B. R. G. M.
Département Géostatistique

N-56

NOTE GÉOSTATISTIQUE N° 59

REMARQUES SUR LA LOI DE DARCY

Avril 1965

G. MATHERON

B. R. G. M.

Département Géostatistique

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 59

REMARQUES SUR LA LOI DE DARCY

G. MATHERON

Avril 1965

REMARQUES SUR LA LOI DE DARCY

Table des Matières

	<u>Pages</u>
I.- CARACTERE UNIVERSEL ET FORMEL DE LA LOI DE DARCY	1
II.- EXPRESSION DU TENSEUR DES PERMEABILITES	4
III.- RESULTANTE D'UNE PERMEABILITE REGIONALISEE	7
IV.- CONCLUSIONS TRES PROVISOIRES	9
<u>ANNEXE</u> : MILIEU POREUX A CANALICULES INDEPENDANTS	11

REMARQUES SUR LA LOI DE DARCY

I.- CARACTERE UNIVERSEL ET FORMEL DE LA LOI DE DARCY.

Dans un milieu poreux, macroscopiquement homogène, l'écoulement d'un fluide visqueux obéit à la loi de Darcy :

$$(1) \quad q_i^i = - K^{ij} \partial_j p$$

où q^i est le flux, p la pression et K^{ij} le tenseur de perméabilité. Cette loi, établie par Darcy au 19^{ème} siècle après deux années d'expérimentation minutieuse, et rigoureusement confirmée, à l'époque moderne, par 50 ans de pratique, notamment dans l'industrie pétrolière, présente une très grande universalité, et en même temps un caractère très formel. Elle signifie simplement qu'il y a une relation linéaire entre le flux et le gradient de pression, mais ne permet nullement de comprendre pourquoi une telle linéarité doit obligatoirement se manifester, ni surtout de relier le tenseur K^{ij} des perméabilités, qui exprime cette linéarité, à des propriétés structurelles précises du milieu poreux, et, en particulier, aux relations de connexité entre pores.

D'autre part, si l'on considère le même milieu poreux à l'échelle microscopique, on sait, également depuis le 19^{ème} siècle, que l'écoulement du fluide visqueux dans les pores se conforme à l'équation de Navier :

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j (\rho v^j v_i) - \mu \Delta v_i = \partial_i p$$

où v est la vitesse, ρ la densité et μ la viscosité. Depuis longtemps également, on a fait remarquer que, les écoulements étant toujours très lents, le terme quadratique en v devait être négligeable, de sorte que l'équation de Navier, dans le cas d'un écoulement permanent, se réduit à

$$(2) \quad \partial_j p = - \mu \Delta v_j$$

Or - et cela non plus n'est pas nouveau - les deux équations (1) et (2) sont parfaitement incompatibles entre elles. La première équation, il est vrai, met en jeu des grandeurs macroscopiques, qui doivent se déduire de celles qui figurent en (2) par l'intermédiaire de moyennes spatiales convenablement définies, ou, si l'on cherche à construire l'équivalent d'une mécanique statistique, par l'intermédiaire d'espérances mathématiques. Ainsi (1) doit s'écrire :

$$E(q^i) = E(\omega \rho v^i) = - K^{ij} E(\partial_j p)$$

ω figurant la porosité. D'autre part, à l'équation microscopique (2), doivent être jointes des conditions aux limites - d'ailleurs extraordinairement complexes - exprimant que la vitesse v^i s'annule à la surface des grains. Enfin, l'une et l'autre équation doivent être complétées par une équation de continuité :

$$\partial_i v^i = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_i q^i = 0$$

Ceci dit, il n'a jamais été possible de mettre en évidence un lien logique quelconque entre ces deux équations. On peut, au contraire, fabriquer des exemples montrant leur incompatibilité. Le seul caractère commun de ces deux équations est leur linéarité. On soupçonne ici que l'équation macroscopique (1) doit être une conséquence, non pas de l'équation microscopique (1) elle-même, mais seulement du caractère linéaire de cette équation et de certaines conditions, générales et formelles, auxquelles doit être soumise l'opération de changement d'échelle faisant passer du niveau microscopique au niveau macroscopique. C'est qu'en effet n'importe quel écoulement microscopique ne correspond pas nécessairement à un phénomène macroscopique observable. On peut penser que seuls seront observables macroscopiquement des écoulements pouvant être considérés comme localement uniformes au niveau macroscopique - c'est-à-dire assimilables à des écoulements uniformes pour une échelle intermédiaire, correspondant à des dimensions peut-être petites au niveau macroscopique, mais suffisamment grandes au niveau microscopique pour que les propriétés du milieu y soient statistiquement homogénéisées par effet d'ergodicité.

D'ailleurs, un écoulement qui ne serait pas localement uniforme au niveau macroscopique se présenterait à l'expérimentateur comme la superposition de deux composantes : la première, localement uniforme, vérifierait les exigences formulées ci-dessus. La deuxième apparaîtrait comme une sorte de fourmillement aléatoire, de portée microscopique et de résultante moyenne nulle - c'est-à-dire comme une turbulence. Un écoulement turbulent en

milieu poreux se conçoit, physiquement, assez mal, et, du reste, contredirait les notions admises par les praticiens et les expérimentateurs (les écoulements réels sont toujours suffisamment lents pour qu'aucune turbulence ne se manifeste).

Il paraît donc légitime de limiter la validité de la loi de Darcy aux seuls écoulements accessibles à l'expérimentation ou à l'observation, c'est-à-dire aux écoulements localement uniformes au niveau macroscopique. Cette hypothèse de travail entraîne la conséquence suivante : tant qu'on se limite aux écoulements de ce type, seules les valeurs numériques des perméabilités dépendent de la loi adoptée pour décrire l'écoulement microscopique (l'équation (2)) et des caractéristiques propres du milieu. La forme de la loi de Darcy - l'existence d'une relation linéaire entre le flux et le gradient de pression - n'en dépendrait nullement et subsisterait (avec des coefficients numériques peut-être différents) si la loi microscopique réelle de l'écoulement était remplacée par une loi absolument quelconque (sous réserve seulement qu'elle soit linéaire).

Ce caractère à la fois universel et très formel de la loi de Darcy sera peut-être éclairé par un rapprochement avec un phénomène bien différent. Dans la méthode de prospection géophysique dite tellurique, on observe et on utilise une relation de linéarité assez semblable, qui met en correspondance les champs électriques $E^i(x)$ observés, au même instant, en des points différents : autrement dit il existe un champ de tenseur $t^{ij}(x)$ tel que l'on ait en tout point x :

$$E^i(x) = t^{ij}(x) E_j(0)$$

Naturellement, cette correspondance linéaire ne s'applique pas à n'importe quel champ électrique (par exemple aux courants que les géophysiciens injectent eux-mêmes dans les méthodes de résistivité) mais seulement au champ tellurique. Ce n'est manifestement pas l'origine, d'ailleurs mal connue, du champ dit tellurique qui intervient ici, mais seulement le fait qu'un tel champ possède une signification régionale et que ses lignes de force se présentent en grandes nappes. Pour une échelle convenablement choisie ces grandes nappes de lignes de force figurent assez bien un écoulement localement uniforme au niveau macroscopique.

II.- EXPRESSION DU TENSEUR DES PERMEABILITES

Les considérations qui précèdent font apparaître le rôle privilégié que doivent jouer les écoulements macroscopiquement uniformes. L'espace étant rapporté à un trièdre (l_1, l_2, l_3) , considérons dans le milieu poreux homogène supposé infini l'écoulement uniforme et permanent caractérisé par un flux unité parallèle au vecteur e_l ($l=1, 2$ ou 3). Au niveau microscopique, cet écoulement n'est plus uniforme (mais il est toujours permanent). Les filets de courant doivent contourner les grains et tendre à se détourner des microzones de porosité locale anormalement faible. Mais, en tout point des pores, le vecteur vitesse v_l et la pression p_l sont parfaitement déterminés (la pression à une constante près seulement). Soient v_l^i les composantes contravariantes de la vitesse v_l :

$$v_l = v_l^i e_i$$

et $\partial_j p_l$ les composantes covariantes du gradient de pression. Indexées par l'indice l , ces quantités représentent trois solutions privilégiées (macroscopiquement uniformes) des équations microscopiques de l'écoulement.

Celles-ci - qui sont, par exemple, les équations de Navier - sont caractérisées par leur linéarité. Toute combinaison linéaire de ces trois solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \alpha^l v_l \\ p = \alpha^l p_l \end{array} \right.$$

est encore solution, évidemment permanente, et correspond à un écoulement macroscopique uniforme de flux constant

$$q = \alpha^l e_l$$

Sous forme tensorielle, et au niveau microscopique, on a :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^i = \alpha^l v_l^i \\ \partial_j p = \alpha^l \partial_j p_l \end{array} \right.$$

Ainsi les v_{ℓ}^i et les $\partial_j p_{\ell}$ sont les composantes de deux tenseurs d'ordre 2 (le premier une fois contravariant et une fois covariant, le deuxième deux fois covariant) attachés à chaque point x des pores. Ces deux champs de tenseurs suffisent à décrire complètement, au niveau microscopique, tout régime d'écoulement macroscopiquement uniforme. Mais un écoulement qui est seulement localement uniforme au niveau macroscopique coïncide localement (par définition) avec un écoulement du type privilégié ci-dessus. Il vérifie donc encore les relations (3), avec cette seule différence que les quantités α^{ℓ} (qui sont les composantes contravariantes du flux macroscopique local) sont des fonctions $\alpha^{\ell}(x, t)$ qui varient dans l'espace (lentement à l'échelle microscopique) avec le point x , et aussi, éventuellement, avec le temps t .

Or, entre les relations (3), il est possible d'éliminer les quantités α^{ℓ} qui caractérisent le flux macroscopique. Soit, en effet, h^{ij} le tenseur inverse (en tout point où il existe) du tenseur gradient $\partial_j p_{\ell}$. On a :

$$h^{\Delta j} \partial_j p_{\ell} = \delta_{\ell}^{\Delta}$$

et

$$v_{\ell}^i = v_{\Delta}^i h^{\Delta j} \partial_j p_{\ell}$$

Posant :

$$(4) \quad k^{ij} = v^i_{\Delta} h^{\Delta j}$$

on obtient :

$$(5) \quad v_{\ell}^i = k^{ij} \partial_j p_{\ell}$$

Le secret de la loi de Darcy semble se dissimuler dans ces deux équations (4) et (5) d'apparence purement tautologique. Effectuant dans (5) la multiplication contractée par α^{ℓ} (le flux macroscopique) on obtient :

$$(6) \quad v^i = k^{ij} \partial_j p$$

c'est-à-dire l'équivalent de la loi de Darcy à l'échelle microscopique. Tout écoulement localement uniforme au niveau macroscopique vérifie (6) : en tout point des pores, la vitesse est fonction linéaire du gradient de pression, parce que tout écoulement de ce

type s'obtient par combinaison linéaire $\alpha^{\ell} v_{\ell}^i$ (avec des coefficients $\alpha^{\ell}(x)$ lentement variables) des trois solutions privilégiées v_{ℓ}^i (correspondant à des écoulements réellement uniformes au niveau macroscopique).

Le tenseur k^{ij} défini en (4) à l'aide des v_{ℓ}^i et de l'inverse des $\partial_j p_{\ell}$ joue, en (6), le rôle d'une perméabilité microscopique. C'est, en réalité, un champ de tenseur $k^{ij}(x)$ fonction du point x et défini dans les pores. Il n'est pas possible de passer directement de (6) à la loi de Darcy macroscopique, ni de déduire la perméabilité macroscopique constante K^{ij} de la perméabilité microscopique variable k^{ij} . C'est, en fait, du seul tenseur gradient $\partial_j p_{\ell}$ que K^{ij} va se déduire. Si $\omega(x)$ est la porosité (+1 dans les pores, 0 dans les grains) le flux microscopique est $\omega \rho v^i$ (= ρv^i dans les pores, 0 dans les grains). Au niveau macroscopique, ce flux est $\alpha^i(x)$ par définition :

$$q^i = \alpha^i = E(\omega \rho v^i) = \alpha^{\ell} E(\omega \rho v_{\ell}^i)$$

Ainsi :

$$E(\omega \rho v_{\ell}^i) = \delta^i_{\ell}$$

La pression macroscopique P et son gradient $\partial_j P$, de même, sont les valeurs moyennes (moyennes spatiales, ou espérance mathématique, selon la formulation adoptée) des quantités microscopiques p et $\partial_j p$ correspondantes :

$$\partial_j P = E(\partial_j p) = \alpha^{\ell} E(\partial_j p_{\ell})$$

Mais $E(\partial_j p_{\ell})$ est une constante : c'est, en effet, le gradient macroscopique de la pression pour l'écoulement macroscopique uniforme dans la direction e_{ℓ}

Entre les deux équations :

$$q^i = \alpha^{\ell} \delta^i_{\ell} = \alpha^i$$

$$\partial_j P = \alpha^{\ell} E[\partial_j p_{\ell}]$$

où $E(\partial_j p_{\ell})$ est cette fois un tenseur constant, l'élimination de α^{ℓ} conduit, comme ci-dessus, à la loi

$$(7) \quad q^i = - K^{ij} \partial_j P$$

K^{ij} étant l'inverse de $- E(\partial_j p_\ell)$:

$$(8) \quad - K^{ij} E(\partial_j p_\ell) = \delta^i_\ell$$

donc constant. Par suite (7) est la loi de Darcy, et (8) donne l'expression de la perméabilité macroscopique :

Le tenseur des perméabilités macroscopiques apparaît comme l'inverse de la valeur moyenne (ou probable) du tenseur $\partial_j p_\ell$ représentant au niveau microscopique le gradient de la pression des solutions privilégiées (macroscopiquement uniformes).

Il ne dépend que de ce gradient tensoriel de pression, et nullement du tenseur des vitesses microscopiques v_ℓ^i , et c'est pourquoi il n'est pas possible de passer directement de la perméabilité microscopique $k^{ij}(x)$ variable à la perméabilité macroscopique constante K^{ij} . En particulier K^{ij} n'a aucune raison de coïncider avec la valeur moyenne ou probable de k^{ij} . Pour un même gradient tensoriel $\partial_j p_\ell$ (donc pour une même perméabilité-macroscopique), on peut concevoir divers écoulements microscopiques v_ℓ^i (avec des lois d'écoulements différentes de l'équation de Navier, mais toujours linéaires) et par suite, d'après (4), différentes perméabilités microscopiques $k^{ij}(x)$; et inversement, pour un même $k^{ij}(x)$, on peut trouver (avec des lois d'écoulements différentes donnant des v_ℓ^i différents) divers $\partial_j p_\ell$, donc aussi des perméabilités macroscopiques K^{ij} différentes.

III.- RESULTANTE D'UNE PERMEABILITE REGIONALISEE.

Les considérations qui nous ont permis de passer de l'échelle microscopique à une échelle macroscopique où le milieu apparaît comme homogène peuvent s'étendre à d'autres changements d'échelles.

Imaginons par exemple un milieu poreux, où la loi de Darcy soit localement valable (milieu localement homogène), mais avec une perméabilité $k^{ij}(x)$ et une porosité $\omega(x)$ régionalisée ($k^{ij}(x)$ et $\omega(x)$ sont ici définies à un niveau intermédiaire, correspondant à des éléments de volume à la fois très grands pour l'échelle microscopique et très petits pour l'échelle macroscopique qui sera celle de l'écoulement)

et supposons que la régionalisation de $\omega(x)$ et de $k^{ij}(x)$ possède le caractère stationnaire, de sorte que, à l'échelle macroscopique, le milieu apparaisse à nouveau comme homogène.

Ici encore, seuls relèveront d'une loi de Darcy à perméabilité K^{ij} constante au niveau macroscopique les écoulements localement uniformes pour l'échelle macroscopique. De tels écoulements s'obtiennent par combinaison linéaire à coefficients $\alpha^{\ell}(x)$ lentement variables à partir des écoulements privilégiés réellement uniformes macroscopiquement. Au niveau microscopique, ces derniers sont définis par un vecteur flux $q^i_{\ell}(x)$ et un gradient de pression $\partial_j p_{\ell}(x)$, liés par la loi (microscopique) de Darcy.

$$(9) \quad q^i_{\ell}(x) = -k^{ij}(x) \partial_j p_{\ell}(x)$$

et les écoulements observables (localement uniformes pour l'échelle macroscopique) sont de la forme :

$$(10) \quad \begin{cases} q^i = \alpha^{\ell}(x) q^i_{\ell}(x) \\ \partial_j p = \alpha^{\ell}(x) \partial_j p_{\ell}(x) \end{cases}$$

Soient, maintenant $Q^i = E(q^i)$ et $P = E(p)$ le flux et la pression macroscopique. On a :

$$(11) \quad \begin{cases} Q^i = \alpha^{\ell}(x) E(q^i_{\ell}) \\ \partial_j P = \alpha^{\ell}(x) E[\partial_j p_{\ell}] \end{cases}$$

Ici encore, q^i_{ℓ} et $\partial_j p_{\ell}$ ont des valeurs moyennes (probables) constantes, puisqu'ils décrivent un écoulement uniforme (macroscopiquement) et, par définition de q^i_{ℓ} , on a encore :

$$E(q^i_{\ell}) = \delta_{\ell}^i$$

L'élimination de $\alpha^{\ell}(x)$ entre les équations (11) conduit ainsi à :

$$(12) \quad Q^i = -K^{ij} \partial_j P$$

Le tenseur K^{ij} étant l'inverse de $-E(\partial_j p_{\ell})$:

$$-K^{ij} E(\partial_j p_{\ell}) = \delta_{\ell}^i$$

donc constant : (12) est la loi de Darcy macroscopique.

Ici encore on observe qu'il n'y a pas de passage direct de la perméabilité microscopique régionalisée $k^{ij}(x)$ à la perméabilité macroscopique constante K^{ij} . En effet, K^{ij} est l'inverse de la valeur probable du gradient tensoriel $\partial_j p_\ell$ des solutions microscopiques privilégiées (macroscopiquement uniformes) et ne dépend qu'indirectement des q_ℓ^i et des k^{ij} . K^{ij} ne coïncide pas, en général, avec $E(k^{ij})$, et l'inverse de $K^{ij} = E(\partial_j p_\ell)$ ne coïncide pas davantage, en général, avec la valeur probable de l'inverse de k^{ij} : le passage par le gradient tensoriel $\partial_j p_\ell$ est obligatoire.

IV.- CONCLUSIONS TRES PROVISOIRES.

Les analyses précédentes mettent en évidence la nature formelle de la loi de Darcy, conséquence non pas tant des lois de l'hydrodynamique que de certaines conditions générales (a priori) selon lesquelles seuls sont accessibles à l'expérimentation ou à l'observation (et relèvent de la loi de Darcy) les écoulements localement uniformes au niveau macroscopique.

Cette conclusion est elle-même très formelle, en ce sens qu'elle ne permet nullement de relier la perméabilité à des propriétés structurelles mesurables au niveau microscopique. Deux points cependant méritent d'être retenus :

- Il ne faut pas espérer pouvoir déduire d'une manière simple une perméabilité macroscopique constante d'une hypothétique perméabilité microscopique régionalisée (expliquer la loi de Darcy par la loi de Darcy). Une telle liaison existe cependant, mais indirecte et passant par l'intermédiaire du gradient tensoriel de pression des solutions privilégiées.

- En deuxième lieu, le tenseur des perméabilités apparaît comme l'inverse de la valeur probable $E(\partial_j p_\ell)$ de ce gradient. Ce dernier point - le seul positif - reste un peu illusoire, puisque les gradients microscopiques $\partial_j p_\ell$ semblent difficilement accessibles à l'expérimentation directe ou au calcul théorique (peut-être moins aux méthodes de simulation numérique). Il jette cependant quelques lueurs sur la nature physique et l'invariance tensorielle des perméabilités.

Jusqu'ici, nos recherches (théoriques et numériques) étaient guidées, implicitement, par une hypothèse rattachant l'invariance tensorielle de la perméabilité à l'invariance tensorielle de la matrice $\sigma^{ij} = E(u^i u^j)$ des covariances d'un vecteur aléatoire. Cette tendance était très manifeste dans l'interprétation en termes de promenade aléatoire, telle qu'elle a été donnée dans la Note 55. Elle apparaît aussi dans le "modèle" (simpliste, mais méritant réflexion) d'un milieu à canalicules indépendants, que l'on trouvera décrit en Annexe à la présente Note.

La difficulté majeure que l'on rencontre dans cette direction consiste à trouver une définition acceptable de ce vecteur aléatoire u^i dont la covariance engendre la perméabilité. D'une part, un tel vecteur doit posséder une signification macroscopique, c'est-à-dire faire intervenir les caractéristiques du milieu à une échelle déjà grande vis-à-vis des grains (puisque tel est le sens d'une perméabilité). D'autre part, la loi de probabilité de ce vecteur doit pouvoir se rattacher de manière aussi simple que possible à la probabilité décrivant le milieu poreux comme fonction aléatoire en tout ou rien, et, plus précisément, aux moments fonctionnels de cette dernière probabilité. Dans une prochaine note, nous passerons en revue les résultats partiels obtenus dans l'étude de ces moments. Il ne nous a pas été possible (et nous nous demandons s'il est possible) de leur rattacher un vecteur aléatoire possédant les caractéristiques voulues pour exprimer la perméabilité. Une telle difficulté, ou impossibilité, se conçoit très bien si l'on se souvient que, du point de vue des moments fonctionnels, il n'y a aucune différence perceptible entre un milieu à grains disjoints et bonne perméabilité et le même milieu où les mêmes grains seraient reliés par des membranes infiniment minces, et où la perméabilité serait très mauvaise (les granulométries des pores seraient cependant très différentes). Tout en poursuivant les recherches en cours dans cette direction, nous devons aussi explorer la voie nouvelle qui s'ouvre devant nous : puisque les perméabilités se déduisent du gradient tensoriel microscopique des pressions, il doit être possible, en ce qui concerne ses propriétés hydrodynamiques, de schématiser un milieu poreux non plus par une fonction aléatoire en tout ou rien, mais, directement, par un champ de tenseurs-gradients aléatoires $\partial_j p_\alpha$ possédant des caractéristiques convenables. La difficulté majeure signalée plus haut réapparaîtra, cependant, lorsqu'il s'agira de rattacher les caractéristiques de ce champ à des propriétés microscopiques structurelles mesurables du milieu poreux.

A N N E X E

MILIEU POREUX A CANALICULES INDEPENDANTS

Imaginons un milieu infini constitué par une masse imperméable perforée de très nombreux canalicules cylindriques de directions variées. On peut supposer (ce n'est pas essentiel) que ces canalicules ont tous la même section constante. Bien que leurs directions soient diverses, on admet que leur arrangement dans l'espace est tel qu'ils ne se rencontrent jamais (on voit la faiblesse majeure d'un tel schéma, qui revient à admettre que l'écoulement est guidé le long de cheminements préexistants et obligatoires).

Dans un canal, l'écoulement permanent d'un fluide visqueux vérifie une équation du type :

$$q = \frac{Q}{S} = -k \frac{\Delta p}{\Delta \ell}$$

- Q - débit
S section du canal
k coefficient constant.

Δp : variation de pression pour la variation $\Delta \ell$ de longueur.

Cette relation (qui est la loi de Darcy, mais dans un milieu à 1 dimension seulement) se déduit des équations de Navier (avec les conditions aux limites correspondant aux hypothèses faites).

Si le canal est orienté (dans l'espace) selon une direction de vecteur unitaire α^i , le débit du même canal est un vecteur $Q^i = \alpha^i Q$, tandis que $\frac{\Delta p}{\Delta \ell}$ apparaît comme la dérivée $\frac{\Delta p}{\Delta \alpha} = \alpha^i \partial_i p$ de la pression dans la direction α^i du canal. On a, vectoriellement :

$$Q^i = -k S \alpha^i (\alpha^j \partial_j p)$$

Soit ω la porosité (probabilité pour qu'un point appartienne à un canalicule) et $dF(\alpha)$ la probabilité pour qu'un canalicule donné possède la direction α . Dans un régime d'écoulement uniforme, caractérisé par un gradient $\partial_j p$ constant (imposé a priori par le choix des conditions aux limites) le vecteur flux Q^i est égal à l'espéran-

ce mathématique de $\frac{\omega Q^i}{S}$, soit :

$$q^i = E \left[\frac{\omega Q^i}{S} \right] = -k \omega E(\alpha^i \alpha^j) \partial_j p$$

$E(\alpha^i \alpha^j)$ est la covariance

$$\sigma^{ij} = E(\alpha^i \alpha^j) = \int \alpha^i \alpha^j dF(\alpha)$$

des composantes $\alpha^i \alpha^j$ du vecteur unitaire aléatoire α représentant la direction du canalicule.

Posant :

$$(13) \quad k^{ij} = \omega k \sigma^{ij}$$

on obtient la loi de Darcy :

$$q^i = -k^{ij} \partial_j p$$

pour tout écoulement uniforme, et la relation (13) montre comment la perméabilité se relie à la covariance du vecteur aléatoire α . Du fait de l'absence de communication entre canalicules, le schéma, d'ailleurs, ne peut pas décrire un écoulement localement uniforme (où le gradient $\partial_j p$ varierait lentement) et son intérêt reste limité.

G. MATHERON

Avril 1965.