N-59

B. R. G. M.

Département Géostatistique

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 62

STRUCTURE ET COMPOSITION DES PERMEABILITES

G. MATHERON

Octobre 1965

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 62

STRUCTURE ET COMPOSITION DES PERMEABILITES

Table des Matières

Table des Matières (suite)

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 62

STRUCTURE ET COMPOSITION DES PERMEABILITES

I.- INTRODUCTION

Reprenant, de manière plus systématique, l'étude d'un problème déjà abordé dans les Notes 55 et 59, nous nous proposons d'examiner comment peut apparaître une perméabilité macroscopique K^{ij} constante dans un milieu caractérisé par une perméabilité microscopique régionalisée $k^{ij}(x)$ supposée stationnaire.

Dans le cas particulier où la perméabilité microscopique est isotrope $\left[k^{ij}(x) = k(x)\ g^{ij}\right]$, on admet souvent que la perméabilité macroscopique K qui en résulte, également isotrope, est approximativement égale à la moyenne géométrique des $k(x)$, soit, en notation d'espérance mathématique :

(1) $$\log K = E\left[\log k(x)\right]$$

Cette règle empirique, qui donne souvent des résultats acceptables en pratique, a été à peu près vérifiée (1) par essais sur modèle réduit : dans ces essais, le milieu était fabriqué par juxtaposition de blocs homogènes, les perméabilités isotropes affectées à chacun des blocs étant tirées au sort indépendamment les unes des autres.

On peut, sommairement, justifier cette règle, en considérant le cas particulier des milieux stratifiés. Si la perméabilité isotrope $k(x^1)$ ne dépend que de la seule coordonnée x^1, on vérifie immédiatement que la perméabilité macroscopique possède la symétrie de révolution autour de l'axe x^1 perpendiculaire à la stratification, avec :

(2) $$\begin{cases} K^{11} = \dfrac{1}{E(\frac{1}{k})} & \text{(couplage en série)} \\ K^{22} = K^{33} = E(k) & \text{(couplage en parallèle)} \end{cases}$$

---

(1) On trouvera la bibliographie dans la synthèse faite par M. DUPUY "sur les calculs hydrodynamiques d'écoulements de filtration dans les milieux hétérogènes" documents I.F.P. N° 11970 Mai 1965, consacrée surtout à la présentation des travaux de SCHWYDLER sur lesquels nous reviendrons.

Dans un milieu non stratifié, où $k(x^1, x^2, x^3)$ dépend des trois coordonnées, le gradient de k possède une direction variable. On conçoit que la perméabilité résultante K prenne une valeur intermédiaire entre la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique correspondant rexpectivement aux deux modes de couplage en série et en parallèle. C'est, justement, une particularité de la moyenne géométrique d'être comprise entre ces deux valeurs. (Naturellement, ce mode de justification s'appliquerait aussi bien à une moyenne d'ordre α : $K = \sqrt[\alpha]{E(k^\alpha)}$, avec α compris entre -1 et $+1$).

En particulier, lorsque $k(x)$ possède une distribution statistique lognormale - ce qui est souvent assez bien vérifié -, on a

$$\begin{cases} E(k) = \gamma\, e^{\sigma^2/2} \\ \dfrac{1}{E(\frac{1}{k})} = \gamma\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \end{cases}$$

γ désignant la moyenne géométrique et σ^2 la variance de $k(x)$, de sorte que la règle précédente prend l'aspect :

$$K = \sqrt{\frac{E(k)}{E(\frac{1}{k})}}$$

d'une moyenne géométrique des deux valeurs extrêmes correspondant aux deux modes de couplage du cas stratifié.

La règle de la moyenne géométrique, cependant, ne constitue qu'une approximation assez grossière, et cesse à peu près d'être utilisable dès que les perméabilités microscopiques ne sont pas isotropes (comment calculer la moyenne géométrique d'un <u>tenseur</u> $k^{ij}(x)$?). Il est nécessaire d'aller plus loin. Dans un premier paragraphe, nous étudierons la structure du tenseur k^{ij}, en nous appuyant sur la méthodologie de la Note 59, et nous en déduirons certains cas d'intégrabilité du système d'équations de Darcy, pour lesquels le calcul de la perméabilité macroscopique sera possible : il apparaîtra qu'en fonction des hypothèses faites sur la structure de k^{ij}, on peut obtenir à peu près n'importe quel résultat compris entre moyennes géométrique et arithmétique. Un deuxième paragraphe sera consacré au cas du milieu stratifié (tenseur $k^{ij}(x_1)$ fonction de la seule coordonnée x^1) mais non isotrope. Enfin, dans un dernier paragraphe, nous reprendrons la méthode d'approximation de SCHWYDLER (1), qui consiste - comme

---

(1) - voir M. DUPUY, op-cit.

nous l'avons fait nou-mêmes dans la note 55 - à représenter la perméabilité sous la forme $k_o + \lambda\, k_1(x)$, le terme principal k_o étant constant et λ très petit, et à exprimer la solution des équations de Darcy sous la forme d'un développement limité en λ. L'expression explicite des termes en λ et λ^2 nous conduira à une règle de pondération qui ne coincide pas exactement avec la moyenne géométrique. Toutefois les résultats obtenus par une méthode, où l'on suppose que les variations des perméabilités restent petites vis-à-vis des valeurs probables, ne pourront pas s'appliquer sans réserve à des milieux sédimentaires réels où les perméabilités varient fréquemment de 1 à 100.

II.- STRUCTURE DES PERMEABILITES

Dans un milieu de perméabilité régionalisée $k^{ij}(x)$, pression p et débit q^i sont liés par le système d'équations de Darcy

$$(3) \qquad \begin{cases} q^i = - k^{ij}\, \partial_j\, p \\ \partial_i\, q^i = 0 \end{cases}$$

Nous supposons que la régionalisation des perméabilités possède le caractère stationnaire et, conformément à la méthodologie de la Note 59, nous nous proposons de chercher les solutions du système (2) susceptibles de décrire un écoulement uniforme au niveau macroscopique. Avant d'aborder le problème dans sa généralité, nous allons étudier deux cas particuliers en nous posant la question suivante : quelle condition doit vérifier le tenseur $k^{ij}(x)$ pour que le système (3) admette comme solution soit un gradient $\partial_j\, p(x)$, soit un flux $q^i(x)$ constant au niveau microscopique ?

a/ Cas où le tenseur des perméabilités est conservatif.

Pour que le système (3) admette comme solution n'importe quel gradient constant de pression

$$\partial_j\, p = \varpi_j = C^{te}$$

il faut et il suffit que l'on ait :

$$\varpi_j\, \partial_i\, k^{ij} = 0$$

pour tout système de constantes ϖ_j, c'est-à-dire :

$$(4) \qquad \partial_i\, k^{ij} = 0$$

Lorsque la condition (4) est vérifiée, c'est-à-dire lorsque le tenseur k^{ij} est <u>conservatif</u>, les écoulements uniformes au niveau macroscopique sont de la forme :

$$\begin{cases} \partial_j p = \varpi_j & (\text{ou } p = \varpi_j x^j) \\ q^i = - k^{ij} \varpi_j & \end{cases}$$

Au niveau macroscopique, on a :

$$\begin{cases} \partial_j P = E(\partial_j p) = \varpi_j \\ Q^i = E(q^i) = - E(k^{ij}) \varpi_j \end{cases}$$

La perméabilité macroscopique constante est donc :

(5) $$K^{ij} = E(k^{ij})$$

Ainsi, <u>lorsque le tenseur des perméabilités est conservatif</u>, <u>la règle de la moyenne arithmétique s'applique rigoureusement</u>. Il est utile d'expliciter la forme générale que prend, dans ce cas, le tenseur k^{ij}, compte tenu de la <u>condition de symétrie</u> (1) que l'on s'impose habituellement. (voir Annexe A)

<u>b/ Cas où le tenseur k^{ij} est l'inverse d'un tenseur gradient.</u>

Si l'on désigne par h_{ij} le tenseur inverse de k^{ij}, les équations de Darcy peuvent s'écrire :

(6) $$\begin{cases} \partial_j p = - k_{ji} q^i \\ \partial_i q^i = 0 \end{cases}$$

Ce système admet pour solution des q^i constantes quelconques si, et seulement si, $h_{ji} q^i$ est un gradient quelles que soient les constantes q^i, donc si, et

---

(1) A dire vrai, il ne semble pas y avoir d'argument théorique décisif pour exclure a priori l'éventualité d'un tenseur k^{ij} dissymétrique. Il n'y a pas non plus d'arguments expérimentaux, car la relation $k^{ij} = k^{ji}$ postulée a priori, est toujours utilisée pour réduire le nombre des mesures nécessaires à la détermination des composantes k^{ij}.

seulement si, h_{ji} est de la forme :

(7) $$h_{ji} = \partial_j \; U_i$$

$U_i(x)$ représentant un champ de vecteurs covariants. Au niveau macroscopique, on a alors :

$$Q^i = E(q^i) = q^i$$

$$\partial_j P = E(\partial_j p) = - E(h_{ji})\, q^i$$

Ainsi, l'inverse H_{ij} de la perméabilité macroscopique constante K^{ij} est donnée par :

$$H_{ij} = E(h_{ij})$$

Lorsque le tenseur des perméabilités est l'inverse d'un tenseur gradient, la règle de pondération par les moyennes harmoniques est applicable en toute rigueur. (sous la forme précise écrite en (8) et que l'on peut symboliser comme suit :

$$K^{-1} = E(k^{-1})$$

Remarque Si l'on conserve l'exigence de symétrie $k^{ij} = k^{ji}$, ou $h_{ij} = h_{ji}$ la relation (7) donne $\partial_j U_i = \partial_i U_j$ et signifie que U_i est un gradient. On a donc

(9) $$\begin{cases} h_{ij} = \partial_{ij} \Phi \\ k^{ij} = \dfrac{\text{Min } \partial_{ij} \Phi}{\text{Det } (\partial_{ij} \Phi)} \end{cases}$$

La forme (9), qui correspond à la pondération harmonique, apparaît comme le pendant exact de la forme (A,4) ou (A,5), qui correspond à la pondération arithmétique.

c/ Structure des perméabilités

Les deux cas extrêmes que nous venons d'étudier permettent, par composition, d'obtenir la forme générale d'un tenseur de perméabilité. En effet, nous avons vu dans la Note(59) que, si l'on désigne par p_ℓ et q^i_ℓ une famille de solutions privilégiées $(E(q^i_\ell) = \delta^i_\ell)$, on a :

$$\begin{cases} q^i_\ell = - k^{ij} \partial_j p_\ell \\ \partial_i q^i_\ell = 0 \end{cases}$$

$\partial_j\ p_\ell$ est un tenseur gradient. Soit $T^{j\ell}$ son inverse. On a alors :

(10) $$k^{ij} = - q^i_\ell\ T^{\ell j}$$

Autrement dit k^{ij} <u>est le produit d'un tenseur conservatif et de l'inverse d'un tenseur gradient</u>.

(Toutefois, si l'on maintient l'exigence de symétrie $k^{ij} = k^{ji}$ les deux tenseurs $q^{i\ell}$ et $T^{\ell j}$ doivent vérifier des conditions supplémentaires).

On sait, dans ce cas, que la perméabilité macroscopique K^{ij} admet un inverse

$$H_{ij} = E(\partial_i\ p_j)$$

qui ne dépend que du gradient tensoriel de pression.

D'une manière générale, si l'on a réussi à expliciter la décomposition (10) sous la forme :

(11) $$k^{ij} = C^{i\ell}\ A^j_\ell$$

donnant le tenseur k^{ij} comme produit d'un tenseur C conservatif, et d'un tenseur A inverse d'un tenseur gradient $B^\ell_j = \partial_j\ \phi^\ell$:

(12) $$\begin{cases} \partial_i\ C^{i\ell} = 0 \\ A^i_j = \dfrac{\text{Min } B^j_i}{\text{Det } B^j_i} = \dfrac{\text{Min } \partial_i\ \phi^j}{\text{Det } \partial_i\ \phi^j} \end{cases}$$

les solutions privilégiées sont de la forme :

(13) $$\begin{cases} \partial_j\ p = \varpi_r\ \partial_j\ \phi^r \\ q^i = - C^{i\ell}\ \varpi_\ell \end{cases}$$

où les ϖ_ℓ sont des constantes quelconques. Ainsi, les solutions privilégiées se lisent dans les lignes de même ordre de la matrice B (pour le gradient) et de la matrice C (pour le flux).

Passant au niveau macroscopique, on obtient, en prenant les espérance mathématiques de (13) :

$$\begin{cases} \partial_j P \equiv E(\partial_j p) = \varpi_r E(\partial_j \phi^r) \equiv \varpi_r E(B^r{}_j) \\ q^i \equiv E(q^i) = - \varpi_r E(C^{ir}) \end{cases}$$

Par suite, la perméabilité macroscopique constante K^{ij} vérifie :

(14) $$K^{ij} E(B^r{}_j) = E(C^{ir})$$

soit, sous forme symbolique

$$K \ E(B) = E(C)$$

Lorsque l'on a décomposé k^{ij} sous la forme du produit $C B^{-1}$ d'un tenseur conservatif C et de l'inverse d'un tenseur gradient B, la règle de pondération est de la forme

(15) $$\begin{cases} k = C B^{-1} \\ K = E(C) \ [E(B)]^{-1} \end{cases}$$

Autrement dit, la composante conservative C obéit à la règle de pondération arithmétique, et la composante B^{-1} à la règle de pondération harmonique.

Suivant que l'une ou l'autre de ces composantes du tenseur k sera prépondérante, on peut s'attendre à observer tous les types intermédiaires entre les deux modes de pondération harmonique et arithmétique.

On peut s'interroger sur l'existence et l'unicité de la décomposition (15). L'existence est probablement assurée si $k^{ij}(x)$ est stationnaire : On peut tenir pour certain (pour des raisons d'ordre physique) qu'il existe alors des solutions correspondant à des écoulements uniformes au niveau macroscopique. L'unicité, si elle existe, s'entend à une transformation linéaire près. Si A est une matrice constante quelconque, on peut remplacer C par $C A$ et B par $B A$ ($C A$ est conservatif et $B A$ est un tenseur gradient). Cette réserve faite, on voit que l'unicité de la décomposition $C B^{-1}$ est liée à l'unicité des solutions $\partial_j p_\ell$ correspondant aux écoulements macroscopiquement uniformes de flux $q_\ell = e_\ell$ (e_1, e_2, e_3 base des coordonnées). Cette unicité n'est pas démontrée, mais peut être considérée comme plausible.

Il reste enfin à exprimer la condition de symétrie $k^{ij} = k^{ji}$. Cela sera facile sur l'expression générale que nous allons maintenant établir.

d/ Décomposition Canonique des perméabilités.

Soient $\xi^i(x)$ les expressions de la pression $p(x)$ pour n solutions indépendantes correspondant à des écoulements macroscopiques uniformes. Le jacobien des ξ^i n'étant pas identiquement nul, il est possible, au moins localement, d'exprimer les x^j en fonction des ξ^i, et par suite d'utiliser les solutions privilégiées comme système de coordonnées curvilignes. Le système des coordonnées ξ^i sera dit adapté ou privilégié. Si, de plus, il vérifie les conditions

$$E(\xi^i) = x^i \qquad \text{ou} \qquad E(\partial_j \xi^i) = \delta^i_j$$

il sera dit canonique. Par une transformation linéaire à coefficient constant, on peut toujours obtenir un système canonique à partir d'un système adapté.

Soient ξ^i un système de coordonnées adaptées et :

$$A^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \qquad B^i_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}$$

les matrices associées au passage des coordonnées x^i aux coordonnées ξ^i.

Par définition des ξ^i, l'expression

$$p = \overline{\omega}_i \ \xi^i$$

où les $\overline{\omega}_i$ sont des constantes quelconques, représente la pression associée à un écoulement macroscopique uniforme. En coordonnées ξ^i, le gradient $\partial_j p$ a donc les composantes covariantes constantes

(16) $$\partial_j p = \overline{\omega}_j$$

Soient χ^{ij} et Q^i les composantes contravariantes de la perméabilité et du flux Q^i en coordonnées ξ^i. Le système de Darcy s'écrit

(17) $$\begin{cases} Q^i = -\chi^{ij}\,\partial_j p \\ \nabla_i Q^i = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\partial_i(\sqrt{\gamma}\,Q^i) = 0 \end{cases}$$

où $\gamma = \det \gamma_{ij}$ est le déterminant associé au tenseur métrique γ_{ij} des coordonnées ξ^i

$$\begin{cases} \gamma_{ij} = A^r_{\ i} \ A^s_{\ j} \ g_{rs} \\ \sqrt{\gamma} = \sqrt{g} \ \det A \end{cases}$$

Compte tenu de (16), nous obtenons

$$\varpi_j \, \partial_i(\sqrt{\gamma}\, \chi^{ij}) = 0$$

pour tout système de constante ϖ_j, donc

(18) $$\partial_i(\sqrt{\gamma}\; \chi^{ij}) = 0$$

Cette équation n'a pas la forme tensorielle, et n'est par suite valable que dans le système de coordonnées ξ^i. Mais, en coordonnées ξ^i, le système d'équation (18)admet une solution générale dont la forme a été donnée en Annexe A. Ainsi, on posera :

(19) $$\chi^{ij} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}\, \phi^{ij}(\xi) = \frac{1}{\mathrm{Det}\ A}\, \phi^{ij}(\xi)$$

les $\phi^{ij}(\xi)$ étant une solution du système d'équation :

$$\sum_i \frac{\partial \phi^{ij}(\xi)}{\partial \xi^i} = 0$$

Repassant maintenant aux coordonnées initiales, les composantes k^{ij} du tenseur des perméabilités prennent la forme :

(20) $$k^{ij} = \frac{A^i{}_s\; A^j{}_r}{\mathrm{Det}\ A}\; \Phi^{rs}$$

tandis que le gradient de pression devient

(21) $$\partial_j\, p = B^{\ell}{}_j\, \varpi_\ell$$

Quant au flux, on obtient :

$$q^i = -\,k^{ij}\, \partial_j\, p = -\,\frac{A^i{}_s\; A^j{}_r\; \phi^{rs}}{\mathrm{Det}\ A}\; B^{\ell}{}_j\; \varpi_\ell$$

Soit

(22) $$q^i = -\,\frac{A^i{}_s}{\mathrm{Det}\ A}\, \phi^{\ell s}\, \varpi_\ell$$

La relation $\partial_i\, q^i$ est alors automatiquement vérifiée : c'est une simple conséquence du caractère tensoriel des équations (17). Il en résulte que le tenseur

(23) $$C^{i\ell} = \frac{A^i{}_s\; \phi^{\ell s}}{\mathrm{Det}\ A}$$

est conservatif. On peut aussi le voir en remarquant que l'équation (18), écrite en coordonnées ξ^i sous la forme :

$$\sum_i \frac{\partial \phi^{ij}}{\partial \xi^i} = 0$$

se traduit en coordonnées x^i par :

$$\sum_{i\ell} \frac{\partial \phi^{ij}}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial \xi^i} = 0$$

soit, en notation tensorielle :

(24) $$A^\ell_i \, \partial_\ell \, \phi^{ij} = 0$$

Montrons que $C^{i\ell}$ est conservatif :

$$\partial_i \, C^{i\ell} = \partial_i \left(\frac{A^i_\lambda}{\text{Det } A} \right) \phi^{\ell\lambda} + \frac{1}{\text{Det } A} \, A^i_\lambda \, \partial_i \, \phi^{\ell\lambda} = 0$$

Les deux termes qui figurent au 2ème membre sont nuls, en effet, le premier en raison de (A,7), le deuxième en raison de (24).

Ainsi, la relation

(25) $$k^{ij} = C^{i\ell} \, A^j_\ell$$

où $C^{i\ell}$ est le tenseur conservatif défini en (23), et A^j_ℓ l'inverse du tenseur gradient $B^\ell_j = \partial_j \, \xi^\ell$ n'est autre que la décomposition canonique du tenseur des perméabilités. La règle (21) permet d'écrire immédiatement la perméabilité macroscopique sous la forme :

(26) $$K = E(C) \left[E(B) \right]^{-1}$$

On peut toujours se ramener au cas où $E(B)$ est le tenseur unité. En effet, B étant stationnaire, $E(B)$ est un tenseur constant. Il suffit d'effectuer une transformation linéaire à coefficients constants pour se ramener au cas où $E(B^i_{\ j}) = \delta^i_{\ j}$.

Dans ce cas, on doit prendre

$$\xi^i = x^i + \lambda^i(x)$$

$\lambda^i(x)$ étant un vecteur aléatoire stationnaire d'espérance nulle

$$E(\lambda^i) = 0$$

De plus, et malgré l'apparence contraire fournie par l'équation (24), il est possible de supposer les $\phi^{rs}(x)$ indépendants des $B^i_{\ j}(x)$, donc aussi de leur mineurs $\frac{A^j_{\ i}}{\text{Det } A}$, relatifs à un même point d'appui x. Cela est même possible de deux manières :

- On peut, en premier lieu, admettre que la fonction aléatoire stationnaire $\phi^{rs}(x)$ s'obtient en substituant les fonctions aléatoires $\xi^i(x)$ dans l'expression d'une fonction aléatoire stationnaire $\phi^{rs}(\xi)$ de l'espace des ξ. A ξ fixé, l'espérance mathématique conditionnelle d'une fonction quelconque $F\left[\phi^{rs}(x)\right]$ des ϕ^{rs} est $E\left(F\left[\phi^{rs}(\xi)\right]\right)$. Elle ne dépend pas de ξ, à cause du caractère stationnaire. Par suite, les $\phi^{rs}(x)$ sont indépendants de ξ et de leurs dérivées $B^j_{\ i}$.

- On peut aussi, ce qui est peut-être physiquement plus plausible, supposer qu'en chaque point x la loi de probabilité des $\phi^{rs}(x)$ ne dépend que des écarts $\lambda^i = \xi^i - x^i$ et admettre que ces écarts sont stationnaires. A λ^i fixé, toute fonction des ϕ^{rs} a une espérance mathématique qui ne dépend que des λ^i, donc de la forme $F(\lambda^i)$. Les λ^i étant stationnaires, on montre facilement que toute fonction $F\left[\lambda^i(x)\right]$ est en corrélation nulle avec toutes les dérivées $\partial_j \lambda^i = B^i_{\ j}$ prises au même point x. L'indépendance n'en résulte d'ailleurs pas, mais peut être inférée moyennant une hypothèse plausible sur la loi des $\partial_j \lambda^i$ (il suffit de supposer que ces dérivées sont gaussiennes).

Enfin, on remarquera que l'on a nécessairement :

$$(27)\qquad \begin{cases} E\left[\text{Det } B\right] = E\left[\dfrac{1}{\text{Det } A}\right] = 1 \\[2ex] E\left(\dfrac{A^i_{\ j}}{\text{Det } A}\right) = \delta^i_s \end{cases}$$

En effet, les produits $\frac{\partial \lambda^1}{\partial x^{i1}} \frac{\partial \lambda^2}{\partial x^{i2}} \cdots \frac{\partial \lambda^n}{\partial x^{in}}$ ont même valeur probable, à cause du caractère stationnaire, quelle que soit la permutation $i_1 \ldots i_n$ et se détruisent dans le développement de $E\left[\text{Det}\left(\delta^i_{\ j} + \frac{\partial \lambda^i}{\partial \xi^j}\right)\right]$ 'e

$$\text{ou de} \quad E\left[\frac{A^i_{\ s}}{\text{Det } A}\right] = E\left[\text{Min}\left(\delta^i_s + \frac{\partial \lambda^i}{\partial \xi^s}\right)\right]$$

Nous pouvons énoncer les résultats obtenus.

<u>Toute perméabilité régionalisée stationnaire $k^{ij}(x)$ peut être mise sous la forme canonique</u>

(28) $$k^{ij} = C^{i\ell} A^{j}_{\ell} = \frac{A^{i}_{s} \; A^{j}_{\ell}}{\text{Det } A} \phi^{\ell s}$$

A^{j}_{ℓ} est l'inverse d'un tenseur-gradient B^{ℓ}_{j}

$$B^{\ell}_{j} = \partial_j \, \xi^{\ell}$$

<u>où les ξ sont des fonctions aléatoires telles que $\xi^{\ell} - x^{\ell} = \lambda^{\ell}(x)$ soit stationnaire et d'espérance mathématique égale à 0.</u> En particulier :

$$E(B^{\ell}_{j}) = \delta^{\ell}_{j}$$

<u>Le tenseur $C^{i\ell}$ est conservatif et peut s'écrire sous la forme</u>

(29) $$C^{i\ell} = \frac{A^{i}_{j}}{\text{Det } A} \phi^{j\ell}$$

<u>Les $\phi^{j\ell}$, ou perméabilités intrinsèques, constituent une fonction tensorielle symétrique aléatoire et stationnaire vérifiant l'un ou l'autre des systèmes équivalents</u>

(30) $$\begin{cases} \partial_i \, C^{i\ell} = \partial_i \left(\dfrac{A^{i}_{j}}{\text{Det } A} \phi^{j\ell} \right) = 0 \\ A^{i}_{j} \, \partial_i \, \phi^{j\ell} = 0 \end{cases}$$

<u>On a, de plus :</u>

(31) $$\begin{cases} E(\text{Det } B) = E\left(\dfrac{1}{\text{Det } A}\right) = 0 \\ E\left(\dfrac{A^{i}_{j}}{\text{Det } A} \right) = \delta^{i}_{j} \end{cases}$$

<u>Les perméabilités macroscopiques constantes sont données par</u>

(32) $$K^{ij} = E(C^{ij}) = E\left[\frac{A^{i}_{\ell} \, \phi^{\ell j}}{\text{Det } A} \right]$$

Enfin, si l'on suppose, ce qui est possible mais non obligatoire, que les $\phi^{\ell j}$ sont indépendants des A^i_ℓ, on obtient :

(33) $$K^{ij} = E(\phi^{ij})$$

Les perméabilités macroscopiques sont égales, dans ce cas, aux espérances des perméabilités intrinsèques.

e/ Remarque sur la pondération géométrique

Les relations (28) permettent le calcul du déterminant des perméabilités :

$$\text{Det } k^{ij} = (\text{Det } A)^{2-n} \text{ Det } \phi = (\text{Det } B)^{n-2} \quad \text{Det } \phi$$

A deux dimensions, il vient

$$\text{Det } k = \text{Det } \phi$$

A trois dimensions

$$\text{Det } k = \text{Det } B \ \text{ Det } \phi$$

Si l'on suppose les ϕ^{rs} indépendants des A^i_j on a dans tous les cas, compte tenu de (31) si $n = 3$:

(34) $$E(\text{Det } k) = E(\text{Det } \phi)$$

Toujours dans l'hypothèse de l'indépendance des ϕ et des A, (33) donne de son coté

(35) $$\text{Det } K = \text{Det } \left[E(\phi)\right]$$

Désignons par $k_1 \ k_2 \ k_3$, $K_1 \ K_2 \ K_3$ et $\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3$ les valeurs propres de k^{ij}, K^{ij} et ϕ^{ij}. Les relations (34) et (35) s'écrivent aussi :

(36) $$E(k_1 k_2 k_3 \ldots) = E\left[\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ldots\right]$$

$$K_1 \ K_2 \ K_3 \ldots = E(\phi_1) \ E(\phi_2) \ E(\phi_3) \ldots$$

Les $\phi_1 \phi_2 \ \phi_3$ étant positifs et généralement liés par des corrélations positives on aura en général

$$K_1 \ K_2 \ K_3 \leqslant E(k_1 \ k_2 \ k_3)$$

Pour pousser le calcul un peu plus loin, nous supposerons que $\phi_1 \phi_2 \phi_3$ (les perméabilités intrinsèques principales) et Det B sont des variables lognormales de variances σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2 et σ_B^2 et de covariances σ_{12}, σ_{23}, σ_{13} entre ϕ_i (et 0 entre ϕ_i et Det B, à cause de l'indépendance des ϕ et des A^i_j).

Les relations (36), avec ces hypothèses, donnent alors, pour trois dimensions:

$$K_1 \, K_2 \, K_3 = E(k_1 k_2 k_3) \, e^{-(\sigma_{12}+\sigma_{13}+\sigma_{23})}$$

et pour deux dimensions

$$K_1 \, K_2 = E(k_1 k_2) \, e^{-\sigma_{12}}$$

Ces règles ne correspondent pas exactement à une moyenne géométrique. A deux dimensions, en effet, on a

$$k_1 \, k_2 = \phi_1 \, \phi_2$$

d'où

$$E\left[\log k_1 \, k_2\right] = E\left[\log \phi_1 \phi_2\right] = \log\left[E(\phi_1) \, E(\phi_2)\right] - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}$$

soit

$$\log(K_1 \, K_2) = E\left[\log k_1 \, k_2\right] + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}$$

A trois dimensions, on a

$$k_1 \, k_2 \, k_3 = \phi_1 \, \phi_2 \, \phi_3 \; \text{Det B}$$

D'où

$$E\left[\log k_1 k_2 k_3\right] = \log\left[E(\phi_1) \, E(\phi_2) \, E(\phi_3)\right] - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_B^2}{2}$$

soit

$$\log(K_1 K_2 K_3) = E\left[\log k_1 k_2 k_3\right] + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_B^2}{2}$$

f/ Propriété fondamentale de la composition des perméabilités

Nous pensons que la proposition suivante pourrait être établie en toute généralité :

Si $k^{ij}(x)$ et $h_{ij}(x)$ sont les composantes d'une perméabilité stationnaire et de son inverse, et K^{ij} et H_{ij} les grandeurs macroscopiques constantes correspondantes, on a toujours :

$$\begin{cases} K^{ii} \leq E(k^{ii}) \\ H_{ii} \leq E(h_{ii}) \end{cases}$$

(37)
$$\begin{cases} \left[E(k^{ii}) - K^{ij}\right]^2 \leq \left[E(k^{ii}) - K^{ii}\right]\left[E(k^{jj}) - K^{jj}\right] \\ \left[E(h_{ij}) - H_{ij}\right]^2 \leq \left[E(h_{ii}) - H_{ii}\right]\left[E(h_{jj}) - H_{jj}\right] \end{cases}$$

Ces inégalités peuvent s'énoncer en disant que les matrices $E(k^{ij}) - K^{ij}$ et $E(h_{ij}) - H_{ij}$ sont définies positives. Elles signifient que les perméabilités se composent toujours selon un mode intermédiaire entre les pondérations harmonique et arithmétique.

Il est possible d'établir cette proposition sous la seule hypothèse que k^{ij} et h_{ij} sont des matrices définies positives, autrement dit que, quel que soit le vecteur ϑ^i, on a

(38)
$$h_{ij}\ \vartheta^i\ \vartheta^j \geqslant 0$$

Cette inégalité (38) répond, elle, à une exigence physique impérative. Si ϑ^i est un flux q^i, en effet, $h_{ij}\ q^i = -\partial_j\ p$ est, d'après la loi de Darcy, le gradient changé de signe. L'inégalité (38), qui s'écrit :

$$q^i\ \partial_i\ p \leqslant 0$$

signifie, en effet, que le produit scalaire du flux et du gradient de pression est toujours négatif, autrement dit que la pression ne peut que diminuer le long d'une ligne de courant.

Les matrices k^{ij} et h_{ij} étant définies positives, il en est de même des matrices qui s'en déduisent par des changements quelconques de coordonnées. En particulier les perméabilités intrinsèques ϕ^{ij} et leurs inverses ϕ_{ij} sont également définies positives.

En fait, nous n'établirons notre proposition fondamentale dans toute

qu'au ch. V pour l'instant

sa généralité. Nous supposerons que les perméabilités intrinsèques ϕ^{ij} sont indépendantes des $B^i_{\ j}$ et des $\dfrac{A^i_{\ j}}{\text{Det } A}$. Au paragraphe (IV, c), cependant, nous réussirons à nous affranchir de toute hypothèse relative aux perméabilités intrinsèques. Posant

$$\begin{cases} \xi^i = x^i + \varepsilon \lambda^i \\ B^i_{\ j} = \delta^i_{\ j} + \varepsilon\, \partial_j \lambda^i \end{cases}$$

nous nous contenterons d'effectuer un développement limité de k^{ij} et h_{ij} en fonction des puissances de ε, et de vérifier les inégalités (37) sur les termes d'ordre 1 et 2 en ε.

Partons de :

$$\begin{cases} K^{ij} = E\left(\dfrac{A^i_{\ \ell}}{\text{Det } A} \right) E(\phi^{\ell j}) \\ \\ E(k^{ij}) = E\left(\dfrac{A^i_{\ \ell}\ A^j_{\ s}}{\text{Det } A} \right) E(\phi^{\ell s}) \end{cases}$$

Au deuxième ordre en ε, l'inverse $A^i_{\ j}$ de $B^i_{\ j}$ peut s'écrire :

(39) $$A^i_{\ j} = \delta^i_{\ j} - \varepsilon\, \partial_j \lambda^i + \varepsilon^2\, \partial_j \lambda^\ell\, \partial_\ell\, \lambda^i + \dots$$

Pour développer $\dfrac{A^i_{\ j}}{\text{Det } A} = \text{Mineur } (B^j_{\ i})$, on doit examiner séparément les cas $n = 2$ et $n = 3$.

<u>A trois dimensions</u>, posant, pour abréger

$$\mu^i_{\ j} = \text{Min}(\partial_i\, \lambda^j)$$

on obtient facilement les formules <u>exactes</u> suivantes :

(40) $$\begin{cases} \dfrac{A^i_{\ j}}{\text{Det } A} = \delta^i_{\ j} + \varepsilon \left[\delta^i_{\ j}\, \partial_u \lambda^u - \partial_j \lambda^i \right] + \varepsilon^2 \mu^i_{\ j} \\ \text{Det } B = 1 + \varepsilon\, \partial_u \lambda^u + \varepsilon^2 \mu^u_{\ u} + \varepsilon^3\, \text{Det}(\partial_i\, \lambda^j) \end{cases}$$

on en déduit le développement limité de Det A :

(41) $$\mathrm{Det}\ A = \frac{1}{\mathrm{Det}\ B} = 1 - \varepsilon \partial_u \lambda^u + \varepsilon^2 \left[(\partial_u \lambda^u)^2 - \mu^u{}_u \right] + \ldots$$

Rapprochant (40) et (41), on obtient un deuxième développement de $A^i{}_j$:

(42) $$A^i{}_j = \delta^i{}_j - \varepsilon \partial_j \lambda^i + \varepsilon^2 \left[\mu^i{}_j - \delta^i{}_j \mu^u{}_u + \partial_u \lambda^u \partial_j \lambda^i \right]$$

Comparant (39) et (42), nous obtenons, en passant, l'identité :

$$\mu^i{}_j - \delta^i{}_j \mu^u{}_u = \partial_j \lambda^\ell \partial_\ell \lambda^j - \partial_u \lambda^u \partial_j \lambda^i$$

Enfin, de (40) et (42) on déduit sans difficulté :

(43) $$\frac{A^i{}_\ell A^j{}_s}{\mathrm{Det}\ A} = \delta^i{}_\ell \delta^j{}_s + \varepsilon \left[\delta^i{}_\ell \delta^j{}_s \partial_u \lambda^u - \delta^i{}_\ell \partial_s \lambda^j - \delta^j{}_s \partial_\ell \lambda^i \right]$$
$$+ \varepsilon^2 \left[\delta^i{}_\ell \mu^j{}_s + \delta^j{}_s \mu^i{}_\ell - \delta^i{}_\ell \delta^j{}_s \mu^u{}_u + \partial_\ell \lambda^i \partial_s \lambda^j \right]$$

Passons aux valeurs probables. Les λ^i étant stationnaires, on a

$$E(\partial_j \lambda^i) = E(\mu^i{}_j) = 0$$

Par suite (40) et (43) vont donner

(44) $$\begin{cases} E\left(\dfrac{A^i{}_\ell}{\mathrm{Det}\ A}\right) = \delta^i{}_\ell \\ E\left(\dfrac{A^i{}_\ell A^j{}_s}{\mathrm{Det}\ A}\right) = \delta^i{}_\ell \delta^j{}_s + \varepsilon^2 E(\partial_\ell \lambda^i \partial_s \lambda^j) \end{cases}$$

Nous en déduisons immédiatement

$$\begin{cases} K^{ij} = E(\phi^{ij}) \\ E(k^{ij}) = E(\phi^{ij}) + \varepsilon^2 E(\phi^{\ell s} \partial_\ell \lambda^i \partial_s \lambda^j) \end{cases}$$

soit

(45) $$E(k^{ij}) - K^{ij} = \varepsilon^2 E\left[\phi^{\ell s} \partial_\ell \lambda^i \partial_s \lambda^j \right]$$

Il est clair, sur cette équation, <u>que la matrice $E(k^{ij}) - K^{ij}$ est définie positive</u>. En effet, si α_i sont des constantes quelconques, on a :

$$\alpha_i \left[E(k^{ij}) - K^{ij} \right] \alpha_j = \varepsilon^2 E\left[\phi^{\ell s} (\partial_\ell \alpha_i \lambda^i) \partial_s (\alpha_j \lambda^j) \right] \geqslant 0$$

puisque $\phi^{\ell s}$ est définie positive. Les inégalités (37) ne font que traduire ce résultat.

Dans le cas de deux dimensions, on pose pour abréger $\Delta = \mathrm{Det}\ \partial_i \lambda^j$, et les équations (40) et (43) ont les équivalents suivants :

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{A^i_j}{\mathrm{Det}\ A} = \delta^i_j + \varepsilon\left[\delta^i_j \partial_\ell \lambda^\ell - \partial_j \lambda^i\right]\\
&\mathrm{Det}\ B = 1 + \varepsilon\, \partial_u \lambda^u + \varepsilon^2 \Delta\\
&\mathrm{Det}\ A = 1 - \varepsilon\, \partial_u \lambda^u + \varepsilon^2\left[(\partial_u \lambda^u)^2 - \Delta\right] + \dots\\
&A^i_j = \delta^i_j - \varepsilon\, \partial_j \lambda^i + \varepsilon^2\left[\partial_u \lambda^u \partial_j \lambda^i - \delta^i_j \Delta\right] + \dots\\
&\frac{A^i_\ell A^j_s}{\mathrm{Det}\ A} = \delta^i_\ell\ \delta^j_s + \varepsilon\left[\delta^i_\ell\ \delta^j_s \partial_u \lambda^u - \delta^i_\ell \partial_s \lambda^j - \delta^j_s \partial_\ell \lambda^i\right]\\
&\qquad + \varepsilon^2\left[\partial_\ell \lambda^i \partial_s \lambda^j - \delta^i_\ell\ \delta^j_s\ \Delta\right] + \dots
\end{aligned}\right.$$

Comme les λ^i sont supposés stationnaires, on a de plus

$$E(\partial_\ell \lambda^i) = E(\Delta) = 0$$

On vérifie alors, en prenant les espérances mathématiques des relations (46), que les formules (44) s'appliquent encore. La suite de la démonstration est identique. En particulier, la formule (45) reste valable.

Passons maintenant aux <u>inégalités relatives aux h_{ij}</u>. Désignant par $\psi_{\ell s}$ l'inverse des $\phi_{\ell s}$, l'inverse h_{ij} de k^{ij} est :

$$h_{ij} = \frac{B^\ell_i\ B^s_j}{\mathrm{Det}\ B}\ \psi_{\ell s}$$

On obtient facilement le développement limité :

$$\frac{B^\ell_i\ B^s_j}{\mathrm{Det}\ B} = \delta^\ell_i\ \delta^s_j + \varepsilon\left[\delta^\ell_i \partial_j \lambda^s + \delta^s_j \partial_i \lambda^\ell - \delta^\ell_i\ \delta^s_j \partial_u \lambda^u\right]$$
$$+ \varepsilon^2\left[\delta^\ell_i\ \delta^s_j\left((\partial_u \lambda^u)^2 - \Delta\right) - \delta^\ell_i \partial_j \lambda^s \partial_u \lambda^u - \delta^s_j \partial_i \lambda^\ell \partial_u \lambda^u + \partial_i \lambda^\ell \partial_j \lambda^s\right] + \dots$$

L'expression est écrite dans le cas $n = 2$. Pour $n = 3$, il suffit de remplacer le déterminant Δ par la somme μ^u_u de ses mineurs. Dans tous les cas, l'espérance mathématique est :

$$E\left(\frac{B^{\ell}_i \; B^{s}_j}{\text{Det } B}\right) = \delta^{\ell}_i \; \delta^{s}_j + \varepsilon^2 \, E\left[(\partial_i \lambda^{\ell} - \delta^{\ell}_i \partial_u \lambda^u)(\partial_j \lambda^s - \delta^s_j \partial_v \lambda^v)\right]$$

On en déduit immédiatement :

$$E(h_{ij}) - E(\psi_{ij}) = \varepsilon^2 \, E\left[\psi_{\ell s}(\partial_i \lambda^{\ell} - \delta^{\ell}_i \partial_u \lambda^u)(\partial_j \lambda^s - \delta^s_j \partial_v \lambda^v)\right]$$

Il suffit de répéter le raisonnement déjà fait à propos des k^{ij} pour voir que la matrice

$$E(h_{ij}) - E(\psi_{ij})$$

est définie positive. Ce n'est pas encore le résultat que nous avons en vue, car $E(\psi_{ij})$, qui représente la matrice $E\left[\phi^{-1}\right]$, ne coincide pas avec H_{ij}, qui représente la matrice $\left[E(\phi)\right]^{-1}$. Mais on peut montrer (voir annexe D) que la matrice

$$E\left[\phi^{-1}\right] - \left[E(\phi)\right]^{-1}$$

de composantes

$$E(\psi_{ij}) - H_{ij}$$

est elle-même définie positive. La somme des deux matrices définies positives :

$$\left[E(h_{ij}) - E(\psi_{ij})\right] + \left[E(\psi_{ij}) - H_{ij}\right] = E(h_{ij}) - H_{ij}$$

est elle-même définie positive, ce qui constitue le résultat annoncé.

La méthode d'approximation que nous avons mise au point chemin faisant, nous sera utile, au chapitre suivant, où elle nous permettra de passer d'un milieu à stratification horisontale à un milieu à stratification faiblement ondulée.

g/ Représentation géométrique de la propriété fondamentale.

Les modes de déterminations expérimentales des perméabilités se classent en deux catégories, selon que l'on impose à l'écoulement soit la direction du gradient (écoulement à travers un échantillon plat à faces parallèles) soit la direction du flux (écoulement le long d'un échantillon cylindrique allongé).

Dans le premier mode le gradient $\overline{\omega}$ a une direction imposée α_j:

$$\partial_j p = \alpha_j \overline{\omega}$$

Le flux mesuré est la composante

$$\alpha_i q^i = - \alpha_i k^{ij} \alpha_j \overline{\omega}$$

du flux q^i selon la direction de ce gradient. La perméabilité observée expérimentalement est ici

$$k_o = \alpha_i k^{ij} \alpha_j$$

Portant, dans la direction α_i, un rayon vecteur $r = \dfrac{1}{\sqrt{k_o}}$, on obtient l'ellipsoide des perméabilités d'équation

$$k^{ij} x_i x_j = 1$$

Dans le deuxième mode la direction β^i du flux q est imposée. Le gradient $\partial_j p$ prend une direction quelconque, mais seule intervient expérimentalement sa projection

$$\beta^j \partial_j p = - \beta^j h_{ji} \beta^i q$$

Sur la direction β^i du flux. La perméabilité mesurée est ici

$$k_o = \frac{1}{h_{ij} \beta^i \beta^j}$$

Portant, dans la direction β^i, un rayon vecteur $r = \sqrt{k_o}$ on obtient l'ellipsoide inverse du précédent :

$$h_{ij} x^i x^j = 1$$

Considérons d'une part les deux ellipsoides "locaux"

$$\begin{cases} E(k^{ij}) x_i x_j = 1 \\ E(h_{ij}) x^i x^j = 1 \end{cases}$$

construits sur les valeurs locales des perméabilités et de leurs inverses, et les deux ellipsoides "macroscopiques"

$$\begin{cases} K^{ij} x_i x_j = 1 \\ H_{ij} x^i x^j = 1 \end{cases}$$

construits sur les grandeurs macroscopiques correspondantes.

La proposition fondamentale du paragraphe précédent se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{l} E(k^{ij})\, x_i\, x_j \geqslant K^{ij}\, x_i\, x_j \\ \\ E(h_{ij})\, x^i\, x^j \geqslant H_{ij}\, x^i\, x^j \end{array}\right.$$

Elle signifie que <u>les ellipsoides construits sur les valeurs locales moyennes $E(k^{ij})$ et $E(h_{ij})$ sont intérieurs aux ellipsoides construits sur les valeurs macroscopiques correspondantes K^{ij} et H_{ij}</u> .

III.- CAS D'INTEGRABILITE, ET APPLICATIONS

Les résultats fondamentaux du chapitre précédent nous permettent de fabriquer des perméabilités $k^{ij}(x)$ stationnaires pour lesquelles les solutions macroscopiquement uniformes sont connues a priori et rendent possible le calcul effectif de la perméabilité macroscopique K^{ij}. Il suffit, en effet, nous l'avons vu, de se donner a priori un tenseur gradient aléatoire stationnaire, $B^i_{\ j} = \partial_j\, \xi^i$, et une perméabilité intrinsèque vérifiant la relation de conservation $\partial_i\, \phi^{ij} = 0$ en coordonnées ξ. Il est instructif d'effectuer effectivement de tels calculs dans le cas de différents schémas, correspondant à des hypothèses précises. Les exemples que nous allons traiter apparaîtront toujours comme plus ou moins artificiels, sauf peut-être les plus complexes d'entre eux, et ne pourront pas conduire à la formulation de lois quantitatives à valeur générale. Ils suffiront, cependant, à mettre en évidence la complexité et la diversité des modes de composition des perméabilités, et nous espérons qu'il s'en dégagera quelque chose comme une philosophie de l'hydrodynamique des milieux poreux. Dans le chapitre suivant nous essayerons, grâce à une méthode d'approximation due à SCHWYDLER, d'établir des résultats plus généraux. Nous traiterons successivement les exemples suivants :

- Milieu à Isobares planes,
- Milieu à perméabilité intrinsèque constante

- Milieu à stratification horizontale
- Milieu stratifié composite
- Milieu à stratification faiblement ondulée.

a/ Milieu à Isobares planes

Proposons-nous de déterminer une fonction $k^{ij}(x)$ telle que les équations de Darcy admettent n solutions $p_1(x_1) \dots p_n(x_n)$, la pression p_i ne dépendant que de la coordonnée x^i. De telles solutions décrivent des écoulements uniformes au niveau macroscopique (les surfaces isobares sont déjà des plans au niveau microscopique). Nous supposerons de plus

$$E(p'_i) = E\left[\frac{d}{dx^i} h_i(x^i)\right] = 1$$

Alors B^i_j est le tenseur diagonal $p'_i \delta^i_j$, et son inverse A^i_j également diagonal, est

$$A^i_j = \frac{1}{p'_i} \delta^i_j$$

Les perméabilités intrinsèques ϕ^{jl}, d'après (30), doivent vérifier le système

$$\frac{1}{p'_1} \frac{\partial \phi^{1l}}{\partial x_1} + \frac{1}{p'_2} \frac{\partial \phi^{2l}}{\partial x_2} + \dots = 0$$

on obtient une solution triviale en prenant pour ϕ^{ij} une fonction quelconque indépendante des variables x^i et x^j. A trois dimensions, par exemple :

$$\phi = \begin{pmatrix} \mu_1(y,z) & \nu_3(z) & \nu_2(y) \\ \nu_3(z) & \mu_2(zx) & \nu_1(x) \\ \nu_2(y) & \nu_1(x) & \mu_3(x,y) \end{pmatrix}$$

Avec Det $B = p'_1 p'_2 p'_3$, on obtient pour k^{ij}

$$k = \begin{pmatrix} \frac{p'_2 p'_3}{p'_1} \mu_1 & p'_3 \nu_3 & p'_2 \nu_2 \\ p'_3 \nu_3 & \frac{p'_1 p'_3}{p'_2} \mu_2 & p'_1 \nu_1 \\ p'_2 \nu_2 & p'_1 \nu_1 & \frac{p'_1 p'_2}{p'_3} \mu_3 \end{pmatrix}$$

Compte tenu de $E(p'_i) = 1$, la relation (32) donne les perméabilités macroscopiques sous la forme

$$K = \begin{pmatrix} E\left[p'_2\ p'_3\ \mu_1\right] & E\left[p'_3\ \nu_3\right] & E(p'_2\ \nu_2) \\ E(p'_3\ \nu_3) & E(p'_1\ p'_3\ \mu_2) & E(p'_1\ \nu_1) \\ E(p'_2\ \nu_2) & E(p'_1\ \nu_1) & E(p'_1\ p'_2\ \mu_3) \end{pmatrix}$$

Posons $\lambda_1(x) = \dfrac{1}{p'_1(x)}$ $\lambda_2(y) = \dots$. On voit que, pour une perméabilité régionalisée de la forme :

$$k = \begin{pmatrix} \lambda_1(x)\ f_1(y,z) & g_3(z) & g_2(y) \\ g_3(z) & \lambda_2(y)\ f_2(xz) & g_1(x) \\ g_2(y) & g_1(x) & \lambda_3(z)\ f_3(x,y) \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$(47)\qquad \begin{cases} K^{12} = E(k^{12}) \qquad K^{23} = E(k^{23}) \qquad K^{13} = E(k^{13}) \\[2mm] K^{11} = \dfrac{E(f_1)}{E\left(\dfrac{1}{\lambda_1}\right)} \\[2mm] K^{22} = \dfrac{E(f_2)}{E\left(\dfrac{1}{\lambda_2}\right)} \\[2mm] K^{33} = \dfrac{E(f_3)}{E\left(\dfrac{1}{\lambda_3}\right)} \end{cases}$$

On voit que <u>la composition est arithmétique pour les composantes f ou g et harmonique pour les composantes λ.</u> Cela se comprend intuitivement.

La direction de l'axe des x est perpendiculaire aux "Strates " $\lambda_1(x) = C^{te}$. La composante $\lambda_1(x)$ se couple donc selon le mode "en série " dans la genèse de K^{11}. Cette même direction de l'axe des x, au contraire, est parallèle aux strates $f_1(y,z) = C^{te}$, et la composante f_1 se couple selon le mode "en parallèle ".

On voit aussi, très clairement, sur les formules (47) que, selon l'importance relative des fluctuations de f_1 et de λ_1, on peut obtenir pour K^{11} n'importe quelle valeur comprise entre $E(k^{11})$ et $\frac{1}{E(\frac{1}{k^{11}})}$. Il n'y a pas de raison particulière pour que K^{11} coincide exactement avec la moyenne géométrique des k^{11}.

On remarquera que $\lambda_1(x)$ et $f_1(y,z)$ sont nécessairement indépendantes. Supposons les lognormales, de paramètres $(\gamma_\lambda, \sigma^2_\lambda)$ et (γ_f, σ^2_f). On a

$$\begin{cases} E(f_1) = \gamma_f \exp(+\frac{\sigma^2_f}{2}) \\ E(\frac{1}{\lambda_1}) = \frac{1}{\gamma_1} \exp(+\frac{\sigma^2_\lambda}{2}) \end{cases}$$

D'où

$$K^{11} = \gamma_f\, \gamma_\lambda \exp(\frac{\sigma^2_f - \sigma^2_\lambda}{2})$$

Autrement dit

$$\log K^{11} = E(\log k^{11}) + \frac{1}{2}(\sigma^2_f - \sigma^2_\lambda)$$

C'est seulement pour $\sigma^2_f = \sigma^2_\lambda$, c'est-à-dire lorsque les deux composantes f_1 et λ_1 ont même variabilité relative, que la règle de la moyenne géométrique s'applique rigoureusement.

<u>b/ Milieu à perméabilités intrinsèques constantes.</u>

Nous allons maintenant examiner un cas particulier qui présente un certain intérêt géométrique : le cas d'un milieu à perméabilités intrinsèques constantes. Le tenseur des perméabilités est ici de la forme

$$k^{ij} = \frac{A^i{}_k\, A^j{}_\ell}{\text{Det}\ A}\ \phi^{\ell k}$$

où A^i_s est l'inverse du tenseur gradient aléatoire et stationnaire B^s_i, et où les $\phi^{\ell s}$ sont des constantes. Effectuant une transformation linéaire sur ϕ et A, on peut se ramener au cas $\phi^{\ell s} = g^{\ell s}$ $(= \delta^\ell_s$ en axes orthonormées), c'est-à-dire au cas où les perméabilités intrinsèques sont à la fois constantes et isotropes. Naturellement, dans ce cas, on ne peut plus supposer, en général, $E(B^s_i) = \delta^s_i$

Soit donc

$$k^{ij} = \frac{A^i_s \; A^j_\ell}{\text{Det } A} \, g^{s\ell} \tag{48}$$

l'expression de notre perméabilité.

Les n solutions privilégiées, indexées par l'indice r, sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_j p = B^r_j = \partial_j \xi^r \\ q^i = k^{ij} \, \partial_j p = - \dfrac{A^i_s \, g^{sr}}{\text{Det } A} = - \dfrac{A^{ir}}{\text{Det } A} \end{array} \right. \tag{49}$$

Elles figurent dans la ligne r et la colonne r des matrices B^r_j et $\frac{A^{ir}}{\text{Det } A}$ respectivement. Supposons les axes orthonormés, de manière à pouvoir confondre A^{ir} et A^i_r. Les vecteurs colonne de la matrice $\frac{A^i_r}{\text{Det } A}$, qui figurent le flux des solutions privilégiées, reçoivent des interprétations remarquables en géométrie vectorielle élémentaire, d'ailleurs assez différentes selon que l'espace est à deux ou trois dimensions.

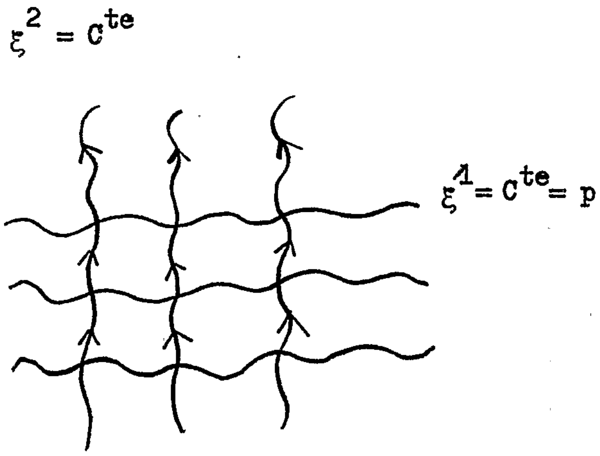
Cas de deux dimensions Comme $\frac{A^i_r}{\text{Det } A}$ est le mineur de B^r_i, on a, dans le cas où n = 2 :

$$B = \begin{pmatrix} \partial_1 \xi^1 & \partial_2 \xi^1 \\ \partial_1 \xi^2 & \partial_2 \xi^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{A}{\text{Det } A} = \begin{pmatrix} \partial_2 \xi^2 & -\partial_2 \xi^1 \\ -\partial_1 \xi^2 & \partial_1 \xi^1 \end{pmatrix}$$

Lorsque la pression est ξ^1, le flux, qui a pour composantes $(-\partial_2 \xi^2, +\partial_1 \xi^2)$ est donc le vecteur déduit de grad ξ^2 par une rotation de 90°. C'est un vecteur tangent à la courbe $\xi^2 = C^{te}$, et numériquement égal à grad ξ^2.

Autrement dit, quand les courbes $\xi^1 = C^{te}$ sont des isobares, les lignes $\xi^2 = C^{te}$ sont des lignes de courant, et réciproquement



Les perméabilités $k^{ij}(x)$, selon (48), s'explicitent comme suit :

$$k^{ij} = \frac{1}{\partial_1 \xi^1 \partial_2 \xi^2 - \partial_1 \xi^2 \partial_2 \xi^1} \begin{pmatrix} (\partial_1 \xi_1)^2 + (\partial_2 \xi_2)^2 & -(\partial_1 \xi^2 \partial_2 \xi^2 + \partial_1 \xi^1 \partial_2 \xi^1) \\ -(\partial_1 \xi^2 \partial_2 \xi^2 + \partial_1 \xi^1 \partial_2 \xi^2) & (\partial_1 \xi_1)^2 + (\partial_2 \xi_2)^2 \end{pmatrix}$$

Pour évaluer les perméabilités macroscopiques K^{ij}, posons :

$$E(B^i{}_j) = E(\partial_j \xi^i) = b^i{}_j$$

Soient

$$E(B) = \begin{pmatrix} b^1{}_1 & b^1{}_2 \\ b^2{}_1 & b^2{}_2 \end{pmatrix}$$

$$E(B)^{-1} = \begin{pmatrix} b^2{}_2 & -b^1{}_2 \\ -b^2{}_1 & b^1{}_1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{b^1{}_1 b^2{}_2 - b^1{}_2 b^2{}_1}$$

$$E\left(\frac{A}{\mathrm{Det}\ A}\right) = \begin{pmatrix} b^2_2 & -b^1{}_2 \\ -b^2{}_1 & b^1{}_1 \end{pmatrix}$$

La formule $K = E(\frac{A}{\text{Det } A}) \left[E(B)\right]^{-1}$ donne ainsi :

$$K^{ij} = \frac{1}{b_1^1\, b_2^2 - b_2^1\, b_1^2} \begin{pmatrix} (b_1^1)^2 + (b_2^2)^2 & -(b_1^2\, b_2^2 + b_1^1\, b_2^1) \\ -(b_1^2\, b_2^2 + b_1^1\, b_2^1) & (b_1^1)^2 + (b_2^2)^2 \end{pmatrix}$$

Ces expressions se déduisent de celles de k^{ij} en remplaçant chaque terme quadratique $\partial_i\, \xi^j\, \partial_r\, \xi^s$ par le produit $b_i^j\, b_r^s$ des espérances mathématiques correspondantes. Il n'apparaît pas de règle simple de pondération permettant de déduire les K^{ij} des k^{ij}.

Par contre, on déduit immédiatement de (48)

$$\text{Det } k = \text{Det } K$$

Le déterminant des perméabilités microscopiques reste ici constant et égal au déterminant des perméabilités macroscopiques. Cette circonstance, déjà signalée au paragraphe II, e, apparaît comme un peu artificielle, et limite l'intérêt de ce schéma.

Cas de 3 dimensions

Pour interpréter le mineur $\frac{A^i_r}{\text{Det } A}$ du terme $B^r_i = \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i}$, le plus simple est d'écrire explicitement les composantes de ses vecteurs colonnes. Pour $r = 1$, on obtient les composantes :

$$\frac{A^1_1}{\text{Det } A} = \partial_2\, \xi^2\, \partial_3\, \xi^3 - \partial_2\, \xi^3\, \partial_3\, \xi^2$$

$$\frac{A^2_1}{\text{Det } A} = \partial_3\, \xi^2\, \partial_1\, \xi^3 - \partial_3\, \xi^3\, \partial_1\, \xi^2$$

$$\frac{A^3_1}{\text{Det } A} = \partial_1\, \xi^2\, \partial_2\, \xi^3 - \partial_1\, \xi^3\, \partial_2\, \xi^2$$

On reconnaît le produit vectoriel grad $\xi^2 \wedge$ grad ξ^3. Un calcul analogue conduit aux résultats correspondants pour les deux autres colonnes. Finalement, les trois vecteurs colonnes sont :

$$(50) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{A_1}{\text{Det } A} &= \text{grad } \xi^2 \wedge \text{grad } \xi^3 \\ \frac{A_2}{\text{Det } A} &= \text{grad } \xi^3 \wedge \text{grad } \xi^1 \\ \frac{A_3}{\text{Det } A} &= \text{grad } \xi^1 \wedge \text{grad } \xi^2 \end{aligned} \right.$$

Ainsi, lorsque la pression est ξ_1, le flux est $-$ grand $\xi^2 \wedge$grad ξ^3. Ce vecteur flux, orthogonal à grad ξ^2 comme à grad ξ^3, est tangent à la ligne d'intersection des surfaces $\xi^2 = C^{te}$ et $\xi^3 = C^{te}$. Autrement dit, lorsque les isobares sont les surfaces $\xi^1 = C^{te}$, les lignes de courant sont les intersections des familles de surfaces $\xi^2 = C^{te}$ et $\xi^3 = C^{te}$. On a naturellement, des résultats analogues lorsque les isobares sont les surfaces $\xi^2 = C^{te}$ ou $\xi^3 = C^{te}$.

On notera que les formules (50) permettent de vérifier, de façon élémentaire pour $n = 3$, la formule $\partial_i\left(\frac{A^i{}_j}{\mathrm{Det}\, A}\right) = 0$ établie dans l'Annexe A pour un nombre quelconque de dimensions.

Les perméabilités macroscopiques K^{ij} sont données par :

$$K = E\left(\frac{A}{\mathrm{Det}\, A}\right) \left[E(B)\right]^{-1}$$

Il est inutile d'expliciter les calculs. Mais on peut voir très facilement que chaque K^{ij} se déduit du k^{ij} correspondant en remplaçant dans son expression développée chaque terme $\partial_r\ \xi$ par sa valeur probable $E(\partial_r\ \xi^s)$:

$$k = F(\partial_r\ \xi^s) \Longrightarrow K = F\ E(\partial_r\ \xi^s)$$

exactement comme dans le cas de deux dimensions. Il n'apparaît donc pas de règle de pondération simple pour les différentes composantes. Globalement, cependant, on a :

$$\mathrm{Det}\ k = \mathrm{Det}\ B$$

Par suite, d'après (51), on a aussi

$$\mathrm{Det}\ K = \mathrm{Det}\left[E(B)\right]$$

Or on peut vérifier (voir Annexe B) que le caractère stationnaire de B entraîne

$$\mathrm{Det}\left[E(B)\right] = E\left[\mathrm{Det}\ B\right].$$

On conclut finalement, conformément à (34) :

$$\mathrm{Det}\ K = E(\mathrm{Det}\ k)$$

Relation entre les écarts $E(k^{ij}) - K^{ij}$ et les covariances $\mathrm{Cov}(k^{ij}\ k^{ls})$

Changeant les notations, adoptons maintenant pour k^{ij} une représentation canonique :

$$k^{ij} = \frac{A^i{}_l\ A^j{}_s}{\mathrm{Det}\ A}\ C^{ls}$$

les $A^i{}_j$ étant l'inverse d'un tenseur gradient $B^l{}_s$ de moyenne unité

$$E(B^l{}_s) = \delta^l{}_s$$

En contre partie, les perméabilités intrinsèques ne sont plus isotropes. Elles sont représentées par une matrice quelconque C^{ls}, symétrique et constante.

Nous poserons

$$B^l{}_s = \delta^l{}_s + \varepsilon\, \partial_s\ \lambda^l$$

et, conformément à la méthode d'approximation déjà utilisée au paragraphe (II,f), nous nous contenterons de développements limités poussés au deuxième ordre en ε. La formule (45), établie ci-dessus, nous donne l'écart $E(k^{ij}) - K^{ij}$. Pour abréger les écritures, nous introduirons le tenseur d'ordre 4

$$T^{ij}_{\ell s} = E\left[\partial_\ell \lambda^i \partial_s \lambda^j\right]$$

symétrique à la fois en ℓs et en ij (à n dimensions, il possède $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ composantes distinctes, soit 36 si $n = 3$, et 9 pour $n = 2$). La formule (45) s'écrit alors

(52) $$E(k^{ij}) - K^{ij} = \varepsilon^2 \; C^{\ell s} \, T^{ij}_{\ell s}$$

Or la covariance des composantes k^{ij} et k^{mn} du tenseur des perméabilités (en un même point x) peut aussi, au deuxième ordre, s'exprimer à partir des tenseurs C^{ij} et $T^{ij}_{\ell s}$. La marche à suivre consiste à développer l'expression

$$\frac{A^i_\ell \; A^j_s \; A^m_r \; A^n_t}{(\mathrm{Det}\; A)^2} \; C^{\ell s} \, C^{rt}$$

au deuxième ordre en ε et à en prendre la valeur probable.

Les calculs sont un peu longs, mais sans difficultés particulières. Ils conduisent au résultat suivant :

(53) $$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(k^{ij}\, k^{mn}) &= E(k^{ij}\, k^{mn}) - E(k^{ij})\, E(k^{mn}) \\
&= \varepsilon^2 \Big[C^{ij}\, C^{mn}\, T^{uv}_{uv} - C^{ij}\, C^{mt}\, T^{nu}_{tu} - C^{ij}\, C^{rn}\, T^{mu}_{ru} \\
&\qquad - C^{is}\, C^{mn}\, T^{ju}_{su} - C^{\ell j}\, C^{mn}\, T^{iu}_{\ell u} \\
&\qquad + C^{ij}\, C^{rt}\, T^{mn}_{rt} + C^{\ell s}\, C^{mn}\, T^{ij}_{\ell s} + C^{is}\, C^{mt}\, T^{jn}_{st} \\
&\qquad + C^{is}\, C^{nr}\, T^{jm}_{sr} + C^{\ell j}\, C^{mt}\, T^{in}_{\ell t} + C^{\ell j}\, C^{rn}\, T^{im}_{\ell r} \Big]
\end{aligned}\right.$$

Ainsi, dans le cas général, il y a bien une relation entre les écarts $E(k^{ij}) - K^{ij}$ et les covariances, en ce sens qu'ils sont tous deux en ε^2 et ne dépendent que des tenseurs C^{ij} et T^{ij}_{rs}, mais cette relation est assez difficile à expliciter. A trois dimensions, on a d'un coté 6 composantes $E(k^{ij})- K^{ij}$ et 36 $\mathrm{cov}(k^{ij}\ k^{mn})$, de l'autre 6 C^{ij} et 36 T^{ij}_{rs}, sans compter ε qui reste indéterminé. On ne peut donc pas, dans le cas général, exprimer facilement les écarts en fonction, des seules covariances. Physiquement, on doit remarquer que les écarts sont en $\varepsilon^2\ C\ T$ et les covariances en $\varepsilon^2\ C^2\ T$.

Nous obtiendrons, par d'autres moyens, au chapitre II, l'expression des T^{ij}_{rs}.

c/ Milieu à stratification horizontale

Prenant l'axe des x_1 comme axe vertical, donnons nous un milieu où la perméabilité $k^{ij}(x_1)$ ne dépend que de la seule variable x^1. Pour obtenir la décomposition canonique de k^{ij}, cherchons un tenseur conservatif C et un tenseur gradient B de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} B^1_{1}(x_1) & 0 & 0 \\ B^2_{1}(x_1) & 1 & 0 \\ B^3_{1}(x_1) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La relation

$$k^{ij}\ B^r_{\ j} = C^{ir}$$

s'explicite comme suit :

$$C = \left\{ \begin{matrix} k^{11}\ B^1_{1} & k^{11}\ B^2_{1} + k^{12} & k^{11}\ B^3_{1} + k^{13} \\ k^{21}\ B^1_{1} & k^{21}\ B^2_{1} + k^{22} & k^{21}\ B^3_{1} + k^{23} \\ k^{31}\ B^1_{1} & k^{31}\ B^2_{1} + k^{32} & k^{31}\ B^3_{1} + k^{33} \end{matrix} \right.$$

Les composantes de C ne dépendant que de x^1, $\partial_i\ C^{ir}$ se réduit à $\dfrac{\partial C^{1r}}{\partial x^1}$

Le tenseur C sera conservatif si les éléments de la première ligne sont des constantes. Prenant :

$$\left\{ \begin{aligned} & k^{11}\ B^1_{1} = 1 \\ & k^{11}\ B^2_{1} + k^{12} = k^{11}\ B^3_{1} + k^{13} = 0 \end{aligned} \right.$$

on obtient la solution suivante :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^{11}} & 0 & 0 \\ -\frac{k^{12}}{k^{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{k^{13}}{k^{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{k^{21}}{k^{11}} & k^{22} - \frac{\overline{k^{12}}^{\,2}}{k^{11}} & k^{23} - \frac{k^{12}\,k^{13}}{k^{11}} \\ \frac{k^{31}}{k^{11}} & k^{32} - \frac{k^{12}\,k^{13}}{k^{11}} & k^{33} - \frac{\overline{k^{13}}^{\,2}}{k^{11}} \end{pmatrix}$$

Chacune des trois solutions privilégiées est caractérisée par un gradient de pression, qui apparaît dans une ligne de B, et un flux, qui apparaît (au signe près) dans la colonne correspondante de C. La première solution est caractérisée par des isobares planes, perpendiculaires à l'axe des x^1. Les deux autres solutions présentent des écoulements parallèles au plan des strates.

Pour obtenir la perméabilité macroscopique constante $K = E(C)\left[E(B)\right]^{-1}$ on doit résoudre le système

$$K \;\; E(B) \; = \; E(C)$$

On obtient sans difficulté :

$$
(55) \qquad \left\{
\begin{aligned}
K^{11} &= \frac{1}{E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)} \\
K^{12} &= \frac{E\left(\frac{k^{12}}{k^{11}}\right)}{E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)} \\
K^{13} &= \frac{E\left(\frac{k^{13}}{k^{11}}\right)}{E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(56) \qquad \left\{
\begin{aligned}
K^{22} &= E\left[k^{22} - \frac{(k^{12})^2}{k^{11}}\right] + \frac{\left[E\left(\frac{k^{12}}{k^{11}}\right)\right]^2}{E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)} \\
K^{33} &= E\left[k^{33} - \frac{(k^{13})^2}{k^{11}}\right] + \frac{\left[E\left(\frac{k^{13}}{k^{11}}\right)\right]^2}{E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)} \\
K^{23} &= E\left[k^{23} - \frac{k^{12}\ k^{13}}{k^{11}}\right] + \frac{E\left(\frac{k^{12}}{k^{11}}\right)\ E\left(\frac{k^{13}}{k^{11}}\right)}{E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)}
\end{aligned}
\right.
$$

Lorsque les termes rectangulaires sont nuls, on retrouve la règle de pondération harmonique pour K^{11}, arithmétique pour K^{22} et K^{23}. Dans le cas général, la pondération harmonique s'applique encore à k^{11}. Mais k^{22} et K^{33} sont perturbés. Pour voir dans quel sens est susceptible de jouer cette perturbation, on remarque que l'on a :

$$
K^{22} - E(k^{22}) = \frac{\left[E\left(\frac{k^{12}}{k^{11}}\right)\right]^2 - E\left[\overline{\frac{k^{12}}{k^{11}}}^{\,2}\right] E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)}{E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)}
$$

Posant $X = \dfrac{k^{12}}{\sqrt{k^{11}}}$ et $Y = \dfrac{1}{\sqrt{k^{11}}}$, le numérateur est de la forme :

$$\left[E(XY)\right]^2 - E(X^2)\,E(Y^2) = - D^2\left[m_y\, X - m_x\, Y\right] - (\sigma_x^2\, \sigma_y^2 - \overline{\sigma_{xy}}^2)$$

Il est toujours négatif. Ainsi, les termes rectangulaires, dont l'effet est d'onduler les lignes de courant (le flux des solutions privilégiées ne possède une direction constante que si ces termes sont nuls) entrainent toujours une diminution des perméabilités horizontales.

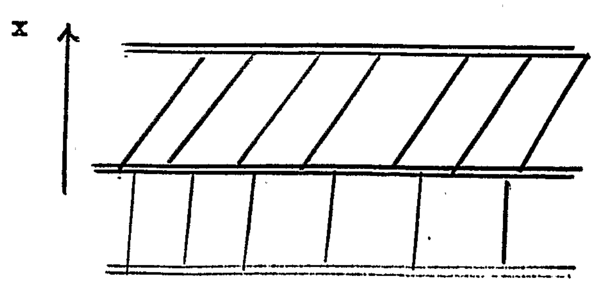
Lorsque les composantes rectangulaires sont indépendantes des composantes diagonales, les formules se simplifient comme suit :

$$\left\{\begin{aligned}
K^{11} &= \frac{1}{E(\frac{1}{k^{11}})} \\
K^{12} &= E(k^{12}) \\
K^{13} &= E(k^{13}) \\
K^{22} &= E(k^{22}) - E(\frac{1}{k^{11}})\;\; D^2(k^{12}) \\
K^{33} &= E(k^{33}) - E(\frac{1}{k^{11}})\;\; D^2(k^{13}) \\
K^{23} &= E(k^{23}) - E(\frac{1}{k^{11}})\;\; \mathrm{Cov}(k^{12},\, k^{13})
\end{aligned}\right.$$

La chute de K^{22} et K^{33} est ainsi mise en évidence.

d/ Milieu stratifié complexe

Le schéma suivant donne une image simplifiée de certaines séries sédimentaires : Des strates horizontales, d'épaisseurs variables, séparées par des joints peu épais, sont constituées par un empilement de feuillets primaires obliques, parallèles entre eux dans une même strate, mais de directions dif-



férentes dans les différentes strates. Les feuillets ont des perméabilités isotropes, constantes dans le plan de chaque feuillet mais variables dans la direction perpendiculaire aux feuillets (stratification primaire). On suppose que cette perméabilité $k(X)$ (axe OX perpendiculaire aux feuillets) est stationnaire et possède les mêmes caractéristiques dans les différentes strates. Les joints ont tous la même perméabilité isotrope ε. Enfin les puissances des strates et des joints sont proportionnelles à p et q ($p + q = 1$).

La composition des perméabilités doit ici se faire en deux étapes. On doit d'abord calculer les perméabilités k^{ij} dans une strate de puissance infinie, caractérisée par la direction de ses feuillets primaires, ensuite pondérer ces $k^{ij}(x)$ entre les différentes strates.

Dans une strate, les perméabilités principales sont

$$\lambda = E(k)$$

dans les deux directions β^i et γ^i du plan du feuillet, et

$$\mu = \frac{1}{E(\frac{1}{k})} < \lambda$$

dans la direction α^i perpendiculaire aux feuillets. On a donc :

$$k^{ij} = \mu\,\alpha^i\alpha^j + \lambda\beta^i\beta^j + \lambda\,\gamma^i\gamma^j$$

Comme $\alpha^i\alpha^j + \beta^i\beta^j + \gamma^i\gamma^j = g^{ij}$ ($= \delta^i_j$ en axes orthonormés) il vient :

(57) $$k^{ij} = \lambda\, g^{ij} - (\lambda - \mu)\,\alpha^i\alpha^j$$

Désignons par θ le pendage des feuillets $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ et par ϕ la direction de plus grande pente vers le bas $(0 \leq \phi \leq 2\pi)$, soit :

$$\begin{cases} \alpha^1 = \cos\theta \\ \alpha^2 = \sin\theta\cos\phi \\ \alpha^3 = \sin\theta\sin\phi \end{cases}$$

Les relations (57) s'explicitent comme suit :

$$\left\{\begin{aligned} k^{11} &= \lambda - (\lambda - \mu)\cos^2\theta \\ k^{22} &= \lambda - (\lambda - \mu)\sin^2\theta\cos^2\varphi \\ k^{33} &= \lambda - (\lambda - \mu)\sin^2\theta\sin^2\varphi \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} k^{12} &= -(\lambda - \mu)\sin\theta\cos\theta\cos\varphi \\ k^{23} &= -(\lambda - \mu)\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \\ k^{31} &= -(\lambda - \mu)\sin\theta\cos\theta\sin\varphi \end{aligned}\right.$$

Un point quelconque possède la probabilité p de tomber dans une strate, et q de tomber dans un joint. Dans le premier cas, $k^{ij}(x)$ est donnée par le système précédent, θ et ϕ étant aléatoires. Dans le deuxième cas, on a simplement :

$$\left\{\begin{aligned} k^{11} &= k^{22} = k^{33} = \varepsilon \\ k^{12} &= k^{23} = k^{31} = 0 \end{aligned}\right.$$

La pondération entre strates se fait selon les formules (55) et (56) et conduit aux expressions suivantes des perméabilités macroscopiques :

$$\left\{\begin{aligned} K^{11} &= \frac{1}{p\,E\left[\dfrac{}{\lambda - (\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right] + \dfrac{q}{\varepsilon}} \\ K^{12} &= -K^{11}\;p\,E\left[\frac{(\lambda-\mu)\sin\theta\cos\theta\cos\varphi}{\lambda - (\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right] \\ K^{13} &= -K^{11}\;p\,E\left[\frac{(\lambda-\mu)\sin\theta\cos\theta\sin\varphi}{\lambda - (\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right] \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
K^{22} &= q\,\varepsilon + \lambda\,p - (\lambda-\mu)\,p\,E(\sin^2\theta\ \cos^2\varphi) \\
&\quad - p\,E\left[\frac{(\lambda-\mu)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right] + p^2\,K^{11}\left[E\left(\frac{(\lambda-\mu)\sin\theta\ \cos\theta\ \cos\varphi}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right)\right]^2 \\
K^{33} &= q\,\varepsilon + \lambda\,p - (\lambda-\mu)\,p\,E(\sin^2\theta\ \sin^2\varphi) \\
&\quad - p\,E\left[\frac{(\lambda-\mu)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right] + p^2\,K^{11}\left[E\left(\frac{(\lambda-\mu)\sin\theta\cos\theta\sin\varphi}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right)\right]^2 \\
K^{23} &= -p(\lambda-\mu)\,E(\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) - p\,E\left[\frac{(\lambda-\mu)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right] \\
&\quad + p^2(\lambda-\mu)^2\,K^{11}\,E\left(\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\varphi}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right)E\left(\frac{\sin\theta\ \cos\theta\cos\varphi}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos\theta}\right)
\end{aligned}\right.$$

Ces formules, assez complexes, mettent en premier lieu en évidence le rôle des joints. On peut supposer q et ε petits (joints minces et peu perméables), négliger $q\ \varepsilon$ et prendre $p = 1$. Par contre, le rapport $\frac{q}{\varepsilon}$ intervient de manière primordiale. Si $\frac{q}{\varepsilon}$ est grand (joints pratiquement étanches), K^{11}, K^{12} et K^{13} s'annulent. Cela signifie que l'écoulement se fait toujours parallèlement à la stratification. Par contre, si $\frac{q}{\varepsilon}$ n'est pas très grand vis-à-vis de $E\left(\frac{1}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right)$, les composantes contenant l'indice 1 ne sont pas nulles et l'écoulement peut recouper les strates.

On peut, d'autre part, pour simplifier les formules, supposer que le pendage θ et la direction ϕ des couches sont indépendantes, et choisir l'axe des x^2 parallèle à la direction moyenne des couches $E(\sin\varphi) = 0$. Supposant de plus la distribution des ϕ symétrique autour de sa valeur centrale, nous pouvons annuler les espérances de tous les termes impairs en ϕ :

$$E(\sin\varphi) = E(\sin\varphi\ \ \cos\varphi) = 0$$

On obtient, avec ces hypothèses, la simplification :

$$K^{13} = K^{23} = 0$$

Toutefois K^{12} n'est pas nulle, de sorte que la direction verticale (l'axe des x^1) n'est pas direction principale, sauf si $E(\cos\varphi) = 0$ (distribution isotrope des directions) ou si $\frac{q}{\varepsilon}$ est très grand. En particulier, lorsque le gradient des pressions est orienté suivant l'axe des x^2 (direction moyenne des feuillets), le courant n'est pas horizontal, mais tend (plus ou moins selon que $\frac{q}{\varepsilon}$ est petit ou grand) à se rapprocher de la ligne moyenne de plus grande pente des feuillets. Au contraire, pour un gradient orienté selon x^3, c'est-à-dire selon l'horizontale des feuillets, l'écoulement est parallèle à l'axe des x^3.

Avec ces simplifications (mais en conservant le terme $\frac{q}{\varepsilon}$), nos formules s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned} K^{11} &= \frac{1}{E\left(\dfrac{1}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right)+\dfrac{q}{\varepsilon}} \\ K^{12} &= -(\lambda-\mu)\,K^{11}\,E(\cos\varphi)\,E\left[\frac{\sin\theta\,\cos\theta}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right] \\ K^{13} &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} K^{22} &= \lambda-\lambda(\lambda-\mu)\,E(\cos^2\varphi)\,E\left[\frac{1}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right]+K^{11}(\lambda-\mu)^2\left[E\left(\frac{\sin\theta\,\cos\theta}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right)\right]^2\left[E(\cos\varphi)\right]^2 \\ K^{33} &= \lambda-\lambda(\lambda-\mu)\,E(\sin^2\varphi)\,E\left[\frac{1}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right] \\ K^{23} &= 0 \end{aligned}\right.$$

Comparons les perméabilités horizontales. On a :

$$K^{22}-K^{33} = -\lambda(\lambda-\mu)\,E\left[\frac{1}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\right]E(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+K^{11}(\lambda-\mu)^2\left[E\,\frac{\sin\theta\,\cos\theta}{\lambda-(\lambda-\mu)\cos^2\theta}\,E(\cos\varphi)\right]^2$$

Le signe de cette différence dépend des cas de figures : le plus souvent, cependant, les directions φ se grouperont autour de leur valeur centrale $\varphi = 0$, et on aura $E(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) > 0$. D'autre part (même si $\frac{q}{\varepsilon}$ n'est pas très grand) le terme en $K^{11}(\lambda-\mu)^2$ sera le plus souvent assez faible. On aura donc généralement :

$$K^{22} < K^{33}$$

<u>La perméabilité sera meilleure selon la direction horizontale moyenne des feuillets</u>, moins bonne selon la direction de leur plus grande pente : le courant circule mieux en suivant les feuillets qu'en les recoupant.

f/ <u>Milieu à stratification légèrement ondulée</u>

Pour obtenir une représentation des milieux à stratification ondulée permettant le calcul effectif des solutions, nous utiliserons une méthode de portée assez générale, qui consiste à effectuer un changement de coordonnées à partir d'un cas de figure dont la solution est déjà connue, dans le cas présent, à partir du milieu à stratification horizontale.

Supposons qu'en coordonnées X^i on connaisse une perméabilité $\chi^{ij}(X)$ et sa décomposition canonique :

(58) $$\chi^{ij} = \frac{A^i_{\ell}\, A^j_{s}}{\text{Det } A}\, \phi^{\ell s}$$

où $A^i_{s} = \dfrac{\partial X^i}{\partial \xi^{s}}$ est l'inverse du gradient $B^{s}_i = \dfrac{\partial \xi^{s}}{\partial X^i}$ en coordonnées X. Ce gradient B est supposé stationnaire dans l'espace des X^i. Soit maintenant x^i un nouveau système de coordonnées et

$$\beta^i_{\ j} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \qquad \alpha^i_{\ j} = \frac{\partial x^i}{\partial X^j}$$

les matrices de passages (exprimées en fonction des x^i). Le produit contracté :

$$B^i_{\ \ell}\ \beta^{\ell}_{\ j} = \sum_{\ell} \frac{\partial \xi^i}{\partial X^{\ell}}\ \frac{\partial X^{\ell}}{\partial x^j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} = \partial_j\, \xi^i$$

est un gradient dans l'espace des x. Son inverse est manifestement $\alpha^i_{\ s}\ A^{s}_{\ j}$. Posant donc

(59) $$k^{ij} = \frac{\alpha^i_{\ u}\ A^u_{\ \ell}\ \phi^{\ell s}\ \alpha^j_{\ v}\ A^v_{\ s}}{\text{Det } \alpha \quad \text{Det } A}$$

nous obtenons la décomposition canonique d'une nouvelle perméabilité $k^{ij}(x)$ de l'espace des x. Mais, d'après (58), on met cette décomposition sous la forme :

$$k^{ij} = \frac{\alpha^i_u \quad \alpha^j_v}{\text{Det } \alpha} \quad \chi^{uv} \tag{60}$$

On obtient ainsi une pseudo décomposition canonique, où les perméabilités intrinsèques ϕ^{uv} sont remplacées par l'expression $\chi^{uv}\left[X(x)\right]$ obtenue en substituant $X(x)$ dans la perméabilité $\chi^{uv}(X)$ de l'espace des X. Comme $\chi^{uv}(X)$ est stationnaire dans l'espace des X, $\chi^{uv}\left[X(x)\right]$ est indépendant de x et du gradient $\beta^i_j = \partial_j X^i$, de sorte que le passage aux espérances mathématiques est facile. En premier lieu, on a :

$$E(k^{ij}) = E\left[\frac{\alpha^i_u \quad \alpha^j_v}{\text{Det } \alpha}\right] E(\chi^{uv}) \tag{61}$$

En deuxième lieu, la perméabilité macroscopique constante est :

$$K^{ij} = E\left[\frac{\alpha^i_u \quad A^u_\ell \quad \phi^{\ell j}}{\text{Det } \alpha \quad \text{Det } A}\right] = E\left(\frac{\alpha^i_u}{\text{Det } \alpha}\right) \; E\left(\frac{A^u_\ell \; \phi^{\ell j}}{\text{Det } A}\right)$$

Or, dans l'espace des X, la perméabilité macroscopique constante était justement $E\left(\frac{A^u_\ell \; \phi^{\ell j}}{\text{Det } A}\right)$, conformément aux formules générales, et d'autre part, d'après (27), on a toujours :

$$E\left(\frac{\alpha^i_u}{\text{Det } \alpha}\right) = \delta^i_u$$

Par suite, nous avons :

$$K^{ij} = E\left(\frac{A^i_\ell}{\text{Det } A} \quad \phi^{\ell j}\right) \tag{62}$$

et cette relation signifie que <u>la perméabilité macroscopique de l'espace des x a des composantes numériquement égales à celle de l'espace des X</u> [il serait incorrect, d'ailleurs, d'interpréter ce résultat en disant que la transformation (60) laisse invariant <u>le tenseur</u> des perméabilités macroscopiques. Elle laisse invariantes les valeurs de ces composantes. Les mêmes composantes K^{ij} ne représentent pas du tout le même être géométrique selon qu'on les considère comme composantes d'un tenseur rapporté aux coordonnées X^i ou x^j.]

Pour représenter un milieu à stratification légèrement ondulée, nous prendrons une perméabilité $\chi^{ij}(X_1)$ ne dépendant que de la seule variable X_1 et représentant, dans l'espace des X, un milieu à stratification horizontale. Nous lui ferons ensuite subir la transformation (60), en supposant le gradient β de la forme :

$$\beta^i{}_j = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \delta^i{}_j + \varepsilon\, \partial_j \lambda^i$$

et nous nous contenterons d'un développement limité au 2ème ordre en ε.

D'après (62), les perméabilités macroscopiques conservent les mêmes composantes. Il suffit donc de reprendre l'expression obtenue au paragraphe (III,C). Il vient ainsi :

$$(63)\quad \left\{ \begin{aligned} K^{11} &= \frac{1}{E\left(\frac{1}{\chi^{11}}\right)} \\ K^{12} &= \frac{E\left(\frac{\chi^{12}}{\chi^{11}}\right)}{E\left(\frac{1}{\chi^{11}}\right)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K^{22} &= E\left[\chi^{22} - \frac{(\chi^{12})^2}{\chi^{11}}\right] + \frac{\left(E\left(\frac{\chi^{12}}{\chi^{11}}\right)\right)^2}{E\left(\frac{1}{\chi^{11}}\right)} \\ K^{23} &= E\left[\chi^{33} - \frac{\chi^{12}\chi^{13}}{\chi^{11}}\right] + \frac{E\left(\frac{\chi^{12}}{\chi^{11}}\right) E\left(\frac{\chi^{13}}{\chi^{11}}\right)}{E\left(\frac{1}{\chi^{11}}\right)} \end{aligned} \right.$$

Calculons maintenant $E(k^{ij})$, en utilisant le développement (44). On obtient par une transposition immédiate :

$$(64)\qquad E(k^{ij}) = E(\chi^{ij}) + \varepsilon^2\, E(\partial_\ell \lambda^i \partial_j \lambda^j)\, E(\chi^{\ell k})$$

La matrice $E(k^{ij}) - E(\chi^{ij})$ est <u>définie positive</u>. Cela signifie que l'écart $E(k^{ij}) - K^{ij}$ est toujours plus grand en stratification ondulée qu'en stratification horizontale. Cette détérioration due à l'ondulation est mesurée par l'écart $E(k^{ij}) - E(\chi^{ij})$ que l'on peut écrire, en négligeant les termes en ε^4.

(65) $$E(k^{ij}) - E(\chi^{ij}) = \varepsilon^2 \, E(\partial_\ell \lambda^i \partial_s \lambda^i) \, E(k^{\ell s}) = \varepsilon^2 \, T^{ij}_{\ell s} \, E(k^{\ell s})$$

Calcul explicite

Sous la forme (63), cependant, ces résultats ne sont pas directement utilisables, puisque l'on connaît expérimentalement les k^{ij} et non les χ^{ij}.

Il est cependant possible de calculer une expression du type $E\left[F(\chi^{ij})\right]$ de la manière suivante. On partira de $F(k^{ij})$, on substituera à k^{ij} son développement en fonction de ε et des χ^{ij}, on développera $F(k^{ij})$ en fonction de ε et on passera aux espérances. On obtient ainsi une expression de la forme

$$E\left[F(k^{ij})\right] = E\left[F(\chi^{ij})\right] + \varepsilon^2 \, G(\chi^{ij})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 2, $\varepsilon^2 \, G(\chi^{ij})$ peut être remplacé par $\varepsilon^2 \, G(k^{ij})$, comme nous l'avons fait dans le passage de (64) à (65), et on obtient :

$$E\left[F(\chi^{ij})\right] = E\left[F(k^{ij})\right] - \varepsilon^2 \, G(k^{ij})$$

Cette méthode permet le calcul explicite des différents termes des formules (63). Soit, par exemple, à calculer $E\left(\frac{1}{\chi^{11}}\right)$ en fonction des k^{ij}.

Le développement (43) donne :

$$k^{11} = \chi^{11} + \varepsilon\left[\chi^{11} \partial_u \lambda^u - 2\,\chi^{1s} \partial_s \lambda^1\right] + \varepsilon^2\left[2\,\chi^{1s} \mu^1_s - \chi^{11} \mu^u_u + \chi^{\ell s} \partial_\ell \lambda^1 \partial_s \lambda^1\right]$$

En inversant, on obtient :

$$\frac{1}{k^{11}} = \frac{1}{\chi^{11}}\Bigg[1 - \varepsilon\Big(\partial_u \lambda^u - \frac{2\chi^{1s}}{\chi^{11}} \partial_s \lambda^1\Big) - \varepsilon^2\Big(\frac{2\chi^{1s}}{\chi^{11}} \mu^1_s - \mu^u_u + \frac{\chi^{\ell s}}{\chi^{11}} \partial_\ell \lambda^1 \partial_s \lambda^1\Big)$$

$$+ \varepsilon^2\Big(\partial_u \lambda^u - \frac{2\,\chi^{1s}}{\chi^{11}} \partial_s \lambda^1\Big)^2 + \dots\Bigg]$$

Passant aux espérances mathématiques, il vient :

$$E\left(\frac{1}{k^{11}}\right) = E\left(\frac{1}{\chi^{11}}\right) + \varepsilon^2 \left[E\left(\frac{1}{\chi^{11}}\right) T^{uv}_{uv} - 4\, E\left(\frac{\chi^{1s}}{\chi^{11\,2}}\right) T^{1u}_{su} \right.$$

$$\left. + 4\, E\left(\frac{\chi^{1l}\,\chi^{1s}}{(\chi^{11})^3}\right) T^{11}_{sl} - E\left(\frac{\chi^{ls}}{(\chi^{11})^2}\right) T^{11}_{ls} \right]$$

Par suite, en négligeant toujours les termes d'ordre supérieur à 2 :

$$(66)\quad \begin{cases} E\left(\dfrac{1}{\chi^{11}}\right) = E\left(\dfrac{1}{k^{11}}\right) - \varepsilon^2 \left[E\left(\dfrac{1}{k^{11}}\right) T^{uv}_{uv} - 4\, E\left(\dfrac{k^{1s}}{k^{11\,2}}\right) T^{1u}_{su} \right. \\ \qquad\qquad \left. + 4\, E\left(\dfrac{k^{1l}\,k^{1s}}{(k^{11})^3}\right) T^{11}_{sl} - E\left(\dfrac{k^{ls}}{k^{11\,2}}\right) T^{11}_{ls} \right] \end{cases}$$

Les calculs sont assez longs, et ne présentent pas d'intérêt particulier par eux-mêmes. Pour les simplifier, nous supposerons que les tenseurs χ et k sont presque diagonaux, en ce sens que leurs composantes rectangulaires χ^{ij} et $k^{ij} (i \neq j)$ sont des infiniment petits de l'ordre de ε. Dans ces conditions, la formule (66) se simplifie, puisque l'on peut négliger les composantes diagonales qui apparaissent en facteur de ε^2. Il reste alors :

$$E\left(\frac{1}{\chi^{11}}\right) = E\left(\frac{1}{k^{11}}\right) - \varepsilon^2 \left[T^{uv}_{uv} - 4\, T^{1u}_{1u} + 3\, T^{11}_{11}\right] E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)$$

$$+ \varepsilon^2 \left[T^{11}_{22}\, E\left(\frac{k^{22}}{k^{11\,2}}\right) + T^{11}_{33}\, E\left(\frac{k^{33}}{k^{11\,2}}\right) \right]$$

En inversant, on obtient finalement la composante macroscopique K^{11} sous la forme :

$$(67)\quad \begin{cases} K^{11} = \dfrac{1}{E\left(\dfrac{1}{k^{11}}\right)} \left[1 + \varepsilon^2 (T^{uv}_{uv} - 4\, T^{1u}_{1u} + 3\, T^{11}_{11}) \right. \\ \qquad\qquad \left. - \varepsilon^2 \dfrac{E\left(\dfrac{k^{22}}{k^{11\,2}}\right)}{E\left(\dfrac{1}{k^{11}}\right)} T^{11}_{22} - \varepsilon^2 \dfrac{E\left(\dfrac{k^{33}}{k^{11\,2}}\right)}{E\left(\dfrac{1}{k^{11}}\right)} T^{11}_{33} \right] \end{cases}$$

Grâce à l'hypothèse que les perméabilités sont <u>presque diagonales</u>, le calcul des autres composantes est beaucoup plus rapide. En effet, tout terme où figure une composante χ^{ij} $(i \neq j)$ peut se calculer en substituant directement k^{ij} à χ^{ij}. D'autre part, la formule (65) donne :

$$E(\chi^{ij}) = E(k^{ij}) - \varepsilon^2 \, T^{ij}_{\ell s} \quad E(k^{\ell s})$$

Les formules (63) se transposent alors immédiatement :

$$\left\{\begin{aligned}
K^{12} &= \frac{E\left(\frac{k^{12}}{k^{11}}\right)}{E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)} \\
K^{13} &= \frac{E\left(\frac{k^{13}}{k^{11}}\right)}{E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)} \\
K^{22} &= E\left[k^{22} - \frac{\overline{k^{12}}^2}{k^{11}}\right] + \frac{\left[E\left(\frac{k^{12}}{k^{11}}\right)\right]^2}{E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)} - \varepsilon^2 \; T^{22}_{\ell s} \; E(k^{\ell s}) \\
K^{33} &= E\left[k^{33} - \frac{\overline{k^{13}}^2}{k^{11}}\right] + \frac{\left[E\left(\frac{k^{13}}{k^{11}}\right)\right]^2}{E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)} - \varepsilon^2 \; T^{33}_{\ell s} \; E(k^{\ell s}) \\
K^{23} &= E\left[k^{23} - \frac{k^{12}\,k^{13}}{k^{11}}\right] + \frac{E\left(\frac{k^{12}}{k^{11}}\right) \; E\left(\frac{k^{13}}{k^{11}}\right)}{E\left(\frac{1}{k^{11}}\right)}
\end{aligned}\right.$$

Les perméabilités K^{22} et K^{33} se trouvent <u>diminuées</u> du fait de l'ondulation, dans une mesure qui dépend étroitement du tenseur

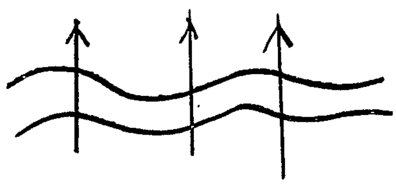
$$T^{ij}_{\ell s} = E(\partial_\ell \lambda^i \, \partial_s \lambda^j)$$

Or les composantes $T^{11}_{\ell s}$ ont une signification physique évidente. En effet, la composante $\varepsilon \, \lambda^1 = X^1 - x^1$ représente <u>la flèche</u>, c'est-à-dire l'écart vertical entre un point d'une strate donnée et le plan horizontal moyen de cette strate.

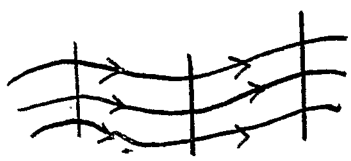
Ainsi $T^{11}_{\ell k}$ représente la valeur quadratique moyenne du gradient de la flèche, c'est-à-dire, en termes plus vagues, l'intensité moyenne de l'ondulation. Les composantes λ^2 et λ^3 sont plus difficiles à interpréter. Les annuler serait cependant artificiel. Si, en effet, les composantes T^{22}_{ij} et T^{33}_{ij} sont nulles, les formules (68) montrent qu'il ne se produit aucune diminution des perméabilités horizontales K^{22} et K^{33} ce qui est physiquement peu plausible. De fait, par la manière même dont le schéma a été construit, les solutions privilégiées de l'écoulement présentent les caractéristiques suivantes :

	Isobares	Lignes de courant	
1ère solution	surface $X^1 = C^{te}$	Intersection des surfaces	$X^2 = C^{te}$, $X^3 = C^{te}$
2ème "	$X^2 = C^{te}$	" " "	$X^3 = C^{te}$, $X^1 = C^{te}$
3ème "	$X^3 = C^{te}$	" " "	$X^1 = C^{te}$, $X^2 = C^{te}$

(ou du moins, il en serait strictement ainsi si χ^{ij} était rigoureusement diagonal). Si λ^2 et λ^3 sont nulles, les surfaces $X^2 = C^{te}$ et $X^3 = C^{te}$ sont les plans $x^2 = C^{te}$ et $x^3 = C^{te}$. Dans la première solution, le flux resterait uniforme, bien que les isobares soient ondulées. Dans les deux autres, les isobares seraient planes, et le courant suivrait strictement la stratification :



1ère solution



2ème solution

Or, physiquement, il est à peu près obligatoire que les lignes de courant soient ondulées, pour la première solution, et les isobares légèrement déformées, dans les deux autres. Ce sont les composantes λ^2 et λ^3 qui représentent les déformations des isobares ou des lignes de courant. Une assez large indétermination préside à leur choix, correspondant à un large éventail de solutions plus ou moins plausibles physiquement.

Pour dégager au moins un ordre de grandeur, nous allons faire une hypothèse simplificatrice. En premier lieu, nous supposerons le tenseur χ^{ij} <u>isotrope</u> :

$$\chi^{ij} = \chi(X) \quad g^{ij}$$

En deuxième lieu, nous supposerons - par analogie avec des résultats que nous établirons au chapitre IV et dans l'annexe E - que le tenseur $T^{ij}_{\ell s}$ est de la forme :

$$T^{ij}_{\ell s} = \frac{1}{15} (\lambda + \mu)(\delta^i_\ell \ \delta^j_s + \delta^i_s \ \delta^j_\ell) + \frac{1}{15} (\lambda + 6\mu) \ g^{ij} \ g_{\ell s}$$

autrement dit, ne dépend que de deux constantes λ et μ. En particulier :

$$\begin{cases} T^{11}_{11} = E\left[\left(\dfrac{\partial\lambda^1}{\partial x^1}\right)^2\right] = \dfrac{2}{15} (\lambda + \mu) + \dfrac{1}{15} (\lambda + 6\mu) \\[2ex] T^{11}_{22} = T^{11}_{33} = E\left[\left(\dfrac{\partial\lambda^1}{\partial x^2}\right)^2\right] = E\left[\left(\dfrac{\partial\lambda^1}{\partial x^3}\right)^2\right] = \dfrac{1}{15}(\lambda + 6\mu) \end{cases}$$

Ainsi λ et μ ne dépendent que de la géométrie des surfaces de stratifications et sont accessibles expérimentalement. Les ondulations sont supposées isotropes en moyenne dans le plan horizontal: la valeur moyenne du carré de la pente des strates, mesurée le long d'une coupe de direction quelconque, est $\varepsilon^2 \ T^{11}_{22} = \varepsilon^2 \ T^{11}_{33}$. Le terme T^{11}_{11}, qui n'a aucune raison de coincider avec les précédents, est la valeur quadratique moyenne du gradient vertical de la flèche des strates. Posons :

$$\begin{cases} T_V = T^{11}_{11} = \dfrac{2}{15}(\lambda+\mu) + \dfrac{1}{15}(\lambda+6\mu) \\[2ex] T_H = T^{11}_{22} = T^{11}_{33} = \dfrac{1}{15} \ (\lambda+6 \ \mu) \end{cases}$$

Portons ces expressions des $T^{ij}_{\ell s}$ dans (67) et (68), en tenant compte du fait que $k^{11} = k^{22} = k^{33}$ au premier ordre au moins en ε. On obtient, par des calculs faciles qu'il n'est pas utile d'expliciter :

$$(69)\quad \begin{cases} K^{11} = \dfrac{1}{E\left(\dfrac{1}{k^{11}}\right)}\left[1 + \dfrac{2}{15}\,\varepsilon^2(\lambda+\mu)\right] = \dfrac{1}{E\left(\dfrac{1}{k^{11}}\right)}\left(1 + \varepsilon^2(T_V - T_H)\right) \\ \\ K^{22} = K^{33} = E(k^{11})\left[1 - \varepsilon^2(T_V + 2\,T_H)\right] = E(k^{22})\left[1 - \varepsilon^2(T_V + 2\,T_H)\right] \\ \\ K^{12} = K^{23} = K^{31} = 0 \end{cases}$$

Ces formules, où ne figurent que des quantités accessibles expérimentalement, devront faire l'objet d'une vérification expérimentale.

IV.- METHODE D'APPROXIMATION DE SCHWYDLER

La méthode proposée par SCHWYDLER(1), qui se limite d'ailleurs au cas où les perméabilités régionalisées sont isotropes, consiste à poser

$$k = k_o + \varepsilon$$

avec $k_o = E(k)$, à considérer le terme variable ε, d'espérance nulle, comme très petit et à chercher un développement limité en ε des solutions de l'équation de Darcy. En fait SCHWYDLER s'est surtout intéressé aux problèmes d'estimation et de fluctuation que nous n'abordons pas dans cette étude (il s'agit par exemple, pour lui, connaissant les perméabilités mesurées le long d'un puits, d'estimer le débit futur et d'assortir cette estimation d'une fourchette d'erreur. Les idées et le formalisme mis en oeuvre rappellent étroitement la théorie des variables régionalisées). Nous nous proposons d'appliquer la même méthode au problème de la composition des perméabilités, c'est-à-dire du passage des perméabilités régionalisées $k^{ij}(x)$ aux perméabilités macroscopiques constantes K^{ij}, problème qui constitue l'objet propre de cette étude. Nous aboutirons à des résultats comparables à ceux que nous avons obtenus au chapitre III, notamment au paragraphe b, en effectuant des développements limités de nature assez semblable, mais à partir d'hypothèses précises sur la structure des perméabilités. En ce sens, on

---

(1) Voir références dans l'article de M. DUPUY, cité plus haut.

peut dire que la méthode de SCHWYDLER possède une plus grande généralité. Elle ne permettrait cependant pas d'aborder un problème tel que celui que nous avons traité au paragraphe III, f, où les variations de perméabilité perpendiculairement aux strates ne peuvent absolument plus être considérées comme infiniment petites.

Par ailleurs, nous nous affranchirons de la limitation que SCHWYDLER s'est imposé en ne considérant que des perméabilités isotropes. La partie constante des perméabilités peut, à dire vrai, être supposée isotrope sans nuire à la généralité, puisque l'on peut toujours se ramener à ce cas moyennant une transformation linéaire des coordonnées. Par contre la partie variable doit, impérativement, être figurée sous forme tensorielle. Nous poserons :

$$k^{ij}(x) = k_o \; g^{ij} + \varepsilon \; \gamma^{ij}(x) \tag{70}$$

avec $k_o = C^{te}$ et $E(\gamma^{ij}) = 0.$

a/ <u>Equations générales</u>

Nous nous proposons de chercher des développements en ε du flux q^i et du gradient $\partial_j p$, de la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} q^i &= q^i_o + \varepsilon\, q^i_1 + \varepsilon^2 \; q^i_2 + \dots \\ \partial_j p &= \partial_j p_o + \varepsilon\, \partial_j p_1 + \varepsilon^2 \; \partial_j p_2 + \dots \end{aligned} \right. \tag{71}$$

et vérifiant les équations de Darcy. La première équation

$$q^i = - k^{ij} \; \partial_j p$$

conduit, compte tenu de (70), et en identifiant les termes en ε^n, aux expressions suivantes des coefficients du développement du flux : (les axes sont supposés orthonormés de sorte que $g^{ij} = g_{ij} = \delta^i_j$).

$$\begin{cases} q^i_o = - k_o \,\partial_i\, p_o \\ q^i_1 = - k_o \,\partial_i\, p_1 - \gamma^{ij}\, \partial_j\, p_o \\ q^i_2 = - k_o \,\partial_i\, p_2 - \gamma^{ij}\, \partial_j\, p_1 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ q^i_n = - k_o \,\partial_i\, p_n - \gamma^{ij}\, \partial_j\, p_{n-1} \end{cases}$$

Il reste ensuite à exprimer l'équation de conservation $\partial_i q^i = 0$, qui doit être vérifiée par chacun des coefficients du développement de q^i :

$$\partial_i \, q^i_n = 0$$

D'où l'équation générale :

(72) $$k_o \, \Delta p_n + \partial_i \left[\gamma^{ij} \, \partial_j \, p_{n-1} \right] = 0$$

où Δ est le Laplacien. La première équation

$$k_o \, \Delta p_o = 0$$

est vérifiée trivialement avec $p_o = \varpi_j x^j$, c'est-à-dire avec un gradient constant

(73) $$\partial_j \, p_o = \varpi_j$$

Physiquement, nous sommes certains que (73) est la bonne solution, car, pour $\varepsilon = 0$, la solution macroscopiquement uniforme que nous cherchons à déterminer doit se réduire à une solution déjà uniforme au niveau microscopique.

La deuxième équation s'écrit :

(74) $$k_o \, \Delta p_1 + \varpi_j \, \partial_i \, \gamma^{ij} = 0$$

C'est une équation de Poisson. Elle admet la solution :

$$p_1 = \frac{\varpi_j}{4\pi\, k_o} \left(\frac{1}{r} * \partial_i\, \gamma^{ij}\right) = \frac{\varpi_j}{4\pi\, k_o} \left(\partial_i \frac{1}{r} * \gamma^{ij}\right) \tag{75}$$

Il n'est d'ailleurs pas évident que le produit de convolution, écrit symboliquement en (75), soit réellement définissable, même au sens de la théorie des distributions. Nous ne discuterons pas ce point de rigueur, ce qui revient à dire que nous adoptons une démarche purement heuristique. Dérivant (75), nous obtenons le gradient $\partial_j\, p_1$ du premier terme correctif :

$$\partial_j\, p_1 = \frac{\varpi_s}{4\pi\, k_o} \left(\partial_{j\ell} \frac{1}{r} * \gamma^{\ell s}\right) \tag{76}$$

Ce premier terme correctif dépend linéairement des γ^{ij}. Son espérance mathématique, ainsi que celle du flux correspondant, sera donc nulle :

$$E(\partial_j\, p_1) = E(q^i_{\ 1}) = 0$$

Nous retrouvons ici une circonstance déjà rencontrée dans les chapitres précédents : <u>les perturbations qu'apportent aux grandeurs macroscopiques les fluctuations des grandeurs microscopiques, sont du deuxième ordre en ε</u>.

Le gradient $\partial_j\, p_{n-1}$ étant supposé connu, l'équation générale (72) admet de même la solution

$$\left\{\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{4\pi\, k_o} \left[\frac{1}{r} * \partial_\ell\, (\gamma^{\ell s} \partial_s\, p_{n-1})\right] = \frac{1}{4\pi\, k_o} \left[\partial_\ell \frac{1}{r} * (\gamma^{\ell s}\, \partial_s\, p_{n-1})\right] \\ \partial_j\, p_n &= \frac{1}{4\cdot\pi\, k_o} \left[\partial_{j\ell} \frac{1}{r} * (\gamma^{\ell s}\, \partial_s\, p_{n-1})\right] \end{aligned}\right. \tag{77}$$

Le calcul par récurrence est donc formellement possible, et permet d'obtenir l'expression symbolique de tous les termes du développement de ∂_j p. Mais il est clair que le calcul effectif des termes successifs va devenir de plus en plus difficile. Nous nous limiterons par la suite aux termes en ε^2. Toutefois une circonstance capitale apparaît sur la relation (77) : $\partial_j\, p_n$ est une expression d'ordre n vis-à vis des γ^{ij}. D'après l'expression du terme de flux correspondant :

(78) $$q^i_n = - k_o \; g^{ij} \, \partial_j \; p_n - \gamma^{ij} \, \partial_j \; p_{n-1}$$

nous voyons qu'il en est de même de q^i_n. Lorsque nous passerons aux espérances mathématiques, q^i_n et $\partial_j \; p_n$ seront donc des fonctionnelles de la matrice des moments d'ordre n des γ^{ij}. En particulier, les termes du deuxième ordre q^i_2 et $\partial_j \; p_2$ ne dépendront que de la fonction matricielle de covariance:

(79) $$R^{ij, \ell s}(h) = E\left[\gamma^{ij}(x) \;\; \gamma^{\ell s}(x + h)\right]$$

b/ Tenseur de SCHWYDLER et perméabilités macroscopiques.

Pour obtenir les perméabilités macroscopiques au deuxième ordre, nous devons prendre les espérances mathématiques de q^i_2 et $\partial_j \; p_2$. Sous forme symbolique, nous avons :

(80) $$\partial_j \; p_2 = \frac{1}{4\pi \; k_o}\left[\partial_{j\ell} \frac{1}{r} * (\gamma^{\ell s} \;\; \partial_s \;\; p_1)\right]$$

D'où :

$$E(\partial_j \; p_2) = \frac{1}{4\pi \; k_o}\left[\partial_{j\ell} \frac{1}{r} * E\left(\gamma^{\ell s} \partial_s p_1\right)\right]$$

Mais l'espérance $E(\gamma^{\ell s} \partial_s \; p_1)$ est une constante, d'après le caractère stationnaire des fonctions aléatoires $\gamma^{\ell s}$ et $\partial_s \; p_1$. Or, en axes orthonormés, on a pour toute constante C :

$$\partial_{j\ell} \; \frac{1}{r} * C = - \frac{4 \pi}{3} \; C \;\; g_{j\ell}$$

puisque $\Delta \frac{1}{r} = - 4\pi \; \delta$, δ étant la mesure de Dirac. Par suite :

(81) $$E(\partial_j \; p_2) = - \frac{1}{3 \, k_o} \;\; E\left[\gamma^{\ell s} \partial_s \;\; p_1\right] g_{j\ell}$$

Calculons donc l'espérance $E\left[\gamma^{\ell s} \partial_s \;\; p_1\right]$. D'après (76), nous avons explicitement :

$$\gamma^{\ell s} \partial_s \, p_1 = \gamma^{\ell j}(x) \; \frac{\overline{\omega_u}}{4\pi \; k_o} \int \partial_{jv} \frac{1}{r} \;\; (\xi) \; \gamma^{uv} \; (x - \xi) \; d \; \xi$$

Passons aux espérances, compte tenu de l'expression (79) des covariances. Il vient :

(82) $$E(\gamma^{\ell s}\partial_s\ p_1) = \frac{\varpi_u}{4\pi\ k_o}\int R^{uv,\ell j}\ (\xi)\ \partial_{jv}\frac{1}{r}(\xi)\ d\ \xi$$

On voit apparaître un nouveau tenseur $S^{u\ell}$ d'ordre 2, que nous appellerons tenseur de SCHWYDLER et qui va jouer un rôle capital dans toute la suite. Puisque $R^{uv,\ell j}$ a la dimension du carré d'une perméabilité, nous prendrons pour S la définition suivante, qui conduit à une grandeur sans dimensions (la présence du signe - s'expliquera dans la suite).

(83) $$S^{u\ell} = -\frac{1}{4\pi\ (k_o)^2}\int R^{uv\ell j}(\xi)\ \partial_{jv}\ \frac{1}{r}\ (\xi)\ d\ \xi$$

Nous étudierons dans un instant les propriétés du tenseur de SCHWYDLER. Achevons au préalable le calcul de la solution macroscopique. Compte tenu de (83), les équations (82) et (81) se récrivent :

(84) $$\begin{cases} E(\gamma^{\ell s}\partial_s\ p_1) = -\ k_o\ \varpi_u\ S^{u\ell} \\ E(\partial_j\ p_2) = +\frac{1}{3}\ \varpi_u\ S^{u\ell}\ g_{j\ell} = +\frac{1}{3}\ \varpi_u\ S^u{}_j \end{cases}$$

De même le terme de flux a pour espérance mathématique :

$E(q^i_2) = -k_o g^{ij} E(\partial_j p_2) - E(\gamma^{ij}\partial_j p_1)$ soit :

(85) $$E(q^i{}_2) = +\frac{2}{3}\ k_o\ \varpi_u\ S^{ui}$$

Ainsi le tenseur de SCHWYDLER permet de représenter les écoulements macroscopiques uniformes à l'approximation d'ordre 2. Le résultat obtenu s'écrit explicitement :

(86) $$\begin{cases} \partial_j\ P\ \equiv\ E(\partial_j\ p) = \varpi_j + \frac{\varepsilon^2}{3}\ \varpi_u\ S^u{}_j\ +\ \ldots \\ Q^i\ \equiv\ E(q^i)\ = -\ k_o\ \varpi^i + \frac{2}{3}\ \varepsilon^2\ k_o\ \varpi_u\ S^{ui} + \ldots \end{cases}$$

Les ϖ_j, composantes d'un vecteur constant arbitraire, constituent un simple paramétrage des solutions macroscopiques. Leur élimination conduit à la perméabilité macroscopique K^{ij} (toujours au 2ème ordre en ε).

Substituons, en effet, les relations (86) dans l'équation de Darcy macroscopique

$$Q^i = - K^{ij} \partial_j P$$

Il vient :

$$k_o \left[g^{ij} \varpi_j - \frac{2}{3} \varepsilon^2 \varpi_u S^{ui} \right] = K^{ij} \varpi_j + \frac{\varepsilon^2}{3} \varpi_u S^u{}_j K^{ij}$$

identifions les coefficients du terme ϖ_j : on obtient

$$K^{iu} \left[\delta^j{}_u + \frac{\varepsilon^2}{3} S^j{}_u \right] = k_o \left[g^{ij} - \frac{2}{3} \varepsilon^2 S^{ji} \right]$$

Effectuons ensuite la multiplication contractée par l'inverse de $\left[\delta^j{}_u + \frac{\varepsilon^2}{3} S^j{}_u \right]$, c'est-à-dire, en négligeant les termes d'ordre supérieur à ε^2, par $\delta^\ell{}_j - \frac{\varepsilon^2}{3} S^\ell{}_j$. Il vient :

$$K^{i\ell} = k_o (g^{ij} - \frac{2}{3} \varepsilon^2 S^{ji})(\delta^\ell{}_j - \frac{\varepsilon^2}{3} S^\ell{}_j)$$

Toujours en négligeant les termes en ε^4, nous obtenons finalement l'expression très simple suivante

$$K^{i\ell} = k_o \left[g^{i\ell} - \varepsilon^2 S^{\ell i} \right]$$

Nous verrons dans un instant que le tenseur de SCHWYDLER est symétrique, de sorte qu'il en est de même des perméabilités macroscopiques, et que l'on peut écrire :

$$\boxed{K^{ij} = k_o \; g^{ij} - \varepsilon^2 \; S^{ij}} \tag{87}$$

Propriétés du tenseur de SCHWYDLER

Le résultat fondamental écrit en (87) montre toute l'importance du tenseur de SCHWYDLER. Examinons l'expression de ce tenseur, qui figure en (83). Cette expression, qui a été obtenue par un jeu d'écritures symboliques et une application fort peu rigoureuse de la théorie des distributions, possède néanmoins une signification numérique précise, pourvu seulement que la fonction de covariance $R^{uv,\ell j}(\xi)$ soit deux fois dérivable en $\xi = 0$ (ou, ce qui est équivalent, que les fonctions aléatoires $\gamma^{ij}(x)$ soient dérivables une fois en moyenne quadratique). Soit, en effet

$$C^{uv,\ell j} = R^{uv,\ell j}(0)$$

la valeur de la fonction covariance en $\xi = 0$, c'est-à-dire la covariance des perméabilités $\gamma^{\ell j}(x)$ et $\gamma^{uv}(x)$ prises au même point d'appui x. On a, d'après (83) :

$$S^{u\ell} = -\frac{1}{4\pi k_o^2}\left[C^{uv\ell j}\int \partial_{jv}\frac{1}{r}\,d\xi + \int\left[R^{uv,\ell j}(\xi) - C^{uv\ell j}\right]\partial_{jv}\frac{1}{r}\,d\xi\right]$$

La première intégrale (prise, évidemment, au sens des distributions) a pour valeur $-\frac{4\pi}{3}\, g_{jv}\; C^{uv\ell j}$. La deuxième est définie, aussi bien au sens des distributions que comme intégrale ordinaire, pourvu seulement que $R^{uv\ell j}$ soit deux fois dérivable à l'origine. On obtient ainsi l'écriture explicite, où ne figure qu'une intégrale ordinaire :

$$S^{u\ell} = \frac{1}{3k_o^2}\, C^{uv\ell j}\, g_{jv} + \frac{1}{4\pi k_o^2}\int\left[C^{uv\ell j} - R^{uv\ell j}(\xi)\right]\partial_{jv}\frac{1}{r}\,d\xi \tag{88}$$

Il est immédiat que le tenseur de SCHWYDLER est symétrique $S^{u\ell} = S^{\ell u}$. En effet, $R^{uv\ell j} = E\left[\gamma^{uv}(x)\,\gamma^{\ell j}(x+\xi)\right]$ et sa valeur à l'origine $C^{uv\ell j}$ sont symétriques en uv et en ℓj, et aussi, globalement, sur les deux groupes d'indices ($C^{uv\ell j} = C^{\ell j\,uv}$ par exemple). D'autre part, g_{jv} et $\partial_{jv}\frac{1}{r}$ sont symétriques en j et v. On a donc, par exemple :

$$C^{uv\ell j}\; g_{jv} = C^{\ell j\,uv}\; g_{vj} = C^{\ell vuj}\; g_{jv}$$

d'où $S^{u\ell} = S^{\ell u}$.

Nous démontrerons au paragraphe suivant des propriétés plus précises, notamment le caractère défini positif de la matrice S^{ij}, qui nous permettront d'établir la proposition fondamentale énoncée au chapitre II.

La Sub-isotropie.

Le tenseur de SCHWYDLER ne dépend que des fonctions de covariances $R^{uv\ell j}(h)$ des perméabilités. Dans le cas général, toutefois il ne dépend pas seulement des covariances $R^{uv\ell j}(0) = C^{uv\ell j}$ prises au même point d'appui, mais, explicitement, des valeurs prises par les fonctions R(h) dans l'espace entier.

Nous dirons qu'il y a subisotropie lorsque le tenseur de SCHWYDLER ne dépend que des covariances $C^{uv\ell j}$ des perméabilités prises au même point d'appui, et, plus précisément, lorsque l'on a :

(89) $$S^{u\ell} = \frac{1}{3(k_o)^2} \; g_{jv} \; C^{uv\ell j}$$

c'est-à-dire lorsque l'intégrale qui figure dans (88) est égale à 0.

Un cas particulier très simple où la subisotropie est toujours réalisée est celui où les fonctions de covariance $R^{uv\ell j}(x)$ sont isotropes, c'est-à-dire ne dépendent que du rayon vecteur $r = |x|$ de l'argument x. Dans ce cas, en effet, l'équation (83) s'écrit :

$$S^{u\ell} = - \frac{1}{4\pi(k_o)^2} \int R^{uv\ell j}(\xi) \frac{g_{jv}}{3} \Delta \frac{1}{r} \, d\xi = \frac{1}{3(k_o)^2} \; g_{jv} \; R^{uv\ell j}(0)$$

Cette hypothèse de sub-isotropie n'est pas absurde physiquement. En effet, il ne faut pas oublier que nous avons posé au départ :

$$E(k^{ij}) = k_o \; g^{ij}$$

autrement dit, supposé l'isotropie des valeurs moyennes des perméabilités ponctuelles. On peut même s'attendre, en pareil cas, à observer une isotropie totale, caractérisée par des tenseurs $R^{uv\ell j}(r)$ de composantes invariantes par rotation des axes de coordonnées. On vérifie qu'en pareil cas le tenseur de SCHWYDLER est lui-même isotrope, c'est-à-dire de la forme

$$S^{ij} = S \; g^{ij}$$

où S est un scalaire constant. Les perméabilités macroscopiques sont alors elles-mêmes isotropes et on a, d'après (87)

(90) $$K^{ij} = \left[1 - \varepsilon^2 S\right] g^{ij}$$

Sous la seule hypothèse de sub-isotropie, par contre, le tenseur de SCHWYDELR n'est pas nécessairement isotrope, et (90) ne s'applique pas.

Cependant, et bien qu'elle ne constitue pas une hypothèse absurde, <u>la sub-isotropie ne sera sans doute pas réalisée en général</u>. En effet, on doit s'attendre à ce qu'une composante k^{11} relative à la direction des x^1 évolue, dans l'espace, de manière différente le long de cette direction des x^1 et le long d'une direction perpendiculaire. Sa fonction de covariance $R^{11\;11}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ présentera donc tout au plus, en général, une symétrie de révolution autour de l'axe des ε_1, mais non une symétrie sphérique.

Lorsque la sub-isotropie est réalisée, la perméabilité macroscopique ne dépend que des covariances prises au même point d'appui, et on a :

(90) $$K^{ij} = k_o \left[g^{ij} - \frac{\varepsilon^2}{3(k_o)^2} \, g_{\ell b} \, C^{i\ell jb} \right]$$

Au paragraphe III, b, nous avons rencontré un autre cas où les perméabilités K^{ij} ne dépendaient que des covariances relatives au même point d'appui : le cas où les perméabilités intrinsèques sont constantes. Il sera intéressant d'examiner dans quelle mesure ce cas se relie à la sub-isotropie, et, plus généralement, de comparer les résultats de la méthode de SCHWYDLER avec ceux de la décomposition canonique. Avant d'aborder ce point, montrons que la méthode de SCHWYDLER permet d'établir la proposition fondamentale II, f sous des conditions plus générales que nous ne l'avons fait au chapitre II.

c/ <u>Démonstration de la proposition fondamentale à l'approximation d'ordre 2.</u>

Au chapitre II, nous avons énoncé la proposition fondamentale :

<u>Si k^{ij} et h_{ij} sont une perméabilité stationnaire et son inverse, K^{ij} et H_{ij} les grandeurs macroscopiques correspondantes, les matrices $E(k^{ij}) - K^{ij}$ et $H(h_{ij}) - H_{ij}$ sont toutes deux définies positives.</u>

Nous allons maintenant établir cette proposition au deuxième ordre en ε, en nous affranchissant de l'hypothèse restrictive faite au chapitre II (indépendance des perméabilités intrinsèques et du tenseur gradient B^{ij}). Nous donnerons au chapitre suivant une démonstration absolument générale.

Nous établirons d'abord le lemme suivant :

<u>Lemme</u> <u>Les matrices S^{ij} et $\left[\frac{1}{(k_o)^2}\ g_{\ell s}\ C^{i\ell sj} - S^{ij}\right]$ sont définies positives. Autrement dit, quelles que soient les constantes α_i, on a la double inégalité</u>

(91) $$\boxed{0 \leqslant \alpha_i\ \alpha_j\ \ S^{ij} \leqslant \alpha_i\ \alpha_j\ g_{\ell s}\ \frac{C^{i\ell sj}}{(k_o)^2}}$$

$C^{i\ell sj}$ est le tenseur des covariances prises au même point d'appui, et S^{ij} le tenseur de SCHWYDLER.

Partons de la relation (83), qui nous donne :

$$\alpha_i\ \alpha_j\ \ S^{ij} = -\frac{1}{4\pi(k_o)^2}\int \alpha_i\ \alpha_j\ \ R^{i\ell sj}(\xi)\ \partial_{\ell s}\frac{1}{r}\, d\xi$$

et appliquons la formule de Plancherel-Parseval, Soit $P^{i\ell sj}(u)$ la transformée de Fourier de $R^{i\ell sj}(\xi)$, et $-4\pi\,\frac{u_\ell\, u_s}{\rho^2}$, celle de $\partial_{\ell s}\frac{1}{r}$ (on a posé $\rho^2 = g^{\ell s} u_\ell\ \ u_s$). On a donc :

(92) $$\alpha_i\ \alpha_j\ S^{ij} = \frac{1}{(k_o)^2}\int \alpha_i\ \alpha_j\ P^{i\ell sj}\ (u)\ \frac{u_\ell\, u_s}{\rho^2}\ du$$

Or, les β_ℓ étant des constantes quelconques, $\alpha_i\ \alpha_j\ R^{i\ell sj}\beta_\ell\,\beta_s$ est la fonction de covariance de $\alpha_i\ \gamma^{i\ell}\beta_\ell$. Elle est donc de type positif, et sa transformée de Fourier, d'après le théorème de Bochner, est une fonction positive. Donc :

(93) $$\alpha_i\ \alpha_j\ \ P^{i\ell sj}\beta_\ell\,\beta_s \geqslant 0$$

Avec : $\beta_\ell = \frac{1}{\rho}\, u_\ell$, on voit que l'argument de l'intégrale qui figure en (92) est positif, et cela suffit pour établir la première inégalité (91) : la matrice S^{ij} est définie positive.

On sait que, dans l'inégalité (93), il est permis de substituer à $\beta_\ell\ \beta_s$

une matrice définie positive quelconque. Or la matrice :

$$g_{\ell s}(g^{ij}\ u_i\ u_j) - u_\ell\ u_s\ = g_{\ell s}\,\rho^2 - u_\ell\ u_s$$

est définie positive. En effet, pour un vecteur v^i quelconque, on a :

$$v^\ell\ v^s g_{\ell s}\ (g^{ij}\ u_i\ u_j) - v^\ell v^s u_\ell\ u_s\ = v^\ell v_\ell\ u^i\ u_i - v^\ell\ u_\ell\, v^i\ u_i \geqslant 0$$

d'après l'inégalité de SCHWARTZ. Substituant cette matrice à $\beta_\ell\,\beta_s$ dans (93), et divisant par ρ^2, on obtient :

$$\alpha_i\ \alpha_j\ P^{i\ell sj}\ \frac{u_\ell\ u_s}{\rho^2} \leqslant \alpha_i\ \alpha_j\ \ P^{i\ell sj}\ g_{\ell s}$$

Intégrons en u. Au premier membre, d'après (92), apparaît $k_0^2\ \alpha_i\ \alpha_j\ S^{ij}$. Au deuxième membre, on obtient :

$$\alpha_i\ \alpha_j\ \ g_{\ell s}\int P^{i\ell sj}(u)du = \alpha_i\ \alpha_j\ g_{\ell s}\ R^{i\ell sj}(0)$$

Par suite, on a bien

$$\alpha_i\ \alpha_j\ \ S^{ij} \leqslant \alpha_i\ \alpha_j\ g_{\ell s}\ \frac{R^{i\ell sj}(0)}{(k_0)^2} = \alpha_i\ \alpha_j\ g_{\ell s}\frac{C^{i\ell sj}}{(k_0)^2}$$

Les inégalités (91) encadrent de façon assez stricte le tenseur de SCHWYDLER.

Elles vont nous permettre de démontrer (au 2ème ordre en ε) notre proposition fondamentale.

<u>Démonstration</u> La relation (87), déjà établie, nous permet d'écrire :

$$E(k^{ij}) - K^{ij}\ \equiv\ k_0\ g^{ij} - K^{ij} = \varepsilon^2\ S^{ij}$$

Comme le tenseur de SCHWYDLER est défini positif, il en est de même de $E(k^{ij}) - K^{ij}$. Le fait d'avoir posé $E(k^{ij}) = k_0\ g^{ij}$ ne nuit pas à la généralité du résultat, puisque, comme nous l'avons fait remarqué, on peut toujours se ramener à ce cas par un choix judicieux des axes de coordonnées et de leurs unités de longueurs.

Ce premier résultat montre que <u>les fluctuations des perméabilités locales ont toujours pour effet de détériorer la perméabilité macroscopique</u>. <u>Cette détérioration, cependant, ne peut pas dépasser une certaine limite marquée par le mode de</u>

<u>pondération harmonique</u>. C'est ce qu' exprime la deuxième partie de la proposition fondamentale.

Pour montrer que $E(h_{ij}) - H_{ij}$ est bien de type positif, inversons, au deuxième ordre en ε, les tenseurs

$$\begin{cases} K^{ij} = k_o(g^{ij} - \varepsilon^2 S^{ij}) \\ k^{ij} = k_o\, g^{ij} + \varepsilon\, \gamma^{ij} \end{cases}$$

On obtient sans difficulté

$$\begin{cases} H_{ij} = \frac{1}{k_o}\,(g_{ij} + \varepsilon^2 S^{ij}) \\ h_{ij} = \frac{1}{k_o}\left[g_{ij} - \frac{\varepsilon}{k_o}\gamma_{ij} + (\frac{\varepsilon}{k_o})^2\; \gamma_{iu}\,\gamma^u{}_j\right] \\ E(h_{ij}) = \frac{1}{k_o}\left[g_{ij} + (\frac{\varepsilon}{k_o})^2\; C_{i\ell s j}\; g^{\ell s}\right] \end{cases}$$

D'où :

$$E(h_{ij}) - H_{ij} = \frac{\varepsilon^2}{k_o}\left[\frac{1}{(k_o)^2}\, C_{i\ell s j}\; g^{\ell s} - S_{ij}\right] \tag{94}$$

La deuxième inégalité (91) montre alors que $E(h_{ij}) - H_{ij}$ est bien définie positive.

<u>Remarque</u> Les inégalités (91) permettent <u>d'encadrer les perméabilités macroscopiques</u> dans le sens précis suivant :

$$\begin{cases} k_o\, \alpha_i\alpha_j\left[g^{ij} - (\frac{\varepsilon}{k_o})^2 g_{\ell s}\; C^{i\ell s j}\right] \leqslant \alpha_i\,\alpha_j\; K^{ij} \leqslant k_o\; g^{ij}\,\alpha_i\,\alpha_j \\ \frac{1}{k_o}\, g_{ij}\,\beta^i\beta^j \leqslant \beta^i\,\beta^j\; H_{ij} \leqslant \frac{1}{k_o}\left[g_{ij} + (\frac{\varepsilon}{k_o})^2\; C_{i\ell s j}\; g^{\ell s}\right]\beta^i\,\beta^j \end{cases} \tag{95}$$

pour toutes constantes α_i et β^j. On reconnaît dans $\alpha_i\,\alpha_j\; K^{ij}$ l'expression d'une perméabilité expérimentale de premier type (voir paragraphe II, g), correspondant à une direction de gradient imposée, et dans $\beta^i\,\beta^j\, H_{ij}$ celle d'une perméabilité du deuxième type, correspondant à une direction de flux imposée.

Dans ces inégalités, qui constituent l'expression la plus précise de notre proposition fondamentale, interviennent seulement les covariances $C^{i\ell sj}$ prises au même point d'appui.

d/ Généralisation Les résultats des paragraphes précédents ont été obtenus moyennant l'hypothèse d'une perméabilité isotrope en moyenne :

$$E(k^{ij}) = k_o g^{ij}$$

Il convient maintenant de les transposer dans le cas général où

$$E(k^{ij}) = \chi^{ij}$$

est un tenseur constant quelconque, de matrice définie positive. Soit u_m un système de vecteurs propres orthogonaux de χ^{ij}, chacun d'eux ayant comme module la racine de la valeur propre (positive) correspondante. On a :

$$\chi^{ij} = \sum_m u^i_m \; u^j_m = \delta^{\ell s} u^i_\ell \quad u^j_s$$

Effectuons le changement de coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} x^i = u^i_m \; \xi^m \\ \xi^m = v^m_i \; x^i \end{array} \right.$$

la matrice des v^m_i étant l'inverse des u^i_ℓ. En coordonnées ξ, les composantes de $E(k^{ij})$ sont les symboles de Kronecker δ^{ij}. Si k^{ij}, en coordonnées x, est de la forme

$$k^{ij} = \chi^{ij} + \varepsilon \; \gamma^{ij}$$

il aura, en coordonnées ξ, les composantes

$$\delta^{ij} + \varepsilon \, v^i_\ell \;\; v^j_s \;\; \gamma^{\ell s} = \delta^{ij} + \varepsilon \; \theta^{ij}$$

qui sont de la forme (70), et par suite les résultats du chapitre précédent sont applicables en axes ξ (en mettant partout δ^{ij} au lieu de g^{ij}).

Soit

$$R^{ij\ell s}(h) = E\left[\gamma^{ij}(x) \; \gamma^{\ell s}(x+h)\right]$$

la matrice des covariances (en coordonnées x). En coordonnées ξ, les

$$\theta^{ij}(\xi^t) = v^i_a \; v^j_b \; \gamma^{ab}(u^t_m \xi^m)$$

admettent la matrice de covariance :

$$P^{ij\ell s}(\eta^m) = v^i_a \; v^j_b \; v^\ell_c \; v^s_d \; R^{abcd}(u^t_m \; \eta^m)$$

Dans le système des coordonnées ξ, le rôle du tenseur de SCHWYDLER est tenu par le tenseur de composantes

(96) $$\textcircled{H}^{ij} = -\frac{1}{4\pi}\int P^{iuvj}(\eta)\; \partial_{uv}\; \frac{1}{\rho}(\eta)\; d\eta$$

où on a posé

$$\rho^2 = \delta_{ij}\; \eta^i \; \eta^j$$

Toujours en coordonnées ξ, la perméabilité macroscopique est $\delta^{ij} - \varepsilon^2 \textcircled{H}^{ij}$ et on a les inégalités

(97) $$0 \leq \textcircled{H}^{ij}\; \alpha_i\, \alpha_j \leq \alpha_i\, \alpha_j \;\; \delta_{\ell s} \;\; P^{i\ell sj}(0)$$

Passons maintenant en coordonnées x. Le tenseur $\delta_{\ell s}$ prend les composantes covariantes

$$\omega_{\ell s} = v^i_\ell \;\; v^j_s \;\; \delta_{ij}$$

et le tenseur $\delta^{\ell s}$ les composantes contravariantes :

$$\chi^{\ell s} = u^\ell_i \;\; u^s_j \;\; \delta^{ij}$$

Ainsi, $\omega_{\ell s}$ est l'inverse de $\chi^{ij} = E(k^{ij})$, soit, symboliquement

(98) $$\omega = \left[E(k)\right]^{-1}$$

Dans (96), le scalaire ρ^2 s'exprime à l'aide des x^i par :

$$\rho^2 = \delta_{ij}\; \eta^i \; \eta^j = \omega_{ij} \;\; x^i \; x^j$$

L'élément de volume $d\eta$ est :

$$d\eta = \text{Det}\ v\ dx = \frac{dx}{\sqrt{\text{Det}\ \chi}}$$

Finalement (96) et (97) se transposent comme suit :

(99)
$$\begin{cases} T^{ij} = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int R^{iuvj}(x)\ \partial_{uv}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_{ij}\ x^i x^j}}\right)\frac{dx}{\sqrt{\text{Det}\ \chi}} \\ 0 \leq \alpha_i\ \alpha_j\ T^{ij} \leq \alpha_i\ \alpha_j\ \omega_{ls}\ R^{ilsj}(0) \end{cases}$$

et la perméabilité macroscopique est donnée par :

(100)
$$K^{ij} = \chi^{ij} - \varepsilon^2\ T^{ij} = E(k^{ij}) - \varepsilon^2\ T^{ij}$$

Les inégalités (99) expriment que les matrices :

(101)
$$\begin{cases} E(k^{ij}) - K^{ij} = \varepsilon^2\ T^{ij} \\ E(h_{ij}) - H_{ij} = \varepsilon^2\ \omega_{il}\ \omega_{js}\left[\omega_{ab}\ C^{labs} - T^{ls}\right] \end{cases}$$

sont toutes deux définies positives, ce qui constitue notre proposition fondamentale.

Les inégalités (95) se transposent facilement elles aussi, et donnent l'expression analytique précise de la proposition fondamentale sous la forme :

(102)
$$\alpha_i\ \alpha_j\left[\chi^{ij} - \varepsilon^2\ \omega_{ls}\ C^{ilsj}\right] \leq \alpha_i\ \alpha_j\ K^{ij} \leq \chi^{ij}\ \alpha_i\ \alpha_j$$
$$\omega_{ij}\ \beta^i\ \beta^j \leq H_{ij}\ \beta^i\ \beta^j \leq \left[\omega_{ij} + \varepsilon^2\ C^{ulsv}\ \omega_{ui}\ \omega_{vi}\ \omega_{ls}\right]\beta^i\beta^j$$

Sous forme matricielle, nous écrirons (en notant $A \leq B$ lorsque la différence $B - A$ de deux matrices est une matrice définie positive) :

(103
$$\begin{cases} \left[E(k)\right]^{-1} \leq H \leq E(h) \\ \left[E(h)\right]^{-1} \leq K \leq E(k) \end{cases}$$

C'est en ce sens précis que l'on peut dire que <u>la composition des perméabilités</u> se fait toujours selon un mode intermédiaire entre les pondérations arithmétiques et harmonique

e) Relation entre le tenseur de SCHWYDLER et la décomposition canonique.

La comparaison des résultats obtenus par la méthode de SCHWYDLER avec la structure des perméabilités, telle que l'exprime la décomposition canonique étudiée au chapitre II, va mettre en évidence une interprétation du tenseur de Schwydler liée à la géométrie intrinsèque des isobares et des lignes de courant. Pour simplifier les écritures, nous nous limiterons au cas où les perméabilités sont isotropes en moyenne :

$$E(k^{ij}) = k_o \; g^{ij}$$

Les perméabilités s'écrivent de deux manières différentes :

$$k^{ij} = k_o \; g^{ij} + \gamma^{ij} = - q^{i\ell} \; A^j_\ell \tag{104}$$

A^j_ℓ est l'inverse du tenseur gradient $B^\ell_j = \partial_j \, p^\ell$ d'espérance unité $E(B^\ell_j) = \delta^\ell_j$ et $q^{i\ell}$ est un tenseur conservatif dont les vecteurs colonnes sont les flux des solutions privilégiées, indexées par ℓ, de gradients respectifs $\partial_j \, p^\ell$.

Expression du tenseur gradient B^ℓ_j

Au paragraphe a, nous avons obtenu le gradient des solutions privilégiées, paramètrées par des constantes ϖ_j, sous la forme :

$$\tag{105} \left\{ \begin{aligned} \partial_j \, p &= \varpi_s \left[\delta^s_j + \varepsilon \, D^s_j + \varepsilon^2 \; F^s_j \right] \\ D^s_j &= \frac{1}{4\pi \, k_o} \left(\partial_{j\ell} \frac{1}{r} * \gamma^{\ell s} \right) \\ F^s_j &= \frac{1}{(4\pi \, k_o)^2} \left(\partial_{j\ell} \frac{1}{r} \right) * \left[\gamma^{\ell t} \left(\partial_{tv} \frac{1}{r} * \gamma^{vs} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

avec

$$\tag{106} \left\{ \begin{aligned} E(D^s_j) &= 0 \\ E(F^s_j) &= \frac{1}{3} \; S^s_j \end{aligned} \right.$$

Le tenseur $\left[\delta^{s}_{j} + \varepsilon D^{s}_{j} + \varepsilon^2 F^{s}_{j}\right]$ est un tenseur gradient, mais son espérance $\delta^{s}_{j} + \frac{1}{3}\varepsilon^2 S^{s}_{j}$ n'est pas le tenseur unité. On doit la multiplier par l'inverse de son espérance, qui est $\delta^{i}_{s} - \frac{\varepsilon^2}{3} S^{i}_{s}$ au deuxième ordre en ε. D'où

$$B^{i}_{j} = \left[\delta^{s}_{j} + \varepsilon D^{s}_{j} + \varepsilon^2 F^{s}_{j}\right]\left[\delta^{i}_{s} - \frac{\varepsilon^2}{3} S^{i}_{s}\right]$$

et, négligeant les termes d'ordre supérieur à ε^2 :

(107) $$B^{i}_{j} = \delta^{i}_{j} + \varepsilon D^{i}_{j} + \varepsilon^2 \left[F^{i}_{j} - \frac{1}{3} S^{i}_{j}\right]$$

On notera que D^{i}_{j} ne diffère pas du terme que nous notions $\partial_j \lambda^i$ au chapitre II (avec $p^i = x^i + \varepsilon \lambda^i$, $\varepsilon\lambda^i$ est la flèche de l'isobare de la solution privilégiée d'indice i relativement à son plan moyen).

<u>Les fluctuations des isobares</u> sont représentées, dans leur totalité, par le tenseur $E(B^{i}_{j}\ B^{\ell}_{s})$. Utilisant le développement (107) et les relations (106), on obtient sans difficulté :

$$E(B^{i}_{j}\ B^{\ell}_{s}) = \delta^{i}_{j}\ \delta^{\ell}_{s} + \varepsilon^2\ E(D^{i}_{j}\ D^{\ell}_{s})$$

Le tenseur $E(D^{i}_{j}\ D^{\ell}_{s})$ ne diffère pas du tenseur $E(\partial_j \lambda^i\ \partial_s \lambda^\ell)$ que nous avons noté $T^{i\ell}_{js}$ au chapitre II. Nous poserons encore :

(108) $$\begin{cases} E(B^{i}_{j}\ B^{\ell}_{s}) = \delta^{i}_{j}\ \delta^{\ell}_{s} + \varepsilon^2\ T^{i\ell}_{js} \\ T^{i\ell}_{js} = E(D^{i}_{j}\ D^{\ell}_{s}) \end{cases}$$

<u>Calcul du tenseur $T^{i\ell}_{js}$.</u> D'après l'expression (105), du tenseur D^{i}_{j}, nous avons :

$$D^{i}_{j}\ D^{\ell}_{s} = \frac{1}{(4\pi k_o)^2}\left(\partial_{jt} \frac{1}{r} * \gamma^{ti}\right)\left(\partial_{sv} \frac{1}{r} * \gamma^{v\ell}\right)$$
$$= \frac{1}{(4\pi k_o)^2}\int \partial_{jt}\frac{1}{r}(\xi)\,\gamma^{ti}(x-\xi)\,\partial_{sv}\frac{1}{r}(\eta)\,\gamma^{v\ell}(x-\eta)\,d\xi\, d\eta$$

Prenons l'espérance mathématique. Il vient :

$$T^{i\ell}_{js} = \frac{1}{(4\pi\, k_o)^2} \iint \partial_{jt} \frac{1}{r}(\xi)\, \partial_{sv} \frac{1}{r}(\eta)\, R^{\ell vti}(\eta - \xi)\, d\xi\, d\eta$$

Transformons cette expression à l'aide de la formule de Plancherel-Parseval, comme nous l'avons fait au paragraphe C pour calculer le tenseur de SCHWYDLER S^{ij}. Soit $P^{\ell vti}(u)$ la transformée de Fourier de $R^{\ell vti}(x)$, et $-\frac{4\pi\, u_j\, u_t}{\rho^2}$ et $-4\pi \frac{u_s\, u_v}{\rho^2}$ respectivement celles de $\partial_{jt} \frac{1}{r}$ et $\partial_{sv} \frac{1}{r}$, avec $\rho^2 = g^{ij}\, u_i\, u_j$. Il vient :

$$(109) \qquad T^{i\ell}_{js} = \frac{1}{(k_o)^2} \int P^{\ell vti}(u)\, \frac{u_j\, u_t\, u_s\, u_v}{\rho^4}\, du$$

Cette expression rappelle celle du tenseur de SCHWYDLER écrite en (92). Calculons $T^{i\ell}_{js}\, g^{js}$. Dans l'argument de l'intégrale (109) apparaît la simplification :

$$\frac{u_j\, u_t\, u_s\, u_v\, g^{js}}{\rho^4} = \frac{u_t\, u_v}{\rho^2}$$

par définition même de $\rho^2 = g^{js}\, u_s\, u_j$. Comparant à (92), nous obtenons la relation remarquable suivante, qui donne le tenseur de SCHWYDLER en fonction du tenseur T :

$$(110) \qquad \boxed{S^{i\ell} = g^{js}\, T^{i\ell}_{js}}$$

Nous reportant à (108), nous obtenons l'équation :

$$(111) \qquad E\left[g^{js}\, \partial_j\, P^i\, \partial_s\, P^\ell\right] = E(g^{js}\, B^i_j\, B^\ell_s) = g^{i\ell} + \varepsilon^2\, S^{i\ell}$$

dont l'interprétation géométrique est claire : le premier membre représente, en valeur probable le produit scalaire des gradients des solutions privilégiées d'indices i et ℓ, ou, ce qui est équivalent, la composante contravariante du tenseur métrique dans les coordonnées privilégiées P^i. Ainsi, <u>$\varepsilon^2\, S^{ij}$</u> <u>s'identifie à la valeur probable du</u>

tenseur de la déformation faisant passer des coordonnées rectilignes x^i aux coordonnées isobares p^i. Le tenseur de SCHWYDLER représente de manière intrinsèque (c'est-à-dire à un déplacement près) la géométrie moyenne des plans tangents aux surfaces isobares privilégiées.

La relation remarquable (110) conduit encore à la proposition suivante : La détérioration des perméabilités est liée uniquement aux fluctuations des isobares. En effet, compte tenu de (110), la relation fondamentale (87) s'écrit :

$$K^{ij} = k_o \left(g^{ij} - \varepsilon^2 \; g^{\ell s} \; T^{ij}_{\ell s}\right)$$

ou encore :

$$\boxed{E(k^{ij}) - K^{ij} = \varepsilon^2 \; K^{\ell s} \; T^{ij}_{\ell s}} \tag{112}$$

On reconnaît la relation (45), que nous n'avions pu établir, au chapitre II, qu'en supposant l'indépendance des perméabilités intrinsèques et du gradient $B^i_{\ j}$.

Remarque sur le cas sub-isotrope

Dans le cas général, il n'est pas possible de calculer effectivement le tenseur $T^{ij}_{\ell s}$ sans connaître explicitement les fonctions $R^{iutj}(x)$ exprimant les corrélations différées des perméabilités. Dans le cas sub-isotrope, c'est-à-dire lorsque ces fonctions ne dépendent que du rayon vecteur $r = |x|$, il se produit une simplification remarquable, déjà mentionnée dans le cas du tenseur de SCHWYDLER : le tenseur $T^{ij}_{\ell s}$ ne dépend alors que des covariances $R^{iutj}(0) = C^{iutj}$ prises au même point d'appui. Les calculs sont donnés en Annexe II. On obtient :

$$\tag{113} \left\{ \begin{aligned} T^{ij}_{\ell s} &= \frac{1}{15(k_o)^2} \; C^{ivtj} \left[g_{vt} \, g_{\ell s} + g_{v\ell} \; g_{ts} + g_{vs} \; g_{\ell t} \right] \\ S^{ij} &= \frac{1}{3(k_o)^2} \; g_{vt} \; C^{ivtj} = g^{\ell s} \; T^{ij}_{\ell s} \end{aligned} \right.$$

En dehors du cas sub-isotrope, il n'est pas possible d'exprimer ces tenseurs à l'aide des covariances prises au même point d'appui.

Expression du tenseur Flux $q^{i\ell}$

Pour obtenir le flux des solutions privilégiées, il suffit d'appliquer la loi de Darcy :

$$q^{i\ell} = - k^{ij} \; B^{\ell}_{j}$$

A l'aide de (103) et (107) on obtient sans peine le développement :

$$(114) \qquad - q^{i\ell} = k_0 \; g^{i\ell} + \varepsilon(k_0 \; D^{\ell}_{j} \, g^{ij} + \gamma^{i\ell}) + \varepsilon^2 \left[k_0 \; g^{ij}(F^{\ell}_{j} - \frac{1}{3} S^{\ell}_{j}) + \gamma^{ij} \, D^{\ell}_{j} \right]$$

En espérance mathématique, on doit retrouver $K^{i\ell}$:

$$- E(q^{i\ell}) = K^{i\ell} = k_0 \; g^{i\ell} + \varepsilon^2 \; E(\gamma^{ij} \; D^{\ell}_{j})$$

Effectivement, la relation (82) permet de vérifier que l'on a bien :

$$(115) \qquad E(\gamma^{ij} \; D^{\ell}_{j}) = - k_0 \; S^{i\ell}$$

Les fluctuations des vecteurs courants vont être représentées par le tenseur des covariances

$$\mathrm{Cov}\,(q^{i\ell} \, q^{js}) = E(q^{i\ell} \, q^{js}) - K^{i\ell} \, K^{js}$$

A partir du développement (111), on trouve facilement :

$$E(q^{i\ell} \, q^{js}) = k_0^2 \; g^{i\ell} \; g^{js} + \varepsilon^2 \Big[k_0^2 \; T^{\ell s}_{uv} \; g^{iu} \; g^{jv} + k_0 \; E(\gamma^{js} \, D^{\ell}_{u} \; g^{iu}) + k_0 \; E(\gamma^{i\ell} \, D^{s}_{v} \; g^{jv}) + E(\gamma^{i\ell} \, \gamma^{sj}) \Big]$$

On voit apparaître, outre les tenseurs déjà connus $T^{\ell s}_{uv}$ et $E(\gamma^{i\ell} \, \gamma^{sj}) = C^{i\ell s j}$, un nouvel être tensoriel que nous noterons $S^{ij\ell}{}_{s}$:

$$S^{ij\ell}{}_{s} = \frac{1}{k_0} \; E(\gamma^{ij} \; D^{\ell}_{s})$$

Reportons-nous à (105), nous obtenons :

$$S^{ij\ell}{}_{s} = \frac{1}{4\pi \, k_0} \; E\left[\gamma^{ij} (\partial_{s v} \; \frac{1}{r} * \gamma^{v\ell}) \right]$$

ou, explicitement :

(116) $$S^{ij\ell}{}_{s} = \frac{1}{4\pi k_o^2} \int \partial_{sv} \frac{1}{r}(\xi) \; R^{v\ell ij}(\xi)\, d\xi$$

D'après la définition (83) du tenseur de SCHWYDLER, ou encore d'après la relation (115), on a :

(117) $$S^{is\ell}{}_{s} = - S^{i\ell}$$

Dans le cas général, on ne peut pas préciser davantage la forme de ce nouveau tenseur. Dans <u>le cas subisotrope</u>, cependant, on obtient facilement, en appliquant à (116) la formule de Plancherel-Parseval :

(118) $$S^{ij\ell}{}_{s} = -\frac{1}{3} g_{vs} \frac{C^{v\ell ij}}{(k_o)^2}$$

Ainsi, dans le cas subisotrope, les deux tenseurs fondamentaux $T^{ij}_{\ell s}$ et $S^{is\ell}{}_{j}$, qui expriment la fluctuation des isobares et des vecteurs courant , ne dépendent que des covariances prises au même point d'appui. Mais il n'en est pas ainsi dans le cas général.

Avec ce nouveau tenseur $S^{ij\ell}{}_{s}$, nous mettons $E(q^{i\ell}\, q^{js})$ sous la forme :

(119) $$\left\{ E(q^{i\ell}\, q^{js}) = (k_o)^2\, g^{i\ell} g^{js} + \varepsilon^2 k_o^2 \left[T^{\ell s}_{uv}\, g^{iu}\, g^{jv} + \frac{C^{i\ell js}}{k_o^2} + S^{js\ell i} + S^{i\ell sj} \right] \right.$$

<u>Espérance du produit scalaire $E(g_{ij}\; q^{i\ell}\; q^{js})$ des flux privilégiés.</u>

Effectuons dans (119) la multiplication contractée par g_{ij}. Compte tenu de (110) et de (118), nous obtenons :

(120) $$E(g_{ij}\; q^{i\ell}\, q^{js}) = k_o^2\; g^{\ell s} + \varepsilon^2 \left[g_{ij}\; C^{i\ell sj} - k_o^2\; S^{\ell s} \right]$$

Ainsi, <u>la géométrie intrinsèque des lignes de courant ne dépend que du tenseur $\left[g_{ij}\; C^{\ell ijs} - k_o^2\; S^{\ell s} \right]$ dont nous avons montré le caractère défini positif</u> (formule (91). Ce tenseur joue vis-à-vis des lignes de courant le même rôle que le tenseur de SCHWYDLER vis-à-vis des isobares : il exprime leur déformation relativement à trois vecteurs orthonormés.

La relation (94), de son coté, peut s'écrire :

(121) $$E(h^{ij}) - H^{ij} = \frac{\varepsilon^2}{(k_o)^3}\left[g_{\ell s}\ C^{i\ell sj} - (k_o)^2\ S^{ij}\right]$$

Cette relation, qui fait pendant à (112), exprime que <u>la détérioration des transmissivités ne dépend que des fluctuations des vecteurs courant</u>.

<u>Relation des isobares et des lignes de courant.</u>

Pour exprimer, de manière intrinsèque, les relations entre isobares et lignes de courant, on doit effectuer le produit scalaire $q^{i\ell}\partial_i\ p^s$ du flux et du gradient des solutions privilégiées de numéros ℓ et s respectivement. Le tenseur correspondant se développe sans difficulté :

$$- q^{i\ell}\partial_i\ p^s = k_o\ g^{\ell s} + \varepsilon(k_o\ D^{\ell s} + k_o\ D^{s\ell} + \gamma^{\ell s})$$
$$+ \varepsilon^2\left[k_o(F^{\ell s} + F^{s\ell} - \frac{2}{3} S^{\ell s}) + \gamma^{su}\ D_u^{\ell} + \gamma^{\ell u}\ D_u^{s} + k_o\ g^{uv}\ D_u^{\ell}\ D_v^{s}\right]$$

Prenons l'espérance mathématique, en tenant compte de (106), (110) et(115). On obtient :

(122) $$- E(q^{i\ell}\partial_i\ p^s) = k_o(g^{\ell s} - \varepsilon^2\ S^{\ell s})$$

Soit, compte tenu de (87)

(123) $$- E(q^{i\ell}\ \partial_i\ p^s) = K^{\ell s}$$

La relation (122) montre que <u>la géométrie relative des isobares et des lignes de courant ne dépend</u>, <u>elle aussi</u>, <u>que du tenseur de SCHWYDLER</u>. Ce tenseur représente donc, à lui tout seul, sous forme intrinsèque et en valeur probable, la géométrie globale de l'ensemble des isobares et des lignes de courant.

La relation (123) est encore plus remarquable. Elle montre que <u>les perméabilités macroscopiques ne dépendent que des produits scalaires des flux et des gradients des solutions privilégiées.</u>

Par ailleurs, on a

$$\begin{cases} -E(q^{i\ell}) = K^{i\ell} \\ E(\partial_i \; p^{s}) = \delta^{s}_{i} \end{cases}$$

Par suite, (123) entraîne aussi :

$$E(q^{i\ell} \partial_i \; p^{s}) = E(q^{i\ell}) \; E(\partial_i \; p^{s}) \tag{124}$$

<u>L'espérance du produit scalaire d'un flux et d'un gradient privilégiés est égal au produit scalaire des espérances correspondantes</u>. Autrement dit, vis-à-vis du produit scalaire, les flux et les gradients privilégiés se comportent comme s'ils étaient indépendants. Mais la relation (124), qui comporte une sommation sur l'indice i, n'implique pas du tout que les composantes de ces vecteurs soient sans corrélation.

<u>Comparaison avec les perméabilités intrinsèques</u>. Supposons k^{ij} décomposé canoniquement sous la forme :

$$k^{ij} = \frac{A^{i}_{s} \; \phi^{\ell s} A^{j}_{\ell}}{\text{Det } A}$$

où les $\phi^{\ell s}$ sont les perméabilités intrinsèques.

Les solutions privilégiées sont :

$$\begin{cases} q^{i\ell} = - \dfrac{A^{i}_{s} \; \phi^{\ell s}}{\text{Det } A} \\ \partial_j \; p^{\ell} = B^{\ell}_{j} \end{cases}$$

Ainsi, le produit scalaire $q^{i\ell} \partial_i \; p^{s}$ se relie aux perméabilités intrinsèques par la formule :

$$q^{i\ell} \partial_i \; p^{s} = - \frac{\phi^{\ell s}}{\text{Det } A} = - \Phi^{\ell s} \text{ Det } B \tag{125}$$

Prenons l'espérance, en tenant compte de (123). Il vient :

$$K^{\ell s} = E\left[\Phi^{\ell s} \;\; \text{Det } B \right] \tag{126}$$

Cette relation a été établie au chapitre II dans le cas particulier où les perméabilités intrinsèques sont indépendantes des B^i_j. Dans ce cas, comme E(Det B)= 1, elle se réduirait à $K^{ls} = E(\phi^{ls})$. Dans le cas général, elle entraîne l'égalité

$$E\left(\frac{A^i_s \phi^{ls}}{\text{Det } A}\right) = E\left(\frac{\phi^{is}}{\text{Det } A}\right)$$

<u>f/ Etude du cas isotrope.</u>

Afin de faciliter l'interprétation des résultats établis plus haut, nous allons faire une hypothèse d'isotropie sur les perméabilités, grâce à laquelle de grandes simplifications apparaîtront. Cette hypothèse d'isotropie s'énonce, de manière précise, sous forme de trois propositions :

1/ Les perméabilités sont isotropes en moyenne $E(k^{ij}) = k_o\, g^{ij}$

2/ Les covariances $R^{ijls}(x)$ ne dépendent que du rayon vecteur $r = |x|$.

3/ Les covariances $C^{ijls} = R^{ijls}(0)$ prises au même point d'appui sont invariantes par rotation des axes de coordonnées.

Ces trois hypothèses sont cohérentes, et physiquement intéressantes. La première a été utilisée dans tout ce chapitre, sauf au paragraphe d où on a montré comment il était possible de s'en affranchir. La deuxième est l'hypothèse de subisotropie. <u>Elle entraîne que tous les éléments du deuxième ordre (fluctuation des isobares et des vecteurs courant, détérioration des perméabilités et des transmissivités) vont pouvoir s'exprimer en fonction des seules covariances C^{ijls} prises au même point d'appui.</u>

La troisième hypothèse entraîne (voir annexe E) que ces covariances ne dépendent <u>que de deux paramètres</u> λ et μ (obligatoirement positifs). Elles sont de la forme

$$C^{ijls} = \left[\lambda\, g^{ij}\, g^{ls} + \mu(g^{il}\, g^{js} + g^{is}\, g^{jl})\right](k_o)^2 \tag{127}$$

Le contenu physique de nos hypothèses est ainsi résumé par trois grandeurs seulement, λ, μ et k_o, λ et μ étant des paramètres sans dimensions.

Les expressions des tenseurs T^{ij}_{ls} et de S^{ij} sont calculées dans l'Annexe E. Celle du tenseur S^{ijl}_{s} a été écrite en (118) dans le cas de l'hypothèse subisotrope. Ecrivons ces expressions:

$$(128)\quad \begin{cases} S^{ij} = \frac{1}{3}(\lambda + 4\mu)\, g^{ij} \\ T^{ij}_{\ell s} = \frac{\lambda+\mu}{15}\left(\delta^i_\ell\ \delta^j_s + \delta^i_s\ \delta^j_\ell\right) + \frac{\lambda + 6\mu}{15}\ g^{ij}\, g_{\ell s} \\ S^{ij\ell}{}_s = -\frac{1}{3}\left[\lambda\, g^{ij}\, \delta^\ell_s + \mu\left(g^{\ell j}\, \delta^i_s + g^{\ell i}\ \delta^j_s\right)\right] = -\frac{1}{3(k_o)^2}\ C^{ij\ell}{}_s \end{cases}$$

La vérification des égalités suivantes est immédiate :

$$S^{ij} = g^{\ell s}\, T^{ij}_{\ell s} = -S^{iuj}{}_u = \frac{1}{3(k_o)^2}\, g_{\ell s}\, C^{i\ell sj}$$

On notera que le tenseur de SCHWYDLER est isotrope.

Perméabilités et resistivités macroscopiques, également isotropes, ont pour expression :

$$(129)\quad \begin{cases} K^{ij} = k_o\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{3}(\lambda + 4\mu)\right] g^{ij} \\ H_{ij} = \frac{1}{k_o}\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{3}(\lambda + 4\mu)\right]\ g_{ij} \end{cases}$$

Comparant aux espérances des grandeurs locales correspondantes :

$$\begin{cases} E(k^{ij}) = k_o\ g^{ij} \\ E(h_{ij}) = \frac{1}{k_o}\left[1 + \varepsilon^2(\lambda + 4\mu)\right]\ g_{ij} \end{cases}$$

nous voyons que la détérioration due aux fluctuations locales se mesure de manière précise par :

$$(130)\quad \begin{cases} E(k^{ij}) - K^{ij} = \frac{k_o}{3}\,\varepsilon^2(\lambda + 4\mu)\ g^{ij} \\ E(h_{ij}) - H_{ij} = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon^2}{k_o}\ (\lambda + 4\mu)\ g_{ij} \end{cases}$$

La composition est intermédiaire entre les modes arithmétique et harmonique, mais elle est plus proche du mode arithmétique. Elle se trouve non à mi-chemin, mais

<u>au tiers</u> du chemin joignant ces deux poles.

<u>Les fluctuations des isobares</u> sont données par le tenseur $T^{ij}_{\ell s}$ écrits ci-dessus En particulier, la géométrie intrinsèque des isobares est caractérisée par le tenseur métrique:

(131) $$E(g^{ij}\,\partial_i\, p^{\ell}\,\partial_j\, p^{s}) = \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{3}(\lambda + 4\mu)\right] g^{i\ell}$$

<u>Les fluctuations des vecteurs courant</u> sont représentées par le tenseur :

$$E(q^{i\ell}\, q^{js}) = k_o^2\; g^{i\ell} g^{js} + \varepsilon^2 (k_o)^2 \left[\frac{\lambda+\mu}{15}(g^{i\ell} g^{js} + g^{is} g^{j\ell} + g^{ij} g^{\ell s}) + \frac{\mu}{3}(2\, g^{\ell s} g^{ij} + g^{is} g^{j\ell}) + \frac{\lambda}{3} g^{i\ell}\; g^{js}\right]$$

En particulier, la géométrie intrinsèque des lignes de courant est caractérisée par le tenseur :

(132) $$E(g_{ij}\; q^{i\ell}\; q^{js}) = k_o^2 \left[1 + \frac{2}{3}\varepsilon^2(\lambda + 4\mu)\right] g^{\ell s}$$

Enfin, le produit scalaire $E(q^{i\ell}\partial_i\, p^{s})$ a pour valeur :

(133) $$E(q^i\,\partial_i\, p^{s}) = - K^{\ell s} = - k_o\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{3}(\lambda + 4\mu)\right] g^{\ell s}$$

<u>Généralisation</u>

Parmi les trois hypothèses du cas isotrope, laissons tomber la première et modifions les deux autres de telle façon que l'on puisse se ramener au cas isotrope par une transformation linéaire des coordonnées. Nous obtenons un schéma où les fluctuations des perméabilités possèdent la même sorte d'anisotropie que les perméabilités moyennes Si $\chi^{ij} = E(k^{ij})$ et ω_{ij} sont l'espérance mathématique de k^{ij} et son inverse $(\omega = [E(k)]^{-1})$, faisons les deux hypothèses suivantes :

1/- Les covariances $R^{ij\ell s}(x)$ ne dépendent que de l'expression $\omega_{ij}\, x^i\, x^j$.

2/- Les covariances $C^{ij\ell s}$ prises au même point d'appui sont de la forme :

(134) $$C^{ij\ell s} = \lambda\, \chi^{ij}\; \chi^{\ell s} + \mu(\chi^{i\ell}\; \chi^{js} + \chi^{is}\chi^{j\ell})$$

Dans ce schéma à fluctuations adaptées, les résultats du cas isotrope se transposent d'eux mêmes. On trouve notamment :

$$\begin{cases} K^{ij} = \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{3}(\lambda + 4\mu)\right] \chi^{ij} \\ H_{ij} = \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{3}(\lambda + 4\mu)\right] \omega_{ij} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(k^{ij}) - K^{ij} = \frac{1}{3}\varepsilon^2 (\lambda + 4\mu) \ \chi^{ij} \\ E(h_{ij}) - H_{ij} = \frac{2}{3} \ \varepsilon^2(\lambda + 4\mu) \ \omega_{ij} \end{cases}$$

Les tenseurs exprimant les fluctuations des isobares se transposent de la même façon : on pose $k_o = 1$, et on remplace g^{ij} par χ^{ij} et g_{ij} par ω_{ij}.

V.- DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION FONDAMENTALE

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer en toute généralité notre proposition fondamentale. Rappellons son énoncé : Soient k^{ij} et h_{ij} une perméabilité régionalisée stationnaire, et son inverse. Soient K^{ij} et H_{ij} les grandeurs macroscopiques correspondantes. Alors les matrices $E(k^{ij}) - K^{ij}$ et $E(h_{ij}) - H_{ij}$ sont définies positives.

Si l'on convient d'écrire $A \leq B$, A et B étant des matrices symétriques définies positives, lorsque la matrice $B - A$ est définie positive, notre proposition fondamentale se résume dans les deux inégalités matricielles.

$$\left[E(k^{-1})\right]^{-1} \leq K \leq E(k) \tag{135}$$

On vérifiera sans peine que $A \leq B$ équivaut, si A est inversible (B l'est alors nécessairement aussi) à $B^{-1} \leq A^{-1}$. Les inégalités (135) sont donc équivalentes aux suivantes :

$$\left[E(h^{-1})\right]^{-1} \leq H \leq E(h) \tag{136}$$

Ces inégalités expriment que les perméabilités se composent toujours selon un mode intermédiaire entre les pondérations harmoniques et arithmétiques.

La démonstration générale va s'appuyer sur un lemme important, qui repose lui-même sur des considérations énergétiques élémentaires.

Lemme - Soit un écoulement macroscopiquement uniforme dans un milieu poreux à perméabilité régionalisée stationnaire, q^i et $\partial_i p$ le flux et le gradient de pression, $Q^i = E(q^i)$ et $\partial_i P = E(\partial_i p)$ les grandeurs macroscopiques correspondantes. On a :

(137) $$E(q^i \partial_i p) = Q^i \partial_i P$$

1/ Si ρ est la densité propre du fluide et ω la porosité, $\frac{1}{\rho} q^i \partial_i p$ est la densité de puissance consommée par les forces de viscosité dans l'écoulement considéré: $\partial_i p$ est, en effet, la densité de force et $\frac{1}{\omega\rho} q^i$ la vitesse des particules. Dans l'élément de volume dv, le volume des vides contenus est ωdv : la puissance consommée dans dv est bien

$$\frac{1}{\omega\rho} q^i \partial_i p \ \omega dv = \frac{1}{\rho} (q^i \partial_i p)dv$$

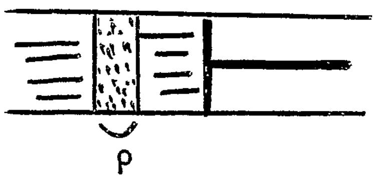
Dans une portion V quelconque du milieu, par conséquent, la puissance consommée est :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\rho} \int_V (q^i \partial_i p)dx$$

Si les dimensions du volume V ont été choisies suffisamment grandes pour que l'ergodicité s'y manifeste, on peut confondre moyenne spatiale et espérance mathématique, et par suite prendre

(138) $$\frac{dW}{dt} = \frac{V}{\rho} E(q^i \partial_i p)$$

2/- Evaluons la même puissance en nous plaçant à un niveau macroscopique. Pour cela, calculons la puissance nécessaire pour refouler le fluide, à l'aide d'un piston, à travers un échantillon macroscopique du milieu poreux. On peut adopter le dispositif expérimental (échantillon macroscopiquement mince) qui impose la direction β^i du gradient (le dispositif à direction de flux imposé - échantillon long - conduit au même résultat). La force appliquée au piston est :



$$F = S\,\Delta p$$

Le débit Q est le produit scalaire $\beta_i\, Q^i = -\beta_i\, K^{ij}\,\partial_j P$. Le déplacement du piston, enfin, est :

$$\Delta \ell = \frac{Q}{\rho}\,\Delta t = \frac{\beta_i\, Q^i}{\rho}\,\Delta t$$

La puissance consommée est donc :

$$\frac{dW}{dt} = F\,\frac{\Delta \ell}{\Delta t} = (\beta_i\, Q^i)\,\frac{S\,\Delta p}{\rho} = (\beta_i\, Q^i)\,\frac{V}{\rho}\,\frac{\Delta p}{\ell}$$

D'où, finalement :

(139) $$\frac{dW}{dt} = \frac{V}{\rho}\, Q^i\,\partial_i P$$

Le principe de conservation de l'énergie nous indique que la puissance fournie (139) est égale à la puissance (138) consommée par les forces de viscosités. La relation (137) en résulte.

<u>Conséquences</u>. Supposons la perméabilité $k^i{}_j$ décomposée canoniquement :

(140) $$k^{ij} = A^i{}_\ell\, \chi^{\ell s}\, A^j{}_s$$

$A^i{}_j$ étant l'inverse du gradient $B^i{}_j$ d'espérance unité $E(B^i{}_j) = \delta^i{}_j$. Les écoulements macroscopiquement uniformes sont :

$$\begin{cases} \partial_i p = B_i^s\, \varpi_s \\ q^i = -A^i{}_\ell\, \chi^{\ell s}\, \varpi_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_i P = E(\partial_i p) = \varpi_s \\ Q^i = E(q^i) = -K^{ij}\, \varpi_j \end{cases}$$

Le produit scalaire $q^i\,\partial_i p$ est égal à :

$$q^i\,\partial_i p = -A^i{}_\ell\, B_i^s\, \chi^{\ell u}\, \varpi_s\, \varpi_u = -\chi^{\ell u}\, \varpi_s\, \varpi_u$$

Tandis que $Q^i \partial_i P = - K^{ij} \varpi_i \varpi_j$. La relation (137) signifie donc :

(141) $$K^{\ell s} = E(\chi^{\ell s})$$

Nous retrouvons ainsi, sous forme absolument générale, des résultats établis en (123) et (124) à l'approximation du deuxième ordre. Mais, d'autre part, les règles générales de composition des perméabilités établies au chapitre II donnent :

$$K^{\ell s} = E(A^{\ell}_i \; \chi^{is})$$

D'où résulte l'égalité remarquable :

(142) $$E(\chi^{\ell s}) = E(A^{\ell}_i \; \chi^{is}) = K^{\ell s}$$

qui va nous permettre de démontrer la proposition fondamentale.

<u>Démonstration de la proposition.</u>

La matrice des K^{ij} est définie positive, et, d'après (140), il en est de même de la matrice des $\chi^{\ell s}$, qui sont les composantes du tenseur des perméabilités en coordonnées isobares. Par suite, pour tout vecteur $\alpha^i(x)$, constant ou aléatoire, on a :

$$E(\alpha_i \; \chi^{ij} \; \alpha_j) \geqslant 0$$

On en déduit aussitôt l'inégalité de SCHWARTZ pour deux vecteurs β_i et γ_i aléatoires ou non :

(143) $$\left[E(\beta_\ell \, \chi^{\ell s} \gamma_s)\right]^2 \leq E(\beta_\ell \, \chi^{\ell s} \beta_s) \;\; E(\gamma_\ell \, \chi^{\ell s} \gamma_s)$$

Prenons un vecteur γ_s constant et un vecteur β_ℓ aléatoire définis par :

$$\beta_\ell = A^i_\ell \;\; \gamma_i$$

et portons dans (143). Compte tenu de (142), on obtient à gauche :

$$\left[E(\gamma_\ell \;\; \chi^{\ell s} \, A^i_s \;\; \gamma_i)\right]^2 = (K^{\ell s} \gamma_\ell \; \gamma_s)^2$$

A droite, le premier facteur est :

$$E(\gamma_i A^i_{\ell} \chi^{\ell s} A^j_s \gamma_j) = \gamma_i \gamma_j E(k^{ij})$$

D'après (141), le deuxième est $K^{\ell s} \gamma_{\ell} \gamma_s$. On a donc

$$(K^{\ell s} \gamma_{\ell} \gamma_s)^2 \leq \gamma_i \gamma_j \; E(k^{ij}) \, K^{\ell s} \gamma_{\ell} \gamma_s$$

et, en simplifiant :

$$K^{\ell s} \gamma_{\ell} \gamma_s \leq \gamma_i \gamma_j \; E(k^{ij})$$

Cette inégalité signifie que $E(k^{ij}) - K^{ij}$ est définie positive, et démontre la deuxième des inégalités (135).

Portons maintenant dans (143) un vecteur β_s constant, et pour γ_s un vecteur aléatoire défini par :

$$\gamma_s = \psi_{si} \; B^i_{\ j} \; \alpha^j$$

où ψ_{si} est l'inverse de $\chi^{ij} (\psi_{si} \chi^{ij} = \delta^j_{\ s})$ et α^j un vecteur contravariant constant. A gauche, on obtient :

$$\left[E(\beta_{\ell} \; \chi^{\ell s} \; \psi_{si} \; B^i_{\ j} \, \alpha^j)\right]^2 = \left[E(\beta_i \; B^i_{\ j} \, \alpha^j)\right]^2 = (\beta_i \, \alpha^i)^2$$

La dernière égalité résulte de ce que $E(B^i_{\ j}) = \delta^i_{\ j}$, puisque la décomposition de k^{ij} est canonique.

A droite d'après (141), le premier facteur est :

$$E(\beta_{\ell} \, \chi^{\ell s} \beta_s) = \beta_{\ell} \beta_s \; K^{\ell s}$$

Calculons le deuxième. Il vient :

$$E(\alpha^j \, B^i_{\ j} \;\; \psi_{si} \;\; \chi^{\ell s} \, \psi_{\ell u} \;\; B^u_{\ v} \;\; \alpha^v) = E(\alpha^j \, B^{\ell}_j \;\; \psi_{\ell u} \, B^u_{\ v} \, \alpha^v) = \alpha^j \, \alpha^v \; E(h_{jv})$$

la dernière inégalité résulte de l'expression de h_{ij}, que l'on obtient en inversant (140) :

$$h_{jv} = B^{\ell}_j \;\; \psi_{\ell u} \;\; B^u_{\ v}$$

Finalement, l'inégalité (143) nous donne :

$$(144) \qquad \beta_i \, \beta_j \;\; \alpha^i \, \alpha^j \leq \beta_{\ell} \, \beta_s \; K^{\ell s} \, \alpha^j \, \alpha^v \;\; E(h_{jv})$$

Prenons alors comme vecteur β_i le vecteur

$$\beta_i = H_{iu} \, \alpha^u$$

où H_{iu} est l'inverse du tenseur constant K^{ij}. Portons dans (144). A gauche, il vient :

$$(\alpha^i \, H_{iu} \, \alpha^u)^2$$

A droite, le premier facteur est :

$$\alpha^u \, H_{\ell u} \, K^{\ell s} \, H_{s v} \, \alpha^v = \alpha^s H_{s v} \, \alpha^v$$

Nous avons par suite

$$(\alpha^i H_{iu} \alpha^u)^2 \leq (\alpha^i H_{iu} \alpha^u) \left[\alpha^v \alpha^j E(h_{vj}) \right]$$

et, en simplifiant par $\alpha^i \, H_{iu} \, \alpha^u$:

$$\alpha^i \, H_{ij} \, \alpha^j \leq \alpha^i \alpha^j \, E(h_{ij})$$

c'est-à-dire

$$H \leq E(h)$$

Ceci achève de démontrer la proposition fondamentale.

ANNEXE A

ETUDE D'UN TENSEUR k^{ij} SYMETRIQUE ET CONSERVATIF

Soit $k^{ij}(x)$ un tenseur symétrique et conservatif :

(A, 1)
$$\begin{cases} k^{ij} = k^{ji} \\ \partial_i k^{ij} = 0 \end{cases}$$

Si l'on se donne a priori $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions $k^{ij}(x)$ pour $i \neq j$, le système $\partial_i k^{ij}$ s'intègre immédiatement, et donne les n composantes diagonales k^{ii}. Pour obtenir une écriture plus élégante, on se donnera $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions V^{ij} vérifiant:

(A,2)
$$k^{ij} = -\frac{\partial^2 V^{ij}}{\partial x^i \partial x^j} \qquad (i \neq j, \text{ sans sommation})$$

Une intégration immédiate de (A,1) donne :

(A,3)
$$k^{ii} = \sum_{j \neq i} \frac{\partial^2 V^{ij}}{(\partial x^j)^2} + C^i$$

C^i est une fonction arbitraire des $(n-1)$ variables $x^j (j \neq i)$. Mais (A,2) ne détermine V^{ij} qu'à l'arbitraire de deux fonctions indépendantes l'une de x^i, l'autre de x^j, de sorte que l'on peut, sans nuire à la généralité, prendre $C^i = 0$. On notera que les V^{ij} n'ont aucun caractère tensoriel.

<u>A deux dimensions</u>, $\frac{n(n-1)}{2} = 1$, on posera $\Phi = V^{12}$ et la solution sera de la forme :

$$k^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Le terme k^{ij} coincide ici avec le mineur $\mathrm{Min}(\partial_{ij} \phi)$ associé au terme $\partial_{ij} \phi$ dans le déterminant $\mathrm{Det}\,(\partial_{ij} \phi)$.

(A,4) $$k^{ij} = \mathrm{Min}\,(\partial_{ij}\,\phi)$$

Sous forme équivalente, si nous désignons par h_{ij} le tenseur inverse des k^{ij} :

$$h_{ij}\;k^{j\ell} = \delta_i^{\ell}$$

la relation (A,4) peut s'écrire :

(A,5) $$h_{ij} = \frac{\partial_{ij}\,\phi}{\mathrm{Det}\,(\partial_{ij}\,\phi)}$$

Sous forme tensorielle générale, on prendra

$$\begin{cases} k^{ij} = \dfrac{1}{g}\;\mathrm{Min}(\nabla_{ij}\,\phi) \\[2ex] h_{ij} = g\;\dfrac{\nabla_{ij}\,\phi}{\mathrm{Det}\,(\nabla_{ij}\,\phi)} \end{cases}$$

<u>A trois dimensions</u>, la solution dépend de 3 fonctions arbitraires V_1, V_2, et V_3 :

$$k^{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V_3}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} & -\dfrac{\partial^2 V_3}{\partial x\,\partial y} & -\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial z} \\[2ex] -\dfrac{\partial^2 V_3}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} & -\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial y\,\partial z} \\[2ex] -\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial z\,\partial x} & -\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial z\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

<u>N.B.</u> - Soulignons bien que V_1, V_2 et V_3 ne sont pas les composantes d'un vecteur. Leur nature tensorielle n'est pas en évidence dans l'écriture ci-dessus. On peut la faire apparaître de la manière suivante. Soit ε^{ijk} l'indicateur classique de permutation ($\varepsilon^{ijk} = 0$ si $i = j$ ou $j = k$ ou $i = k$, pour $i \neq j \neq k$ ε^{ijk} est + 1 ou - 1 selon le signe de la permutation $i\,j\,k$). On sait que $\dfrac{1}{\sqrt{g}}\,\varepsilon^{ijk}$ est un tenseur contravariant complètement antisymétrique.

Alors l'expression :

$$k^{ij} = \frac{1}{g} \, \varepsilon^{irs} \, \varepsilon^{jk\ell} \, \partial_{kr} \, H_{s\ell} \tag{A,6}$$

représente un tenseur contravariant symétrique, pourvu que $H_{s\ell}$ soit un tenseur covariant symétrique. De plus, on a manifestement

$$\partial_i \, k^{ij} = 0$$

On peut expliciter (11) comme suit :

$$\begin{cases} k^{11} = \frac{1}{g}\left[\partial_{22} H_{33} + \partial_{33} H_{22} - \partial_{23} H_{23} - \partial_{23} H_{32}\right] \\ k^{12} = \frac{1}{g}\left[\partial_{23} H_{31} + \partial_{31} H_{23} - \partial_{33} H_{21} - \partial_{12} H_{33}\right] \end{cases}$$

Si H_{ij} est diagonal ($H_{12} = H_{23} = H_{31} = 0$), il reste :

$$\begin{cases} k^{11} = \frac{1}{g}\left[\partial_{22} H_{33} + \partial_{33} H_{22}\right] \\ k^{12} = -\frac{1}{g} \, \partial_{12} \, H_{33} \end{cases}$$

Ainsi, dans l'écriture non tensorielle donnée ci-dessus, on doit prendre

$$V_1 = \frac{1}{g} H_{11} \qquad V_2 = \frac{1}{g} H_{22} \qquad V_3 = \frac{1}{g} H_{33}$$

Remarque A trois (ou à n) dimensions, l'expression (9) :

$$k^{ij} = \frac{1}{g} \operatorname{Min} (\partial_{ij} \phi)$$

représente toujours un tenseur conservatif symétrique (mais c'est seulement pour $n = 2$ que cette expression donne la forme générale de tous les tenseurs symétriques conservatifs). Plus généralement, soit

$$B^r{}_j = \frac{\partial \xi^r}{\partial x^j}$$

une matrice construite sur n vecteurs gradients $\partial_j \, \xi^r$, et soit $A^i{}_r$ la matrice inverse

$$A^i_r \; B^r_j \; = \; \delta^i_j$$

Alors, on a la relation :

$$\partial_i \left[\frac{A^i_r}{\text{Det } A} \right] = 0 \qquad \text{(A,7)}$$

Pour établir cette relation, nous partirons de l'expression classique donnant la dérivée d'un déterminant quelconque :

$$\partial_u \; \text{Det } A = \sum_{i,\, r} (\partial_u A^i_r) \; \text{Min } A^i_r = (\text{Det } A) \; B^r_i \; \partial_u A^i_r$$

soit

$$\partial_u \; (\log \text{Det } A) = B^r_i \; \partial_u A^i_r = - A^i_r \; \partial_u B^r_i \qquad \text{(A,8)}$$

De (A,8), on déduit facilement :

$$\partial_u \left[\frac{A^i_r}{\text{Det } A} \right] = \frac{1}{\text{Det } A} \left[\partial_u A^i_r - A^i_r \; \partial_u \log \text{Det } A \right]$$

$$= \frac{1}{\text{Det } A} \left[\partial_u A^i_r + A^i_r \; A^m_n \; \partial_u B^n_m \right]$$

Mais ici

$$\partial_u B^n_m = \partial_u \frac{\partial \xi^n}{\partial x^m} = \partial_{um} \xi^n = \partial_m \; B^n_u$$

D'où :

$$\partial_u \left[\frac{A^i_r}{\text{Det } A} \right] = \frac{1}{\text{Det } A} \left[\partial_u A^i_r + A^i_r \; A^m_n \; \partial_m \; B^n_u \right]$$

$$= \frac{1}{\text{Det } A} \left[\partial_u \; A^i_r - A^i_r \; B^n_u \; \partial_m A^m_n \right]$$

Sommant en i et u, il vient

$$\partial_i \left(\frac{A^i{}_r}{\mathrm{Det}\ A} \right) = \frac{1}{\mathrm{Det}\ A} \left(\partial_i A^i{}_r - \delta^n{}_r \partial_m A^m{}_n \right) = 0$$

c'est-à-dire la relation (A,7). On notera que si $A^i{}_r$ est un tenseur une fois contravariant et une fois covariant, il en est de même de $\dfrac{A^i{}_r}{\mathrm{Det}\ A}$. Enonçons :

<u>Si $A^i{}_r$ est l'inverse d'un tenseur gradient $\partial_j u^\ell$, alors le tenseur $\dfrac{A^i{}_r}{\mathrm{Det}\ A}$ est conservatif.</u>

*

* *

A N N E X E B

ETUDE D'UNE FORME PARTICULIERE DE TENSEUR k^{ij}

Considérons un tenseur de la forme

$$k^{ij} = \frac{\alpha^i_{\ell}}{\text{Det } \alpha} \quad A^j_{s} \quad g^{\ell s} \tag{B,1}$$

ou α^i_{ℓ} et A^j_{s} sont les inverses de deux tenseurs gradients distincts β^{ℓ}_i et B^{s}_j avec :

$$E(B^{s}_j) = \delta^{s}_j$$

On sait que $\dfrac{\alpha^i_{\ell}}{\text{Det } \alpha}$ est conservatif (A,7), de sorte que (B,1) est une décomposition canonique. A deux dimensions, on a vu (Annexe A) que tout tenseur conservatif est de la forme $\dfrac{\alpha^i_{\ell}}{\text{Det } \alpha}$, de sorte que (B,1) représente l'expression la plus générale du tenseur des perméabilités. A trois dimensions, par contre, (B,1) ne représente qu'un cas particulier.

En appliquant la règle (32), on obtient la perméabilité macroscopique sous la forme

$$K^{ij} = g^{\ell j} \ E\left(\frac{\alpha^i_{\ell}}{\text{Det } \alpha}\right)$$

Or, nous avons montré que, si β^i_{ℓ} est un tenseur gradient vérifiant $E(\beta^i_{\ell}) = \delta^i_{\ell}$ ses mineurs vérifient $E\left(\dfrac{\alpha^i_{\ell}}{\text{Det } \alpha}\right) = \delta^i_{\ell}$. Dans le cas d'un tenseur gradient quelconque, posons :

$$\left\{ \begin{aligned} m^i_{\ell} &= E(\beta^i_{\ell}) \\ \mu^{s}_i \, m^i_{\ell} &= \delta^{s}_{\ell} \end{aligned} \right.$$

Le tenseur gradient $\mu^{s}_i \ \beta^i_{\ell}$ a pour valeur probable δ^{s}_{ℓ}. Son mineur a donc lui aussi le tenseur unité comme valeur probable :

$$E\left[\frac{\alpha^{\ell}_{r}\; m^{r}_{s}}{\text{Det}\,\alpha\;\text{Det}\;m}\right] = \delta^{\ell}_{s}$$

D'où :

$$E\left[\frac{\alpha^{\ell}_{r}}{\text{Det}\,\alpha}\right] = \mu^{\ell}_{r}\;\text{Det}\,m = \frac{\mu^{\ell}_{r}}{\text{Det}\,\mu}$$

Donc :

(B,2) $$K^{ij} = \frac{g^{\ell s}\,\mu^{i}_{\ell}}{\text{Det}\;\mu}$$

ou, sous forme symbolique :

(B,3) $$K = \left[E(\beta)\right]^{-1}\;\text{Det}\;E(\beta)$$

L'inverse H_{ij} de K^{ij} peut alors s'écrire :

$$H = \frac{E(\beta)}{\text{Det}\;E(\beta)}$$

ou, explicitement

(B,4) $$H_{ij} = \frac{g_{\ell j}\;E(\beta^{\ell}_{i})}{\text{Det}\;E(\beta)}$$

Mais les tenseurs stationnaires α^{i}_{ℓ} et A^{j}_{s} ne peuvent pas être supposés indépendants. <u>La condition de symétrie</u> $k^{ij} = k^{ji}$ impose, en effet, la relation

$$\alpha^{i}_{\ell}\;A^{j}_{s}\;g^{\ell s} = \alpha^{j}_{\ell}\;A^{i}_{s}\;g^{\ell s}$$

ou, ce qui est équivalent :

$$g_{\ell s}\left[\beta^{\ell}_{i}\;B^{s}_{j} - \beta^{\ell}_{j}\;B^{s}_{i}\right] = 0$$

Les tenseurs B et β sont, par hypothèse, des gradients :

$$\begin{cases} \beta^{\ell}_{i} = \partial_i \beta^{\ell} \\ B^{s}_{j} = \partial_j B^{s} \end{cases}$$

Notre condition de symétrie, qui s'écrit :

$$g_{\ell s}\left[\partial_i \beta^{\ell} \partial_j B^{s} - \partial_j \beta^{\ell} \partial_i B^{s}\right] = 0$$

exprime que les formes linéaires

$$\begin{cases} d\,B^{s} = \partial_j B^{s}\, d\,x^{j} \\ d\,\beta_{s} = \partial_i \beta_{s}\, d\,x^{i} = g_{\ell s} \partial_i \beta^{\ell}\, d\,x^{i} \end{cases}$$

ont un produit extérieur (contracté en s) $d\,B^{s} \wedge d\,\beta_{s}$ égal à 0, autrement dit que l'expression

$$\beta_{s}\, d\,B^{s} = d\,\Phi$$

est une différentielle totale. Ainsi, il doit exister une fonction $\Phi(B^{s})$ telle que l'on ait :

$$\beta_{s} = \frac{\partial \Phi}{\partial B^{s}}$$

Si l'on substitue les x^{i} aux B^{s}, on obtient

$$\beta_{s} = \sum_{\ell} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\ell}} \frac{\partial x^{\ell}}{\partial B^{s}} = A^{\ell}_{s} \partial_{\ell} \Phi$$

On en déduit

$$\beta^{\ell}_{j} = g^{\ell r} \partial_j \left[A^{i}_{r} \partial_i \Phi\right] \tag{B,5}$$

La fonction $\Phi(x)$ peut être choisie quelconque. En particulier, on peut la supposer <u>indépendante des</u> A^{i}_{r}. Dans ce cas :

$$E(\beta^{\ell}_{\ j}) = g^{\ell r} \; E(A^{i}_{\ r}) \; E(\partial_{ij}\phi)$$

et :

$$H_{ij} = \frac{E(A^{\ell}_{\ j}) \; E(\partial_{\ell i}\phi)}{\mathrm{Det}\; E(\beta)} = \frac{E(A^{\ell}_{\ j}) \; E(\partial_{\ell i}\phi)}{\left[\mathrm{Det}\; g^{ij}\right] \left[\mathrm{Det}\; E(A)\right] \left[\mathrm{Det}\; E(\partial_{ij}\phi)\right]}$$

*

* *

A N N E X E C

PROMENADE ALEATOIRE ET SOLUTION ELEMENTAIRE DU SYSTEME DE DARCY

Nous avons observé dans la Note 55 l'identité de l'équation de l'hydrodynamique et de l'équation de Kolmogorov relative à un processus markovien décrivant une promenade aléatoire. Identifiant pression p et densité propre ρ du liquide par un choix convenable d'unités (en réalité il s'agit toujours de variations de pression ou de densité) et introduisant l'inverse $a = \frac{1}{\omega}$ de la porosité ω, l'équation de l'hydrodynamique s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \partial_i \left(k^{ij} \partial_j a f\right) \tag{C,1}$$

L'équation de Kolmogorov d'un processus représentant une promenade aléatoire est de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \partial_{ij} \left(\gamma^{ij} f\right) - \partial_i (\lambda^i f) \tag{C,2}$$

et s'identifie à (C,1) si l'on prend :

$$\begin{cases} \lambda^i = a \partial_j \; k^{ij} \\ \gamma^{ij} = 2 \, a \; k^{ij} \end{cases} \tag{C,3}$$

Cette identification n'est possible que si λ^i et γ^{ij} vérifient la condition dite de réciprocité

$$\partial_j \gamma^{ij} = 2 \lambda^i + \gamma^{ij} \partial_j \log a \tag{C,4}$$

Sous cette condition, il y a identité entre la solution $f(y, x, t)$ de (62), qui représente la densité de probabilité de présence en x au temps t d'une particule lachée en y au temps 0, avec la solution élémentaire $f(y, x, t) = \omega \rho(x,t)$ de (C,1) donnant la densité macroscopique en x et au temps t lorsqu'une masse unité de liquide est injectée en y à l'instant 0.

Lorsque l'on connaît la solution élémentaire de (C,1) - qui est une exponentielle de Gauss si a et k^{ij} sont constants - on peut toujours en déduire, par superposition, les solutions correspondant à tel ou tel type d'écoulements permanents, et, en particulier, à nos écoulements uniformes au niveau macroscopique.

Dans quelle mesure le passage inverse est-il possible ? Autrement dit, la connaissance des solutions privilégiées de l'équation de Darcy, c'est-à-dire pratiquement la connaissance de la décomposition canonique $k = C\ B^{-1}$ du tenseur des perméabilités, permet-elle de remonter à la solution élémentaire de l'équation (C,1) ? On ne doit pas s'y attendre dans le cas général. En effet, dans le cas particulier d'une dérive λ^i nulle, c'est-à-dire, selon (C,3), dans le cas d'un tenseur k^{ij} conservatif, on connaît les solutions privilégiées ($\partial_j\, p = C^{te}$), mais on ne sait pas pour autant intégrer l'équation (C,2) pour $\gamma^{ij}(x)$ quelconque. Examinons, cependant, de plus près comment se présente ce problème. Soit

$$k^{ij} = \frac{A^i_s\ A^j_\ell\ \phi^{\ell s}}{\text{Det}\ A}$$

la décomposition canonique de k^{ij}, A^i_s étant l'inverse de $B^s_i = \partial_i\, \xi^s$ et $\phi^{\ell s}$ vérifiant (30).

Dans le système des coordonnées ξ^i, la perméabilité prend d'après (19) les composantes

$$\chi^{ij} = \frac{1}{\text{Det}\ A}\ \phi^{ij} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}\ \phi^{ij}$$

tandis que l'équation (C,1) s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\, \partial_i \left(\sqrt{\gamma}\ \chi^{ij}\, \partial_j\, a\, f\right)$$

Pour abréger, nous prendrons $\sqrt{g} = 1$, ce qui revient par exemple à prendre comme axes des x^i un système orthonormé. On a alors :

$$\sqrt{\gamma} = \text{Det}\ A$$

et notre équation devient

$$\frac{\partial}{\partial t}\, f\ \text{Det}\ A = \partial_i \left[\phi^{ij}\, \partial_j\, a\, f\right]$$

Mais $\partial_i \phi^{ij} = 0$ selon (18). D'où finalement :

$$\frac{\partial}{\partial t} f \text{ Det } A = \phi^{ij} \partial_{ij}(a f)$$

On ne connaît pas la solution générale d'une telle équation. Mais dans le cas particulier où l'on a :

$$\frac{\phi^{ij}}{\text{Det } A} = \frac{C^{ij}}{a} \tag{C,5}$$

les C^{ij} étant des constantes, l'équation se ramène au type simple

$$\frac{\partial}{\partial t}(a f) = C^{ij} \partial_{ij}(a f) \tag{C,6}$$

dont la solution élémentaire est une exponentielle de Gauss.

A cause de la relation $\partial_i \phi^{ij} = 0$, la condition (C,5) est remplie si, et seulement si, a et Det A sont proportionnels. Autrement dit, il existe une constante α telle que l'on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{\alpha} \text{ Det } A \\ \phi^{ij} = \alpha\, C^{ij} = C^{\underline{\underline{te}}} \end{array} \right. \tag{C,7}$$

La première condition s'écrit

$$\omega = \alpha \text{ Det } B$$

Comme on a également :

$$\text{Det } k = (\text{Det } B)^{n-2} \alpha^n \det C$$

on doit distinguer les cas $n = 2$ et $n = 3$.

<u>A deux dimensions</u>, (C,7) entraîne

$$\text{Det } k = \alpha^3 \det C = C^{te}$$

A trois dimensions

$$\mathrm{Det}\ k = \omega\ \alpha^2\ \det C$$

La première relation ($\mathrm{Det}\ k = C^{te}$) apparaît comme un peu artificielle. La deuxième est physiquement plus intéressante puisque porosité et perméabilité ont tendance à varier dans le même sens (elle n'est cependant pas compatible avec le cas très fréquent où les perméabilités sont lognormales et les porosités à peu près gaussiennes. Plus généralement, elle suppose que $\mathrm{Det}\ k = k_1\ k_2\ k_3$ et ω aient même variance relative. En général, la variance relative des porosités est beaucoup plus faible que celle d'une perméabilité principale, et, a fortiori, que celles de Det k).

Lorsque les conditions (C,7) sont vérifiées, on obtient la solution élémentaire de (C,6) sous la forme :

$$f(\eta\ ;\ \xi\ ;\ t) = \frac{\omega}{\alpha(Dt)^{n/2}}\ \exp\left[-\frac{1}{4t}\ D_{ij}(\xi^i - \eta^i)(\xi^j - \eta^j)\right]$$

où D_{ij} est l'inverse de C^{ij}. Il suffit de faire la substitution $\xi^i(x)$, $\eta^i(y)$ pour obtenir la solution élémentaire $f(y,x,t)$ de (C,1). On vérifiera facilement, à partir de (C,7) que la matrice des variances est :

$$\sigma^{ij} = \iint f(y,x,t)dx_1 dx_2 \ldots = \iint f(\eta,\xi,t)\ \mathrm{Det}\ A\ d\xi_1\ d\xi_2 \ldots\ldots$$

soit :

$$\sigma^{ij} = 2\ C^{ij}\ t$$

Or la perméabilité macroscopique et la porosité moyenne sont ici:

$$\begin{cases} K^{ij} = \phi^{ij} = \alpha\ C^{ij} \\ E(\omega) = \alpha\ E(\mathrm{Det}\ B) = \alpha \end{cases}$$

D'où le résultat :

(C,8) $$\sigma^{ij} = \frac{2}{E(\omega)}\ K^{ij}\ t$$

qui est la transposition macroscopique de $\nu^{ij} = 2\ a\ k^{ij}$.

La relation (C,8) est remarquable en ce sens qu'elle indique une croissance des covariances, rigoureusement proportionnelle au temps. Elle est évidemment liée au caractère particulier des hypothèses faites. Dans le cas général, la covariance de $f(y,x,t)$ sera aléatoire, et c'est seulement en valeur probable qu'elle vérifiera une relation du type (C,8).

Construction d'un schéma de promenade aléatoire.

Donnons-nous un champ de vecteur $v_\ell = v^i_\ell \; e_i$ (e_i vecteurs de base). La particule reçoit un déplacement aléatoire aux temps $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$ Lorsqu'elle est en x, ce déplacement aléatoire se fait le long de la trajectoire $\alpha^\ell v_\ell$ avec une vitesse $\frac{1}{\varepsilon}\alpha^\ell v_\ell$:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\alpha^\ell v^i_\ell}{\varepsilon} \tag{C,9}$$

Les α^ℓ sont tirés au sort (indépendamment) tous les Δt selon une loi de moyennes et covariances :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\alpha^\ell) = \varepsilon\, D^\ell \\ E(\alpha^\ell \alpha^s) = S^{\ell s} \end{array} \right. \tag{C,10}$$

Intégrant (C,9) au 2ème ordre de t à $t+\Delta t$, on obtient :

$$\Delta x^i = \frac{dx^i}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2x^i}{dt^2}\Delta t^2$$

avec

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{dt}\,\alpha^\ell v^i_\ell\,[x(t)] = \frac{1}{\varepsilon}\,\alpha^\ell \frac{dx^j}{dt}\,\partial_j v^i_\ell = \frac{\alpha^\ell \alpha^s v^j_s}{\varepsilon^2}\,\partial_j v^i_\ell$$

D'où

$$\Delta x^i = \alpha^\ell v^i_\ell \frac{\Delta t}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\alpha^\ell \alpha^s v^j_s\, \partial_j v^i_\ell \frac{\Delta t^2}{\varepsilon^2}$$

On prend $\varepsilon = \sqrt{\Delta t}$ et on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^i = \lim \frac{1}{\Delta t}\, E(\Delta x^i) \\ \gamma^{ij} = \lim \frac{1}{\Delta t}\, E(\Delta x^i \Delta x^j) \end{array} \right.$$

De (C,10), on déduit les valeurs de λ^i et γ^{ij} :

$$(C,11) \qquad \begin{cases} \lambda^i = v^i_\ell \; D^\ell + \frac{1}{2} \; S^{\ell s} v^j_s \; \partial_j \, v^i_\ell \\ \gamma^{ij} = S^{\ell s} \, v^i_\ell \; v^j_s \end{cases}$$

Le processus limite ainsi obtenu obéit à l'équation de Kolmogorov (C,2) avec les valeurs données ci-dessus pour λ^i et γ^{ij}. Inversement, la simulation effective de la promenade aléatoire, ou le calcul de ses matrices de transition, fournissent une solution approchée de (C,2). Pour que cette équation soit du type hydrodynamique (C,1), il faut écrire que la condition (C,4) est vérifiée. Avec les valeurs (C,11) de λ^i et γ^{ij}, cette condition donne

$$2 \, D^\ell + (S^{\ell s} \; v^j_s \,) \partial_j \, \log a = \partial_j \, (S^{\ell s} v^j_s \,)$$

soit, en posant $\omega = \frac{1}{a}$:

$$\partial_j \left[\omega S^{\ell s} v^j_s \right] = 2 \, \omega D^\ell$$

Nous supposerons $D^\ell = E(\alpha^\ell)$ identiquement nulle. Il reste la condition

$$(C,12) \qquad \partial_j \left[\omega S^{\ell s} v^j_s \right] = 0$$

et la perméabilité k^{ij} est alors donnée par (C,3) :

$$(C,13) \qquad k^{ij} = \frac{\omega}{2} \; S^{\ell s} \, v^i_\ell \; v^j_s$$

La perméabilité apparaît comme le produit du tenseur $\frac{\omega}{2} S^{\ell s} v^j_s$, conservatif d'après (C,12), par le tenseur v^i_ℓ. Si celui-ci a été choisi comme l'inverse d'un tenseur gradient B^ℓ_i :

$$B^\ell_i = \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^i} \qquad\qquad v^i_\ell = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\ell}$$

(C,13) est une décomposition canonique, et les solutions macroscopiquement uniformes peuvent être calculées a priori. On a, en effet

$$\phi^{\ell s} = \text{Det } A \; \frac{\omega}{2} \;\; S^{\ell s}$$

et

$$K^{ij} = E\left[\frac{\omega}{2}\ \mathrm{Det}\,A\ v^i_\ell\ S^{\ell j}\right]$$

Les solutions macroscopiquement uniformes sont alors :

$$\begin{cases} \partial_j\, p = \omega_s\, B^s_j \\ q^i = -\dfrac{\omega}{2}\, S^{\ell s}\, v^i_\ell\, \omega_s \end{cases}$$

*

* *

A N N E X E D

SUR UNE PROPRIETE DES MATRICES DEFINIES POSITIVES ET DE LEURS INVERSES

Soit ϕ^{ij} un tenseur aléatoire symétrique et défini positif, et ψ_{ij} son inverse. Nous nous proposons de montrer que la matrice

$$E(\phi^{-1}) - \left[E(\phi)\right]^{-1}$$

est définie positive.

Partons de la relation

$$\alpha^i \psi_{i\ell} \phi^{\ell j} \beta_j = \alpha^u \beta_u \tag{D,1}$$

Elle exprime que ϕ et ψ sont inverses. Comme $\psi_{i\ell}$ est définie positive, l'inégalité de SCHWARTZ :

$$\left[E(\alpha^i \psi_{i\ell} \gamma^\ell)\right]^2 \leqslant E(\alpha^i \psi_{i\ell} \alpha^\ell)\, E(\gamma^i \psi_{i\ell} \gamma^\ell)$$

est vérifiée. Prenons pour γ^ℓ l'expression :

$$\gamma^\ell = \phi^{\ell j} \beta_j$$

A gauche, d'après (D,1), on obtient $(\alpha^u \beta_u)^2$. A droite, on remarque que :

$$\gamma^i \psi_{i\ell} \gamma^\ell = \gamma^i \beta_i = \beta_i \phi^{ij} \beta_j$$

D'où l'inégalité :

$$\alpha^u \alpha^v \beta_u \beta_v \leqslant \alpha^u E(\psi_{uv}) \alpha^v \, \beta_\ell \, E(\phi^{\ell s}) \beta_s$$

Prenons ensuite comme vecteur β successivement chacun des n vecteurs propres de $E(\phi)$ et sommons les inégalités. On obtient, pour le vecteur β^i de valeur propre λ^i :

$$\alpha^u \alpha^v \frac{\beta^i{}_u \beta^i{}_v}{\lambda^i} \leqslant \alpha^u E(\psi_{uv}) \alpha^v$$

en sommant en i on fait apparaître les composantes H_{uv} de $E(\varphi)^{-1}$

$$H_{uv} = \sum_i \frac{\beta^i_u \beta^i_v}{\lambda^i}$$

Par suite :

$$\alpha^u H_{uv} \alpha^v \leqslant \alpha^u E(\psi_{uv}) \alpha^v$$

Cette inégalité exprime que la matrice $E(\psi) - \left[E(\varphi)\right]^{-1}$, de composantes $E(\psi_{uv}) - H_{uv}$, est définie positive, comme nous l'avions annoncé.

Ce résultat, qui peut aussi s'énoncer en disant que la matrice

$$E(\phi) \; E(\phi^{-1}) - 1$$

est définie positive est une généralisation évidente de la relation usuelle :

$$E(X) \; E(\tfrac{1}{X}) - 1 \geqslant 0$$

valable pour les variables aléatoires scalaires.

*

* *

A N N E X E   E

CALCUL DE $T^{ij}_{\ell s}$ DANS LE CAS SUB-ISOTROPE

Partons de l'expression (109) :

$$T^{ij}_{\ell s} = \frac{1}{(k_o)^2} \int P^{ivtj}(\rho) \frac{u_\ell u_s u_v u_t}{\rho^4} du \tag{E,1}$$

où, par hypothèse, la transformée de Fourier $P^{ivtj}(\rho)$ de $R^{ivtj}(r)$ ne dépend que de

$$\rho = \sqrt{g^{\ell s} u_\ell u_s}$$

D'une manière générale, soit $\Phi(\rho)$ la transformée d'une fonction sphérique $F(r)$, et soit à calculer :

$$A_{\ell svt} = \int \Phi(\rho) \frac{u_\ell u_s u_v u_t}{\rho^4} du \tag{E,2}$$

Plaçons nous en axes orthonormés. Les seules composantes non nulles du tenseur A sont :

$$A_{1111} = A_{2222} = A_{3333}$$

$$A_{1122} = A_{2233} = A_{3311} = A_{1212} = \ldots.$$

puisque l'intégrale (E,2) est nulle si son argument est impair. Compte tenu de la définition de ρ^2, on a de plus (l'espace étant à 3 dimensions)

$$g^{\ell s} g^{vt} A_{\ell svt} = (3 A_{1111} + 6 A_{1122}) = \int \Phi(\rho) du = F(0)$$

Il suffit de calculer A_{1111}. Passant en coordonnées polaires, on trouve :

$$A_{1111} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^4\phi \sin\phi \, d\phi \int \Phi(\rho)\rho^2 d\rho = \frac{1}{5} \int 4\pi \Phi(\rho)\rho^2 \, d\rho$$

soit :

$$\left\{\begin{aligned} A_{1111} &= \frac{1}{5}\int \Phi(\rho)du = \frac{1}{5}F(0) \\ A_{1122} &= \frac{1}{15}\int \Phi(\rho)du = \frac{1}{15}\ F(0) \end{aligned}\right.$$

Sous forme tensorielle nous avons par conséquent :

(E,3) $$A_{vt\ell s} = \frac{1}{15}F(0)\left[g_{vt}\ g_{\ell s} + g_{v\ell}\ g_{ts} + g_{vs}\ g_{t\ell}\right]$$

Appliquons cette relation au calcul de (E,1). On a ici

$$\int P^{ivtj}(\rho)du = R^{ivtj}(0) = C^{ivtj}$$

Par suite, il vient :

(E,4) $$T^{ij}_{\ell s} = \frac{1}{15}\ \frac{C^{ivtj}}{(k_0)^2}\left[g_{vt}\ g_{\ell s} + g_{v\ell}\ g_{ts} + g_{vs}\ g_{t\ell}\right]$$

Cas isotrope

Plaçons nous maintenant dans l'hypothèse de l'isotropie, au sens précis suivant : il y a sub-isotropie et, de plus, la matrice des covariances C^{ivtj} prises au même point d'appui est invariante par rotation (ou, si l'on veut, le tenseur C^{ivtj} a mêmes composantes dans tous les systèmes orthonormés). On voit facilement, par un raisonnement classique en élasticité, que les 36 composantes C^{ivtj} ne dépendent, en réalité, que de deux paramètres λ et μ :

(E,5) $$C^{ivtj} = \left[\lambda\ g^{iv}\ g^{tj} + \mu\left[g^{it}\ g^{vj} + g^{ij}\ g^{vt}\right]\right](k_0)^2$$

Compte tenu de (E,5), l'expression (E,4) de $T^{ij}_{\ell s}$ devient, dans le cas isotrope :

(E,6) $$T^{ij}_{\ell s} = \frac{1}{15}\left[(\lambda+\mu)(\delta^i_\ell\ \delta^j_s + \delta^i_s\ \delta^j{}_\ell) + (\lambda + 6\mu)\ g^{ij}\ g_{\ell s}\right]$$

Calculons dans ce cas le tenseur de SCHWYDLER :

$$S^{ij} = g^{ls} T^{ij}_{ls} = \frac{\Lambda}{3(k_o)^2} g_{vt} C^{ivtj}$$

On trouve, à partir de (E,5) ou de (E,6) :

$$S^{ij} = \frac{\Lambda}{3} (\lambda + 4\mu) g^{ij} \tag{E,7}$$

Dans cette hypothèse, <u>le tenseur de SCHWYDLER est isotrope.</u>