(h)$ ) la granulométrie en nombre  $N(\ell)$  des traversées de ces grains, mesurée le long d'une ou plusieurs lignes parallèles à la direction  $\alpha$  est donnée par :

$$(20) \quad 1 - N(\ell) = \frac{K'(\ell)}{K'(0)}$$

( $K'(0)$  est la dérivée à droite en  $\ell = 0$ , dont nous admettons l'existence).

#### Granulométrie induite sur une droite fixe.

Sur une droite D donnée, le grain convexe A peut ou bien ne pas induire de grain (s'il ne rencontre pas D), ou bien induire un grain convexe à 1 dimension, c'est-à-dire un intervalle de D. La granulométrie induite est donc déterminée :

- a/ par la probabilité  $Q(D)$  pour que D ne rencontre pas A,
- b/ par la loi de répartition conditionnelle des deux extrémités droite et gauche du grain induit sur D, dans l'hypothèse où D rencontre A. Elle se déduit de la seule covariance  $P(x,y)$ . Pour le montrer, nous procéderons par étapes.

#### 1/- Calcul de $Q(x_1, x_2, \dots, x_k)$

Soient  $x_1, \dots, x_k$  k points alignés sur D et rangés par ordre d'abscisses croissantes. La probabilité  $Q(x_1, \dots, x_k)$  pour qu'aucun de ces points n'appartienne à A (c'est-à-dire au grain induit sur D) est donnée par :

$$(21) \quad Q(x_1, \dots, x_k) = 1 - \sum_{i=1}^k P(x_i) + \sum_{i=1}^{k-1} P(x_i, x_{i+1})$$

Cette relation peut se déduire directement de (3), compte tenu de la convexité. Il est plus simple de procéder comme suit. Posons :

$$R(x,y) = P(x \notin A, y \in A) = P(y) - P(x,y)$$

L'évènement "l'un au moins des k points  $x_i$  est dans A", de probabilité  $1 - Q(x_1, \dots, x_k)$ , est la somme logique des évènements incompatibles.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \in A \\ x_1 \notin A \text{ et } x_2 \in A \\ \dots \dots \dots \\ x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \notin A \text{ et } x_k \in A \end{array} \right.$$

qui - en vertu de la convexité - ont même probabilité que les évènements

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \in A \\ x_1 \notin A \text{ et } x_2 \in A \\ x_2 \notin A \text{ et } x_3 \in A \\ \dots \dots \dots \\ x_{k-1} \notin A \text{ et } x_k \in A \end{array} \right.$$

D'où :

$$\begin{aligned} 1 - Q(x_1, \dots, x_k) &= P(x_1) + R(x_1; x_2) + R(x_2; x_3) + \dots + R(x_{k-1}; x_k) \\ &= P(x_1) + [P(x_2) - P(x_1, x_2)] + \dots + [P(x_k) - P(x_{k-1}, x_k)] \end{aligned}$$

et la relation (21).

2/- Calcul de  $Q([a, b])$

La probabilité  $Q([a, b])$  pour qu'un intervalle donné  $[a, b]$  de la droite D soit disjoint du grain induit peut se déduire de (21) par passage à la limite. On peut aussi faire un raisonnement direct. Soit  $\alpha$  la direction de D, et  $\Delta l$  une quantité positive très petite. La probabilité pour que l'extrémité droite du grain induit

sur D tombe entre  $x$  et  $x + \alpha \Delta \ell$  est  $P(x) - P(x, x + \alpha \Delta \ell)$ . Nous admettrons l'existence et l'uniformité des limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{P(x) - P(x, x + \alpha \Delta \ell)}{\Delta \ell} \\ v(x) = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{P(x) - P(x - \alpha \Delta \ell, x)}{\Delta \ell} \end{array} \right.$$

qui sont (au signe près pour la première) les dérivées à droite et à gauche de  $P(x, y)$  prises en  $x = y$  dans la direction  $\alpha$ . A des infiniment petits près d'ordre  $> 1$ ,  $u(x) \Delta \ell$  et  $v(y) \Delta \ell$  sont les probabilités pour que l'extrémité droite (ou gauche) du grain induit sur D tombe dans  $[x, x + \alpha \Delta \ell]$  (ou  $[y - \alpha \Delta \ell, y]$ ). Le segment  $[a, b]$  peut rencontrer le grain induit de deux manières seulement : ou bien  $b \in A$ , ou bien l'extrémité droite du grain induit sur D tombe entre  $a$  et  $b$ . D'où

$$1 - Q([a, b]) = P(b) + \int_0^{|b-a|} u(a + \alpha \ell) d\ell$$

et de même :

$$1 - Q([a, b]) = P(a) + \int_0^{|b-a|} v(b - \alpha \ell) d\ell$$

D'où l'expression cherchée :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q([a, b]) = 1 - P(b) - \int_0^{|b-a|} u(a + \alpha \ell) d\ell \\ = 1 - P(a) - \int_0^{|b-a|} v(b - \alpha \ell) d\ell \end{array} \right.$$

Il est peut être plus clair d'écrire ces relations en notations à une seule dimension, en caractérisant les points de la droite D par leur abscisse  $\Delta$  sur D. Soient  $\Delta_a$  et  $\Delta_b$  les abscisses sur D de  $a$  et  $b$ . Les équations (22) s'écrivent :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q([a, b]) = 1 - P(b) - \int_{\Delta_a}^{\Delta_b} u(\Delta) d\Delta \\ = 1 - P(a) - \int_{\Delta_a}^{\Delta_b} v(\Delta) d\Delta \end{array} \right.$$

Remarque

En dérivant (23) en  $\lambda_b$  on obtient la dérivée  $\frac{d P(b)}{d \alpha}$  de  $P(b)$  prise dans la direction  $\alpha$  de  $D$  sous la forme :

$$\frac{d P(b)}{d \alpha} = v(b) - u(b)$$

Ainsi (puisque l'on n'est pas dans le cas stationnaire) les deux fonctions  $v(x)$  et  $u(x)$  ne coïncident pas.

La probabilité  $Q(D)$  pour qu'il n'y ait pas de grain induit sur la droite  $D$  s'obtient en faisant tendre  $a$  vers  $-\infty$  et  $b$  vers  $+\infty$  dans (23).

$$(24) \quad Q(D) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda) d\lambda = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} v(\lambda) d\lambda$$

Ces relations s'obtiennent aussi en remarquant que  $u(\lambda) d\lambda$  est la probabilité pour que l'extrémité droite du grain induit sur  $D$  tombe entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$  :

l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda) d\lambda$  est donc la probabilité pour qu'il y ait un grain induit.

3 - Granulométrie du grain induit.

La granulométrie du grain induit sur  $D$  peut se déduire de la fonction  $H(x, \ell)$  défini en (18). On peut aussi rechercher la loi de répartition des abscisses  $S_1$  et  $S_2$  ( $S_1 \leq S_2$ ) des extrémités gauche et droite du grain induit sur  $D$ . Si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux points de  $D$  d'abscisses  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , leur covariance  $P(x_1, x_2)$  se met sous la forme d'une fonction :

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = P(x_1, x_2)$$

et on a :

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = P(S_1 \leq \lambda_1, S_2 \geq \lambda_2) \quad (\lambda_1 \leq \lambda_2)$$

Conditionnellement, lorsque l'on sait que  $D$  coupe  $A$ , la loi de probabilité des abscisses  $S_1$  et  $S_2$  des deux extrémités du grain est définie par la fonction

$$\frac{F(\lambda_1, \lambda_2)}{1 - Q(D)} \quad (\text{avec } \lambda_1 \leq \lambda_2).$$

CH A P I T R E     I I I

---

SCHEMAS BOOLEENS ET SEMI-MARKOVIENS

---

I.- LES SCHEMAS BOOLEENS.

L'idée qui préside à la construction des schémas booléens consiste à meubler l'espace à l'aide de grains implantés au hasard, indépendamment les uns des autres, et possédant les mêmes caractéristiques aléatoires (la même loi spatiale à une translation près) et à prendre la réunion ensembliste de tous les grains ainsi obtenus. Explicitons cette démarche :

Soit tout d'abord  $A'$  un ensemble aléatoire et

$$\overline{W}(B) = P(B \subset A')$$

$$\chi(B) = P(B \cap A' = \emptyset)$$

ses moments fonctionnels. Pour abrégier le langage, nous dirons que  $A'$  est un grain aléatoire supposé germé à l'origine 0 des coordonnées (sans que cela implique, d'ailleurs, que 0 appartienne nécessairement à  $A'$ ). Si nous remplaçons  $A'$  par son translaté  $A'_\xi$  dans la translation  $\xi$ , nous obtenons un grain aléatoire supposé germé au point  $\xi$ . Les moments fonctionnels  $\overline{W}_\xi(B)$  et  $\chi_\xi(B)$  de  $A'_\xi$  se déduisent immédiatement de ceux de  $A'$ . En effet,  $B \subset A'_\xi$  est équivalent à  $B_{-\xi} \subset A'$  ( $B_{-\xi}$  est le translaté de  $B$  dans la translation réciproque  $-\xi$ ). D'où :

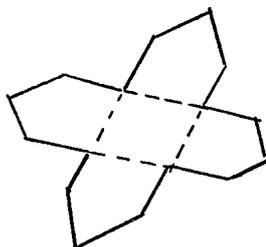
$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{W}_\xi(B) = \overline{W}(B_{-\xi}) \\ \chi_\xi(B) = \chi(B_{-\xi}) \end{array} \right.$$

Implantons dans tout l'espace des germes selon un schéma poissonnien de densité  $\theta(\xi)$ . Le nombre de germes contenus dans un ensemble  $V$  quelconque est une variable de Poisson de paramètre :

$$\theta_V = \int_V \theta(\xi) d\xi$$

et, si  $V_1, V_2 \dots$  sont des ensembles deux à deux disjoints les nombres  $N_1, N_2 \dots$  de germes tombés dans chacun d'eux sont des variables indépendantes.

A partir de chaque germe  $\xi_i$ , laissons se développer un grain aléatoire  $A'_i$ , chacun de ces grains se développant indépendamment de tous les autres. Deux



grains différents peuvent naturellement se rencontrer. Désignons par  $A$  la réunion ensembliste de tous les grains  $A'_i$ . La figure constituée par deux grains  $A'_i$  se rencontrant représente - grossièrement -

la résultante de deux grains qui se seraient gênés mutuellement dans leur développement. Nous dirons que l'ensemble aléatoire  $A$  s'obtient par passage en booléen à partir de  $A'$  et de la densité poissonienne  $\theta(\xi)$ .

### La loi spatiale de A

Les moments fonctionnels  $Q(B) = P(B \cap A = \emptyset)$  se déduisent facilement des moments  $\chi(B)$  de  $A'$ . En effet, pour exprimer que  $B$  est disjoint de  $A$ , on doit écrire que pour chaque élément de volume  $\Delta\xi$  centré en chaque point  $\xi$  :

- ou bien aucun grain n'a germé en  $\Delta\xi$
- ou bien un grain a germé, mais n'a pas rencontré  $B$ .

Les probabilités correspondantes sont  $1 - \theta(\xi)\Delta\xi$  et  $\theta(\xi)\Delta\xi \chi(B_{-\xi})$  dont la somme est équivalente à  $\exp(-\Delta\xi \theta(\xi) [1 - \chi(B_{-\xi})])$ .  $Q(B)$  s'obtient en faisant le produit, pour tous les petits volumes  $\Delta\xi$ , des probabilités correspondantes (puisque'il s'agit d'évènements indépendants). D'où l'expression cherchée :

$$(1) \quad Q(B) = \exp \left[ - \int \theta(\xi) [1 - \chi(B_{-\xi})] d\xi \right]$$

En particulier, les moments d'ordre 1 et 2 sont donnés par :

$$(2) \quad Q(x) = \exp \left[ - \int \theta(\xi) \overline{W}(x - \xi) d\xi \right]$$

et, compte tenu de la relation (4) ch.II :

$$(3) \quad Q(x_1, x_2) = Q(x_1) Q(x_2) \exp \left[ \int \theta(\xi) \overline{w}(x_1 - \xi, x_2 - \xi) d\xi \right]$$

Sans hypothèse particulière sur la densité des germes  $\theta(\xi)$ , le schéma obtenu n'est pas stationnaire. Comme cas particuliers stationnaires, on peut envisager le cas où la densité  $\theta(\xi)$  est elle-même une fonction aléatoire stationnaire - ou, plus simplement, le cas où la densité est une constante  $\theta$ .

Cas particulier 1.-

Si  $\theta(\xi)$  est une fonction aléatoire stationnaire, elle est définie par sa fonctionnelle caractéristique :

$$\Gamma(\varphi) = E \left[ \exp \left( i \int \theta(\xi) \varphi(\xi) d\xi \right) \right]$$

qui donne (pour toutes les fonctions  $\varphi$  d'un espace fonctionnel convenable) la fonction caractéristique de la variable aléatoire  $\int \theta(\xi) \varphi(\xi) d\xi$ . Le moment fonctionnel  $Q(B)$  se déduit alors, d'après (1), de  $\Gamma(\varphi)$  par la formule :

$$Q(B) = \Gamma \left[ i \left( 1 - \chi(B_{-\xi}) \right) \right]$$

2.- Si la densité de germe est une constante  $\theta$ , on obtient immédiatement :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q(B) = \exp \left( - \theta \int \left[ 1 - \chi(B_{-\xi}) \right] d\xi \right) \\ q = \exp \left( - \theta \int \overline{w}(\xi) d\xi \right) \\ Q(x, x+h) = q^2 \exp \left( \theta \int \overline{w}(-\xi, h - \xi) d\xi \right) \end{array} \right.$$

Si l'on désigne par :

$$\left\{ \begin{array}{l} K(0) = \int \overline{w}(\xi) d\xi \\ K(h) = \int \overline{w}(x, x+h) dx \end{array} \right.$$

l'espérance mathématique de la mesure de chaque grain aléatoire  $A'$  (avant passage en booléen) et de l'intersection  $A' \cap A'_{-h}$  du grain  $A'$  avec son propre translaté dans la translation  $-h$ , on obtient :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} q = e^{-\theta K(0)} \\ Q(x, x+h) = q^2 e^{\theta K(h)} = q e^{-\theta [K(0) - K(h)]} \\ C(h) = P(x, x+h) = 1 - 2q + q^2 e^{\theta K(h)} \end{array} \right.$$

## II.- EXEMPLE DU SCHEMA BOOLEEN CIRCULAIRE DANS $R^2$

A titre d'application élémentaire, nous allons étudier le schéma booléen à 2 dimensions, où les germes ont une densité poissonnienne constante  $\theta$  et où les grains sont des cercles de granulométrie  $F(r)$ . Plus précisément, le grain primaire  $A'$  est un cercle centré à l'origine, de rayon  $R$  aléatoire avec  $P(R < r) = F(r)$ . La probabilité  $\chi(B)$  pour qu'un ensemble  $B$  ne rencontre pas  $A'$  est ici  $F(d)$ ,  $d$  désignant la plus petite distance de l'origine à l'ensemble  $B$  (supposé fermé).

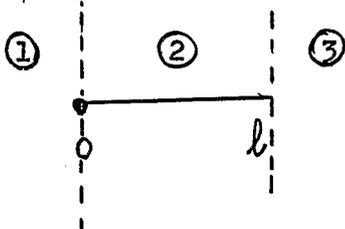
a - La porosité  $q$  - ou probabilité pour qu'un point  $x$  ne soit pas dans  $A$  est, d'après (4)

$$q = \exp \left[ - 2\pi \theta \int_0^\infty [1 - F(r)] r dr \right]$$

Soient  $m$  et  $\sigma^2$  la moyenne et la variance de la loi  $F(r)$ . En intégrant par parties, il vient :

$$(6) \quad q = e^{-\pi \theta (m^2 + \sigma^2)}$$

b - Calcul de  $Q(l)$  - Cherchons maintenant la probabilité  $Q(l)$  pour qu'un segment de longueur  $l$  soit tout entier contenu dans les pores. Pour tout point  $\xi$  du plan, on écrit qu'aucun grain n'a germé dans l'aire  $\Delta_\xi$  centrée en  $\xi$ , ou, si un grain  $y$  a germé, qu'il n'a pas atteint le segment  $[0, l]$ .



Les grains germés dans la partie (1) (resp. la partie (3)) du plan ne coupent pas le seg-

ment si, et-seulement si, ils ne contiennent pas le point 0 (resp. le point  $l$ ). La probabilité pour qu'aucun des grains germés en (1) et (3) ne rencontre le segment  $[0, l]$  est donc égale à  $q$ , déjà calculée en (6).

Restent les points de (2). Désignant par  $y$  les ordonnées (l'axe des  $x$  étant  $0l$ ), on trouve immédiatement la probabilité pour qu'aucun des grains germés en (2) n'atteigne le segment, sous la forme :

$$\exp \left[ - 2 \theta \int_0^l dx \int_0^{\infty} [1 - F(y)] dy \right] = e^{-2\theta ml}$$

D'où, finalement :

$$(7) \quad q(l) = q e^{-2\theta ml}$$

On voit apparaître une loi exponentielle, dont nous verrons au paragraphe suivant qu'elle est liée à une propriété semi markovienne du schéma : Lorsque l'on sait qu'un point 0 est dans les pores, il y a indépendance, le long de toute droite passant par 0, entre les points situés de part et d'autre de 0. Aucune information relative à ce qui se passe à gauche de 0 ne nous renseigne sur ce qui se passe à droite. On notera que si 0 est dans les grains, cette indépendance n'est plus réalisée.

c/- Granulométrie des traversées des pores - La granulométrie (en longueur) des traversées des pores se déduit de la fonction  $H(l)$ , qui vérifie l'équation analogue à (9) :

$$H(l) = q(l) - l \frac{dq}{dl} = q(1 + 2\theta ml) e^{-2\theta ml}$$

Normons à l'unité : la granulométrie  $G(l)$  est :

$$G(l) = 1 - \frac{1}{q} H(l) = 1 - (1 + 2\theta ml) e^{-2\theta ml}$$

Elle admet la densité (histogramme)

$$g(l) = \frac{dG}{dl} = (2\theta m)^2 l e^{-2\theta ml}$$

qui est celle d'une loi béta.

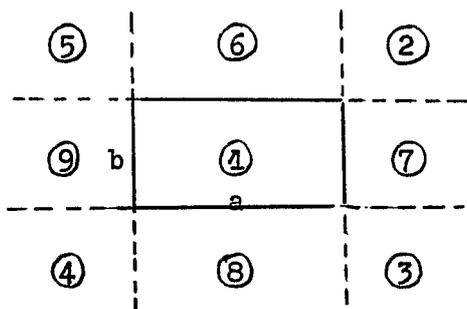
La granulométrie en nombre, de son côté, s'obtient, d'après (12), en dérivant  $Q(\ell)$ . On obtient :

$$(8) \quad 1 - N(\ell) = e^{-2\theta_m \ell}$$

C'est, à nouveau, la loi exponentielle.

d - Calcul de  $Q(R)$  - Etant donné un rectangle  $R$ , de cotés  $a$  et  $b$ , cherchons

la probabilité  $Q(R)$  pour que ce rectangle soit contenu dans les pores. Le plan est divisé en neuf régions (voir figure ci-contre) numérotées de 1 à 9. La probabilité pour que n'atteigne  $R$  aucun des grains germés dans :



$$\begin{aligned} (2) + (3) + (4) + (5) & \text{ est } q \\ (6) + (8) & \text{ est } e^{-2\theta_m a} \\ (7) + (9) & \text{ est } e^{-2\theta_m b} \end{aligned}$$

Enfin, la probabilité pour qu'aucun grain ne germe dans ① est  $e^{-\theta ab}$

D'où, finalement :

$$(9) \quad Q(R) = q e^{-\theta [ab + 2m(a+b)]}$$

### III.- LES SCHEMAS BOOLEENS ET SEMI-MARKOVIENS A GRAINS CONVEXES.

Les propriétés du schéma circulaire étudiées au paragraphe précédent (granulométrie exponentielle des traversées des pores et caractère semi-markovien) peuvent s'étendre au schéma obtenu par passage en booléen à partir de grains convexes (et avec une densité poissonnienne  $\theta$  de germes constante).

#### 1.- Schéma booléen à grains convexes.

Partons d'un grain convexe aléatoire défini par ses moments fonctionnels  $\chi(B)$  et  $\overline{W}(B)$ . La convexité se traduit (ch.II, parag.III) par le fait que la probabilité

$\overline{W}([x, x+h])$  pour que le segment  $[x, x+h]$  soit dans  $A'$  ne diffère pas de la covariance  $\overline{W}(x, x+h)$ . Par un passage en booléen effectué comme au premier paragraphe de ce chapitre, avec une densité  $\Theta$  de germes constante, nous obtenons un ensemble aléatoire stationnaire  $A$  dont les moments fonctionnels sont donnés en (4) et (5). Grâce à l'hypothèse de la convexité des grains primaires  $A'$ , la probabilité  $Q(h)$  pour qu'un segment  $[x, x+h]$  soit contenu tout entier dans les pores (soit disjoint de  $A$ ) va pouvoir se déduire de la fonction :

$$K(h) = \int \overline{W}(x, x+h) dx = E \left[ \text{Mes } A' \cap A'_h \right]$$

qui représente l'espérance mathématique de la mesure du grain primaire  $A'$  et de son translaté par  $h$ .

Calcul de  $Q(h)$  -  $Q(h)$  est donnée par :

$$Q(h) = \exp \left[ -\Theta \int \left[ 1 - \chi([x, x+h]) \right] dx \right]$$

où  $1 - \chi([x, x+h])$  est la probabilité pour qu'un grain primaire convexe germé en 0 rencontre le segment  $[x, x+h]$ . On a vu (ch.II, parag.III, formule (22)) comment cette quantité se calcule ; désignant par  $\alpha$  le vecteur unitaire du vecteur  $h$ , on a :

$$1 - \chi([x, x+h]) = \overline{W}(x+h) + \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \int_0^{h|\alpha} \frac{\overline{W}(x+\lambda\alpha) - \overline{W}(x+\lambda\alpha, x+\lambda\alpha + \Delta\lambda\alpha)}{\Delta\lambda} d\lambda$$

(on admet l'uniformité du passage à la limite  $\Delta\lambda \rightarrow 0$ ). Intégrant en  $x$  on obtient :

$$\begin{aligned} \int \left[ 1 - \chi(x, x+h) \right] dx &= \int \overline{W}(x+h) dx + \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \int_0^h d\lambda \int \frac{\overline{W}(x+\lambda\alpha) - \overline{W}(x+\lambda\alpha, x+\lambda\alpha + \Delta\lambda\alpha)}{\Delta\lambda} d\lambda \\ &= K(0) + |h| \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{K(0) - K(\alpha\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \end{aligned}$$

La limite qui apparaît dans cette expression est (au signe près) la dérivée à droite de  $K(h)$  dans la direction du vecteur  $h$  prise en  $h = 0$ . Nous la désignons, pour abréger, par  $\frac{d}{dh} K(0)$ .

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$Q(h) = \exp \left( -\Theta \left[ K(0) - |h| \frac{d}{dh} K(0) \right] \right)$$

Soit, puisque  $q$  est égal à  $\exp[-\theta K(0)]$  :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} q(h) = q \cdot e^{-\lambda|h|} \\ \lambda = -\theta \frac{d}{dh} K(0) \end{array} \right.$$

( $\lambda$  est nécessairement positif, car  $K(h) \leq K(0)$ ). On voit apparaître, comme pour le schéma booléen circulaire, une loi exponentielle.

La granulométrie en longueurs des traversées des pores est donc ici encore la loi béta de densité  $\lambda^2 h e^{-\lambda h}$ , et la granulométrie en nombre est exponentielle :

$$1 - N(\ell) = e^{-\lambda \ell}$$

Le paramètre  $\lambda = -\theta \frac{d}{dh} K(0)$  qui détermine à lui seul cette granulométrie exponentielle ne dépend que du comportement autour de  $h = 0$  de la fonction  $K(h)$  : on a vu au chapitre précédent que  $-\frac{d}{dh} K(0)$  est l'espérance mathématique de l'aire du contour apparent d'un grain convexe primaire en projection sur un plan perpendiculaire à la direction des traversées.

## 2.- Caractère semi-markovien du schéma booléen à grains convexes.

Nous dirons qu'un ensemble aléatoire  $A$  est semi-markovien si pour toute droite  $D$  et tout point  $z_0$  de  $D$  il y a indépendance (conditionnelle) entre tout évènement observable sur  $D$  à droite de  $z_0$  et tout évènement observable sur  $D$  à gauche de  $z_0$  lorsque l'on sait que  $z_0$  est dans les pores (n'appartient pas à  $A$ ). Le long de toute droite  $D$ , le schéma induit un processus semi-markovien, c'est-à-dire un processus possédant la propriété markovienne pour tout  $z_0 \notin A$  (en général, il ne la possède pas pour  $z_0 \in A$ ).

Nous nous proposons d'établir que tout schéma booléen à grains convexes est semi-markovien. Cette proposition apparaît presque évidente géométriquement. En effet, les grains primaires étant convexes, si un point  $z_0$  d'une droite  $D$  est dans les pores, aucun grain primaire rencontrant  $D$  à gauche de  $z_0$  ne peut recouper  $D$  à droite de  $z_0$ , de sorte qu'il doit y avoir indépendance entre ce qui se passe à gauche et ce qui se passe à droite. Pour démontrer de manière plus rigoureuse ce résultat important, nous procéderons en trois étapes.

a/ Soient  $x_1 \dots x_k$ ,  $k$  points d'une droite  $D$  rangés par ordre d'abscisses croissantes sur  $D$ . La probabilité  $Q(x_1 \dots x_k)$  pour qu'aucun de ces points ne soient dans  $A$  est - d'après (4)

$$Q(x_1 \dots x_k) = \exp \left( - \theta \int \left[ 1 - \chi(x_1 - \xi, \dots, x_k - \xi) \right] d\xi \right)$$

Mais  $\chi$  - moment fonctionnel du grain primaire convexe - vérifie la formule (21) du chapitre II. On a, dans le schéma primaire :

$$1 - \chi(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k \overline{w}(x_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \overline{w}(x_i, x_{i+1})$$

D'où :

$$\int \left[ 1 - \chi(x_1 - \xi, \dots, x_k - \xi) \right] d\xi = k \int \overline{w}(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \int \overline{w}(x_i - \xi, x_{i+1} - \xi) d\xi = k K(0) - \sum_{i=1}^{k-1} K(x_{i+1} - x_i)$$

Compte tenu de (5), on obtient la relation :

$$(11) \quad Q(x_1, \dots, x_k) = q \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{q} Q(x_i, x_{i+1})$$

dont la signification markovienne est évidente.

Soient, en effet,  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_\lambda \leq z_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_r$  des points de  $D$  rangés par ordre d'abscisses croissantes sur  $D$ , et :

$$Q(x_1, \dots, x_r \mid y_1, \dots, y_\lambda, z_0) = \frac{Q(y_1 \dots y_\lambda, z_0, x_1 \dots x_r)}{Q(y_1, \dots, y_\lambda, z_0)}$$

la probabilité conditionnelle pour que les points  $x_1 \dots x_r$  soient dans les pores sachant qu'aucun des points  $y_1 \dots y_\lambda$  et  $z_0$  n'appartient à  $A$ . On déduit immédiatement de (11) :

$$(12) \quad Q(x_1, \dots, x_r \mid y_1, \dots, y_\lambda, z_0) = Q(x_1, \dots, x_r \mid z_0)$$

Ainsi la probabilité pour que  $x_1 \dots x_r \notin A$  est la même si l'on sait que  $y_1 \dots y_\lambda$  et  $z_0 \notin A$  ou lorsque l'on sait seulement que  $z_0 \notin A$ .

b/ Montrons que la propriété markovienne est encore vérifiée si l'un ou plusieurs des points  $y$  situés à gauche de  $z_0$  sont dans les grains. Désignons par  $y_i$  les points  $y$  n'appartenant pas à  $A$  et par  $y_j'$  les points  $y$  appartenant à  $A$  (les  $y_i$  et les  $y_j'$  se présentent dans un ordre quelconque sur  $D$ , mais

sont tous situés à gauche de  $z_0$ ).

L'évènement :

$$"y_i \notin A, y_j \in A, z_0 \notin A, x_1 \dots x_r \notin A"$$

est somme logique d'évènements incompatibles du type :

"N grains primaires exactement recouvrent les  $y_j^i$  et sont disjoints des  $y_i$ , de  $z_0$  et des  $x$ , et tous les autres grains sont disjoints des  $y_i, y_j^i, z_0$  et  $x$ ".

que nous noterons  $C_N$ . Les grains étant implantés indépendamment les uns des autres, la probabilité de  $C_N$  est de la forme

$$P(C_N) = P_N Q(y_1, \dots, y_\lambda, z_0, x_1 \dots x_r)$$

où  $P_N$  s'obtient en intégrant - sur toutes les implantations possibles  $\xi_1 \dots \xi_N$  des N grains - la probabilité pour que N grains implantés en  $\xi_1 \dots \xi_N$  recouvrent les  $y_j^i$  (chacun d'eux rencontrant au moins un  $y_j^i$ ) et soient disjoints des  $y_i$ , de  $z_0$  et des  $x$ .

Mais, les grains étant convexes, tout grain contenant un  $y_j^i$  et disjoint de  $z_0$  est disjoint de tous les  $x$ .  $P_N$  est donc aussi l'intégrale en  $\xi_1 \dots \xi_N$  de la probabilité pour que les N grains recouvrent les  $y_j^i$  et soient disjoints des  $y_i$  et de  $z_0$ . Si  $D_N$  désigne l'évènement "N grains exactement recouvrent les  $y_j^i$  et sont disjoints des  $y_i$  et de  $z_0$ , et tous les autres grains sont disjoints des  $y_i, y_j^i$  et de  $z_0$ ". On a :

$$P(D_N) = P_N Q(y_1, \dots, y_\lambda, z_0)$$

donc

$$P(C_N) = P(D_N) \frac{Q(y_1 \dots y_\lambda, z_0, x_1 \dots x_r)}{Q(y_1 \dots y_\lambda, z_0)}$$

soit, d'après (12) :

$$P(C_N) = P(D_N) Q(x_1, \dots, x_r | z_0)$$

et par suite :

$$\frac{\sum_N P(C_N)}{\sum_N P(D_N)} = Q(x_1, \dots, x_r | z_0)$$

ce qui établit la propriété markovienne pour tous les évènements du type considéré ( $y_i \notin A, y_j \in A, z_0 \notin A, x_1, \dots, x_r \notin A$ ).

c/ Passons au cas d'un évènement quelconque (avec toujours  $z_0 \notin A$ ). Soit :

$$y_i \notin A, y_j \in A, z_0 \notin A, x_k \notin A, x_l \in A$$

La probabilité  $P(y_i, x_k, z_0 \notin A, y_j, x_l \in A)$  de cet évènement se déduit de  $P(y_i, x_k, x_l, z_0 \notin A, y_j \in A)$  par une équation aux différences, du type de la relation (2) du ch.II, qui ne porte que sur les points  $x$ . La même équation aux différences fait passer de  $Q(z_0, x_1 \dots x_r)$  à  $P(z_0, x_k \notin A, x_l \in A)$ . Mais, d'après la partie b/ de la démonstration, on a :

$$\frac{Q(z_0, x_1 \dots x_r)}{q} = \frac{P(y_i, x_k, x_l, z_0 \notin A, y_j \in A)}{P(y_i, z_0 \notin A, y_j \in A)}$$

Par suite, on a encore :

$$\frac{P(z_0, x_k, y_i \notin A, y_j, x_l \in A)}{P(y_i, z_0 \notin A, y_j \in A)} = \frac{P(z_0, x_k \notin A, x_l \in A)}{q}$$

ce qui achève d'établir le caractère semi-markovien.

La propriété semi-markovienne permet de comprendre pourquoi la granulométrie des traversées des pores, dans le schéma booléen à grains convexes, est obligatoirement exponentielle. Elle va également nous conduire à poser une équation intégrale permettant de déterminer la granulométrie des traversées des grains (qui n'est pas exponentielle en général).

### 3 - La granulométrie des grains dans un schéma semi-markovien.

Nous nous proposons d'établir que, dans un schéma semi-markovien, la granulométrie des traversées des grains ne dépend que de la covariance

$$C(h) = P(x, x+h) = P(x \in A, x+h \in A)$$

En effet, cette granulométrie ne dépend que de la probabilité :

$$P(h) = P([x, x+h] \subset A)$$

Nous devons donc démontrer que la fonction  $P(h)$  peut se déduire de la covariance  $C(h)$ .

Pour abréger, nous adopterons des notations unidimensionnelles, les lettres  $h$  ou  $x$  représentant l'abscisse d'un point de l'espace sur un axe parallèle à la direction  $\alpha$  dans laquelle on étudie les traversées. On repassera immédiatement aux notations d'espace en remplaçant les dérivées par des dérivées dans la direction  $\alpha$  et les intégrales par des intégrales prises sur une droite parallèle à  $\alpha$ .

Sur une droite  $D$  parallèle à  $\alpha$  l'évènement " $x \in A$  et  $x+l \in A$ " de probabilité  $C(l)$  est somme logique des évènements incompatibles :

- l'intervalle  $[x, x+l]$  est contenu dans  $A$ ,
- $x$  appartient à un grain induit s'arrêtant entre  $x+h$  et  $x+h+\Delta h$ , et  $x+l \in A$  ( $h$  variant de 0 à  $l$ ,  $\Delta h$  très petit).

A cause du caractère semi-markovien, puisque  $x+h+\Delta h$  est dans les pores, un évènement de la deuxième catégorie a la probabilité

$$= P'(h) \Delta h \frac{p - C(l-h)}{q}$$

D'où l'équation intégrale reliant  $P(l)$  et  $C(l)$  :

$$C(l) = P(l) - \int_0^l P'(h) \frac{p - C(l-h)}{q} dh$$

Pour simplifier cette équation, dérivons en  $l$ , en tenant compte du fait que  $C(0) = p$ . Il vient :

$$(13) \quad C'(l) = P'(l) + \frac{1}{q} \int_0^l P'(h) C'(l-h) dh$$

Cette équation suffit à déterminer  $P'(l)$  - c'est-à-dire, comme on sait, au facteur  $-\frac{1}{P'(0)}$  près, la granulométrie en nombre des traversées des grains dans la direction  $P'(0)$  de la droite  $D$  - à partir de la seule covariance  $C(h)$ .

Résolution de l'équation (13) - Pour résoudre l'équation intégrale (13), qui est une

équation de convolution, on peut introduire les transformées de Fourier  $\varphi$  et  $\Psi$  des fonctions  $C'(x)$  et  $P'(x)$  (prises identiquement nulles pour  $x < 0$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(u) = \int_0^{\infty} e^{-2i\pi ux} C'(x) dx \\ \Psi(u) = \int_0^{\infty} e^{-2i\pi ux} P'(x) dx \end{array} \right.$$

L'équation (13) est remplacée par :

$$\varphi = \Psi + \frac{1}{q} \varphi \Psi$$

D'où

$$\Psi = \frac{\varphi}{1 + \frac{\varphi}{q}}$$

$P'(x)$  se déduit de  $\Psi(u)$  par la transformation inverse. On peut aussi (sous réserve de convergence) utiliser le développement :

$$P' = C_1 + \frac{1}{q} C_2 + \dots + \frac{1}{q^n} C_{n+1} + \dots$$

où  $C_1(x) = C'(x)$  et, par récurrence :

$$C_{n+1} = - \int_0^l C_n(l-h) C_1(h) dh$$

Moments de la granulométrie des grains.

Même si l'on n'arrive pas à résoudre explicitement l'équation (13), on pourra procéder au calcul des premiers moments de la granulométrie en nombre des traversées des grains. En effet, soit  $N(y)$  cette granulométrie donnée par :

$$1 - N(y) = \frac{P'(y)}{P'(0)}$$

En intégrant (13) après multiplication par  $l^k$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} l^k C'(l) dl &= P'(0) \int_0^{\infty} [1 - N(l)] l^k dl + \frac{P'(0)}{q} \int_0^{\infty} [1 - N(h)] dh \int_0^{\infty} l^k C'(l-h) dl \\ &= P'(0) \int_0^{\infty} [1 - N(l)] l^k dl + \frac{P'(0)}{q} \int_0^{\infty} [1 - N(h)] dh \int_0^{\infty} (l+h)^k C'(l) dl \end{aligned}$$

Soient  $m_k$  les moments de la granulométrie :

$$m_k = \int_0^{\infty} l^k dN(l) = k \int_0^{\infty} l^{k-1} [1 - N(l)] dl$$

et  $L_k$  les quantités définies par :

$$L_k = \int_0^{\infty} l^k dC(l)$$

L'équation ci-dessus s'explique comme suit :

$$L_k = P'(0) \frac{m_{k+1}}{k+1} + \frac{P'(0)}{q} \left[ \frac{m_{k+1}}{k+1} L_0 + C_k \frac{m_k}{k} L_1 + C_k \frac{m_{k-1}}{k-1} L_2 + \dots \right]$$

Pour  $k=0$  et  $k=1$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} L_0 &= P'(0)m_1 + \frac{P'(0)}{q} m_1 L_0 \\ L_1 &= P'(0) \frac{m_2}{2} + \frac{P'(0)}{q} \left( \frac{m_2}{2} L_0 + m_1 L_1 \right) \end{aligned} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} L_0 &= \int_0^{\infty} c'(l) dl = p^2 - p = -pq \\ L_1 &= \int_0^{\infty} l c'(l) dl = \int_0^{\infty} [p^2 - c(l)] dl \end{aligned} \right.$$

On en tire l'expression des deux premiers moments :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} m_1 &= -\frac{p}{P'(0)} \\ m_2 &= -\frac{2}{q^2 P'(0)} \int_0^{\infty} [c(l) - p^2] dl \end{aligned} \right.$$

( $P'(0)$  est négatif et, d'après l'équation (13) elle-même,  $P'(0) = C'(0)$ ). Il est intéressant de comparer  $m_1$  avec la longueur moyenne des traversées des pores. La granulométrie des pores est exponentielle. En effet, du caractère semi-markovien,

résulte :

$$Q(h + \Delta h) = Q(h) \frac{Q(\Delta h)}{q}$$

$Q(h) = P\left(\left[ x, x+h \right] \cap A = \emptyset\right)$  désignant la probabilité pour que le segment de longueur  $h$  soit dans les pores. On en déduit :

$$Q'(h) = Q(h) \frac{Q'(0)}{q}$$

et la granulométrie des traversées des pores est donnée par l'exponentielle  $e^{-\lambda h}$  avec  $\lambda = -\frac{Q'(0)}{q}$ . On remarque que la probabilité pour qu'un segment de longueur  $\Delta h$  contienne l'extrémité d'un grain est donnée par  $-Q'(0)\Delta h$  aussi bien que par  $-P'(0)\Delta h$ . D'où :

$$P'(0) = Q'(0) = C'(0)$$

Ainsi la moyenne (en nombre) des traversées des pores est :

$$\frac{n}{\lambda} = -\frac{q}{P'(0)}$$

On voit que les traversées moyennes des grains et des pores sont, comme il était prévisible, dans le même rapport que  $p$  et  $q$ . La deuxième équation (14) montre que le moment d'ordre 2,  $m_2$ , ne peut pas, en général, se rattacher de manière aussi simple à la granulométrie des pores.

---

GRANULOMETRIES EN PLACE ET MILIEUX POREUX ALEATOIRES

---

ANNEXES

A N N E X E I

COMPLEMENTS SUR LA TRANSFORMATION DE SERRA

et les

GRANULOMETRIES

1.- Propriétés algébriques.

a/ Les opérations  $A \oplus B$  et  $A \ominus B$  ont été définies au premier chapitre par les formules équivalentes

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \oplus B = \bigcup_{y \in A} B_y = \bigcup_{x \in B} A_x = \left\{ z : A \bigcap \bigvee_z B_z \neq \emptyset \right\} \\ A \ominus B = (A^c \oplus B)^c = \bigcap_{x \in B} A_x = \left\{ z : \bigvee_z B_z \subset A \right\} \end{array} \right.$$

On vérifie immédiatement que l'opération  $A \oplus B$  est associative et commutative. Elle possède un élément neutre - l'ensemble  $\{o\}$  constitué du vecteur nul - et un élément permis, l'ensemble vide. Elle n'admet pas d'opération inverse, et définit donc seulement sur  $\mathcal{P}(R^n)$  une structure de demi-groupe d'ailleurs abélien.

b/ De (1) on déduit :

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \ominus C &= \bigcap_{y \in C} \bigcup_{x \in B} A_{x+y} \\ (A \ominus C) \oplus B &= \bigcup_{x \in B} \bigcap_{y \in C} A_{x+y} \end{aligned}$$

D'où résulte l'inclusion, en général stricte

$$(A \ominus C) \oplus B \subset (A \oplus B) \ominus C$$

c/ Par contre, on a l'égalité

$$(A \ominus B) \ominus C = (A \ominus C) \ominus B = A \ominus (B \oplus C)$$

En effet :

$$(A \ominus B) \ominus C = \bigcap_{x \in C} (A \ominus B)_x = \bigcap_{x \in C} \bigcap_{y \in B} A_{x+y} = \bigcap_{z \in B \oplus C} A_z$$

d/ Rappelons les règles d'inclusion exposées dans le chapitre 1 :

$$B \subset B' \implies \begin{cases} A \oplus B \subset A \oplus B' \\ A \ominus B \supset A \ominus B' \\ B \ominus A \subset B' \ominus A \end{cases}$$

e/ On a  $B \ominus \bigvee B \supset \{0\}$ , mais non, en général, l'égalité. En effet,  $B = B_0$  est inclus dans  $B$ , donc  $0 \in B \ominus \bigvee B$ . Mais l'inclusion peut être stricte. Toutefois, si un point  $z \neq 0$  appartient à  $B \ominus \bigvee B$ , c'est-à-dire si  $B_z \subset B$ , on a aussi (par translation)  $B_{2z} \subset B_z \subset B$  et, par récurrence  $B_{nz} \subset B$ , c'est-à-dire  $nz \in B \ominus \bigvee B$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Par exemple, si  $B = \{0, 1, 2, \dots\}$  est constitué des points d'abscisses entières d'un axe de coordonnée, on a  $B_z \subset B$  pour tout  $z \in B$  et par suite  $B = B \ominus \bigvee B$

Mais, si  $B$  est borné, on a l'égalité  $B \ominus \bigvee B = \{0\}$  : en effet,  $B \ominus \bigvee B$  est également borné et ne peut pas contenir la suite des  $nz$  pour  $z \neq 0$ .

f/ De même, si  $B \subset C$ ,  $B \ominus \bigvee C$  n'est pas forcément vide. On voit comme ci-dessus que si  $z \in B \ominus \bigvee C$ , alors tous les  $nz$  appartiennent à  $B \ominus \bigvee C$ . Toutefois  $0$  n'appartient à  $B \ominus \bigvee C$  que si, et seulement si  $B = C$ , car :

$$0 \in B \ominus \bigvee C \iff C \subset B$$

Donc, si  $B$  est borné et si l'inclusion  $B \subset C$  est stricte,  $B \ominus \bigvee C$  est vide : en effet,  $0$  n'appartient pas à  $B \ominus \bigvee C$  et par ailleurs,  $B \ominus \bigvee C$  étant borné ne peut pas contenir la suite des  $nz$  pour  $z \neq 0$ .

g/ L'opération  $\oplus$  distribue la réunion. En effet :

$$A \oplus (B \cup C) = \bigcup_{x \in A} (B_x \cup C_x) = \left( \bigcup_{x \in A} B_x \right) \cup \left( \bigcup_{x \in A} C_x \right)$$

D'où la règle suivante, et deux autres qui s'en déduisent par passage aux complémentaires :

$$\begin{cases} A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C) \\ A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C) \\ (B \cap C) \ominus A = (B \ominus A) \cap (C \ominus A) \end{cases}$$

Relativement à l'intersection, on trouve seulement l'inclusion suivante (et les deux autres qui s'en déduisent par dualité)

$$\left\{ \begin{array}{l} A \oplus (B \cap C) \subset (A \oplus B) \cap (A \oplus C) \\ A \ominus (B \cap C) \supset (A \ominus B) \cup (A \ominus C) \\ (B \cup C) \ominus A \supset (B \ominus A) \cup (C \ominus A) \end{array} \right.$$

h/ Si A est convexe,  $A \ominus B$  est convexe quel que soit B

En effet  $A \ominus B = \bigcap_{x \in B} A_x$  est convexe comme intersection de convexes.

i/ Si A et B sont convexes,  $A \oplus B$  est convexe.

En effet, soient  $z_1 = a_1 + b_1$  et  $z_2 = a_2 + b_2$  avec  $a_1, a_2 \in A$  et  $b_1, b_2 \in B$ .  $\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 = \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 + \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) est somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B, donc appartient à  $A \oplus B$ .

j/ Si A et B sont convexes, l'ouverture et la fermeture de A selon B sont également convexes.

Conséquence immédiate de h/ et i/.

k/ Composition d'ouvertures ou de fermetures. Si B et C sont deux ensembles quelconques, on a les inclusions :

$$A_{\omega_{B \oplus C}} \subset (A_{\omega_B})_{\omega_C} \subset A_{\omega_B} \cap A_{\omega_C}$$

En effet  $A_{\omega_{B \oplus C}} = \left[ A \ominus \left( \bigvee B \oplus \bigvee C \right) \right] \oplus B \oplus C$  est ouvert à la fois selon B et selon C et contenu dans A : Ouvert selon B, il est contenu dans  $A_{\omega_B}$ ; ouvert selon C, il est contenu dans  $(A_{\omega_B})_{\omega_C}$ . La deuxième inclusion est évidente.

Si C est ouvert selon B on a  $(A_{\omega_B})_{\omega_C} = A_{\omega_C}$ . Si B est ouvert selon C on a au contraire  $(A_{\omega_B})_{\omega_C} = A_{\omega_B}$

En effet, si B est ouvert selon C il est de la forme  $B' \oplus C$ . Alors  $A_{\omega_B} = (A \ominus B) \oplus B' \oplus C$  est ouvert selon C, d'où  $(A_{\omega_B})_{\omega_C} = A_{\omega_B}$ .

Si C est ouvert selon B, il est de la forme  $C' \oplus B$ . On a :

$$(A_{\omega_B})_{\omega_C} = \left[ (A_{\omega_B} \ominus B) \ominus C' \right] \oplus C$$

Mais  $A_{\omega_B} \ominus B = \left[ (A \ominus B) \oplus B \right] \ominus B = A \ominus B$ . Il reste donc :

$$(A_{\omega_B})_{\omega_C} = \left[ (A \ominus B) \ominus C' \right] \oplus C = \left[ A \ominus (B \oplus C') \right] \oplus C = A_{\omega_C}$$

Par dualité on a des résultats analogues pour les fermetures :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{\omega_B} = C \implies (A_{f_B})_{f_C} = A_{f_C} \\ B_{\omega_C} = B \implies (A_{f_B})_{f_C} = A_{f_B} \end{array} \right.$$

## 2.- Propriétés topologiques.

a/ Si  $\overset{\circ}{B}$  est un ouvert topologique,  $A \oplus \overset{\circ}{B}$  est ouvert et  $A \ominus \overset{\circ}{B}$  est fermé quel que soit A. Si  $\bar{C}$  est un fermé topologique,  $\bar{C} \ominus A$  est fermé.

En effet,  $A \oplus \overset{\circ}{B} = \bigcup_{x \in A} \overset{\circ}{B}_x$  est ouvert comme réunion d'ouverts. Les deux autres énoncés s'en déduisent par dualité.

b/  $\overset{\circ}{B}$  étant ouvert, on peut remplacer A par son ouverture dans l'expression  $A \ominus \overset{\circ}{B}$

$$\text{En effet, } z \in A \ominus \overset{\circ}{B} \iff \overset{\circ}{\bigvee} B_z \subset A \iff \overset{\circ}{\bigvee} B_z \subset \overset{\circ}{A} \iff z \in \overset{\circ}{A} \ominus \overset{\circ}{B}$$

Par dualité, on obtient deux autres propositions :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \ominus \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A} \ominus \overset{\circ}{B} \\ A \oplus \overset{\circ}{B} = \overline{A} \oplus \overset{\circ}{B} \\ \overline{B} \ominus A = \overline{B} \ominus \overline{A} \end{array} \right.$$

c/ Désignons par  $\overset{\circ}{B}_\lambda$  et  $\overline{B}_\lambda$  les boules ouverte et fermée de centre 0 et de rayon  $\lambda$ . On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{A} = \bigcup_{\lambda > 0} A \ominus \overset{\circ}{B}_\lambda = \bigcup_{\lambda > 0} A \ominus \overline{B}_\lambda \\ \overline{A} = \bigcap_{\lambda > 0} A \oplus \overset{\circ}{B}_\lambda = \bigcap_{\lambda > 0} A \oplus \overline{B}_\lambda \end{array} \right.$$

Démonstration immédiate. On a, par exemple :

$$x \in \bigcup_{\lambda > 0} A \ominus \overset{\circ}{B}_\lambda \iff \exists \lambda > 0 : \overset{\circ}{B}_\lambda(x) \subset A \iff x \in \overset{\circ}{A}$$

d/ Si  $\overline{A}$  est fermé et K compact (donc fermé et borné)  $\overline{A} \oplus K$  est fermé.

En effet, soit  $z \notin \overline{A} \oplus K$ , c'est-à-dire  $\bigvee_z \bigcap \overline{A} = \emptyset$ .  $\overline{A}$  étant fermé et K compact, il existe une boule  $B_\varepsilon$  de rayon  $\varepsilon > 0$  telle que  $\overline{A}$  et  $\bigvee_z K_z \oplus B_\varepsilon$  soient disjoints. Mais :

$$\left( \bigvee_z K_z \oplus B_\varepsilon \right) \cap \overline{A} = \emptyset \iff z \notin \overline{A} \oplus K \oplus B_\varepsilon \iff B_\varepsilon(z) \cap \overline{A} \oplus K = \emptyset$$

Par suite  $\overline{A} \oplus K$  est fermé.

Si K est un fermé quelconque non compact, la propriété peut être fausse. Par dualité, K étant un compact,  $\overset{\circ}{A} \ominus K$  est ouvert et  $K^c \ominus \overline{A}$  est ouvert.

e/

Si B est borné, la fermeture de  $A \oplus B$  est  $\bar{A} \oplus \bar{B}$ .

D'après d/,  $\bar{A} \oplus \bar{B}$  est fermé et contient  $A \oplus B$ . Donc :

$$\bar{A} \oplus \bar{B} \supseteq \overline{A \oplus B}$$

Montrons l'inclusion inverse. D'après c/, on a :

$$\overline{A \oplus B} = \bigcap_{\lambda > 0} A \oplus B \oplus \overset{\circ}{B}_\lambda$$

Mais, d'après b/,  $B \oplus \overset{\circ}{B}_\lambda = \bar{B} \oplus \overset{\circ}{B}_\lambda$  et, cet ensemble étant ouvert :

$$A \oplus \bar{B} \oplus \overset{\circ}{B}_\lambda = \bar{A} \oplus (\bar{B} \oplus \overset{\circ}{B}_\lambda) = \bar{A} \oplus \bar{B} \oplus \overset{\circ}{B}_\lambda$$

D'où :

$$\overline{A \oplus B} = \bigcap_{\lambda > 0} \bar{A} \oplus \bar{B} \oplus \overset{\circ}{B}_\lambda = \overline{(\bar{A} \oplus \bar{B})} \supseteq \bar{A} \oplus \bar{B}$$

Par dualité, on obtient pour tout ensemble B borné :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{A \oplus B} = \bar{A} \oplus \bar{B} \\ \overline{A \ominus B} = \overset{\circ}{A} \ominus \bar{B} \\ \overline{B^c \ominus A} = \overset{\circ}{B^c} \ominus \bar{A} \end{array} \right.$$

Avec les boules  $B_\lambda$ , en particulier, on a pour  $\lambda \geq \mu$

$$\overset{\circ}{B}_\lambda \oplus \overset{\circ}{B}_\mu = \bar{B}_\lambda \oplus \overset{\circ}{B}_\mu = \overset{\circ}{B}_\lambda \oplus \bar{B}_\mu = \overset{\circ}{B}_{\lambda+\mu}$$

$$\bar{B}_\lambda \oplus \bar{B}_\mu = \bar{B}_{\lambda+\mu}$$

$$\bar{B}_\lambda \ominus \bar{B}_\mu = \bar{B}_\lambda \ominus \overset{\circ}{B}_\mu = \overset{\circ}{B}_\lambda \ominus \overset{\circ}{B}_\mu = \bar{B}_{\lambda-\mu}$$

$$\overset{\circ}{B}_\lambda \ominus \bar{B}_\mu = \overset{\circ}{B}_{\lambda-\mu}$$

f/ Si  $\bar{A}$  est un convexe topologiquement fermé, et si B est un ensemble borné quelconque,  $\bar{A}$  est fermé selon B :

$$\bar{A}_f = (\bar{A} \oplus \bigvee B) \ominus B = \bar{A}$$

En effet, soit  $z \in \bar{A}_f$ , c'est-à-dire  $\bigvee_z B \subset \bar{A} \oplus \bigvee B$ , soit encore :

$$\forall u \in \bigvee B, \exists a \in \bar{A}, b \in \bigvee B : z + u = a + b$$

Partant de  $u \in \bigvee B$ , on obtient deux suites  $a_n \in \bar{A}$  et  $b_n \in \bigvee B$  définies par :

$$z + u = a_1 + b_1$$

$$z + b_1 = a_2 + b_2$$

.....

$$z + b_{n-1} = a_n + b_n$$

D'où

$$z + \frac{u}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{b_n}{n}$$

B étant borné,  $\frac{u}{n}$  et  $\frac{b_n}{n}$  tendent vers 0 pour  $n \rightarrow \infty$  et par suite

$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \rightarrow z$ . Comme  $\bar{A}$  est convexe et fermé,  $z \in \bar{A}$  et  $\bar{A}_f \subset \bar{A}$ , d'où l'égalité puisque l'inclusion inverse est toujours vraie.

Si A est convexe, mais non topologiquement fermé, on obtient seulement :

$$A \subset A_f \subset \bar{A}$$

Mais, pour A convexe quelconque, si  $\overset{\circ}{B}$  est ouvert et borné on a encore

$$\underline{A_f = \bar{A}}.$$

En effet,  $A_f$  est alors un fermé topologique contenant A donc aussi  $\bar{A}$ .

g/ Soient A un ensemble,  $\bar{C}$  son enveloppe convexe fermée, et B un ensemble borné quelconque. La fermeture de A selon B est contenue dans  $\bar{C}$ .

$$A_f = (A \oplus \bigvee B) \ominus B \subset \bar{C}$$

En effet, on a  $A \subset \bar{C}$  d'où  $A_f \subset \bar{C}_f$ . Mais  $\bar{C}_f = \bar{C}$  d'après f/.

Lorsque  $A$  est borné, il en est de même de son enveloppe convexe fermée  $\bar{C}$ . Si les  $B_\lambda$  sont une famille d'ensembles bornés dont une dimension au moins augmente indéfiniment avec  $\lambda$ , la fermeture  $A_{f_\lambda}$  de  $A$  selon  $B_\lambda$  reste contenue dans l'ensemble borné fixe  $\bar{C}$ , et par suite aussi la limite supérieure des  $A_{f_\lambda}$  :

$$\lim \text{Sup } A_{f_\lambda} \subset \bar{C}$$

h/ Si  $A$  et  $B$  sont connexes,  $A \oplus B$  est connexe.

En effet, soit  $b \in B$ .  $A_b$  est connexe et contenu dans  $A \oplus B$ , donc contenu dans une composante connexe  $C$  de  $A \oplus B$  :  $A_b \subset C$ . Pour tout  $x \in A$ ,  $x + b \in C$ .

Mais  $(x + b) \in A_b \cap B_x$ . Donc  $A_b \cup B_x$  est connexe, comme union de deux connexes non disjoints, et ceci entraîne  $B_x \subset C$ . D'où :

$$A \oplus B = \bigcup_{x \in A} B_x \subset C$$

ce qui montre que  $A \oplus B$  est connexe.

On notera que  $A \ominus B$  peut très bien ne pas être connexe.

i/ Soit  $A$  un ensemble et  $C_i$ ,  $i \in I$ , ses composantes connexes. Soit  $B$  un ensemble connexe. On a :

$$A \ominus B = \bigcup_{i \in I} (C_i \ominus B)$$

Tout d'abord,  $C_i \subset A \Rightarrow C_i \ominus B \subset A \ominus B$  et

$$\bigcup_{i \in I} (C_i \ominus B) \subset A \ominus B$$

L'inclusion inverse - fautive en général - est vérifiée ici du fait que les  $C_i$  sont les composantes connexes de  $A$ . Soit, en effet,  $z \in A \ominus B$  ou  $\bigvee_z B_z \subset A$ . Etant connexe,  $\bigvee_z B_z$  est contenu dans une composante connexe  $C_i$  particulière de  $A$ , soit  $\bigvee_z B_z \subset C_i$  ou  $z \in C_i \ominus B$ . On en déduit :

$$A \ominus B \subset \bigcup_{i \in I} (C_i \ominus B)$$

i/ Vis-à-vis de l'ouverture selon une partie connexe B, les composantes connexes  $C_i$  d'un ensemble A se comportent indépendamment les unes des autres. On a :

$$A \omega_B = \bigcup_i (C_i) \omega_B$$

En effet, d'après i/, on a d'abord  $A \ominus^V B = \bigcup_i (C_i \ominus^V B)$ . Par suite :

$$(A \ominus^V B) \oplus B = \left( \bigcup_i C_i \ominus^V B \right) \oplus B = \bigcup_i \left( (C_i \ominus^V B) \oplus B \right) = \bigcup_i (C_i) \omega_B$$

La signification de ce résultat est la suivante: les composantes connexes  $C_i$  figurent les grains individualisables d'un milieu poreux. L'ouverture de A selon B donne un renseignement granulométrique au sens strict, somme des renseignements que fournirait chaque grain ouvert isolément, et ne tenant pas compte, par conséquent, des relations entre les grains : c'est la granulométrie des grains.

Mais vis-à-vis de la fermeture, des interférences entre grains se produisent inévitablement. La fermeture des grains apporte un renseignement d'ordre textural. Comme la fermeture des grains est aussi l'ouverture des pores, chaque composante connexe des pores s'y comporte indépendamment. Ainsi, la granulométrie des pores renseigne sur la texture des grains, et réciproquement la granulométrie des grains renseigne sur la texture des pores.

\*  
\*      \*

A N N E X E I I

---

COMPLEMENTS SUR L'AXIOMATIQUE DES MILIEUX POREUX ALEATOIRES

Un examen rapide des fondements sur lesquels repose la théorie des milieux poreux aléatoires comporte deux groupes de tâches distincts :

- construction d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- examen des questions de mesurabilité.

L'espace  $\Omega$  des évènements élémentaires sera un sous-ensemble de l'ensemble  $\mathcal{P}(R^n)$  de toutes les parties de l'espace euclidien  $R^n$ . Tout  $\omega \in \Omega$  est identifié à un ensemble  $A_\omega \subset R^n$ . Cet espace  $\Omega$  ne coïncidera pas avec  $\mathcal{P}(R^n)$ . Il ne devra contenir que des ensembles  $A_\omega$  de structure relativement simple, susceptibles de représenter la réalité d'un milieu poreux. Par exemple, l'ensemble des points de coordonnées irrationnelles ne devra pas faire partie de  $\Omega$ . Dans ce qui suit, nous prendrons pour  $\Omega$  l'ensemble des ouverts-fermés (des ensembles  $A$  tels que  $A = \bar{A}$ )

La  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}$  sur  $\Omega$  devra être suffisamment large pour que des propositions telles que "l'ensemble ouvert  $B$  est contenu dans  $A$ " ou " $\bigcap A = \emptyset$ " définissent des évènements de  $\mathcal{F}$ . Enfin, il faudra montrer qu'il est effectivement possible de construire une probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  et, notamment, examiner si une telle probabilité est entièrement définie par la donnée de sa loi spatiale.

Cette construction de l'espace  $(\Omega, \mathcal{F})$  conduit à une application

$$k(x, \omega) : (R^n \times \Omega) \rightarrow \{0, 1\}$$

qui, à tout élément  $(x, \omega)$  du produit  $R^n \times \Omega$  fait correspondre le nombre 0 ou 1 selon la règle :

$$k(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_\omega \\ 0 & \text{si } x \notin A_\omega \end{cases}$$

Cette application doit être telle qu'à  $x_0$  fixé  $k(x_0, \omega)$  soit une variable aléatoire sur  $\Omega$ . Autrement dit  $k(x, \omega)$  doit être mesurable en  $\omega$ . Lorsque cette condition est vérifiée,  $k(x, \omega)$  est une fonction aléatoire en tout ou rien. Nous nous imposerons, en fait, une condition plus forte exprimant que  $k(x, \omega)$  est une fonction aléatoire mesurable : l'application  $k(x, \omega)$  du produit  $R^n \times \Omega$  muni de la  $\sigma$ -algèbre produit  $\mathcal{B} \otimes \mathcal{J}$  ( $\mathcal{B}$ ,  $\sigma$ -algèbre de Borel sur  $R^n$ ) devra elle-même être mesurable. Moyennant cette condition de mesurabilité, l'intégrale :

$$X(\omega) = \int_{A(\omega)} dF(x) = \int k(x, \omega) dF(x)$$

définie pour toute mesure positive  $F$  sera mesurable en  $\omega$  (définira une variable aléatoire) et vérifiera :

$$E(X) = \int E[k(x, \omega)] dF(x) = \int P(x \in A) dF(x)$$

En particulier, la possibilité de l'inférence statistique découlera de la formule :

$$\int_B P(x \in A) dx = E[\text{Mes } A \cap B]$$

valable pour tout ensemble  $B$  mesurable et de mesure finie.

#### 1/- $\sigma$ -algèbre $\sigma(\mathcal{V})$ sur $\mathcal{P}(R^n)$ .

Désignons par  $V_K^{K'}$  la famille des ensembles  $A$  de  $\mathcal{P}(R^n)$  contenant un ensemble  $K$  et disjoints d'un ensemble  $K'$ .

$$V_K^{K'} = \left\{ A : A \subset R^n, K \subset A, K' \cap A = \emptyset \right\}$$

Lorsque  $K = \{x_1, \dots, x_k\}$  et  $K' = \{y_1, \dots, y_{k'}\}$  sont deux ensembles finis de  $R^n$ ,  $V_K^{K'}$  est la famille des  $A$  telle que les points  $x_1 \dots x_k \in A$  et  $y_1 \dots y_{k'} \notin A$ . C'est elle qui intervient dans la définition de la loi spatiale  $P(K, K') = P(V_K^{K'})$  d'un ensemble aléatoire  $A$ . Elle doit nécessairement appartenir à toute  $\sigma$ -algèbre  $K'$  sur  $\mathcal{P}(R^n)$  permettant la construction d'une loi spatiale. Soit  $\mathcal{V}$  l'ensemble des  $V_K^{K'}$  lorsque  $K$  et  $K'$  décrivent les parties finies de  $R^n$ . La plus petite  $\sigma$ -algèbre à laquelle nous puissions nous intéresser est ainsi la  $\sigma$ -algèbre  $\sigma(\mathcal{V})$  engendrée par  $\mathcal{V}$ . Inversement, on peut montrer que toute loi spatiale  $P(V_K^{K'})$  ( $V_K^{K'} \in \mathcal{V}$ ) définit de ma-

nière unique une probabilité sur  $(\mathcal{P}(R^n), \sigma(\mathcal{G}))$ . Pour établir ce point, il suffit, d'après des résultats classiques<sup>(1)</sup>, de montrer que  $\mathcal{G}$  est à la fois une semi-algèbre de Boole et une classe compacte.

a/  $\mathcal{G}$  est une semi-algèbre de Boole - En effet, pour  $K = K'$ ,  $V_K^{K'}$  est la famille vide, et  $V_\emptyset^\emptyset$  est  $\mathcal{P}(R^n)$ . En deuxième lieu,  $\mathcal{G}$  est stable pour l'intersection finie, comme on le voit immédiatement :

$$(1) \quad V_{K_1}^{K'_1} \cap V_{K_2}^{K'_2} = V_{K_1 \cup K_2}^{K'_1 \cup K'_2}$$

Il reste à montrer que le complémentaire de tout  $V_K^{K'} \in \mathcal{G}$  est réunion finie de  $V_{K_i}^{K'_i} \in \mathcal{G}$  disjoints. D'après (1), d'ailleurs, on a :

$$V_K^{K'} = V_K^\emptyset \cap V_\emptyset^{K'}$$

et on voit facilement qu'il suffit d'établir la proposition pour  $V_K^\emptyset$  et  $V_\emptyset^{K'}$ . Prenons par exemple,  $V_K^\emptyset$ . Si  $K$  est constitué de  $k$  points  $x_1, \dots, x_k$ , on a :

$$V_K^\emptyset = V_{x_1}^\emptyset \cap V_{x_2}^\emptyset \dots \cap V_{x_k}^\emptyset$$

et le complémentaire de cet ensemble est :

$$\bigcup_{\emptyset} V_K^\emptyset = V_{x_1}^\emptyset \cup V_{x_2}^\emptyset \cup \dots \cup V_{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}}^\emptyset$$

Il est bien réunion d'ensembles disjoints appartenant à  $\mathcal{G}$ .

b/ -  $\mathcal{G}$  est une classe compacte. - Montrons, en effet, que de toute famille  $V_{K_i}^{K'_i}, i \in I$ , d'intersection vide on peut extraire une famille finie d'intersection vide. Posons :

$$R = \bigcup_{i \in I} K_i \quad R' = \bigcup_{i \in I} K'_i$$

et désignons encore par  $V_R^{R'}$  l'ensemble des  $A$  contenant  $R$  et disjoints de  $R'$  (en général  $V_R^{R'}$  n'appartient pas à  $\mathcal{G}$  puisque  $I$  n'est pas fini).

(1) - voir par ex. J. NEVEU "Bases mathématiques du calcul des probabilités," Masson 1964, page 25 et suiv.

Or, on a par hypothèse :

$$\bigcap_{i \in I} V_{K_i}^{K_i'} = V_R = \emptyset$$

Pour que  $V_R^{R'}$  soit vide, il faut et il suffit que  $R$  et  $R'$  ne soient pas disjoints. Soit donc  $x \in R \cap R'$ . On peut trouver deux indices  $i$  et  $j$  tels que  $x \in K_i$  et  $x \in K_j'$ , et l'intersection finie

$$V_{K_i}^{K_i'} \cap V_{K_j}^{K_j'} = V_{K_i \cup K_j}^{K_i' \cup K_j'}$$

est nécessairement vide.

Ainsi est établi le résultat que nous avons en vue : toute loi spatiale se prolonge de manière unique en une probabilité sur  $\mathcal{F}(R^n)$  munie de la  $\sigma$ -algèbre  $\sigma(\mathcal{V})$ . Mais on notera l'extrême maigreur de cette  $\sigma$ -algèbre. Lorsque  $B$  ou  $B'$  sont des ensembles infinis,  $V_B^\emptyset$  et  $V_\emptyset^{B'}$  n'appartiennent pas à  $\sigma(\mathcal{V})$  : des propositions telles que "B est contenu dans A" ou "B' est disjoint de A" ne définissent pas, en général, des évènements de  $\sigma(\mathcal{V})$ . Pour lever cette difficulté, nous devrons restreindre à un sous-ensemble  $\Omega$  convenablement choisi de  $\mathcal{F}(R^n)$  la classe des ensembles aléatoires  $A_\Omega$  considérés comme des évènements élémentaires.

## 2/- La classe $\Omega$ des ensembles ouverts-fermés de $R^n$

Un ensemble  $A$  sera dit ouvert-fermé s'il coïncide avec la fermeture de son ouverture topologique, c'est-à-dire si l'on a :

$$A = \overline{A^\circ}$$

et la famille des ensembles ouverts fermés sera désignée par  $\Omega$ . La restriction à  $\Omega$  de  $\sigma(\mathcal{V})$  définit une  $\sigma$ -algèbre que nous noterons  $\mathcal{F}$ . C'est la  $\sigma$ -algèbre engendrée par les sous-ensembles de  $\Omega$  de la forme :

$$S_K^{K'} = \left\{ A : A \in \Omega, K \subset A, K' \cap A = \emptyset \right\}$$

où  $K$  et  $K'$  sont des parties finies de  $R^n$ .

On peut montrer, comme ci-dessus, que les  $S_K^{K'}$  ( $K, K'$  finies) constituent une semi-algèbre de Boole. En particulier, la relation (1) reste valable

$$S_{K_1}^{K_1'} \cap S_{K_2}^{K_2'} = S_{K_1 \cup K_2}^{K_1' \cup K_2'}$$

Mais les  $S_K^{K'}$  ne constituent plus une classe compacte (lorsque R et R' ne sont pas finis,  $S_R^{R'}$  peut être vide sans que R et R' se rencontrent : il suffit que la fermeture de R rencontre R'). Il n'est donc pas vrai que toute loi spatiale puisse se prolonger d'une manière unique en une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ , et, pour construire une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ , nous devons adopter une démarche moins directe. Par contre  $\mathcal{F}$  est beaucoup plus large que ne l'était la  $\sigma$ -algèbre  $\sigma(\mathcal{V})$ . Cela va résulter des propositions qui suivent :

a/ Pour qu'un ensemble A soit ouvert-fermé, il faut et il suffit que A soit fermé et que tout point de A soit limite de points intérieurs de A.

La condition est nécessaire (d'après la relation  $A = \overline{\overset{\circ}{A}}$ ). Réciproquement, si tout point de A est limite de points intérieurs, on a  $A \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$ , et si A est fermé on a  $\overset{\circ}{A} \subset A$  d'où  $\overset{\circ}{A} \subset A$  et l'égalité.

b/ D étant un ensemble dénombrable partout dense, un ensemble A est ouvert fermé si, et seulement si, on a :

$$(2) \quad A = \overline{\overset{\circ}{A} \cap D}$$

En effet, tout point de  $\overset{\circ}{A}$  est limite de points de  $\overset{\circ}{A} \cap D$ , d'où  $\overset{\circ}{A} \subset \overline{\overset{\circ}{A} \cap D}$  et

$$\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{\overset{\circ}{A} \cap D}$$

Mais, inversement,  $\overset{\circ}{A} \cap D \subset \overset{\circ}{A}$  entraîne  $\overline{\overset{\circ}{A} \cap D} \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$ , d'où

$$\overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{\overset{\circ}{A} \cap D}$$

c/ Si B et B' sont des ensembles ouverts, l'ensemble

$$S_B^{B'} = \left\{ A : A \in \Omega, B \subset A, B' \cap A = \emptyset \right\}$$

appartient à la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}$ .

En effet, si B est ouvert, tout point de B est limite de points de  $B \cap D$

(D ensemble dénombrable partout dense quelconque), et  $B \cap D \subset A$  entraîne  $\overline{B} = \overline{B \cap D} \subset A$ , d'où l'équivalence :

$$B \subset A \iff B \cap D \subset A$$

De même, si  $B^c$  est ouvert et si  $B^c \cap D$  est disjoint de A, on a  $B^c \cap A = \emptyset$ . En effet, si un point  $x$  appartenait à  $B^c \cap A$ , il serait limite de points  $y_n \in A \cap D$ . Comme  $x \in B^c$  et que  $B^c$  est ouvert, pour  $n$  assez grand, tous les  $y_n$  appartiendraient à  $B^c$  donc aussi à  $B^c \cap D$ , et  $B^c \cap D$  ne serait pas disjoint de A. Donc :

$$B^c \cap A = \emptyset \iff B^c \cap A \cap D = \emptyset$$

Par suite, on a l'égalité

$$(3) \quad S_B^{B^c} = S_{B \cap D}^{B^c \cap D}$$

Mais  $B \cap D$  et  $B^c \cap D$  sont des ensembles dénombrables, de sorte que  $S_{B \cap D}^{B^c \cap D}$  appartient à la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{J}$ .

La relation (3) exprime que l'ensemble aléatoire A défini sur  $(\Omega, \mathcal{J}, P)$  est séparable quelle que soit la probabilité P.

d/ Si B est un ensemble fermé vérifiant

$$(4) \quad B = \overline{B \cap D}$$

(D ensemble dénombrable partout dense)  $S_B^{\emptyset}$  appartient à  $\mathcal{J}$ .

En effet,  $B \cap D \subset A$  équivaut, d'après (4), à  $\overline{B \cap D} = B \subset A$ , d'où

$$S_B^{\emptyset} = S_{B \cap D}^{\emptyset}$$

Comme  $B \cap D$  est dénombrable, ce dernier ensemble appartient à  $\mathcal{J}$ .

e/ Si  $B^c$  est compact,  $S_{\emptyset}^{B^c}$  appartient à  $\mathcal{J}$ .

En effet,  $B^c$ , étant compact, est disjoint de A, si, et seulement si il existe une boule ouverte  $\overset{\circ}{B}_\varepsilon$  de rayon  $\varepsilon$  telle  $B^c \oplus \overset{\circ}{B}_\varepsilon \subset A$ . Donc :

$$S_{\emptyset}^{B'} = \bigcup_{n>0} S_{\emptyset}^{B' \oplus \overset{\circ}{B}_1/n}$$

Mais  $B' \oplus \overset{\circ}{B}_1/n$  est ouvert et  $S_{\emptyset}^{B' \oplus \overset{\circ}{B}_1/n} \in \mathcal{J}$  d'après c/, donc aussi  $S_{\emptyset}^{B'}$

f/ Si B vérifie  $B = \overline{B \cap D}$  et si  $B'$  est compact,  $S_B^{B'}$  appartient à  $\mathcal{J}$ .

Cela résulte de d/ et e/ et de

$$S_B^{B'} = S_B^{\emptyset} \cap S_{\emptyset}^{B'}$$

### 3.- Construction d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{J})$ .

Considérons l'application  $\alpha$  de  $\mathcal{P}(R^n)$  dans  $\Omega$  qui à tout ensemble A fait correspondre la fermeture de son ouverture :

$$\alpha(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$$

C'est une application mesurable de  $\mathcal{P}(R^n)$  muni de  $\sigma(\mathcal{V})$  dans  $\Omega$  muni de la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{J}$ . En effet,  $\mathcal{J}$  étant engendrée par les  $S_x^{\emptyset}$ , montrons que  $\alpha^{-1}(S_x^{\emptyset})$  est mesurable pour  $\sigma(\mathcal{V})$ . Pour qu'un point  $x \in \overline{\overset{\circ}{A}}$  il faut et il suffit que x soit limite de points de  $\overset{\circ}{A}$ , et même, d'après (2), de points de  $\overset{\circ}{A} \cap D$ , D désignant un ensemble dénombrable partout dense :

$$x \in \overline{\overset{\circ}{A}} \iff \forall N, \exists y \in B_{1/N}(x) \cap D : \exists k \ B_{1/k}(y) \cap D \subset A$$

Par suite l'ensemble

$$\alpha^{-1}(S_x^{\emptyset}) = \bigcap_{N>0} \bigcup_{y \in B_{1/N}(x) \cap D} \bigcup_{k>0} \bigcap_{V^{\emptyset}} B_{1/k}(y) \cap D$$

est mesurable pour  $\sigma(\mathcal{V})$ , puisque  $\bigcap_{V^{\emptyset}} B_{1/k}(y) \cap D$  appartient à  $\sigma(\mathcal{V})$  et que les opérations faites sont dénombrables.

Soit alors  $P'$  une probabilité sur  $(\mathcal{P}(R^n), \sigma(\mathcal{V}))$ , obtenue par exemple en prolongeant une loi spatiale donnée  $P'(K, K')$ . La formule

$$(5) \quad P(S) = P' \left[ \alpha^{-1}(S) \right]$$

faisant correspondre à tout  $S \in \mathcal{F}$  la probabilité de son image inverse (qui appartient à  $\sigma(\mathcal{G})$ ) définit une probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Cette probabilité, à son tour, conduit à la loi spatiale :

$$P(K, K') = P(S_{\bar{K}}^{K'})$$

de l'ouvert-fermé  $\bar{A}$ , qui est, en général, distincte de la loi spatiale  $P'(K, K')$  de  $A$ . Il serait intéressant de préciser sous quelles conditions ces deux lois spatiales coïncident. Nous n'aborderons pas ce point. Mais on peut remarquer que la loi spatiale  $P(K, K')$  peut, à son tour, se prolonger sur  $(\mathcal{P}(R^n), \sigma(\mathcal{G}))$  par une probabilité  $P_1$  qui induit, par la formule (5), une probabilité

$$P_1(S) = P_1' \left[ \alpha^{-1}(S) \right]$$

sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  : cette probabilité  $P_1$  ne diffère pas de  $P$ , et la loi spatiale correspondante  $P_1(K, K')$  est identique à  $P(K, K')$ . Ceci résulte du fait que  $\alpha$  est idempotente ( $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ ), et que par suite :

$$P_1(S_K^\phi) = P_1' \left[ \alpha^{-1}(S_K^\phi) \right] = P \left[ \alpha^{-1}(S_K^\phi) \right] = P' \left[ \alpha^{-1} \alpha^{-1}(S_K^\phi) \right]$$

ne diffère pas de :

$$P' \left[ \alpha^{-1}(S_K^\phi) \right] = P(S_K^\phi)$$

#### 4.- Mesurabilité de $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Montrons maintenant que l'application  $k(x, \omega)$  définie par :

$$k(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_\omega \\ 0 & \text{si } x \notin A_\omega \end{cases}$$

est une application mesurable de  $(R^n \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F})$  dans  $\{0, 1\}$ . Il faut montrer,

par exemple, que l'image inverse de 0 par cette application appartient à la  $\sigma$ -algèbre produit  $\mathcal{B} \otimes \mathcal{I}$ . Comme  $A_\omega \in \Omega$  son complémentaire est ouvert. Par suite,  $x \notin A_\omega$  si et seulement si il existe une boule ouverte  $B_\varepsilon(x)$  de rayon  $\varepsilon > 0$  et de centre  $x$  disjointe de  $A_\omega$ . Par suite, on peut alors trouver un point  $y$  appartenant à un ensemble dénombrable  $D$  et une boule ouverte  $B_\varepsilon(y)$  contenant  $x$  et disjointe de  $A_\omega$ . Par suite :

$$x \notin A_\omega \iff \exists N, \exists y \in D : x \in B_{\frac{1}{N}}(y), B_{\frac{1}{N}}(y) \cap A_\omega = \emptyset$$

D'où :

$$k^{-1}(0) = \bigcup_{N > 0} \bigcup_{y \in D} B_{\frac{1}{N}}(y) \times S_{\frac{1}{N}}^{B_{\frac{1}{N}}(y)}$$

Comme  $B_{\frac{1}{N}}(y) \in \mathcal{B}$  et  $S_{\frac{1}{N}}^{B_{\frac{1}{N}}(y)} \in \mathcal{I}$ ,  $k^{-1}(0)$  appartient à  $\mathcal{B} \otimes \mathcal{I}$ .

Ainsi la fonction aléatoire en tout ou rien  $k(x, \omega)$  est mesurable. Un résultat classique montre alors que, pour toute mesure positive sommable, l'intégrale

$$X(\omega) = \int k(x, \omega) dF(x) = \int_{A_\omega} dF(x)$$

est une variable aléatoire dont l'espérance mathématique existe et vérifie

$$E[X(\omega)] = \int E[k(x, \omega)] dF(x) = \int P(S_x^\phi) dF(x)$$

En particulier, pour tout ensemble mesurable  $B$  :

$$E\left[\int_B k(x, \omega) dx\right] = E[\text{Mes } B \cap A] = \int_B P(S_x^\phi) dx$$

Ces relations servent de fondement à l'inférence statistique. Mais ce résultat ne suffit pas encore. Nous devons également examiner dans quelles conditions les transformées  $A \oplus B$  et  $A \ominus B$ , ainsi que l'ouverture  $A_\omega$  et la fermeture  $A_f$  selon  $B$  possèdent la même propriété de mesurabilité : c'est dans ce cas seulement, en effet, que l'inférence statistique sera possible pour les granulométries.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au cas où B est un ensemble compact vérifiant la condition :

$$(6) \quad B = \overline{B \cap D}$$

où D est l'ensemble des points de coordonnées rationnelles (la condition (6) est moins stricte que (2) et n'entraîne pas  $B \in \Omega$ ). Nous utiliserons les lemmes suivants :

a/ Si  $A \in \Omega$ ,  $A \oplus B \in \Omega$

En effet, de  $\overset{\circ}{A} \oplus B \subset \overline{(\overset{\circ}{A} \oplus B)} \subset A \oplus B$  on tire, en prenant la fermeture :

$$A \oplus B \subset \overline{A \oplus B} \subset A \oplus B$$

b/ Si  $A \in \Omega$ ,  $A \oplus B = \overline{[A \oplus (B \cap D)]} \cap D$

Il suffit de fermer l'inclusion  $(\overset{\circ}{A} \cap D) \oplus (B \cap D) \subset \overline{[A \oplus (B \cap D)]} \cap D \subset A \oplus B$

c/ Si A est fermé,  $A \ominus B = A \ominus (B \cap D)$

Si  $x \in A \ominus (B \cap D)$ , on a  $\overline{(B \cap D)}_x \subset A$  et, en fermant  $\bigvee_x B_x \subset A$ , soit  $x \in A \ominus B$ .

D'où  $A \ominus (B \cap D) \subset A \ominus B$ . L'inclusion inverse est évidente.

d/ En particulier, si A est fermé,  $(A \oplus \bigvee B) \ominus B = (A \oplus B) \ominus (B \cap D)$

#### Mesurabilité de $A \oplus B$

Elle découle du lemme b/. Si  $k(x, \omega)$ ,  $g(x, \omega)$  et  $f(x, \omega)$  sont les fonctions caractéristiques de A,  $A \oplus (B \cap D)$  et  $A \oplus B$ , on a d'abord :

$$g(x, \omega) = \sup_{y \in B \cap D} k(x-y, \omega)$$

d'où la mesurabilité de  $g(x, \omega)$ , puis

$$f(x, \omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{y \in \frac{B_1(x)}{N} \cap D} g(y, \omega)$$

d'où la mesurabilité de  $f(x, \omega)$ .

Mesurabilité de  $A \ominus B$

Soit  $f(x, \omega)$  la fonction caractéristique de  $A \ominus B$ , et  $k(x, \omega)$  celle de  $A$ . D'après le lemme c/ on a :

$$f(x, \omega) = \prod_{y \in B \cap D} k(x-y, \omega)$$

d'où la mesurabilité.

Mesurabilité de  $A_f = (A \oplus B) \ominus B$

D'après le lemme d/, la fonction caractéristique  $f(x, \omega)$  de  $A_f$  se déduit de la fonction caractéristique  $g$  de  $A \oplus B$  par :

$$f(x, \omega) = \prod_{y \in B \cap D} g(x-y, \omega)$$

Comme  $g(x, \omega)$  est mesurable, il en est de même de  $f$ .

Mesurabilité de  $(\overset{\circ}{A} \ominus B) \oplus B$

Soient  $k(x, \omega)$  et  $h(x, \omega)$  les fonctions caractéristiques de  $A$  et de  $\overset{\circ}{A}$ . Montrons d'abord que  $h(x, \omega)$  est mesurable. Cela résulte de l'équivalence :

$$x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists \varepsilon, y \in D : x \in \overset{\circ}{B}_\varepsilon(y) \subset A$$

d'où l'on déduit :

$$h^{-1}(1) = \bigcup_{N > 0} \bigcup_{y \in D} \overset{\circ}{B}_\varepsilon(y) \times \overset{\circ}{S}_\varepsilon(y)$$

Le complémentaire  $(\overset{\circ}{A})^c = \overline{(\overset{\circ}{A}^c)}$  de  $\overset{\circ}{A}$  appartient à  $\Omega$  et sa fonction caractéristique  $1 - h(x, \omega)$  est mesurable. La fermeture selon  $B$  de  $(\overset{\circ}{A})^c$  a donc une fonction caractéristique  $g(x, \omega)$  mesurable. Alors  $1 - g(x, \omega) = f(x, \omega)$ , qui est la fonction caractéristique de  $(\overset{\circ}{A} \ominus B) \oplus B$ , est également mesurable.