B. R. G. M.
Département GEOSTATISTIQUE

N-57

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 60

TRANSFORMATION DES PERMEABILITES DANS LES DEFORMATIONS LINEAIRES

Juin 1965

G. MATHERON

N-57

B. R. G. M.
Département GEOSTATISTIQUE

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 60

TRANSFORMATION DES PERMEABILITES DANS LES DEFORMATIONS LINEAIRES

G. MATHERON

Juin 1965

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 60

TRANSFORMATION DES PERMEABILITES DANS LES DEFORMATIONS LINEAIRES

Table des Matières

N O T E   G E O S T A T I S T I Q U E   N° 6 0

TRANSFORMATION DES PERMEABILITES DANS LES DEFORMATIONS LINEAIRES

I.- REGLES DE SIMILITUDES

On connaît l'importance des règles de similitude en hydrodynamique. Leur succès provient de ce que le groupe des similitudes laisse invariante la forme des équations fondamentales. Lorsque deux milieux se déduisent l'un de l'autre par similitude, toute solution des équations fondamentales pour le premier milieu se transforme, à un facteur près, en une solution relative au deuxième milieu.

Par exemple, soient deux milieux poreux $A(x)$ et $B(y)$ rapportés à des axes orthogonaux $(Ox_1, Ox_2 \ldots)$ et $(O'y_1, O'y_2 \ldots)$ respectivement, tels que la similitude

$$x = \lambda y$$

fasse correspondre les grains de B aux grains de A et les pores de B aux pores de A (autrement dit $\omega_A(x) = \omega_B(\lambda y)$, ω_A et ω_B désignant les porosités ponctuelles de A et B). Soient $p(y)$ et $u^i(y)$ une solution des équations de Navier pour le milieu B

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial p(y)}{\partial y^i} = \mu \, \Delta \, u_i(y) \\ \partial_i \, u^i(y) = 0 \end{array} \right.$$

Si l'on pose :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} p'(x) = p(\frac{x}{\lambda}) \\ u'_i(x) = \lambda \, u_i(\frac{x}{\lambda}) \end{array} \right.$$

on vérifie immédiatement que $p'(x)$ et $u'_i(x)$ sont une solution de l'équation de Navier pour le milieu A (vérifiant les conditions aux limites déduites par similitude de celles que l'on avait imposées au milieu A).

Supposons en outre (voir Note N° 59) que la solution relative au milieu B vérifie la loi de Darcy (microscopique ou macroscopique)

$$\rho \, u^i(y) = k^{ij}(y) \, \frac{\partial p(y)}{\partial y^j}$$

Remplaçant y par $\frac{x}{\lambda}$ on obtient

$$\rho\, u^{i}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = k^{ij}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \lambda \frac{\partial p\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\partial x^{j}}$$

Soit, d'après (2)

$$\rho\, u'^{i}(x) = \lambda^{2} k^{ij}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \frac{\partial p'(x)}{\partial x^{j}}$$

Ainsi, la solution u'^{i}, p' obtenue pour le milieu A vérifie, elle aussi, une loi de Darcy, avec un tenseur des perméabilités $k'^{ij}(x)$ qui se déduit de la perméabilité $k^{ij}(y)$ du milieu B selon la loi

$$k'^{ij}(x) = \lambda^{2} k^{ij}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \tag{3}$$

La loi de transformation (3) ainsi obtenue coincide avec la loi de transformation du tenseur k^{ij} lorsque la relation $x = \lambda y$ est interprêtée comme un changement de coordonnées. Mais son contenu physique est plus riche que la notion d'invariance tensorielle. Il ne s'agit pas, en effet, d'exprimer dans les nouvelles coordonnées x le tenseur k^{ij} représentant la même propriété physique (perméabilité) du même milieu B, mais de déduire d'une propriété du milieu B la propriété correspondante d'un autre milieu A physiquement différent.

Le fait que la loi de correspondance (3) affecte une forme tensorielle est naturellement lié à l'invariance de la forme de l'équation de Navier pour le groupe des similitudes, et ne subsiste pas pour le groupe plus vaste des transformations linéaires. Le laplacien, en effet, se transformera en un polynome différentiel du 2ème ordre à coefficients constants, mais quelconques : la transformée d'une solution de l'équation de Navier vérifiera une équation aux dérivées partielles qui n'aura plus la forme de l'équation de Navier : ce ne sera pas une solution.

Ainsi, si deux milieux A et B se déduisent l'un de l'autre par une transformation linéaire, leurs solutions u', p' et u, p ne peuvent pas se déduire l'une de l'autre par la même transformation. La loi de correspondance entre les tenseurs $k^{ij}(y)$ et $k'^{ij}(x)$ ne sera donc plus linéaire et pourra prendre un aspect très complexe.

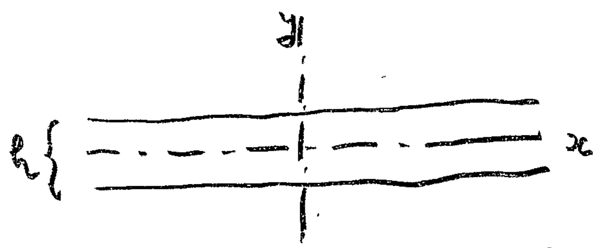
Pour déterminer cette loi de correspondance, il faudrait résoudre explicitement les équations de Navier, ce que nous sommes bien incapables de faire dans le cas d'un milieu poreux quelconque. Si nous voulons aller plus loin, il est nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices. Or il se trouve que le schéma du milieu poreux à canalicules indépendants (NOTE 59) se prête à des calculs explicites. Les lois obtenues dans ce cas particulier très simple n'auront évidemment pas de valeur générale, mais apporteront pourtant une indication qualitative intéressante. Nous verrons que, malgré le caractère simpliste du schéma utilisé, les lois obtenues ont déjà un aspect complexe et, en particulier, dépendent d'un grand nombre de paramètres.

La même méthode, d'autre part peut être appliquée à l'étude de la propagation d'un courant électrique dans un milieu de conductivité régionalisée. Le milieu à canalicules indépendants trouvera son équivalent dans un réseau de conducteurs rectilignes d'orientations variées. Le calcul que nous ferons montrera que, dans une transformation linéaire, la conductivité se modifie selon des lois qui ne sont pas du tout les mêmes que pour les perméabilités. Soumise à un examen critique, l'analogie électrique se révèle trompeuse (bien qu'elle soit souvent utilisée en toute confiance par les expérimentateurs : la bonne conscience et le sentiment psychologique de sécurité qu'entraîne la manipulation de phénomènes concrets empêchent de voir que le phénomène réellement expérimenté n'est pas de même nature que celui que l'on veut étudier).

II.- MILIEU A CANALICULES INDEPENDANTS - 2 DIMENSIONS.

a/- Solution de l'équation de Navier pour un canal rectiligne de largeur h, constante.

L'écoulement permanent correspond à une vitesse $v(y)$ orientée selon l'axe du canal pris comme axe des x, et dépendant seulement de y. Les conditions aux limites donnent :



$$v\left(\frac{h}{2}\right) = v\left(-\frac{h}{2}\right) = 0$$

Avec $v = C\left(y^2 - \frac{h^2}{4}\right)$, on a $\Delta v = 2\,C$. Si $\varpi = \frac{dp}{dx}$ est le gradient constant de pression, l'équation de Navier :

$$\varpi = \mu\,\Delta v$$

est vérifiée pour $C = \frac{\varpi}{2\mu}$, et l'équation de continuité est également vérifiée puisque

v ne dépend pas de x. Ainsi, on a :

$$\sigma(y) = \frac{\varpi}{2\mu} \left(y^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

Le débit total est

$$Q = 2\,\rho \int_0^{h/2} v(y)dy = -\frac{\varpi\,\rho}{12\,\mu}\, h^3$$

Le débit unitaire est ainsi donné par une loi du type de Darcy :

$$\left\{ \begin{aligned} q &= -\,k\,\frac{dp}{dx} \\ k &= \frac{\rho}{12\mu}\,h^2 \end{aligned} \right.$$

b/ <u>Milieu à canalicules indépendants.</u> Soit ω la porosité (probabilité pour qu'un point x soit dans les pores) et $f(\alpha,h)d\alpha\,dh$ la probabilité pour qu'un point donné des pores appartienne à un canal de direction α et de largeur h. Si ω est petit, on peut négliger les perturbations qu'apportent à l'écoulement les phénomènes qui se produisent à l'intersection de deux canalicules d'orientations différentes. Pour un gradient $\partial_j p$ constant donné, l'écoulement d'ensemble est alors la somme des écoulements qui se produisent dans chacun des canaux pris isolément. Le canal (α^i,h) est soumis au gradient longitudinal $\frac{dp}{d\alpha} = \alpha^j\,\partial_j p$. Le débit unitaire dans la direction de son axe est donc $-\frac{\rho}{12\mu}\,h^2\,\alpha^j\partial_j p$, soit vectoriellement :

$$q^i = -\,\frac{\rho}{12\,\mu}\;h^2\,\alpha^i\,\alpha^j\;\partial_j\,p$$

En un point x quelconque, le débit q^i macroscopique est donné par l'espérance mathématique de l'expression précédente. D'où la loi de Darcy :

$$q^i = -\,k^{ij}\,\partial_j\,p$$

avec l'expression suivante du tenseur des perméabilités :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & k^{ij} = C\,E(h^2\,\alpha^i\,\alpha^j) = C \iint h^2\,\alpha^i\,\alpha^j\,f(\alpha,h)d\alpha dh \\ & \qquad\qquad \left(C = \frac{\omega\rho}{12\,\mu}\right) \end{aligned} \right.$$

Sous forme explicite :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} k^{11} &= C\ E(h^2 \cos^2 \alpha) \\ k^{12} &= C\ E(h^2 \sin \alpha \cos \alpha) \\ k^{22} &= C\ E(h^2 \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right.$$

c/ <u>Loi de transformation des k^{ij}</u>

Sur le milieu à canalicules indépendants étudié ci-dessus, effectuons la déformation linéaire

$$x' = \lambda\, x \qquad\qquad y' = \mu\, y$$

(la lettre μ - module d'affinité selon Oy - n'a plus rien à voir avec la viscosité qui est, à partir de maintenant, incorporée dans le coefficient constant C de l'équation (5).

A tout point (x,y) d'un canalicule (h,α) correspond le point (x',y') appartenant à un canalicule (h',α') avec :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin \alpha' &= \frac{\mu \sin \alpha}{\sqrt{\lambda^2\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha}} \\ \cos \alpha^2 &= \frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{\lambda^2\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha}} \\ h' &= \frac{\lambda\, \mu\, h}{\sqrt{\lambda^2\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha}} \end{aligned} \right.$$

Le nouveau tenseur de perméabilité :

$$K^{ij} = C\ E(h'^2\, \alpha'^i\, \alpha'^j)$$

peut donc s'expliciter comme suit :

$$(7) \qquad \begin{cases} K^{11} = C\,\lambda^4\,\mu^2 \displaystyle\iint \frac{h^2 \cos^2\alpha}{(\lambda^2\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha)^2}\, f\, d\alpha dh \\ K^{12} = C\,\lambda^3\,\mu^3 \displaystyle\iint \frac{h^2 \sin\alpha\cos\alpha}{(\lambda^2\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha)^2}\, f\, d\alpha dh \\ K^{22} = C\,\lambda^2\,\mu^4 \displaystyle\iint \frac{h^2 \sin^2\alpha}{(\lambda^2\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha)^2}\, f\, d\alpha dh \end{cases}$$

La comparaison des relations (5) et (7) montre que la loi de transformation des perméabilités dépend de manière assez complexe des modules λ et μ de la déformation. Pour $\lambda = \mu$, on retrouve la règle de similitude $K^{ij} = \lambda^2\, k^{ij}$. Mais, si $\lambda \neq \mu$, la loi de transformation dépend explicitement de la distribution $f(\alpha,h)$ des canalicules. Pour fixer les idées, examinons ce que donnent les formules (7) pour quelques distributions particulièrement simples.

d/- <u>Distribution uniforme.</u> Supposons h et α indépendant, et posons

$$E(h^2) = d^2$$

et prenons une loi $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$ uniforme (toutes les directions sont également probables). De (5) on déduit :

$$\begin{cases} k^{11} = k^{22} = \frac{1}{2}\, C\, d^2 \\ k^{12} = 0 \end{cases}$$

Le milieu initial est évidemment isotrope. Après déformation, on obtient encore

$$K^{12} = 0$$

et

$$K^{11} = C\,\lambda^4\,\mu^2\,\frac{d^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\alpha}{(\lambda^2\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha)^2}\, d\,\alpha$$

$$K^{11} + K^{12} = C\,\lambda^2\,\mu^2\,d^2\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\,\alpha}{(\lambda^2\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha)}$$

On vérifie facilement les égalités

$$\Phi(\lambda^2,\mu^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\,\alpha}{\lambda^2\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha} = \frac{1}{\lambda\,\mu}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\alpha\, d\,\alpha}{(\lambda^2\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha)^2} = -\frac{d}{d\lambda^2}\, \Phi(\lambda^2,\mu^2) = \frac{1}{2\,\lambda^3\mu}$$

D'où

$$\begin{cases} K^{11} + K^{22} = C\, d^2\, \lambda\,\mu \\ K^{11} = K^{22} = \frac{1}{2}\, C\, d^2\, \lambda\,\mu \\ K^{12} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, dans ce cas particulier, le milieu transformé reste isotrope. Les perméabilités sont multipliées par le produit $\lambda\,\mu$ des modules d'affinité. Cette règle de similitude généralisée est liée, en fait, à la distribution uniforme des directions. Elle ne subsiste pas pour d'autres distributions.

e/- Distribution discrète.

Prenons encore h et α indépendants, et supposons que la moitié des canalicules aient la direction $\alpha = 0$, l'autre moitié la direction $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Le milieu initial est isotrope et possède les mêmes perméabilités que ci-dessus.

$$\begin{cases} k^{11} = k^{22} = \frac{1}{2}\, C\, d^2 \\ k^{12} = 0 \end{cases}$$

Après déformation, on obtient :

$$\begin{cases} K^{11} = \frac{1}{2}\, C\, d^2\, \mu^2 = \mu^2\, k^{11} \\ K^{22} = \frac{1}{2}\, C\, d^2\, \lambda^2 = \lambda^2\, k^{22} \\ K^{12} = 0 \end{cases}$$

Le milieu est, cette fois, anisotrope. Si $\mu > \lambda$, $K^{11} > K^{22}$: l'anisotropie des perméabilités est inverse de celle des déformations. C'est dans la direction de moindre contraction que la perméabilité est la plus réduite.

Avec une autre loi discrète : la moitié des canalicules dans la direction $\frac{\pi}{4}$, l'autre dans la direction $3\frac{\pi}{4}$, on a encore

$$\begin{cases} k^{11} = k^{22} = \frac{1}{2} C\, d^2 \\ k^{12} = 0 \end{cases}$$

mais cette fois

$$\begin{cases} K^{11} = \dfrac{4\,\lambda^4\,\mu^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\, k^{11} \\ K^{22} = \dfrac{4\,\lambda^2\,\mu^4}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\, k^{22} \\ K^{12} = 0 \end{cases}$$

Cette fois, pour $\mu > \lambda$ on a $K^{22} > K^{11}$: l'anisotropie des perméabilités a le même sens que l'anisotropie des déformations.

f/- Déformation infiniment petite.

Pour plus de commodité, introduisons la fonction

$$\Phi(\lambda^2,\mu^2) = \iint \frac{h^2}{\lambda^2\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha}\, f\, d\alpha dh$$

Les relations (7) donnent :

$$\begin{cases} K^{11} + K^{22} = C\,\lambda^2\,\mu^2\,\Phi(\lambda^2\,\mu^2) \\ K^{11} = -\,C\,\lambda^4\,\mu^2\,\dfrac{d\Phi}{d\lambda^2} \\ K^{22} = -\,C\,\lambda^2\,\mu^4\,\dfrac{d\Phi}{d\,\mu^2} \end{cases}$$

K^{12} ne s'exprime pas à partir de Φ. Mais, si la loi f est symétrique par rapport à $\alpha = 0$, K^{12} est identiquement nul. Nous nous limiterons à ce cas particulier, qui est celui où déformations et perméabilités ont mêmes directions principales.

Pour étudier une déformation infiniment petite, posons :

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1 - \varepsilon \\ \mu^2 = 1 - \eta \end{cases}$$

On a :

$$\frac{1}{\lambda^2\cos^2\alpha + \mu^2\sin^2\alpha} = \frac{1}{1 - \varepsilon\cos^2\alpha - \eta\sin^2\alpha} = 1 + \varepsilon\cos^2\alpha + \eta\sin^2\alpha + (\varepsilon\cos^2\alpha + \eta\sin^2\alpha)^2 + \ldots$$

D'où :

$$\Phi(\lambda^2\,\mu^2) = d^2 + \varepsilon\,E(h^2\cos^2\alpha) + \eta\,E(h^2\sin^2\alpha)$$
$$+ \varepsilon^2\,E(h^2\cos^4\alpha) + 2\varepsilon\,E(h^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha) + \eta^2 E(h^2\sin^4\alpha) +$$

Au premier ordre, on obtient ainsi pour la trace des perméabilités :

$$K^{11} + K^{22} = (k^{11} + k^{22} + \varepsilon\,k^{11} + \eta\,k^{22})(1 - \varepsilon - \eta)$$

$$K^{11} + K^{22} = (1 - \eta)k^{11} + (1 - \varepsilon)\,k^{22}$$

Pour calculer K^{11}, on remarque que l'on a :

$$-\frac{d\phi}{d\lambda^2} = \frac{d\phi}{d\,\varepsilon} = E(h^2\cos^2\alpha) + 2\,\varepsilon\,E(h^2\cos^4\alpha) + 2\,\eta E(h^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$$

D'où

$$K^{11} = \lambda^4\,\mu^2\left[k^{11} + 2\varepsilon\,C\,E(h^2\cos^4\alpha) + 2\eta\,C\,E(h^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)\right]$$

$$K^{22} = \lambda^2\,\mu^4\left[k^{22} + 2\eta\,C\,E(h^2\sin^4\alpha) + 2\,\varepsilon\,C\,E(h^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)\right]$$

Soit encore

$$\begin{cases} K^{11} = (1 - 2\varepsilon - \eta)\,k^{11} + 2\varepsilon\,C\,E(h^2\cos^4\alpha) + 2\eta\,C\,E(h^2\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha) \\ K^{22} = (1 - 2\eta - \varepsilon)k^{22} + 2\varepsilon\,C\,E(h^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) + 2\eta\,C\,E(h^2\sin^4\alpha) \end{cases}$$

Les relations

$$\begin{cases} k^{11} = C\ E(h^2\cos^2\alpha) = C\ E(h^2\cos^4\alpha) + C\ E(h^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) \\ k^{22} = C\ E(h^2\sin^2\alpha) = C\ E(h^2\sin^4\alpha) + C\ E(h^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) \end{cases}$$

montre que le moment d'ordre 4 $E(h^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha)$ intervient seul dans ces relations. Posons

$$k_o = C\ E(h^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha)$$

Il vient

$$\begin{cases} K^{11} = (1 - \eta)k^{11} + 2(\eta - \varepsilon)k_o \\ K^{22} = (1 - \varepsilon)\ k^{22} - 2(\eta - \varepsilon)k_o \end{cases}$$

Ainsi, même pour des déformations infiniment petites, la loi de répartition $f(\alpha,h)$ intervient de manière essentielle, par l'intermédiaire du moment d'ordre 4 $E(h^2\sin^2\alpha \cos^2\alpha)$: Le paramètre k_o qui figure dans les relations (8) ne peut en aucune manière se déduire des perméabilités k^{ij} du milieu initial. C'est une caractéristique physique supplémentaire du milieu, dont la dimension est celle d'une perméabilité. Ce terme k_o suggère l'existence d'un nouveau tenseur, que l'on pourrait appeler <u>tenseur des perméabilités secondes</u>, capable de rendre compte de la transformation des k^{ij} dans une déformation très petite. Pour mettre en évidence ce tenseur, il est préférable de revenir à des notations tensorielles plus générales.

g/ <u>Forme tensorielle de la loi de transformation.</u>

Soit A la matrice de la transformation :

$$x' = A\ x \qquad \text{ou} \qquad x'^i = a^i{}_j\ x^j$$

Le vecteur unitaire u^i (de l'espace des x) de direction α devient le vecteur u'^i (de l'espace des x'), qui n'est plus unitaire

$$u'^i = a^i{}_j\ u^j$$

En normant u'^i, on obtient le vecteur unitaire α' :

$$\alpha'^i = \frac{u'^i}{|u'|} = \frac{a^i{}_j\ u^j}{\sqrt{g_{\ell m}\ a^\ell{}_r\ a^m{}_s\ u^r u^s}}$$

Désignons par $\Delta = |A|$ le déterminant de A. L'élément d'aire $h \wedge u$ construit sur u et le vecteur h (orthogonal à u et représentant la largeur du canal) a pour homologue un élément $h'_1 \wedge u'$ avec

$$|h'_1 \wedge u'| = \Delta |u \wedge h| = |h| \Delta$$

D'autre part $u' = \alpha' |u'|$ (α' unitaire) et $|h'_1 \wedge \alpha'| = h'$ est la largeur du canal transformé. Donc :

$$h' = \frac{h\Delta}{|u'|} = \frac{h\,\Delta}{\sqrt{g_{\ell m}\, a^{\ell}_{r}\, a^{m}_{s}\, u^{r}\, u^{s}}}$$

Nous obtenons ainsi notre loi de transformation sous la forme tensorielle générale :

$$K^{ij} = C\,\Delta^2\, E\left[\frac{h^2\, a^{i}_{\ell}\, a^{j}_{m}\, \alpha^{\ell}\alpha^{m}}{\left(g_{\ell m}\, a^{\ell}_{r}\, a^{m}_{s}\, \alpha^{r}\,\alpha^{s}\right)^2}\right] \tag{9}$$

Le terme qui figure au numérateur représente la transformation du tenseur $\alpha^i\,\alpha^j$ dans le changement de coordonnées associé à la matrice A. Le dénominateur n'est constant que si A représente une similitude. Pour une matrice A quelconque, c'est une fonction du vecteur α.

Cas d'une déformation infiniment petite. Posons :

$$a^i_j = \delta^i_j - \varepsilon^i_j$$

les ε^i_j étant infiniment petits. Au premier ordre on a

$$\Delta = 1 - \varepsilon^i_i = 1 - \varepsilon^1_1 - \varepsilon^2_2$$

$$\Delta^2 = 1 - 2\,\varepsilon^i_i$$

Le numérateur de l'expression (9) se réduit à :

$$h^2(\delta^i_\ell - \varepsilon^i_\ell)\,(\delta^j_m - \varepsilon^j_m)\,\alpha^\ell\,\alpha^m = h^2\left[\alpha^i\,\alpha^j - \varepsilon^i_\ell\,\alpha^\ell\,\alpha^j - \varepsilon^j_m\,\alpha^i\,\alpha^m\right]$$

Cette expression est symétrique en i et j.

La forme-quadratique s'obtient en multipliant par g_{ij} l'expression entre crochets écrite ci-dessus, soit :

$$g_{ij}\left[\alpha^i \alpha^j - \varepsilon^i_\ell \alpha^\ell \alpha^j - \varepsilon^j_m \alpha^i \alpha^m\right] = 1 - 2\,\varepsilon_{\ell m}\, \alpha^\ell \alpha^m$$

Finalement, au premier ordre, il vient :

$$K^{ij} = C(1 - 2\,\varepsilon^\ell_\ell)\, E\left[h^2(\alpha^i \alpha^j - \varepsilon^i_\ell \alpha^\ell \alpha^j - \varepsilon^j_m \alpha^i \alpha^m)(1 + 4\varepsilon_{\ell m}\alpha^\ell \alpha^m)\right]$$

$$= C(1 - 2\varepsilon^\ell_\ell)\, E\left[h^2(\alpha^i \alpha^j - \varepsilon^i_\ell \alpha^\ell \alpha^j - \varepsilon^j_m \alpha^i \alpha^m + 4\varepsilon_{\ell m}\alpha^\ell \alpha^m \alpha^i \alpha^j)\right]$$

Soit :

(10) $$K^{ij} = (1 - 2\varepsilon^\ell_\ell)\left[k^{ij} - \varepsilon^i_\ell k^{\ell j} - \varepsilon^j_m k^{im} + 4\varepsilon_{\ell m} R^{\ell m i j}\right]$$

Le tenseur $R^{\ell m i j}$ (complètement symétrique d'ordre 4) est lié aux moments du 4ème ordre des α^i par la relation

(11) $$R^{\ell m i j} = C\, E(h^2\, \alpha^\ell \alpha^m \alpha^i \alpha^j)$$

Par contraction sur deux indices, ce tenseur donne les perméabilités $k^{\ell m}$:

$$R^{\ell m i}{}_i = C\, E(h^2\, \alpha^\ell \alpha^m \alpha^i \alpha_i) = C\, E(h^2\, \alpha^\ell \alpha^m)$$

D'où :

(12) $$R^{\ell m i}{}_i = k^{\ell m}$$

Ainsi <u>toutes les propriétés que nous avons en vue - les perméabilités k^{ij} et leurs variations dans une déformation infiniment petite</u> - <u>peuvent s'exprimer à l'aide d'un être mathématique unique</u>, <u>qui est le tenseur complètement symétrique d'ordre 4</u> $R^{ij\ell m}$. Ce tenseur possède, l'espace ayant deux dimensions, cinq composantes distinctes seulement. La loi de transformation (10), que l'on écrira plutôt sous la forme :

(13) $$K^{ij} = (1 - 2\varepsilon^\ell_\ell)k^{ij} - \varepsilon^i_\ell k^{\ell j} - \varepsilon^j_m k^{mi} + 4\,\varepsilon_{\ell m} R^{\ell m i j}$$

donne pour la trace K^i_i, compte tenu de (12) :

$$K^i_i = (1 - 2\varepsilon^\ell_\ell)\, k^i_i - \varepsilon_{i\ell} k^{\ell i} - \varepsilon_{im} k^{mi} + 4\,\varepsilon_{\ell m} k^{\ell m}$$

Soit

$$K^i_i = (1 - 2\varepsilon^\ell_\ell) k^i_i + 2\varepsilon_{ij}\, k^{ij} \tag{14}$$

Cet invariant ne dépend que des perméabilités k^{ij}. Son calcul, contrairement à ce qui se passe pour les K^{ij} elles-mêmes, ne nécessite pas l'intervention explicite du tenseur R.

III.- MILIEU A CANALICULES INDEPENDANTS - 3 DIMENSIONS.

A trois dimensions, les calculs se conduisent d'une manière analogue, avec cependant quelques difficultés supplémentaires imputables au fait qu'il faut maintenant 3 paramètres (au lieu d'un seul) pour définir la section d'un cylindre elliptique d'orientation donnée.

a/ Solution de l'équation de Navier pour un cylindre dont la section droite est une ellipse de demi-axes a et b. On prend l'axe du cylindre comme axe des x et on cherche une solution où la vitesse, orientée selon l'axe des x, est de la forme :

$$u(y,z) = C\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right)$$

On a ici $\Delta u = 2\, C\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$, d'où :

$$C = \frac{a^2\, b^2}{2\mu(a^2+b^2)}\ \frac{dp}{dx}$$

Le débit unitaire est

$$\frac{\rho}{\pi\, ab}\iint u(y,z)\,dydz = \rho\, C\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{\rho}{4\mu}\,\frac{a^2\, b^2}{a^2+b^2}\ \frac{dp}{dx}$$

Le canal cylindrique de section elliptique vérifie donc une loi de Darcy de la forme :

$$\begin{cases} q = -\,k\,\dfrac{dp}{dx} \\[2ex] k = -\,\dfrac{\rho}{4\,\mu}\ \dfrac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

b/- Milieu à canalicules indépendants. - Si le canal est orienté selon le vecteur unitaire α^i, on obtient :

$$q^i = - \frac{\rho}{4\mu} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \alpha^i \alpha^j \partial_j p$$

Pour un milieu à canalicules indépendants de porosité ω , on obtient la loi de Darcy sous la forme

$$(15) \quad \begin{cases} q^i = - k^{ij} \partial_j p \\ k^{ij} = C \, E(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \alpha^i \alpha^j) \end{cases}$$

On a posé $C = \frac{\rho\omega}{4\mu}$. L'espérance mathématique $E(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \alpha^i \alpha^j)$ doit être prise relativement à la loi de répartition simultanée des variables aléatoires α^i, a et b. Les relations (15) généralisent (4) ou (5), à ceci près que la variable h^2 est remplacée par :

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

c/ Loi de transformation des k^{ij}. Soit

$$x'^i = a^i_\ell \, x^\ell \qquad\qquad x^\ell = b^\ell_i \, x'^i$$

la transformation linéaire faisant passer du milieu initial (espace des x) au milieu déformé (espace des x'), et g_{ij} et g'_{ij} les tenseurs métriques de ces deux espaces. On notera que g_{ij} et g'_{ij} ne dépendent que du choix des axes de coordonnées auxquels sont rapportés respectivement ces deux espaces.

L'ellipsoide $t_{ij} x^i x^j = 1$ du premier milieu se transforme dans l'ellipsoide

$$t'_{ij} \, x'^i x'^j \equiv t'_{ij} \, a^i_\ell \, a^j_m \, x^\ell x^m = 1$$

D'où :

$$\begin{cases} t'_{ij} \; a^i_{\ell} \; a^j_m = t_{\ell m} \\ t_{ij} \; b^i_{\ell} \; b^j_m = t'_{\ell m} \end{cases}$$

Lorsque $\mathrm{Det}\,|t_{ij}| = 0$, la quadrique $t_{ij}\,x^i\,x^j = 1$ est un cylindre d'axe α^i tel que $t_{ij}\,\alpha^j = 0$, et l'invariant $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ se réduit à :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = t^i_i = g^{ij}\,t_{ij}$$

Après déformation, cet invariant est devenu

$$t'^i_i = \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} = g'^{ij}\,t'_{ij} = g'^{\ell m}\,b^i_{\ell}\,b^j_m\,t_{ij}$$

De même, le vecteur unitaire α^i (axe du cylindre) s'est transformé en un vecteur $a^i_{\ell}\,\alpha^{\ell}$ non unitaire. Normant ce dernier vecteur, nous obtenons le vecteur unitaire de l'axe du cylindre transformé sous la forme :

$$\alpha'^i = \frac{a^i_{\ell}\,\alpha^{\ell}}{\sqrt{g'_{ij}\,a^i_{\ell}\,a^j_m\,\alpha^{\ell}\alpha^m}}$$

Avec ces notations tensorielles, les perméabilités initiales et transformées s'écrivent (d'après les relations (5)) :

$$\begin{cases} K^{ij} = C\,E\left(\dfrac{\alpha^i\,\alpha^j}{t^i_i}\right) \\[2ex] K'^{ij} = C\,E\left[\dfrac{a^i_{\ell}\,a^j_m\,\alpha^{\ell}\alpha^m}{(g'_{ij}\,a^i_{\ell}\,a^j_m\,\alpha^{\ell}\alpha^m)\,(g'^{\ell m}\,b^i_{\ell}\,b^j_m\,t_{ij})}\right] \end{cases} \tag{16}$$

les t_{ij} ayant un déterminant nul, et le vecteur unitaire α^i étant déterminé par $t_{ij}\,\alpha^j = 0$.

La loi de transformation (16) conduisant à des calculs assez compliqués, sans intérêt par eux-mêmes, lorsque la déformation est finie, nous nous limiterons au cas d'une déformation infiniment petite.

d/ Cas d'une déformation infiniment petite.

On a alors, au premier ordre vis-à-vis des ε (et avec un choix d'axes tels que $g_{ij} = g'_{ij}$).

$$\begin{cases} a^i_\ell = \delta^i_\ell - \varepsilon^i_\ell \\ b^i_\ell = \delta^i_\ell + \varepsilon^i_\ell \end{cases}$$

D'où (toujours au premier ordre)

$$\begin{cases} a^i_\ell \; a^j_m \, \alpha^\ell \alpha^m = \alpha^i \alpha^j - \varepsilon^i_\ell \; \alpha^\ell \alpha^j - \varepsilon^j_m \; \alpha^m \alpha^i \\ g'_{ij} \; a^i_\ell \; a^j_m \, \alpha^\ell \alpha^m = 1 - 2 \, g_{ij} \, \varepsilon^i_\ell \; \alpha^\ell \; \alpha^j \\ g'^{\ell m} \; b^i_\ell \; b^j_m \; t_{ij} = t^i_i + 2 \, g^{\ell m} \; \varepsilon^i_\ell \; t_{im} \end{cases}$$

Au premier ordre, on obtient ainsi à partir de (16)

$$K^{ij} = C\,E \left[\frac{\alpha^i \alpha^j - \varepsilon^i_\ell \; \alpha^\ell \alpha^j - \varepsilon^j_m \; \alpha^m \alpha^i}{t^i_i} + \frac{2 \, g_{rs} \; \varepsilon^r_m \, \alpha^m \alpha^s \; \alpha^i \; \alpha^j}{t^i_i} - \frac{2 \, g^{\ell m} \; \varepsilon^s_\ell \; t_{sm} \; \alpha^i \alpha^j}{(t^i_i)^2} \right]$$

Posons :

(18) $$R_r^{\;mij} = C\,E \left[\frac{g_{rs} \; \alpha^m \alpha^s \; \alpha^i \alpha^j}{t^i_i} - \frac{g^{m\ell} \; t_{r\ell} \, \alpha^i \alpha^j}{(t^i_i)^2} \right]$$

La loi de transformation peut s'écrire

(19) $$K^{ij} = k^{ij} - \varepsilon^i_\ell \; k^{\ell j} - \varepsilon^j_m \; k^{mi} + 2 \, \varepsilon^r_m \; R_r^{\;mij}$$

Elle s'exprime, ici encore, à l'aide d'un tenseur d'ordre 4. Ecrit sous forme contravariante, ce tenseur a pour expression :

$$R^{\ell mij} = C\,E \left[\frac{\alpha^\ell \alpha^m \alpha^i \alpha^j}{t^i_i} - \frac{t^{\ell m} \; \alpha^i \alpha^j}{(t^i_i)^2} \right]$$

Il est symétrique par rapport à chacun des deux groupes d'indices ℓ, m et i, j (mais non pas en ℓ et i, ou ℓ et j, etc ...). Par <u>contraction</u> sur les deux premiers indices, on obtient.

$$R^{\ell}{}_{\ell}{}^{ij} = C\,E\left[\frac{\alpha^i \alpha^j}{t^i_i} - \frac{t^{\ell}_{\ell}\,\alpha^i \alpha^j}{(t^i_i)^2}\right] = 0$$

Cette propriété traduit simplement, comme on le voit immédiatement, (en prenant la déformation $\varepsilon^r_s = \delta^r_s\,\varepsilon$) la règle de similitude hydrodynamique écrite en (3).

En contractant en i et j, il vient :

$$R^{\ell m i}{}_i = k^{\ell m} - C\,E\left(\frac{t^{\ell m}}{(t^i_i)^2}\right)$$

Contrairement à ce qui se passait à deux dimensions, ce tenseur contracté ne dépend pas seulement des k^{ij}. Cette circonstance est liée au fait que dans le milieu initial, on peut faire tourner un canalicule cylindrique autour de son axe sans modifier sa contribution aux k^{ij} ($\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ est invariant dans cette rotation), mais par contre cette rotation change le $K^{ij}(\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}$ est invariant pour les rotations de l'espace des x', mais non pour les rotations de l'espace des x). On conçoit bien que des rotations préférentielles amenant systématiquement les grands axes des sections de tous les canalicules en positions parallèles à un plan donné, sans influence sur les k^{ij}, modifient notablement les K^{ij}.

Si les cylindres sont de révolution, ou plus généralement, si, les α^i et les demi-axes a et b étant donnés, les directions des axes de la section sont uniformément réparties, en probabilité, dans le plan perpendiculaire à α^i, des simplifications se présentent. En effet, le cylindre de révolution d'axe α^i et de rayon R a pour équation

$$g_{ij}\,x^i x^j - (\alpha_i\,x^i)^2 = R^2$$

d'où

$$\begin{cases} t_{ij} = (g_{ij} - \alpha_i\,\alpha_j)\,\dfrac{1}{R^2} \\ t^i_i = \dfrac{2}{R^2} \end{cases}$$

Par suite :

$$C\,E\left(\frac{t^{ij}}{(t^i{}_i)^2}\right) = \frac{C}{2}\,E\left(\frac{g^{ij} - \alpha^i\,\alpha^j}{t^i{}_i}\right) = \frac{C}{4}\,g^{ij}\,E(R^2) - \frac{1}{2}\,k^{ij}$$

Soit

$$C\,E\left(\frac{t^{ij}}{(t^i{}_i)^2}\right) = \frac{1}{2}\,g^{ij}\,k^{\ell}{}_{\ell} - \frac{1}{2}\,k^{ij}$$

D'où l'expression du tenseur contracté :

(20) $$R^{\ell mi}{}_i = \frac{3}{2}\,k^{\ell m} - \frac{1}{2}\,g^{\ell m}\;k^i{}_i$$

Lorsque (20) est valable, <u>la trace $K^i{}_i$ ne dépend que des perméabilités initiales k^{ij}</u> :

$$K^i{}_i = k^i{}_i - 2\,\varepsilon_{i\ell}\;k^{\ell i} + 3\,\varepsilon_{rm}\,k^{rm} - \varepsilon^i{}_i\;k^i{}_i$$

Soit :

(21) $$K^i{}_i = (1 - \varepsilon^i{}_i)\,k^i{}_i + \varepsilon_{ij}\,k^{ij}$$

Le tenseur $R^{\ell mij}$ lui-même s'écrit, dans les mêmes conditions

$$R^{\ell mij} = \frac{3}{4}\,C\,E(R^2\,\alpha^\ell\,\alpha^m\,\alpha^i\,\alpha^j) - \frac{1}{2}\,g^{\ell m}\,k^{ij}$$

Soit

(22) $$\left\{\begin{aligned} R^{\ell mij} &= \frac{3}{2}\,S^{\ell mij} - \frac{1}{2}\,g^{\ell m}\;k^{ij} \\ S^{\ell mij} &= C\,E\left(\frac{\alpha^\ell\,\alpha^m\,\alpha^i\,\alpha^j}{t^i{}_i}\right)\end{aligned}\right.$$

La loi de transformation (20) prend alors la forme :

(23) $$K^{ij} = (1 - \varepsilon^\ell{}_\ell)\,k^{ij} - \varepsilon^i{}_\ell\;k^{\ell j} - \varepsilon^j{}_m\,k^{mi} + 3\,\varepsilon_{rm}\;S^{rm\,ij}$$

Le tenseur $S^{rm\,ij}$ est complètement symétrique et, par contraction, <u>redonne les perméabilités initiales</u>:

$$S^{rmi}{}_{i} = k^{rm} \tag{24}$$

En comparant (11) et (23), et (12) et (24), on voit que le tenseur S^{rmij} joue, à trois dimensions, le même rôle que $R^{\ell mij}$ à deux dimensions. Mais il possède 15 composantes distinctes (au lieu de 5). Compte tenu des 6 relations (24), ce tenseur introduit donc 9 paramètres physiques supplémentaires (au lieu de 2) dont la dimension est celle de perméabilités.

D'ailleurs, lorsque le milieu présente des symétries, le nombre des composantes distinctes du tenseur S peut être réduit notablement. (de la même manière, en élasticité, le tenseur a 4 indices, qui intervient dans la loi de Hooke, se réduit dans le cas d'un corps isotrope, à deux composantes distinctes, qui sont les coefficients de Lamé). Dans le cas le plus simple, celui d'un corps complètement isotrope, il n'y a plus qu'un seul paramètre.

e/ Exemple du milieu complètement isotrope.

Dans le milieu initial, les canalicules sont supposés être des cylindres de révolution de rayon R indépendant de la direction α de l'axe. Cette direction α est elle-même uniformément répartie sur la sphère de rayon unité. On obtient facilement :

$$\left\{\begin{array}{l} S^{1122} = S^{2233} = S^{3311} = \frac{1}{15}\, C\, E(\frac{R^2}{2}) \\ S^{1111} = S^{2222} = S^{3333} = \frac{1}{5}\, C\, E(\frac{R^2}{2}) \\ k^{11} = k^{22} = k^{33} = \frac{1}{3}\, C\, E(\frac{R^2}{2}) \end{array}\right.$$

Les composantes $S^{ij\ell m}$ où chaque indice n'est pas repeté un nombre pair de fois sont toutes nulles. L'état initial est isotrope avec la perméabilité

$$k = \frac{1}{3}\, C\, E(\frac{R^2}{2})$$

Si l'on prend des axes orthogonaux coïncidant avec les directions principales de la déformation, celle-ci se réduit à ses composantes diagonales. La loi (23) se réduit à :

$$\left\{\begin{array}{l} K^{11} = (1 - \frac{2}{5}\, \varepsilon^{i}{}_{i})k - \frac{4}{5}\, \varepsilon^{11}\, k \\ \text{-------------------} \\ K^{12} = \ldots = 0 \end{array}\right.$$

Contrairement à ce qui se passait à deux dimensions, l'état déformé n'est pas isotrope.

IV.- L'ANALOGIE ELECTRIQUE

La loi de Darcy, complétée par l'équation de continuité :

$$\begin{cases} q^i = - k^{ij} \partial_j p \\ \partial_i \; q^i = 0 \end{cases}$$

se présente sous le même aspect que la loi d'Ohm, complétée par l'équation de conservation de l'électricité

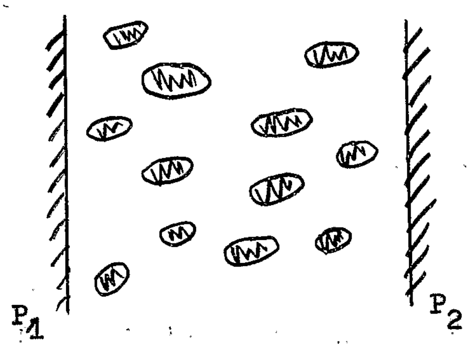
$$\begin{cases} I = \sigma \text{ grad } U \\ \text{div } I = \sigma \Delta U = 0 \end{cases}$$

(I vecteur courant, σ conductivité, U potentiel). Cette analogie devient parfaite lorsque le tenseur des perméabilités est isotrope ($k^{ij} = k\, g^{ij}$), la loi de Darcy se réduisant alors à :

$$q = - k \text{ grad } p$$

Ainsi tout problème d'écoulement macroscopique dans un milieu poreux isotrope obéissant à la loi de Darcy peut être remplacé par un problème électrique équivalent (et résolu expérimentalement).

Au niveau microscopique, malheureusement, cette analogie électrique cesse d'être valable. Il n'est pas possible de déterminer les perméabilités par des mesures électriques. En effet, imaginons une correspondance ponctuelle entre un milieu poreux et un milieu conducteur constitué par des grains isolants enchâssés dans un milieu de conductivité σ constante. Cette correspondance est telle qu'à tout grain du milieu poreux correspond un grain isolant du milieu conducteur.



Si l'on établit une différence de potentiel entre deux plaques P_1 et P_2 parallèles, séparées par une distance suffisamment grande vis-à-vis de la granulométrie, le courant qui s'établit est macroscopiquement uniforme. Tant qu'on se limite à des expériences de ce type (c'est-à-dire à des expériences conduisant à un courant localement uniforme au niveau macroscopique), une relation linéaire s'établit entre le courant macroscopique

$$\mathcal{J} = E(I)$$

et le gradient de potentiel. Il existe ainsi (voir Note 59) un tenseur constant de conductivité macroscopique σ^{ij} tel que :

(25) $$\mathcal{J}^i = \sigma^{ij} \partial_j U$$

De son coté, l'expérience hydraulique, effectuée dans les mêmes conditions sur le milieu poreux correspondant, conduit à la loi de Darcy

(26) $$q^i = -k^{ij} \partial_j p$$

Malgré l'analogie formelle de (25) et (26) et la correspondance établie entre le milieu poreux et le milieu conducteur, il n'y a aucune raison pour qu'il existe entre les tenseurs σ^{ij} et k^{ij} autre chose qu'une vague ressemblance qualitative. <u>Aucune règle simple ne permet de déduire la perméabilité de la conductivité</u>.

Cela se comprend assez bien. Au niveau microscopique, les équations de Navier

(27) $$\begin{cases} \partial_i p = \mu \Delta u_i \\ \partial_i u^i = 0 \end{cases}$$

ne sont pas équivalentes aux équations électriques :

(28) $$\begin{cases} \partial_i U = \frac{1}{\sigma} I_i \\ \partial_i I^i = 0 \end{cases}$$

Les conditions aux limites, en particulier, sont très différentes. Le courant électrique I contourne les grains isolants. A la frontière d'un grain, la composante normale I_n doit s'annuler, mais I n'est pas nul en général. Au contraire, les équations (27), qui sont d'ordre plus élevé, sont soumises à des conditions aux limites plus sévères : c'est le vecteur vitesse lui-même (et non plus seulement sa composante normale) qui doit s'annuler à la surface des grains. Les solutions de ces équations ne présentent, a priori, aucun rapport entre elles (sauf peut-être, une vague ressemblance purement qualitative). Si U_ℓ et p_ℓ désignent des solutions privilégiées, uniformes au niveau macroscopique, les gradients tensoriels $\partial_j u_\ell$ et $\partial_j p_\ell$ conduisent, par passage aux valeurs moyennes et inversion, à des tenseurs σ^{ij} et k^{ij} profondément différents.

Nous allons vérifier cette circonstance en explicitant les calculs dans le cas du réseau électrique aléatoire, qui est le correspondant exact du milieu poreux à canalicules indépendants.

Le réseau électrique aléatoire

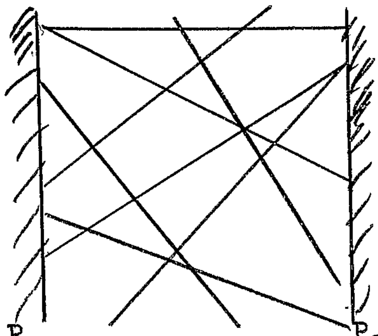
Dans un conducteur cylindrique de section constante S, la loi d'Ohm donne l'intensité i sous la forme

$$i = \sigma \frac{S}{\ell} \Delta U = \sigma S \text{ grad } U$$

Le vecteur courant (par unité de surface) est donc

$$I = \frac{i}{S} = \sigma \text{ grad } U$$

Il ne dépend nullement de la section S du conducteur électrique.



P1 P2

Soit un réseau constitué par de tels conducteurs, d'orientations et de sections différentes. Lorsque l'on établit une différence de potentiel entre deux plaques parallèles P_1 et P_2, le potentiel varie linéairement le long de chaque conducteur, de sorte que le courant qui s'établit est le même que si ce conducteur existait seul

Soit ω la probabilité pour qu'un point donné du réseau aléatoire tombe dans un conducteur, et $f(\alpha)d\alpha$ la probabilité pour que ce conducteur ait la direction α. Le vecteur courant, dans un conducteur de direction α, est :

$$I^i = \sigma \ \alpha^i \alpha^j \partial_j U$$

Le courant macroscopique $E(I^i) = \mathcal{J}^i$ est donc :

$$(29) \qquad \begin{cases} \mathcal{J}^i = \sigma^{ij} \partial_j U \\ \sigma^{ij} = \omega \, \sigma \, E(\alpha^i \alpha^j) \end{cases}$$

L'expression obtenue pour σ^{ij} peut se comparer aux expressions (4) et (15) de k^{ij}. Elle en diffère par l'absence totale sous le signe d'espérance mathématique du facteur h^2 ou $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ lié à la géométrie de la section et possédant la dimension du carré d'une longueur. <u>Il n'y a donc pas proportionnalité entre les σ^{ij} et les k^{ij}</u> sauf dans le cas où les dimensions (h^2 ou $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$) de la section sont stochastiquement indépendantes de la direction α. Cette indépendance n'est d'ailleurs physiquement plausible que si le milieu est isotrope. Même dans ce dernier cas, la loi de transformation de σ^{ij} lorsque l'on déforme le milieu ne coincide absolument pas avec celle des k^{ij}.

A deux dimensions, en effet, on obtiendra pour une déformation a^i_ℓ la nouvelle conductivité Σ^{ij} sous la forme

$$\Sigma^{ij} = \omega\,\sigma\; E\left[\frac{a^i_\ell\; a^j_m\; \alpha^\ell \alpha^m}{g_{ij}\; a^i_\ell\; a^j_m\; \alpha^\ell \alpha^m}\right] \tag{30}$$

très différente de (9). Pour une déformation infiniment petite, (30) se réduit, au premier ordre, à :

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma^{ij} &= \sigma^{ij} - \varepsilon^i_\ell\, \sigma^{\ell j} - \varepsilon^j_m\, \sigma^{mi} + 2\, \varepsilon_{\ell m}\, R^{\ell m\, ij} \\ R^{\ell m\, ij} &= \omega\sigma\, E(\alpha^i\, \alpha^j\, \alpha^\ell\, \alpha^m) \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Le tenseur $R^{\ell m\, ij}$ correspond bien à celui qui est défini en (11). Mais la loi (31) diffère de la loi (13) par l'absence du terme $1 - 2\varepsilon^\ell_\ell$ devant σ^{ij}, et par le coefficient de $R^{\ell m\, ij}$.

En particulier, on tire directement de (30)

$$\Sigma^i_i = \omega\sigma\; E\left[\frac{g_{ij}\; a^i_\ell\; a^j_m\; \alpha^\ell\, \alpha^m}{g_{ij}\; a^i_\ell\; a^j_m\; \alpha^\ell \alpha^m}\right] = \omega\,\sigma = \sigma^i_i$$

<u>La trace est invariante dans toute déformation.</u> Pour les perméabilités, au contraire, la trace K^i_i dépend de la déformation, comme on le voit sur l'équation (14).

A trois dimensions, les équations (30), (31) et l'invariance

$$\Sigma^i_i = \sigma^i_i$$

s'appliquent sans modification (cela résulte aussi du fait qu'aucune grandeur géométrique liée à la section n'intervient en (29) sous le signe d'espérance mathématique).

Il suffit de rapprocher (30) et (16), et (31) et (23) pour voir que les conductivise transforment de manière très différente (et beaucoup plus simple) lorsqu'on les compare aux perméabilités.

La différence irréductible dans le comportement des perméabilités et des conductivités, qui est ainsi mise en évidence dans le cas particulier très simple du milieu à canalicules indépendants et du réseau aléatoire, s'observera a fortiori lorsque la comparaison portera sur des milieux de structure plus complexe. Il n'y a donc aucune chance pour que l'analogie électrique puisse être utilisée au niveau microscopique.

V.- TENTATIVE DE GENERALISATION.

Les résultats explicites que nous avons pu obtenir sont évidemment liés aux hypothèses très simplistes utilisées. Du point de vue formel, cependant, ils suggèrent, dans le cas des déformations infiniment petites, que la loi de transformation des perméabilités ou des conductivités s'exprime à l'aide d'un tenseur d'ordre 4. Nous nous proposons de montrer qu'il en est encore ainsi dans le cas général. Mais, naturellement, il ne sera plus possible de former a priori l'expression explicite de ce tenseur.

Soit une déformation infiniment petite :

$$(32) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y^i = x^i - \varepsilon^i_\ell \, x^\ell \\ x^i = y^i + \varepsilon^i_\ell \, y^\ell \end{array} \right.$$

mettant en correspondance un milieu initial (coordonnées x^i) et un milieu déformé (coordonnées y^i) supposés rapportés à des axes de coordonnées rectilignes parallèles. Les tenseurs métriques de ces deux espaces ont ainsi même composantes g_{ij}.

Au lieu, cependant, de rapporter le milieu déformé aux coordonnées y^i, nous pouvons le rapporter aux coordonnées x^i, les formules de passage étant celles qui sont écrites en (32). Au lieu d'établir une correspondance entre deux milieux physiquement différents, ces équations vont maintenant représenter le passage d'un système de coordonnées à un autre pour un même milieu, qui est le milieu déformé. Le point du milieu déformé possédant les coordonnées x^i dans le nouveau système coincide, naturellement, avec le point issu, dans la déformation, du point qui possédait les mêmes coordonnées x^i dans le milieu initial. Avec ce repérage, un même point conserve les mêmes coordonnées avant et après déformation. Mais les axes x^i dans le milieu déformé ne sont plus parallèles aux axes x^i du milieu initial et n'ont pas le même tenseur métrique. Désignons par γ_{ij} leur tenseur métrique. On trouve immédiatement :

$$(33)\qquad \begin{cases} \gamma_{ij} = g_{ij} - \varepsilon^{\ell}_{\ i}\ g_{\ell j} - \varepsilon^{m}_{\ j}\ g_{mi} \\ \gamma^{ij} = g^{ij} + \varepsilon^{i}_{\ \ell}\ g^{\ell j} + \varepsilon^{j}_{\ m}\ g^{mi} \end{cases}$$

Plus généralement, le passage des x^i aux y^j est donné par (32) pour les coordonnées contravariantes et par :

$$(34)\qquad \begin{cases} y_i = x_i + \varepsilon^{\ell}_{\ i}\ x_{\ell} \\ x_i = y_i - \varepsilon^{\ell}_{\ i}\ y_{\ell} \end{cases}$$

pour les coordonnées covariantes.

Soient u^i et p une solution de l'équation de Navier pour le milieu initial :

$$(35)\qquad \begin{cases} \partial_i\, p = \mu\, g^{\ell m}\, \partial_{\ell m}\ u_i \\ \partial_i\ u^i = 0 \end{cases}$$

Elle n'est pas solution de l'équation de Navier pour le milieu déformé. Celle-ci, en effet, s'écrit :

$$(36)\qquad \begin{cases} \partial_i\, P = \mu\ \gamma^{\ell m}\, \partial_{\ell m}\ V_i \\ \partial_i\, V^i = 0 \end{cases}$$

Pour éviter toute ambiguité, nous raisonnerons uniquement sur les composantes covariantes des vitesses. L'équation de continuité s'écrit dans le milieu initial et le milieu déformé, respectivement :

$$\begin{cases} g^{ij}\ \partial_i\ u_j = 0 \\ \gamma^{ij}\ \partial_i\ V_j = 0 \end{cases}$$

Compte tenu de (33), les équations du milieu déformé s'écrivent :

$$(37)\qquad \begin{cases} \frac{1}{\mu}\partial_i P = g^{\ell m}\partial_{\ell m} V_i + 2\,\varepsilon^{\ell}_{s}\, g^{sm}\partial_{\ell m} V_i \\ g^{ij}\,\partial_i V_j + \varepsilon^{i}_{\ell}\, g^{\ell j}\partial_i V_j + \varepsilon^{j}_{m}\, g^{mi}\partial_i V_j = 0 \end{cases}$$

On peut chercher une solution de la forme :

$$\begin{cases} P = p + \varpi \\ V_i = u_i + v_i \end{cases}$$

où ϖ et v_i vont être des termes correctifs de l'ordre des déformations. En portant ces expressions dans (37), en tenant compte de (35) et en nous limitant au premier ordre, nous obtenons :

$$(38)\qquad \begin{cases} \frac{1}{\mu}\partial_i \varpi - g^{\ell m}\partial_{\ell m} v_i = 2\,\varepsilon^{\ell}_{s}\, g^{sm}\partial_{\ell m} u_i \\ g^{ij}\partial_i v_j = -\,\varepsilon^{i}_{\ell}\, g^{\ell j}\partial_i u_j - \varepsilon^{j}_{m}\, g^{mi}\partial_i u_j \end{cases}$$

Ainsi les termes correctifs ϖ et v_i sont solution d'un système d'équations de Navier avec <u>second membre</u>. Ce second membre dépend linéairement des u_i d'une part, des ε^{i}_{ℓ} de l'autre. Il est donc possible d'appliquer le principe de superposition.

Soient alors p_ℓ, $u_{i\ell}$ une famille, indexées par l'indice ℓ, de solutions privilégiées pour le milieu initial, c'est-à-dire vérifiant au niveau macroscopique la condition

$$E(u_{i\ell}) = g_{i\ell}$$

Soient ϖ_ℓ et $v_{i\ell}$ les termes correctifs que l'on en déduit par l'équation (38), compte tenu de la condition aux limites : vitesse nulle à la surface des grains. Désignons par $\eta_{i\ell}$ l'espérance de $v_{i\ell}$. On a

$$E(V_{i\ell}) = E(u_{i\ell} + v_{i\ell}) = g_{i\ell} + \eta_{i\ell}$$

Cette espérance mathématique ne coincide pas avec $\gamma_{i\ell}$, de sorte que les $V_{i\ell}$ ne constituent pas la famille de solutions privilégiées du milieu déformé. Mais elles n'en diffèrent que par des infiniment petits du premier ordre. On peut alors trouver un tenseur B^{ℓ}_{m} de la forme

(39) $$B^{\ell}_{m} = \delta^{\ell}_{m} + \beta^{\ell}_{m}$$

où β^{ℓ}_{m} est infiniment petit, tel que :

$$B^{\ell}_{m}(g_{i\ell} + \eta_{i\ell}) = g_{im} + \eta_{im} + \beta^{\ell}_{m} g_{i\ell} = \gamma_{im}$$

Il suffit, en effet, de résoudre le système :

$$\beta^{\ell}_{m} g_{i\ell} = -\varepsilon^{\ell}_{i} g_{\ell m} - \varepsilon^{\ell}_{m} g_{\ell i} - \eta_{im}$$

Le système

$$\left\{\begin{array}{l} P_m = B^{\ell}_{m}(p_{\ell} + \overline{\omega}_{\ell}) \\ U_{im} = B^{\ell}_{m}(u_{i\ell} + v_{i\ell}) \end{array}\right.$$

constitue alors la famille de solutions cherchée. Le gradient tensoriel

$$\partial_j P_m = B^{\ell}_{m}(\partial_j p_{\ell} + \partial_j \overline{\omega}_{\ell})$$

va donner, en passant aux valeurs probables, l'inverse H_{jm} du tenseur macroscopique K^{ij} du milieu déformé (rapporté aux axes x^i)

$$H_{jm} = B^{\ell}_{m} \, E\left[\partial_j p_{\ell} + \partial_j \overline{\omega}_{\ell}\right]$$

Mais $E(\partial_j p_{\ell})$ est l'inverse $h_{j\ell}$ de k^{ij}. Utilisant (39), on trouve :

(40) $$\left\{\begin{array}{l} H_{jm} = h_{jm} + \beta^{\ell}_{m} h_{j\ell} + \chi_{jm} \\ \chi_{jm} = E(\partial_j \overline{\omega}_m) \end{array}\right.$$

En inversant (au premier ordre) on obtient :

(41) $$K^{ij} = k^{ij} - \beta^i_m \; k^{mj} - k^{i\ell} \; \chi_{\ell m} \; k^{mj}$$

Telles sont les composantes contravariantes du tenseur des perméabilités du milieu déformé dans le système x^i. Pour obtenir ses coordonnées dans le repère y^i (qui est le repère naturel, celui, par exemple, que l'on choisit orthonormé au départ) il suffit d'appliquer les formules de passage (32). On obtient ainsi dans le système y^i

(42) $$K^{ij} = k^{ij} - \varepsilon^i_\ell \; k^{\ell j} - \varepsilon^j_m \; k^{mi} - \beta^i_m \; k^{mj} - k^{i\ell} \chi_{\ell m} \; k^{mj}$$

D'autre part, la linéarité des seconds membres des équations (38) entraîne que les termes correctifs, c'est-à-dire les $(K^{ij} - k^{ij})$, sont linéaires non seulement par rapport aux ε^i_ℓ, mais aussi par rapport au tenseur de déformation pure e_{ij}, qui est le symétrisé de ε_{ij}

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} = g_{i\ell} \; \varepsilon^\ell_j + g_{j\ell} \, \varepsilon^\ell_j$$

(pour les termes du premier ordre on peut utiliser indifféremment g_{ij} ou γ_{ij}). On en déduit qu'<u>il existe un tenseur du 4ème ordre $R^{ij,r\lambda}$, symétrique séparément en i,j d'une part et en r,λ de l'autre</u>, et tel que l'on ait

$$\beta^i_m \; k^{mj} + k^{i\ell} \chi_{\ell m} \; k^{mj} = - e_{r\lambda} \; R^{r\lambda,ij} = - 2\varepsilon_{r\lambda} \; R^{r\lambda,ij}$$

Finalement, (42) se met sous la forme

(43) $$K^{ij} = k^{ij} - \varepsilon^i_\ell \; k^{\ell j} - \varepsilon^j_m \; k^{mi} + 2 \, \varepsilon_{r\lambda} \, R^{r\lambda,ij}$$

On reconnaît sous cette forme la généralisation exacte de (19).

Lorsque la déformation est une simple similitude $\varepsilon^i_\ell = \varepsilon \; \delta^i_\ell$ de module $\lambda = 1 - \varepsilon$, on doit avoir $K^{ij} = \lambda^2 \; k^{ij} = (1 - 2\varepsilon) k^{ij}$. Compte tenu de (43), cette condition de similitude montre que le tenseur contracté $R^\ell{}_\ell{}^{ij}$ est nul

(44) $$R^\ell{}_\ell{}^{ij} = 0$$

Cette relation généralise un résultat obtenu directement dans l'étude du milieu à canalicules cylindriques. Par contre, rien n'indique que le deuxième contracté $R^{\ell m i}{}_{i}$ ne dépende que des perméabilités $k^{\ell m}$.

Cas où le milieu poreux initial est isotrope.

On a dans ce cas

$$k^{ij} = k \; g^{ij} \tag{45}$$

et (43) se réduit à

$$K^{ij} = k(g^{ij} - e^{ij}) + e_{r s} \; R^{r s, ij} \tag{46}$$

Par raison de symétrie, K^{ij} doit avoir mêmes directions principales que le tenseur de déformation pure. Ceci ne suffit pas pour déterminer la forme du tenseur R. Nous supposerons de plus que $R^{r s, ij}$ est invariant par rotation, autrement dit possède les mêmes composantes numériques $R^{r s \, ij}$ par rapport à deux systèmes d'axe se déduisant l'un de l'autre par rotation. C'est là une hypothèse d'isotropie plus forte que celle qui est exprimée en (45), que nous désignerons sous le terme d'isotropie complète.

En se référant aux milieux à canalicules indépendants, on peut voir que l'isotropie simple, définie par (45), n'entraîne pas nécessairement l'isotropie complète. Si les longueurs a et b des demi-axes de la section elliptique d'un canalicule et l'orientation α^i de son axe sont indépendantes, et si les orientations sont uniformément réparties, l'isotropie simple est réalisée et (45) est vérifiée. Mais l'isotropie complète n'aura pas lieu si, par exemple, les grands axes $a (a > b)$ de la section sont systématiquement orientés selon l'intersection du plan de la section droite avec le plan vertical passant par l'axe (plan défini par Oz et l'axe du cylindre). Le tenseur $R^{\ell m \, ij}$ est invariant pour les rotations autour de l'axe Oz, mais non pour les rotations d'axes quelconques. Il possède une symétrie de révolution, mais non la symétrie sphérique, bien que (45) soit réalisée.

Lorsque l'isotropie complète a lieu, le tenseur R ne dépend que de deux paramètres. On vérifie facilement qu'en axes orthonormés l'invariance par rotation entraîne la nullité des composantes "impaires".

$$R^{1223} = \dots = R^{1222} = \dots = 0$$

Les seules composantes non nulles sont celles du type R^{1111}, R^{1122} et R^{1212}

($= R^{2112} = \ldots$) où chacun des indices figure deux ou quatre fois. De plus, on trouve la condition :

(47) $$R^{11\,22} + 2\,R^{12\,12} = R^{11\,11}$$

(et celles qui s'en déduisent par permutation circulaire en 123). Comme

$$\begin{cases} R^{11\,11} = R^{22\,22} = R^{33\,33} \\ R^{11\,22} = R^{22\,11} = R^{11\,33} = \ldots \\ R^{12\,12} = R^{21\,12} = \ldots = R^{13\,13} \end{cases}$$

la condition (47) montre que toutes les composantes peuvent s'exprimer à l'aide de 2 coefficients seulement. En désignant par δ^{ij} les indices de Kroneker, on vérifie alors que R est de la forme

$$R^{\ell mij} = \lambda\,\delta^{\ell m}\,\delta^{ij} + \mu(\delta^{\ell i}\,\delta^{mj} + \delta^{mi}\,\delta^{\ell j})$$

avec

$$\begin{cases} R^{11\,22} = \ldots = \lambda \\ R^{12\,12} = \ldots = \mu \\ R^{11\,11} = \ldots = \lambda + 2\,\mu \end{cases}$$

Sous forme tensorielle générale, on obtient donc dans le cas de l'isotropie complète :

(48) $$R^{\ell mij} = \lambda\,g^{\ell m}\,g^{ij} + \mu(g^{\ell i}\,g^{mj} + g^{mi}\,g^{\ell j})$$

La relation (44), qui exprime la règle de similitude, va conduire à une relation supplémentaire entre λ et μ, de sorte que R ne dépendra en réalité que <u>d'un seul coefficient.</u> En effet, on a

$$R^{\ell}{}_{\ell}{}^{ij} = 3\,\lambda\,g^{ij} + \mu(g^{\ell i}\,\delta^{j}{}_{\ell} + \delta^{i}{}_{\ell}\,g^{\ell j}) = (3\,\lambda + 2\,\mu)\,g^{ij}$$

La règle (44) donne donc

(49) $$3\,\lambda + 2\,\mu = 0$$

La loi de transformation (46), avec un $R^{\ell mij}$ de la forme (48), se met sous la forme

(50) $$K^{ij} = (k + \lambda\, e^{\ell}_{\ell})\, g^{ij} + (2\mu - k)e^{ij}$$

qui rappelle étroitement la loi de Hooke. Compte tenu de la condition de similitude (49), on obtient pour le milieu poreux complètement isotrope la loi :

(51) $$K^{ij} = (k + \lambda\, e^{\ell}_{\ell})\, g^{ij} - (3\,\lambda + k)e^{ij}$$

<u>La trace</u> K^i_i <u>ne dépend pas de λ. Elle ne dépend que de la dilatation</u> e^i_i

(52) $$K^i_i = k(3 - e^i_i)$$

La formule établie à la fin du paragraphe 2 dans le cas des cylindres de révolution est bien du type (51). La formule (23), avec $k^{ij} = k\, g^{ij}$, et en remplaçant les ε_{ij} par les $e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}$, devient, en effet :

$$K^{ij} = k(g^{ij} - e^{ij}) - \frac{1}{2}\, e^{\ell}_{\ell}\, k\, g^{ij} + \frac{3}{2}\, e_{\ell m}\, S^{\ell mij}$$

Identifiant avec (46), nous trouvons

$$R^{\ell mij} = \frac{3}{2}\, S^{\ell mij} - \frac{1}{2}\, k\, g^{\ell m}\, g^{ij}$$

La condition (47) se réduit ici à :

$$3\, S^{11\,22} = S^{11\,11}$$

ou encore, en introduisant la loi de probabilité des directions α^i :

$$E(\alpha_1^{\,2}\, \alpha_2^{\,2}) = \frac{1}{3}\, E(\alpha_1^{\,4})$$

On vérifiera que la distribution uniforme étudiée au paragraphe 2 - e obéit à cette condition (avec $\lambda = -\frac{1}{5}\, k$).

Par contre, la distribution discrète où $\frac{1}{3}$ des canaux seraient parallèles à chacun des axes Ox, Oy et Oz, donnerait

$$E(\alpha_1^{\,4}) = \frac{1}{3}$$

$$E(\alpha_1^{\,2}\, \alpha_2^{\,2}) = 0$$

Bien qu'elle conduise à l'isotropie simple, cette distribution ne vérifie pas l'isotropie complète.

Cas du milieu conducteur.

Les mêmes raisonnements peuvent être transposés au cas du conducteur à conductivité microscopique régionalisée. La conductivité macroscopique σ^{ij} se déforme selon une loi de la forme

$$\Sigma^{ij} = \sigma^{ij} - \varepsilon^{i}_{\ell}\ \sigma^{j\ell} - \varepsilon^{j}_{\ell}\ \sigma^{i\ell} + 2\ \varepsilon_{rs}\ S^{rs,ij}$$

Mais ici la règle de similitude conduit à $\Sigma^{ij} = \sigma^{ij}$ pour $\varepsilon^{i}_{\ell} = \varepsilon\ \delta^{i}_{\ell}$ Il en résulte que le tenseur $S^{rs,ij}$ vérifie la relation :

$$S^{\ell}{}_{\ell}{}^{ij} = \sigma^{ij} \tag{52}$$

très différente de la relation (44) obtenue dans le cas des perméabilités : on ne pourra en aucune façon identifier les tenseurs $R^{\ell mij}$ et $S^{\ell mij}$, et ce résultat confirme bien que l'analogie électrique n'est pas utilisable.

A titre de comparaison, examinons le cas d'un milieu complètement isotrope. On a, comme ci-dessus

$$\left\{\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \sigma\ g^{ij} \\ S^{\ell mij} &= \lambda\ g^{\ell m}\ g^{ij} + \mu(g^{\ell i}\ g^{mj} + g^{\ell j}\ g^{mi}) \end{aligned}\right.$$

La condition (52) conduit cette fois à :

$$S^{\ell}{}_{\ell}{}^{ij} = (3\ \lambda + 2\ \mu) g^{ij} = \sigma\ g^{ij}$$

D'où

$$3\ \lambda + 2\ \mu = \sigma \tag{53}$$

Il suffit de comparer à (49) pour voir que $S^{\ell mij}$, qui ne dépend plus que d'un paramètre, possède une structure profondément différente de celle de $R^{\ell mij}$. Compte tenu de cette condition (53), la loi de transformation (50) prend l'aspect :

$$\Sigma^{ij} = (\sigma + \lambda\ e^{\ell}_{\ell})\ g^{ij} - 3\ \lambda\ \ e^{ij}$$

Elle diffère de (51) par l'absence du terme $- \sigma\ e^{ij}$. <u>En particulier la trace Σ^{i}_{i} est invariante dans toute déformation :</u>

$$\sum^i_{\ i} = 3\,\sigma = \sigma^i_{\ i}$$

On a vu, au paragraphe 2, que pour un réseau électrique aléatoire les tenseurs S et σ^{ij} possèdent les expressions :

$$\begin{cases} S^{\ell m i j} = C\ E(\alpha^\ell \alpha^m \alpha^i \alpha^j) \\ \sigma^{ij} = \sigma\, g^{ij} = C\ E(\alpha^i \alpha^j) \end{cases}$$

L'isotropie complète exige ici :

$$(55) \qquad \begin{cases} C = 3\,\sigma \\ E(\alpha^i \alpha^j) = g^{ij} \\ \lambda = \mu = \frac{\sigma}{5} \end{cases}$$

En particulier la condition $\lambda = \frac{\sigma}{5}$ est irréductible à la condition $\lambda = -\frac{k}{5}$ obtenue pour le milieu poreux complètement isotrope. En axes orthonormés, on déduit de(55) :

$$\begin{cases} E(\alpha_i\ \alpha_j) = \frac{1}{3}\,\delta_{ij} \\ E(\alpha_1^{\ 4}) = \ldots = \frac{1}{5} \\ E(\alpha_1^{\ 2}\ \alpha_2^{\ 2}) = \ldots = \frac{1}{15} \end{cases}$$

Ces conditions sont réalisées lorsque les directions ont une répartition uniforme. Elles ne le sont pas, et il n'y a pas isotropie complète, pour une répartition discrète comportant $\frac{1}{3}$ des cylindres parallèles à chacun des axes de coordonnées.

G. MATHERON.