B. R. G. M.
Département Etudes Minières

N-62

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 65

ANALYSE DE LA NOTION DE SURFACE SPECIFIQUE

Février 1966

G. MATHERON

NF-62

N O T E   G E O S T A T I S T I Q U E   N° 6 5

ANALYSE DE LA NOTION DE SURFACE SPECIFIQUE

Dans un milieu poreux à 3 dimensions, on appelle surface spécifique le rapport $\frac{S}{V}$ où S est la mesure de la surface de séparation des grains et des pores contenus dans un volume V. Cette notion prend une grande importance dans tous les problèmes physiques où des échanges de chaleur ou d'énergie ont lieu à la surface de séparation. On a voulu ("modèle "de Kozeny) exprimer la perméabilité d'un milieu poreux à l'aide des deux seuls paramètres porosité et surface spécifique. La tentative s'est soldée par un échec, d'ailleurs prévisible a priori : il est vain, en effet, de chercher à exprimer une grandeur tensorielle, comme la perméabilité, à l'aide de deux paramètres scalaires seulement. Cet échec est généralement masqué par l'introduction d'un pseudo-concept, celui de tortuosité. Représentant - en principe - le rapport de la longueur d'un filet fluide à celle de la ligne droite joignant ses extrémités ("valeur moyenne " de cos θ ou, suivant les cas, de $\frac{1}{\cos\theta}$) la tortuosité est, en réalité, définie par l'écart entre la perméabilité réelle et la perméabilité " théorique " calculée à partir de tel ou tel "modèle " a priori. Il s'agit, en réalité, d'une correction empirique et non d'un concept défini.

D'autre part, la détermination expérimentale de la surface spécifique est toujours délicate. Les méthodes usuelles ont un caractère hautement conventionnel. Elles fournissent des valeurs numériques comparables entre elles, c'est-à-dire, si l'on veut, une échelle relative, mais n'atteignent nullement les valeurs vraies des surfaces spécifiques.

En fait, la surface spécifique se relie de manière simple au covariogramme de la fonction aléatoire en tout ou rien représentant le milieu poreux, et, plus précisément, au cône des tangentes de ce covariogramme au voisinage de l'origine. A ce titre, elle est accessible-directement et en vraie valeur- à partir de mesures effectuées sur lame mince. En outre, pourvu seulement que le cône des tangentes du covariogramme soit du second degré, il est possible, au lieu d'un simple scalaire, d'introduire un tenseur de surface spécifique, tenant compte de l'orientation dans l'espace des normales aux éléments de surface. Néanmoins, il ne semble pas que ce tenseur des surfaces spécifiques puisse être relié immédiatement au tenseur des perméabilités.

I.- RELATION ENTRE SURFACE SPECIFIQUE ET COVARIOGRAMME.

Soit, dans un volume V, $d\,S(\omega)$ l'aire occupée par les portions de surface de séparation dont les normales (orientées, par exemple, des grains vers les pores) ont des vecteurs unitaires contenus dans l'angle solide $d\omega$. En toute généralité $d\,S(\omega)$ est une mesure définie sur la surface de la sphère de rayon unité. A seule fin d'alléger les notations, nous admettrons qu'il existe une densité de surface $\sigma(\omega)$ telle que

$$d\,S(\omega) = \sigma(\omega)\,d\omega$$

La surface spécifique du volume V est, par définition :

(1) $$\sigma = \frac{1}{V}\iint \sigma(\omega)\,d\omega$$

l'intégrale étant étendue à la sphère de rayon unité.

Lorsque le volume V est occupé par un milieu poreux aléatoire stationnaire (1) devient une variable aléatoire, qui - moyennant une hypothèse ergodique - coincide avec son espérance mathématique dès que V est pris assez grand.

Soit alors

$$K(h) = P\left[x \in A,\ x+h \in A\right]$$

la covariance de ce milieu poreux aléatoire, égale à la probabilité pour que x et $x+h$ appartiennent aux grains (A). On a aussi, pour tout volume V

$$K(h) = \frac{1}{V}\,E\left[\mathrm{Mes}(V \cap A \cap A_h)\right]$$

A_h désignant le translaté de A par h. Cherchons la limite de $\frac{K(0)-K(h)}{|h|}$ lorsque h tend vers 0 en conservant la même direction α. On remarque que

$$\mathrm{Mes}(V \cap A) - \mathrm{Mes}(V \cap A \cap A_{\delta h}),$$

pour δh très petit, est le volume balayé par le vecteur δh lorsque son origine décrit la surface de séparation, d'où

$$\mathrm{Mes}(V \cap A) - \mathrm{Mes}(V \cap A \cap A_{\delta h}) = \delta h \int_{\cos\theta \geq 0} \sigma(\omega)\cos\theta\,d\omega$$

θ désignant l'angle de la normale à la surface de séparation et du vecteur δh (angle des directions ω et α de l'espace). Ainsi :

(2) $$\lim \frac{K(0) - K(h)}{|h|} = \frac{1}{V}\int_{\cos\theta \geqslant 0} \sigma(\omega)\cos\theta \, d\omega = \frac{1}{2V}\int \sigma(\omega) \, |\cos\theta| \, d\omega$$

Cette expression, qui est $-K'_\alpha(0)$, valeur en 0 de la dérivée à droite dans la direction du vecteur h, est apparentée à la surface spécifique (1), mais en diffère par la présence du terme en $\cos\theta$. Intégrons (2) en α sur la sphère de rayon 1 :

$$-\int K'_\alpha(0)d\alpha = \frac{1}{2V}\int \sigma(\omega)d\omega \int |\cos\theta| d\alpha = \frac{\pi}{V}\int \sigma(\omega)d\omega$$

d'où

(3) $$\sigma = \frac{1}{V}\int \sigma(\omega)d\omega = -\frac{1}{\pi}\int K'_\alpha(0)d\alpha$$

Cette relation montre que la surface spécifique σ se déduit directement du cône $-K'_\alpha(0)$ des tangentes à l'origine du covariogramme $K(h)$. Dans le cas d'un milieu isotrope, $K'_\alpha(0) = K'(0)$ est une constante, et on a simplement :

(4) $$\sigma = -4\,K'(0)$$

La surface spécifique est égale au quadruple de la pente à l'origine de la covariance isotrope $K(r)$, et peut être mesurée directement sur lame mince.

Dans le cas général non isotrope, $K'_\alpha(0)$ dépend de la direction α, et peut être mesurée sur une lame mince prise dans un plan parallèle à la direction α. Le calcul approché de l'intégrale (3) sera donc possible à partir de mesures effectuées sur plusieurs lames minces d'orientations connues (en pratique, un petit nombre de lames minces devra suffire, d'autant plus qu'en général le cône $K'_\alpha(0)$ pourra être représenté par un cône du second degré).

II.- TENSEUR DES SURFACES SPECIFIQUES.

Dans les applications, le cône des tangentes à l'origine pourra le plus souvent être assimilé à un cône du second degré. Autrement dit, il existera un tenseur C_{ij} tel que l'on ait :

$$K(h) = K(0) - \sqrt{C_{ij}\, h^i h^j} + \dots$$

et par suite

$$-K'_\alpha(0) = \sqrt{C_{ij}\, \alpha^i \alpha^j}$$

α^i désignant les cosinus directeurs du vecteur h de direction α.

La relation (2) s'écrit :

(5) $$\sqrt{C_{ij}\,\alpha^i\,\alpha^j} = \frac{1}{2V}\int \sigma(\omega)\ |\alpha^i\,\omega_i|\ d\omega$$

et montre que la densité $\sigma(\omega)$ ne peut pas être quelconque. En fait, l'équation intégrale (5) où le premier membre est supposé connu, détermine de manière univoque la densité $\sigma(\omega)$. On peut le voir en utilisant des développements en série de fonctions sphériques orthogonales, analogues aux développements de Fourier. Or on connaît a priori une solution de l'équation intégrale (5), c'est celle où $\sigma(\omega)$ représente la distribution des éléments de surface d'un ellipsoide convenable. Ainsi, lorsque le cône des tangentes est du second degré, la distribution $\sigma(\omega)$ de la surface de séparation selon la direction ω des normales coincide nécessairement avec la distribution des éléments de surface d'un ellipsoide.

Pour déterminer cet ellipsoide, on prend des axes orthonormés pour lesquels C^{ij} est diagonalisé :

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}$$

Si a, b et c sont les demi-axes de l'ellipsoide cherché, on a

$$\sqrt{C_1} = \pi\, b\, c$$

$$\sqrt{C_2} = \pi\, c\, a$$

$$\sqrt{C_3} = \pi\, a\, b$$

puisque $\sqrt{C_1}$ représente, d'après (5), l'aire du contour apparent de l'ellipsoide en projection sur le plan des y z. Ainsi

$$C_1 = (\pi\, a\, b\, c)^2\ \frac{1}{a^2}$$

. . . .

et, en revenant à des coordonnées orthonormées quelconques, on voit que l'ellipsoide a pour équation :

$$t_{ij}\ x^i\, x^j = 1$$

avec

$$t_{ij} = \frac{1}{(\pi\, abc)^2}\, C_{ij}$$

Comme $\mathrm{Det}(t) = \frac{1}{(abc)^2}$, il vient $(\pi abc)^2 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\mathrm{Det}\ C}$ et

$$t_{ij} = \frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{Det}\ C}}\ C_{ij}$$

La surface spécifique σ proprement dite, qui est

$$\sigma = \frac{1}{\pi}\int \sqrt{C_{ij}\ \alpha^i\ \alpha^j}\ d\alpha$$

coincide avec la surface de cet ellipsoide.

Toutefois, plutôot que le scalaire σ, il semble préférable d'utiliser le tenseur C_{ij} lui-même, mieux susceptible d'être en rapport avec cet autre tenseur qui est celui des perméabilités.

III.- MILIEU A CANALICULES INDEPENDANTS.

Pour montrer que le tensuer C_{ij}, c'est-à-dire le cône des tangentes à l'origine du covariogramme, ne peut pas suffire pour déterminer la perméabilité k^{ij}, nous examinerons le cas particulier très simple d'un milieu isotrope à canalicules indépendants dans l'espace à deux dimensions. Un tel milieu a été décrit dans la Note 61. Les axes des canaux sont implantés au hasard selon un schéma poissonien de paramètre λ. L'épaisseur X d'un canal est une variable aléatoire de fonction de répartition $F(x)$. ($F(x)$ est, si l'on veut, la granulométrie en nombre des canaux). La granulométrie des grains est alors donnée par :

$$\begin{cases} P(h) = e^{-\pi\lambda m - 2\lambda h} \\ \left(m = \int_0^\infty x\ d\ F(x) \right) \end{cases}$$

D'où

$$-K'(0) = -P'(0) = 2\lambda\ e^{-\pi\lambda m} \tag{6}$$

Cherchons la perméabilité. Dans un canal de largeur ℓ et de direction α^i, le débit unitaire est

$$q^i = -C\ R^2\ \alpha^i\ \alpha^j\ \partial_j p \qquad (C \text{ constante})$$

D'où

$$k^{ij} = C\left[1 - e^{-\pi\lambda m}\right] E(R^2\ \alpha^i\ \alpha^j)$$

$1 - e^{-\pi\lambda m}$ est la probabilité pour qu'un point soit dans les pores (les canaux). L'espérance $E(R^2\,\alpha^i\,\alpha^j)$ doit être prise conditionnellement, et représente par conséquent l'espérance de $R^2\,\alpha^i\,\alpha^j$ lorsque l'on a choisi au hasard un point des pores, R et α^i étant la largeur et la direction du canal auquel appartient le point ainsi obtenu. Ici, R et α^i sont indépendants.

$$E(R^2\,\alpha^i\,\alpha^j) = E(R^2)\,E(\alpha^i\,\alpha^j) = \frac{1}{2}\,g^{ij}\,E(R^2)$$

L'espérance $E(R^2)$ ne doit pas être prise sur la granulométrie en nombre $d\,F(R)$, mais sur la granulométrie en surface $\frac{R\,d\,F}{m}$, d'où

$$E(R^2) = \frac{1}{m}\int_0^\infty R^3\,d\,F(R)$$

et

$$k^{ij} = \frac{C}{2}\,g^{ij}\,\left(\frac{1 - e^{-\pi\lambda m}}{m}\right)\int_0^\infty R^3\,d\,F(R)$$

Avec λ petit (c'est seulement dans ce cas que ce schéma a un sens physique), il vient :

$$k^{ij} = \frac{C}{2}\,\pi\,\lambda\,g^{ij}\int_0^\infty R^3\,d\,F(R)$$

Il suffit de comparer (6) et (7) pour voir que la connaissance de la surface spécifique, qui est avec λ un petit :

$$-K'(0) = 2\,\lambda$$

ne suffit pas pour déterminer la perméabilité. Il faut de plus connaître le moment (en nombre) d'ordre 3.

G. MATHERON
Février 1966.