N° 69

COMPOSITION DES PERMEABILITES EN MILIEU POREUX HETEROGENE. CRITIQUE DE LA REGLE DE PONDERATION GEOMETRIQUE.

G. MATHERON

(Ecole Nationale Superieure des Mines de Paris)

Résumé

Dans un milieu poreux heterogene, la règle de ponderation geometrique, toujours inapplicable dans les espaces à I et 3 dimensions, n'est pas non plus valable en general dans le cas de deux dimensions (en dehors des cas particuliers étudiés dans un article antérieur). Ce point est etabli d'abord en dégageant le contenu energetique de cette regle-equipartition de l'energie-puis verifie sur trois exemples particuliers, grace à la methode d'approximation de Schwydler, qu'il faut pousser ici jusqu'à l'ordre 3.

I [illegible] de Note Geost N° 69 et un projet d'article pour la [illegible], devant [illegible] (provisoirement peut être) [illegible] perméabilité [illegible]]

Composition des permeabilités en milieu poreux heterogene: Critique de la regle de ponderation geometrique.

INTRODUCTION

Dans une serie d'articles anterieurs, nous avons montré qu' un milieu poreux heterogene, dont la permeabilité regionalisée $k^{ij}(x)$ peut etre considerée comme une réalisation d'une fonction aleatoire (tensorielle) ergodique et stationnaire, se comporte, vis à vis des écoulements uniformes ou quasi uniformes au niveau macroscopique, comme s'il était doué d'une perméabilite macroscopique constante K^{ij} obligatoirement comprise entre les moyennes harmonique et arithmé-tique des permeabilités ponctuelles k^{ij}. La loi selon la quelle les $k^{ij}(x)$ se composent pour engendrer K^{ij} fait, en principe, intervenir la totalité de la loi spatiale, c'est à dire la loi de probabilité des valeurs prises simultanément par les $k^{ij}(x)$ en tous les points x de l'espace. Il semble, cependant, exister des cas assez generaux ou K^{ij} ne dépend que de la loi des valeurs prises par les $k^{ij}(x)$ en un meme point d'a ppui x de l'espace, et où, par suite, il est possible d'appliquer une <u>regle de pondération</u> de la forme :

$$(I) \qquad \varphi(K) = E[\varphi(k)]$$

φ désignant une fonction matricielle qu'il s'agit d'expliciter. En particulier, dans l'espace à deux dimensions, lorsque $k/E(k)$ et $h/E(h)$ ($h = k^{-1}$ désignant la resistivité) possedent la meme loi spatiale, et que celle ci est invariante par rotation, la regle de ponderation geometrique :

$$(2) \qquad \log(K) = E(\log k)$$

s'applique en toute rigueur.Ce resultat,cependant,ne s'etend pas à des espaces possedant un nombre N de dimensions different de 2,K se rapprochant d'autant plus de la moyenne arithmetique E(k) que N est plus élevé..

Dans la présente étude,nous nous proposons de montrer que la règle geometrique (2) n'est pas valable,en general,meme dans l'espace à 2 dimensions,(en dehors du cas particulier rappelé ci-dessus),et que l'on doit s'attendre,par suite,à observer des regles de pondération du type (I) avec des fonctions φ differentes pour différents types de lois spatiales.Nous donnerons de ce resultat deux demonstrations indépendantes.Dans une premiere partie,examinant la signification energetique de la regle de ponderation geometrique,nous montrerons que cette regle est logiquement equivalente à un principe d'equipartition de l'energie.Mais,en raison meme de la richesse de son contenu physique,et de l'universalite de la forme sous laquelle se presente un tel principe,sa validite ne peut pas etre liée à une particularité aussi contingente que le nombre N des dimensions de l'espace.Il serait choquant pour la raison qu'un principe de ce genre s'applique aux écoulements plans,et non dans les espaces à I ou 3 dimensions .Or il ne s'applique pas pour N = I ou 3,puisque,justement la regle de pondera tion geometrique ne peut pas etre vérifiée en dehors du cas N = 2 ,comme nous l'avons montré dans un article anterieur.Il ne doit donc pas non plus etre valable pour N = 2,sauf cas particulier,de sorte que la regle (2) ne sera pas vérifiée,en general,meme par les ecoulements plans.

Il se pourrait,cependant,qu'une demonstration de nature aussi "philosophique" ne paraisse pas suffisamment convainquante.Nous raisonnerons donc sur des exemples precis,en utilisant la methode d'approximation de Schwydler.Mais,dans l'espace à 2 dimensions,le developpement de K coincide, au deuxieme ordre, a vec celui de la moyenne geometrique. Nous devrons donc pousser les developpements de Schwydler jusqu'au troisieme ordre au moins. En fa it, nous pourrons meme obtenir l'expression du terme general d'ordre n, bien qu'elle ne présente plus d'interèt pratique au delà de $n = 3$ ou 4, en raison de la complication croissante des calculs auxquels elle conduit.. Nous examinerons ensuite trois exemples de milieux poreux, macroscopiquement isotropes, dans l'espace à deux dimensions, et nous constaterons qu'aucun d'eux ne verifie la regle de pondèration geometrique, bien que chacun possede sa propre regle liee etroitement à la forme de sa loi spa tiale.

Notations. Nous utiliserons le meme systeme de notations que dans les articles antérieurs[1]. La permeabilité et son inverse, la resistivité sont notees k^{ij} et h_{ij} au niveau ponctuel, K^{ij} et H_{ij} au niveau macroscopique. De meme, g^{ij} designe le tenseur metrique, $\partial_i p$ le gradient de charge d'un ecoulement macroscopiquement uniforme; et q^i le vecteur debit correspondant (pour un fluide de viscosite et de poids specifique unité). Nous utiliserons systematiquement les notations $\partial_j p^\ell$ et $q^{j\ell}$ pour désigner le systeme de solutions privilegiees (stationnaires) indexées par l'indice ℓ, verifiant les equations de Darcy :

$$(3) \qquad \begin{cases} q^{i\ell} = -k^{ij}\partial_j p^\ell \\ \partial_i q^{i\ell} = 0 \end{cases}$$

1- "Structure et composition des permeabilites", Rev.I.F.P., avril 1966. "Genese et signification energetique de la loi de Darcy", id., Nov.1966. "Composition des permeabilites en milieu poreux heterogene: methode de Schwydler, et regles de ponderation" id., mars 1967.

et la condition supplementaire :

(4) $$E(\partial_j p^i) = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

On sait que, lorsque l'on connait la solution de ce systeme, la permeabilité macroscopique K^{il} est donnee par :

(5) $$K^{il} = -E(q^{il})$$

Enfin, nous designerons par W^{lj} le tenseur representant la densité de puissance consommee par les forces de viscosité :

(6) $$W^{lj} = k^{ij}\partial_i p^l \partial_j p^j = -q^{il}\partial_i p^j$$

et nous utiliserons la relation etablie anterieurement :

(7) $$K^{lj} = E(W^{lj})$$

II-LE PRINCIPE D'EQUIPARTITION DE L'ENERGIE

Pour examiner la signification energetique de la regle de pondération geometrique, nous allons utiliser une methode variationnelle, qui presente d'ailleurs un certain interet par elle meme, et en deduire une relation differentielle entre K^{lj} et l'esperance de la densite de puissance W^{lj} prise conditionnellement dans l'hypothese ou k est connue. Le principe d'equivalence que nous avons en vue en resultera tres simplement.

I°/ Methode variationnelle. Dans les relations (6) et (7), remplaçons k^{ij} par $k^{ij} + \delta k^{ij}$, en designant par δk^{ij} une fonction aleatoire ergodique et stationnaire, comme k^{ij} elle-même. Cette fonction tensorielle $\delta k^{ij}(x)$ n'est pas supposee indépendante de $k^{ij}(x)$. Nous obtenons, compte tenu de la symetrie $k^{ij} = k^{ji}$:

$$\delta W^{lj} = \delta k^{ij}\partial_i p^l \partial_j p^j + 2k^{ij}\partial_i p^l \partial_j \delta p^j$$

Le terme ou figure l'expression $\partial_j \delta p^j$ a une esperance mathematique nulle. En effet, appliquant successivement la loi de Darcy et l'équation de continuité (3), nous trouvons :

$$k^{ij}\partial_i p^{\ell}\partial_j \delta p^{j} = -q^{j\ell}\partial_j \delta p^{j} = -\partial_j(q^{j\ell}\delta p^{j})$$

Comme $q^{j\ell}$ et δp^{j} sont stationnaires, l'esperance mathematique de cette expression est nulle, et, compte tenu de (7), nous obtenons :

$$(8) \quad \delta K^{\ell j} = E(\delta W^{\ell j}) = E\{\delta k^{ij}\partial_i p^{\ell}\partial_j p^{j}\}$$

Cette equation (8) pourrait sans doute servir de base à une étude plus fine des propriétés energetiques de l'écoulement. Par exemple, si nous prenons $\delta k^{ij} = \delta\lambda\, k^{ij}$ ($\delta\lambda$ constante), c'est à dire si les permeabilités varient proportionnellement, il vient :

$$\delta K^{\ell j} = \delta\lambda E(W^{\ell j}) = \delta\lambda K^{\ell j}$$

conformement à une regle de similitude evidente. Pour $\delta k^{ij} = \delta\lambda\, g^{ij}$, c'est à dire ~~XXXXX~~ si les permeabilités principales sont augmentees d'une meme quantite constante $\delta\lambda$, il vient :

$$\delta K^{\ell j} = \delta\lambda E(g^{ij}\partial_i p^{\ell}\partial_j p^{j})$$

Si, au contraire, on augmente les resistivités principales d'une meme quantité constante $\delta\lambda$ (soit $\delta h_{ij} = \delta\lambda g_{ij}$), on obtient :

$$\delta K^{\ell j} = -\delta\lambda E(g_{ij}\, q^{i\ell} q^{jj})$$

Ces resultats mettent en évidence la signification energetique de la geometrie des isobares et des lignes de courant, mais il ne nous est pas possible de developper d'avantage ce point ici.

<u>2°/ Milieu poreux à n composantes.</u> En vue d'expliciter la signification de la relation (8), considerons le cas d'un milieu possedant une permeabilité scalaire $k(x)$ – c.à.d. $k^{ij}(x) = g^{ij}k(x)$ – susceptible de prendre seulement n valeurs distinctes $k_1, k_2 \ldots k_n$. L'ensemble (aléatoire) des points x pour lesquels $k(x) = k_a$ ($a = 1, 2, \ldots, n$)

peut etre caracterise par la fonction $f_a(x)$ definie comme suit :

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } k(x) = k_a \\ 0 & \text{si } k(x) \neq k_a \end{cases}$$

Les $f_a(x)$ constituent n fonctions aleatoires stationnaires verifiant les relations :

$$\sum_{a=1}^{n} f_a(x) = 1$$

$$f_a(x) f_b(x) = 0 \qquad (a \neq b)$$

et la permeabilite scalaire k(x) peut se mettre sous la forme :

$$k(x) = \sum_{a=1}^{n} f_a(x) k_a$$

Les $f_a(x)$ definissent une partition de l'espace en compartiments distincts, dans chacun desquels la permeabilité reste constante. Les $f_a(x)$, c'est à dire ces compartiments, restant inchangés, faisons varier l'une des valeurs possibles de la permeabilités, par exemple k_a, d'une quantité petite δk_a, autrement dit, prenons la variation :

$$\delta k(x) = \delta k_a f_a(x)$$

L'equation (8) nous donne aussitot :

$$\begin{aligned} K^{\ell j} &= \delta k_a E\left(g^{ij} f_a(x) \partial_i p^{\ell} \partial_j p^{j} \right) \\ &= \frac{\delta \xi_a}{\xi_a} E\left(f_a(x) k^{ij} \partial_i p^{\ell} \partial_j p^{j} \right) \end{aligned}$$

Cette expression est liée à l'espérance mathematique conditionnelle de la densité de puissance $W^{\ell j}$ prise dans l'hypothese ou $k(x) = k_a$, soit $E(W^{\ell j} | k_a)$. En effet, si $p_a = E\left[f_a(x) \right]$ designe la probabilite pour que $k(x) = k_a$, nous avons :

$$E(W^{\ell j} | k_a) = \frac{1}{p_a} E\left[f_a(x) W^{\ell j} \right]$$

et, par suite, la relation ecrite ci-dessus devient :

$$\text{(9)} \qquad \delta K^{\ell j} = p_a \frac{\delta \xi_a}{\xi_a} E(W^{\ell j} | k_a)$$

Or, les $f_a(x)$ étant fixes- c'est à dire pour une partition fixe de l'espace en composantes de n types, la permeabilité macroscopique se présente comme une fonction $K^{(s)}(k_1, k_2, \ldots k_n)$ des n parametres k_1, $k_2, \ldots k_n$, et la relation (9) est equivalente au systeme suivant d'equations aux derivées partielles :

$$(10) \qquad \frac{\partial K^{(s)}}{\partial k_a} = \frac{p_a}{k_a} E(W^{(s)} | k_a) \qquad (a = 1, 2, \ldots, n)$$

Ainsi, toute règle de pondération possède une signification énergétique. En particulier, si

nous Supposons que la regle de pondération géometrique s'applique à ce milieu pour toutes les valeurs possibles des k_a (les f_a et les p_a étant fixes), soit :

$$K^{(s)} = k_1^{p_1} k_2^{p_2} \ldots k_n^{p_n} g^{(s)}$$

Il resulte alors de (10) que $K^{(s)}$ est isotrope ($K^{(s)} = K g^{(s)}$) ainsi que $E(W^{(s)} | k_a) = g^{(s)} E(W | k_a)$, et que l'on a :

$$(11) \qquad E(W | k_1) = E(W | k_2) = \ldots = E(W | k_n) = K$$

Autrement dit, la valeur moyenne de la densite de puissance consommée est la meme dans chacune des n composantes, ou, si l'on veut, il y a equipartition de l'energie entre ces n composantes.

Inversement, supposons realise le principe d'equipartition exprimé par les equations (11). D'apres (10), nous avons alors le systeme d'equations aux dérivées partielles :

$$\frac{k_1 \partial K}{p_1 \partial k_1} = \frac{k_2 \partial K}{p_2 \partial k_2} = \ldots\ldots \frac{k_n \partial K}{p_n \partial k_n} = K$$

dont la solution generale est de la forme :

$$K = C k_1^{p_1} k_2^{p_2} \ldots k_n^{p_n}$$

C étant une constante, d'ailleurs egale à 1, comme on le voit en prenant $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = K$: par conséquent, le principe (11) d'equipartition de l'energie entraine la validité de la regle de pondération geometrique. Enonçons ce resultat :

Proposition. Dans le milieu poreux à n composantes, les deux propriétés suivantes sont equivalentes :

I/ La regle de pondération geometrique est applicable

2/ Le principe d'equipartition de l'energie est valable.

Autrement dit, ces deux propositions seront vraies ou fausses ensemble. Il y a des cas ou nous savons qu'elles sont verifiées toutes deux. Par exemple, dans l'espace à deux dimensions, un milieu à deux composantes, tel que le damier aleatoire ou le milieu à polygones convexes aleatoires considérées plus loin, conduit à une loi spatiale invariante pour les rotations de 90°. Si, de plus, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ (et seulement dans ce cas là) on vérifie que $k/E(k)$ et $h/E(h)$ ont la meme loi spatiale. Donc, la regle de ponderation geometrique $K = \sqrt{k_1 k_2}$ est applicable, ainsi que le principe d'equipartition de l'energie. Mais la conclusion ne subsiste pas pour $p_1 \neq p_2$. Il est d'ailleurs remarquable que la proposition ci-dessus ne fasse en aucune maniere intervenir le nombre N des dimensions de l'espace : en fait, en dehors du cas N = 2, nous avons montré que la règle de pondèration geometrique ne pouvait pas etre valable. Nous devons conclure que les deux propriétés equivalentes enoncées ci-dessus doivent etre, en general, fausses toutes les deux, y compris dans le cas N = 2, comme nous l'avons déjà indiqué dans l'introduction. Autrement dit, la regle de ponderation géometrique ne s'appliquera pas en general, meme aux écoulements plans, en dehors du cas particulier habituel.

Pour confirmer cette conclusion, nous allons maintenant reprendre la methode d'approximation de Schwydler, en poussant les developpements jusqu'au troisieme ordre, en vue de l'appliquer à quelques exemples précis.

II-L'APPROXIMATION DE SCHWYDLER A L'ORDRE 3

1°/ Les equations de recurrence. Dans la methode de Schwydler, on suppose que k^{ij} est de la forme :

$$k^{ij} = k_0 (g^{ij} + \varepsilon \gamma^{ij}) \tag{12}$$

avec $E(\gamma^{ij}) = 0$, ou $E(k^{ij}) = k_0 g^{ij}$, et on cherche à obtenir les solutions privilegiees sous la forme de developpements (limités, ou en serie entiere) en fonction du parametre ε suppose petit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_i p^\ell = \delta_i^\ell + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \partial_i p_n^\ell \\ -q^{j\ell} = k_0 (g^{j\ell} - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n q_n^{j\ell}) \end{array} \right. \tag{13}$$

La loi de Darcy donne alors :

$$\begin{array}{l} -q_0^{j\ell} = k_0 g^{j\ell} \\ -q_n^{j\ell} = k_0 (g^{ij} \partial_i p_n^\ell + \gamma^{ij} \partial_i p_{n-1}^\ell) \end{array} \tag{14}$$

et l'equation de continuité conduit aux relations de recurrence :

$$\Delta p_n^\ell + \partial_j (\gamma^{ij} \partial_i p_{n-1}^\ell) = 0 \tag{15}$$

Partant de $\partial_i p_0^\ell = \delta_i^\ell$, ces equations permettent de determiner les $\partial_i p_n^\ell$ successifs. En fait, lorsque $\partial_i p_{n-1}^\ell$ est connu, l'equation (15) permet d'obtenir les $\partial_i p_n^\ell$ à une fonction harmonique près seulement. Mais $\partial_i p_n^\ell$ doit etre une fonction aleatoire stationnaire. Comme les seules fonctions harmoniques qui puissent eetre considérées comme des fonctions aleatoires stationnaires sont des constantes, nous voyons que $\partial_i p_n^\ell$ est en realite determine à une constante près. Cette constante sera elle-meme determinée, si l'on s'impose de respecter la condition $E(\partial_i p^\ell) = \delta_i^\ell$, c'est à dire :

$$E(\partial_i p_n^\ell) = 0 \tag{16}$$

Compte tenu de cette condition (I6), la permeabilité macroscopique est donnée par (5). Il suffit ensuite d'utiliser le developpement (I3) de q^{ji} et la relation (I4) pour obtenir :

$$(I7)\qquad \begin{cases} K^{i\ell} = k_0\left(g^{i\ell} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}^n S_n^{i\ell} \right) \\ S_n^{i\ell} = - E\left(\gamma^{ij} \partial_j p_{n-1}^{\ell} \right) \end{cases}$$

Pour n = I, le tenseur $S_1^{i\ell}$ est nul, puisque $E(\gamma) = 0$. Pour n = 2 $S_2^{i\ell}$ n'est pas autre chose que le tenseur de Schwlydler, étudie dans un article précedent. Pour chaque indice n (indice dépourvu de signification tensorielle) $S_n^{i\ell}$ est un tenseur symetrique d'ordre 2 (puisque $K^{i\ell}$ est symetrique quel que soit $\mathcal{E}$). On sait que $S_2^{i\ell}$ est defini positif, mais cette derniere propriete ne se generalise pas à $S_n^{i\ell}$ pour n quelconque.

2°/ Calcul explicite de $S_n^{i\ell}$. Nous connaissons déjà l'expression du tenseur de Schwydler $S_2^{i\ell}$, qui est :

$$S_2^{\ell j} = - \int \partial_{ij} \alpha(\xi)\, R^{\ell i, jj}(\xi)\, d\xi$$

$\alpha(\xi)$ designant la solution elementaire de l'equation de Laplace, c'est à dire le potentiel $\frac{1}{2\pi}\log r$, dans l'espace à 2 dimensions, $\frac{1}{4\pi r}$ dans l'espace à 3 dimensions etc..., et $R^{\ell i, jj}$ representant la covariance tensorielle :

$$E\left[\gamma^{\ell i}(x)\, \gamma^{jj}(x+\xi) \right] = R^{\ell i, jj}(\xi)$$

En ce qui concerne le tenseur d'ordre 3, $S_3^{\ell j}$, nous renvoyons en Annexe I le detail des calcùls, et nous nous contenterons de citer ici le resultat final. Introduisons le moment fonctionnel d'ordre 3 :

$$(I8)\qquad R^{\ell i, aj, bj}(x,y,z) = E\left[\gamma^{\ell i}(x)\, \gamma^{aj}(y)\, \gamma^{bj}(z) \right]$$

C'est une fonction (tensorielle) qui ne depend en réalite que de deux arguments (y - x et z - x)et non des trois points d'appui x.y et z separement,puisque la loi spatiale est invariante par translation (stationnaire).On obtient alors pour S_3 l'expression suivante :

$$(I9) \quad S_3^{\rho s} = -\int \partial_{ij}\alpha(\xi)\, \partial_{\alpha\beta}\alpha(\eta)\, R^{\rho i,\alpha j,\beta s}(0, \xi, \xi + \eta)\, d\xi\, d\eta$$

Cette ega lité doit etre prise au sens des distributions,(voir Annexe I)En fait,il suffit de comparer les expressions de S_2 et de S_3 pour voir apparaitre la loi generale selon laquelle il est possible de construire S_n Mais,en pratique,n croissant,l'expression de S_n devient trop complexe pour que l'on puisse esperer la calculer numériquement.

<u>3°/ Cas d'une perméabilite scalaire et isotrope</u>.Pour effectuer des calculs explicites,nous supposerons qu'il existe une permeabilite scalaire,soit $\gamma^{ij} = g^{ij}\gamma$,où γ est une fonction aleatoire stationnaire dont la loi spatiale est,de plus,supposée invariante par rotation.En posant :

$$(20) \quad R(0,\xi,\xi+\eta) = E\left[\gamma(x)\,\gamma(x+\xi)\,\gamma(x+\xi+\eta)\right]$$

on a ici :

$$R^{\rho i,\alpha j,\beta s}(0, \xi, \xi+\eta) = g^{\rho i} g^{\alpha j} g^{\beta s} R(0,\xi, \xi+\eta)$$

Si l'on change ξ en $-\xi$ dans (I9) et si l'on tient compte de /

$$R(0,-\xi,-\xi+\eta) = R(0,\xi,\eta)$$

on obtient le tenseur $S_3^{\rho s}$ sous la forme :

$$(22) \quad S_3^{\rho s} = -g^{\rho i} g^{\alpha j} g^{\beta s} \int \partial_{ij}\alpha(\xi)\, \partial_{\alpha\beta}\alpha(\eta)\, R(0,\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

Il convient donc d'introduire le tenseur du quatrieme ordre :

$$(23) \qquad C_{ij,ab} = \int \partial_{ij}\alpha(\xi)\, \partial_{ab}\alpha(\eta)\, R(0,\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

Ce tenseur est symetrique en ij comme en ab,et invariant également par echange de (ij) et (ab) .Il doit de plus etre invariant par rotation,comme la loi spatiale de γ .Ces differentes conditions ne peuvent etre remplies que par un tenseur de la formee

$$C_{ij,ab} = \lambda g_{ij} g_{ab} + \mu \left[g_{ia} g_{jb} + g_{ja} g_{ib} \right]$$

Il ne depend donc que de deux parametres λ et μ .De plus,la relation $\Delta\alpha = g^{ij}\partial_{ij}\alpha = -\delta$ (mesure de Dirac) montre que l'on doit avoir :

$$C^{i\;a}_{\;i\;a} = \lambda N^2 + 2\mu N = R(0,0,0) = E(\gamma^3)$$

Nous designerons par $m_n = E(\gamma^n)$ le moment d'ordre n de γ. Ainsi,l'espace ayant N dimensions, les deux parametres λ et μ verifient la relation :

$$(24) \qquad \lambda N^2 + 2\mu N = m_3$$

Le tenseur C,et par suite aussi le tenseur $S_3^{\rho\sigma}$,seront donc entierement determines si l'on connait le moment d'ordre 3,m_3 , et l'unique parametre μ dont l'expressi.n fasse intervenir $R(0,\xi,\eta)$

$$(25) \qquad \mu = \int \partial_{12}\alpha(\xi)\, \partial_{12}\alpha(\eta)\, R(0,\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

En effet, $S_3^{\rho\sigma}$,qui,d'après (22) et (23),se met sous la forme :

$$S_3^{\rho\sigma} = - g^{\rho i} g^{aj} g^{b\sigma} C_{ij,ab} = -\left[\lambda + (N+1)\mu\right] g^{\rho\sigma}$$

s'ecrira,compte tenu de (24) :

$$S_3^{\rho\sigma} = -\left[\frac{m_3}{N^2} + \left(N + 1 - \frac{2}{N}\right)\mu \right] g^{\rho\sigma}$$

A partir de maintenant, nous nous limiterons au cas de l'espace à N = 2 dimensions. Les tenseurs de Schwydler d'ordre 2 et 3 sont alors donnés par :

$$(26) \qquad \begin{aligned} S_2^{ij} &= -\frac{1}{2} m_2 \, g^{ij} \\ S_3^{ij} &= -\left(\frac{1}{4} m_3 + 2\mu\right) g^{ij} \end{aligned}$$

Le developpement de Schwydler limité à l'ordre 3 nous donne donc la perméabilité macroscopique sous la forme :

$$(27) \qquad \frac{K}{k_0} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 m_2 + \left(\frac{1}{4} m_3 + 2\mu\right)\varepsilon^3$$

Ce developpement doit etre compare à celui de la moyenne geometrique :

$$\frac{K}{k_0} = \frac{e^{E(\log k)}}{E(k)} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 m_2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 m_3$$

Tout se ramene donc à comparer entre elles les valeurs numeriques de $\frac{1}{3} m_3$ et de $\left(\frac{1}{4} m_3 + 2\mu\right)$, qui ne coincident que pour $\mu = \frac{1}{12} m_3$. Nous allons examiner trois exemples, et obtenir pour chacun d'eux des rapports μ/m_3 differents de I/I2. Celà signifiera que la regle de pondération géometrique n'est pas applicable à ces exemples, bien qu'il existe pour chacun d'eux une règle de ponderation.

III- EXEMPLES

I°/ Mot croise aleatoire. Le plan est suppose divise en carres de coté a selon un quadrillage regulier (en fait, la maille a ne joue aucun role, puisque K est invariant pour toute similitude effectuee sur la loi spatiale, et nous prendrons simplement a = I). A chacun de ces carres, nous attribuons une permeabilite scalaire k tiree au sort selon une loi donnee admettant la moyenne k_0 et les moments centres :

$$E\left[(k - k_o)^n\right] = k_o^n \varepsilon^n m_n$$

étant entendu que ces tirages au sort sont effectués indépendamment les uns des autres pour les différents carrés.

Le calcul du paramètre μ, qui est donné en Annexe II, conduit à la valeur numérique :

$$\frac{\mu}{m_3} = 0{,}0I45$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{4} m_3 + 2\mu = 0{,}279\ m_3$$

valeur comprise entre I/4 et I/3, de m_3, mais différente de I/3 m_3. La règle de pondération géométrique ne s'applique donc pas au mot croisé aléatoire, sauf dans le cas particulier où k/k_o et h/h_o ont la même loi de probabilité : cette circonstance se traduit par le fait que le moment d'ordre 3, $\varepsilon^3 m_3$, est en réalité du quatrième ordre en ε de sorte que le développement (27) s'identifie à celui de K/k_o. La règle de pondération applicable au damier aléatoire s'écrit, au 3ᵉ ordre

$$K/K_o = I - \frac{1}{2}\varepsilon^2 m_2 + 0{,}279 m\varepsilon^3 m_3.$$

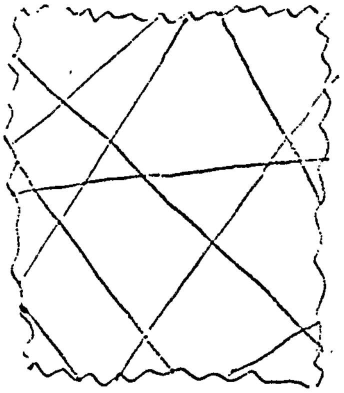
<u>Remarque</u> L'espace ayant N = 2 dimensions, K/k_o et H/h_o se déduisent des lois de k et de h par le jeu des mêmes règles de pondération. Cette circonstance permet de déterminer le terme d'ordre 4 lorsque l'on connait le terme d'ordre 3 (Celà résulte de calculs élémentaires qu'il n'est pas utile de reproduire ici). Si C est le coefficient de $\varepsilon^3 m_3$ dans (27), le développement poussé à l'ordre 4 peut s'écrire :

$$K/k_o = I - \frac{1}{2}\varepsilon^2 m_2 + C\varepsilon^3 m_3 + \left[\left(\frac{3}{2}C - \frac{5}{4}\right)\left(m_4 - m_2^2\right) - \frac{1}{8}m_2^2\right]\varepsilon^4$$

On pourra donc, dans cet exemple et dans les deux suivants, obtenir si on le désire, les développements de Schwydler poussés à l'ordre 4.

2°/ Milieu à polygones convexes aleatoires.

Le plan est maintenant divise en polygones convexes aleatoires,



grace à des droites implantees au hasard selon un schema poissonien (plus precisement : les droites de direction comprise entre θ et $\theta + d\theta$ dessinent sur une perpendiculaire à leur direction θ un processus poissonien de densite $\lambda\, d\theta$, λ etant une constante independante de θ).A chacun de ces polygones convexes,on attribue ensuite une permeabilité scalaire k tiree au sort comme dans l'exemple precedent.On sait que,dans un tel schema, la probabilite pour qu'une aire convexe de perimetree 2L ne soit recoupee par aucune des droites aleatoires est exp(-2λL) .En particulier,la probabilite pour que trois points 0, ξ ,et η soient interieurs à un même polygone (c'est à dire,pour que le triangle de sommets 0, ξ et η ne soit rencontré par aucune droite) est de cette meme forme,de sorte que l'on a :

$$R(0, \xi , \eta) = m_3 e^{-\lambda [|\xi| + |\eta| + |\xi - \eta|]}$$

La formule (25) permet ensuite de calculer μ.On trouve,(voir Annexe III) la valeur numerique :

$$\mu/m_3 \;=\; I/8 \;(3 - 4\log 2) = 0{,}0284..$$

On en tire $\frac{1}{4}\, m_3 + 2\,\mu = 0{,}3068 m_3$,valeur differente de $m_3/3$.LA règle de ponderation geometrique ne s'applique pas,et le developpement de Schwydler à l'ordre 3 est :

$$K/k_0 = I - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2 m_2 + 0{,}3068\; m_3\, \varepsilon^3$$

3°/ Schema à loi indefiniment divisible.

Nous partons maintenant d'une mesure aleatoire à loi indefiniment divisible dF, telle que les integrales $\int_{S_1} dF$ et $\int_{S_2} dF$ soient independantes dès que les deux aires S_1 et S_2 sont disjointes : cette mesure dF peut, par exemple, etre constituee par des points implantes au hasard dans le plan selon un schema poissonien. Nous attribuons ensuite à chaque point x du plan une permeabilite scalaire k(x) egale à l'integrale :

$$k(x) = \int_{C_x} dF$$

de la mesure aleatoire dans le cercle C_x de rayon a centre en x. Nous pouvons d'ailleurs prendre a = I, puisque K est invariant par similitude. Alors la covariance R(x,y) est proportionnelle à l'aire de l'intersection des deux cercles C_x et C_y, et le moment d'ordre 3, $R(0,\xi,\eta)$ est proportionnel à l'aire de l'intersection triple des trois cercles C_0, C_ξ et C_η. On en deduit cette fois (voir Annexe IV) :

$$\mu = 0$$

Ce milieu n'obeit pas à la règle de ponderation geometrique, mais à une règle differente qui s'ecrit au troisieme ordre :

$$K/k_0 = I - \frac{1}{2}\sigma^2 m_2 + \frac{1}{4}\sigma^3 m_3$$

CONCLUSION GENERALE

Au terme de cette étude, nous aboutissons à une conclusion qui pourra paraitre un peu decevante : la règle de ponderation geometrique, dont nous savions deja qu'elle ne peut pas s'appliquer dans les espaces possedant un nombre $N \neq 2$ dimensions, n'est pas non plus valable, en general, pour les ecoulements plans, en dehors du cas particulier où k/k_0 et h/h_0 obeissent à une meme loi spatiale isotrope. Cependant, ce cas particulier est important en pratique, puisqu'il s'applique à des permeabilites lognormales.D'autre part,il est fort possible, dans le cas N = 2 ,que K,sans coincider avec la moyenne geometrique, en differe suffisamment peu,en general,pour que la règle conserve sa valeur pratique.Mais surtout,on notera que chacun des trois exemples traites a permis de conclure à l'existence effective d'une règle de ponderation (non geometrique) : conclusion etablie,en realite,au troisieme ordre en $\mathcal{E}$,mais dont la validite à tous les ordres peut etre demontrée facilement.C'est là le resultat positif de cette etude. Pour aller plus loin,c'est à dire pour rechercher quel type de règle de ponderation peut correspondre à tel ou tel type de loi spatiale, compte tenu de la valeur de N,il conviendrait d'entreprendre simultanement des etudes experimentales assez systématiques,et des etudes mathematiques,d'un niveau assez elevé,relatives aux opérateurs aleatoires et à leurs solutions stationnaires eventuelles.

ANNEXE I

Expression du tenseur de Schwydler d'ordre 3

Pour determiner S_3^{ij} ,nous allons former une fonction $S_3^{ij}(\xi,\eta)$ dont la valeur en $\xi = \eta = 0$ coincidera avec celle de S_3^{ij} telle qu'X elle est definie en (I7).Posons,en premier lieu, :

$$(\mathrm{I}\text{-}\mathrm{I}) \qquad S_3^{ij}(\xi,0) = - E\left[\gamma^{ri}(x)\,\partial_r p_i^{j}(x+\xi)\right]$$

Cette fonction coincide bien avec S_3^{ij} en $\xi = 0$ .D'autre part,et moyennant une hypothese natutelle d'ergodicite,elle tend vers 0 lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini,puisque $\gamma^{ri}(x)$ et $\partial_r p_i^{j}(x+\xi)$ sont alors asymptotiquement indépendants.Cette condition aux limites permet de determiner une fonction à partir de son laplacien.Prenons donc le laplacien (en ξ) de (I-I),ce qui,compte tenu de (I5),va nous donner :

$$(\mathrm{I}\text{-}2) \quad \Delta_\xi S_3^{ij}(\xi,0) = E\left[\gamma^{ri}(x)\,\partial_{ri}\left(\gamma^{aj}(x+\xi)\,\partial_{a} p_{i}^{j}(x+\xi)\right)\right]$$

Ensuite,nous introduisons la deuxieme variable η en posant :

$$(\mathrm{I}\text{-}3) \quad \Delta_\xi S_3^{ij}(\xi,0) = E\left[\gamma^{ri}(x)\,\partial_{ri}\left(\gamma^{aj}(x+\xi)\,\partial_{a} p_{i}^{j}(x+\xi+\eta)\right)\right]$$

L'equation (I-3),jointe à la XX condition aux limites $S_3^{ij}(\infty,\eta) = 0$ determine effectivement la fonction $S_3^{ij}(\xi,\eta)$.Mais le deuxieme membre de (I-3) s'annule également pour $|\eta| \to \infty$ (toujours moyennant la meme hypothese d'ergodicite),et par conséquent cette nouvelle condition aux limites nous permet de reconstituer $S_3^{ij}(\xi,\eta)$ à partir de son laplacien iteré $\Delta_\xi\Delta_\eta$: D'après (I5),l'operateur Δ_η applique à (I-3) nous donne (compte tenu de $\partial_j p_i^{i} = \delta_j^{i}$) :

$$\cancel{\Delta_\xi \Delta_\eta S_3^{ij}(\xi,\eta) = - \qquad R \qquad (x, x+\;\;, x+\;\;+\;\;)}$$

~~et, en raison du caractere stationnaire l'expression obtenue ne depend pas de x : nous pouvons prendre simplement x = 0 .~~

$$\Delta_\xi \Delta_\eta S_3^{ij}(\xi,\eta) = - E\left[\gamma^{\varepsilon i}(x)\, \partial_{ij} \left(\gamma^{\alpha j}(x+\xi)\, \partial_{\alpha\beta}\, \gamma^{\beta j}(x+\xi+\eta) \right) \right]$$

Introduisant alors le moment fonctionnel R(x,y,z) defini en (I8), nous trouvons :

$$\text{(I-4)} \quad \Delta_\xi \Delta_\eta S_3^{ij}(\xi,\eta) = - \frac{\partial^2}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \frac{\partial^2}{\partial \eta^\alpha \partial \eta^\beta} R^{\varepsilon i, \alpha j, \beta s}(x, x+\xi, x+\xi+\eta)$$

et, en raison du caractere stationnaire, l'expression obtenue ne depend pas de x ; nous pouvons prendre simplement x = 0 .

En vue de résoudre (I-4), nous devons preciser notre hypothese d'ergodicité en supposant que le tenseur R(x,y,z) tend suffisamment vite vers 0 lorsque l'un des points d'appui, z par exemple, s'eloigne indefiniment. Nous nous interessons à la solution $S_3^{ij}(\xi,\eta)$ de (I-4) qui tend vers 0 lorsque $|\xi|$ ou $|\eta|$ tend vers l'infini. Cette solution se presente comme un produit de convolution dans l'espace à 2N dimensions :

$$S_3(\xi,\eta) = - \left[\alpha(\xi) \times \alpha(\eta) \right] * \partial R(0,\xi,\xi+\eta)$$

Le symbole de dérivation ∂ peut etre appliqué à l'un ou l'autre des facteurs du produit de convolution, de sorte que l'on a aussi :

$$\text{(I-5)} \quad S_3^{ij}(\xi,\eta) = - \left(\partial_{ij}\, \alpha(\xi)\, \partial_{\alpha\beta}\, \alpha(\eta) \right) * R^{i\varepsilon, \alpha j, \beta s}(0,\xi,\xi+\eta)$$

En tant que produit de convolution de distributions, (I-5) a toujours un sens, à cause de la decroissance suffisamment rapide de R à l'infini, liée à l'ergodicite. Mais ce qui nous interesse, c'est la valeur en $\xi = \eta = 0$ de la fonction S_3, qui doit donc etre continue à l'origine. En utilisant la transformation de Fourier, on note que la transformee de S_3 est sommable lorsque celle de R est elle-meme sommable dans l'espace à 2N dimensions. Par suite, si R est continue, relativement à l'ensemble des deux points ξ et η (sans etre necessairement derivable), il en est de meme de $S_3(\xi,\eta)$. On peut alors faire

$\xi = \eta = 0$ dans (I-5) et obtenir le tenseur S_2^{ij} de Schwydler sous la forme :

$$(\text{I-6}) \qquad S_2^{ij} = -\int \partial_{i_1 j_1}\alpha(\xi)\, \partial_{ab}\alpha(\eta)\, R^{i i_1, a j_1, b j}(0, \xi, \xi+\eta)\, d\xi\, d\eta$$

Cette expression doit etre prise au sens des distributions : la valeur à l'origine du produit de convolution (I-5) est le produit scalaire de la distribution $\partial_{ij}\alpha(\xi)\,\partial_{ab}\alpha(\eta)$ par la fonction suffisamment regulière $R(0, \xi, \xi+\eta)$

Le raisonnement ci-dessus peut etre facilement reitere, et conduit à l'expression suivante du terme generale du developpement de Schwydler

$$(\text{I-7}) \qquad S_n^{ij} = -\int \partial_{i_1 j_1}\alpha(\xi_1)\cdots\partial_{i_{n-1} j_{n-1}}\alpha(\xi_{n-1})\, R^{i i_1, j_1 i_2, \dots, j_{n-1} j}(0, \xi_1, \xi_1+\xi_2, \dots, \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_{n-1})\, d\xi_1 \dots d\xi_n$$

avec naturellement :

$$R^{i i_1, j_1 i_2 \dots j_{n-1} j}(0, \xi_1, \dots, \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_{n-1}) = E\left[\gamma^{i i_1}(x)\, \gamma^{j_1 i_2}(x+\xi_1)\cdots\gamma^{j_{n-1} j}(x+\xi_1+\dots+\xi_{n-1})\right]$$

Mais (I-7) represente le produit scalaire d'une distribution de lè espace à nN dimensions par la fonction R, et son calcul effectif semble devenir à peu près impossible au delà de n = 3 ou 4 .

ANNEXE II

Mot croisé aléatoire

Soient Ox et Oy deux axes paralleles àux directions principales du réseau carre, l'origine O etant prise au centre de l'un des carrés. Introduisons la fonction f(x) definie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq +\frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f(x) f(y) est donc la fonction indicatrice du carre centré à l'origine. Le moment $R(0, \xi, \eta)$ est proportionnel à l'intersection du carre unité et de ses deux translates dans les translations $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ et $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, soit :

$$R(0,\xi,\eta) = m_3 \int f(x_1)\, f(x_2)\, f(x_1+\xi_1)\, f(x_2+\xi_2)\, f(x_1+\eta_1)\, f(x_2+\eta_2)\, dx_1 dx_2$$

Désignant par δ la mesure de Dirac, nous avons :

$$\frac{df(x)}{dx} = \delta(x+\tfrac{1}{2}) - \delta(x-\tfrac{1}{2})$$

et par suite :

$$\frac{\partial^4 R(0,\xi,\eta)}{\partial\xi_1 \partial\xi_2 \partial\eta_1 \partial\eta_2} = m_3 \int f(x_1) f(x_2) \sum \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4\ \delta(x_1+\xi_1+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1)$$

$$\delta(x_2+\xi_2+\tfrac{1}{2}\varepsilon_2)\ \delta(x_1+\eta_1+\tfrac{1}{2}\varepsilon_3)\ \delta(x_2+\eta_2+\tfrac{1}{2}\varepsilon_4)$$

la somme étant étendue aux 16 termes $\varepsilon_i = \pm 1$. On a donc ici :

$$\mu = m_3 \int \alpha(\xi)\, \alpha(\eta) \frac{\partial^4 R}{\partial\xi_1 \partial\xi_2 \partial\eta_1 \partial\eta_2}\, d\xi\, d\eta$$

$$= \int f(x_1) f(x_2) \sum \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4\ \alpha(x_1+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1, x_2+\tfrac{1}{2}\varepsilon_2)\, \alpha(x_1+\tfrac{1}{2}\varepsilon_3, x_2+\tfrac{1}{2}\varepsilon_4)\, dx_1 dx_2$$

Désignons par r_1, r_2, r_3, r_4 les rayons vecteurs joignant le point courant (x,y) aux sommets du carré unite. Comme ici $\alpha = \frac{1}{2\pi}\log r$, nous obtenons

$$\mu = \frac{m_3}{4\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \left[\log \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \right]^2 dx\, dy = 0{,}0145\ldots$$

ANNEXE III.

Milieu à polygones convexes aleatoires

Avec le R(0, ,) de ce milieu,la formule (25) nous donne :

$$\frac{\mu}{m_3} = \int \partial_{12}\alpha(\xi)\,\partial_{12}\alpha(\eta)\, e^{-\lambda[|\xi| + |\eta| + |\xi+\eta|]}\, d\xi\, d\eta$$

Le principe de la methode va consister à exprimer $e^{-\lambda|\xi+\eta|}$ en fonction de la transformée de Fourier de $\exp(-\lambda r)$,avec $r = |\xi|$ dans l'espace à deux dimensions,qui est :

$$P(\rho) = \frac{2\pi}{\lambda^2\left[1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}\right]^{3/2}}$$

($\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ est le rayon vecteur dans le plan de Fourier).De :

$$e^{-\lambda|\xi+\eta|} = \int P(\rho)\, e^{2i\pi[u_1(\xi_1+\eta_1) + u_2(\xi_2+\eta_2)]}\, du_1\, du_2$$

on deduira,en effet, :

$$\text{(3-I)} \qquad \frac{\mu}{m_3} = \int P(\rho)\,[A(u,v)]^2\, du\, dv$$

$$A(u,v) = \int \partial_{12}\alpha(\xi)\, e^{-\lambda|\xi| + 2i\pi(u\xi_1 + v\xi_2)}\, d\xi_1\, d\xi_2$$

Calculons donc A(u,v).Comme :

$$\int \partial_{12}\alpha(\xi)\, e^{-\lambda|\xi|}\, d\xi_1\, d\xi_2 = 0$$

on obtient :

$$A(u;v) = -\frac{1}{\pi}\int \frac{xy}{r^4}\, e^{-\lambda r}\left[e^{2i\pi(ux+vy)} - 1\right] dx\, dy$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{r}\, e^{-\lambda r}\left(e^{2i\pi\rho\cos(\theta-\alpha)} - 1\right) dr$$

(avec $u = \rho\cos\alpha$ et $v = \rho\sin\alpha$),soit encore :

$$A(u,v) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2i\pi\rho}{\lambda}\right)^n \int_0^{2\pi} [\cos(\theta-\alpha)]^n \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

D'ailleurs, on a :

$$\int_0^{2\pi} [\cos(\theta-\alpha)]^n \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \sin\alpha \cos\alpha \int_0^{2\pi} [\cos\theta]^n \cos 2\theta \, d\theta$$

Cette integrale est nulle pour n impair. En sommant sur les entiers n pairs on trouve :

$$A(u,v) = \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left[1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2} \cos^2\theta\right] \cos 2\theta \, d\theta$$

Cette integrale se calcule exactement. On trouve :

$$A(u,v) = -\sin\alpha \cos\alpha \; \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}}}$$

Portons cette expression dans l'equation (2-I). Il vient :

$$\frac{\mu}{m_3} = \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha \cos^2\alpha \, d\alpha \int_0^{\infty} P(\rho) \left[\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}}} \right]^2 \rho \, d\rho$$

avec :

$$P(\rho) = \frac{2\pi}{\lambda^2} \; \frac{1}{\left(1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}\right)^{3/2}}$$

Il suffit de faire le changement de variable $x^2 = 1 + \frac{4\pi^2\rho^2}{\lambda^2}$ pour obtenir

$$\frac{\mu}{m_3} = \frac{1}{8} \int_1^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{8}\left(3 - 4\log 2\right) = 0{,}0284\ldots$$

ANNEXE IV

Schema à loi indefiniment divisible.

Designons par $f(x)$ la fonction indicatrice du cercle de rayon 1 :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

de sorte que la permeabilité $k(x)$ se mette sous la forme :

$$k(x) = \frac{1}{\pi}\int f(x + \xi)\, dF(\xi)$$

Le moment d'ordre 3, $R(x_1, x_2, x_3)$ est proportionnel à l'aire de l'intersection triple des cercles centres en x_1, x_2, et x_3, soit :

$$R(x_1, x_2, x_3) = A\int f(x_1 + \xi)\, f(x_2 + \xi)\, f(x_3 + \xi)\, d\xi$$

Portons dans (25). Il vient :

$$\begin{aligned} \mu &= A\int f(h)\, f(\xi + h)\, f(\eta + h)\, \partial_{12}\alpha(\xi)\, \partial_{12}\alpha(\eta)\, d\xi\, d\eta\, dh \\ &= A\int f(h) \left[\partial_{12}\alpha * f \right]^2 dh \end{aligned}$$

Calculons donc le produit de convolution $\partial_{12}\alpha * f$, et pour celà, en premier lieu, $\alpha * f$: ce dernier represente le potentiel engendré par une masse unité uniformement répartie dans le cercle de rayon 1 :

$$\alpha * f = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}(r^2 - 1) & \text{si } r \leq 1 \\ \frac{1}{2\pi} \log r & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Cette fonction est continue en $r = 1$ ainsi que ses derivées premières. Par suite :

$$\partial_{12}\alpha * f = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 1 \\ \partial_{12}\alpha & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\mu = A\int_0^1 \left(\partial_{12}\alpha * f \right)^2 2\pi r\, dr = 0$$