

B. R. G. M.  
DO/ DEM.

N-63

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 66

LA METHODE DE SCHWYDLER

G. MATHERON  
Février 1966

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 66

LA METHODE DE SCHWYDLER

Table des Matières

Pages

Introduction.

1

CHAPITRE I.- ETUDE DES ECOULEMENTS UNIFORMES, SOUS FORMES DE SERIES DE SCHWYDLER.

5

- 1.- Espérance du gradient du flux. . . . . 5
- 2.- Expression de la perméabilité macroscopique  $K^{ij}$  . . . . . 9
- 3.- La règle (hypothétique) de pondération homographique . . . . . 11
- 4.- Particularités des milieux à deux dimensions . . . . . 14
- 5.- Pondération géométrique dans l'espace à deux dimensions . . . . . 17
- 6.- Suggestions supplémentaires. . . . . 22

CHAPITRE II.- ETUDE DES ECOULEMENTS UNIFORMES A L'APPROXIMATION D'ORDRE 2.

25

- 1.- Equations générales de l'approximation d'ordre 2 . . . . . 25
- 2.- Les propriétés du tenseur de Schwydlér . . . . . 31
- 3.- Cas de simplification et règles de pondération . . . . . 33

CHAPITRE III.- ECOULEMENTS NON UNIFORMES ET ECOULEMENTS RADIAUX.

36

- 1.- Equations générales et conditions aux limites . . . . . 37
- 2.- Moyenne et variance de  $Q \Delta p$  (à l'approximation d'ordre 2) . . . . . 43
- 3.- Loi liée de  $Q \Delta p$  lorsque  $k(0)$  est connue . . . . . 50

ANNEXE A.- Le tenseur de Schwydlér . . . . . 56

56

ANNEXE B.- Variance de la perméabilité apparente . . . . . 59

59

ANNEXE C.- Espérance de la perméabilité apparente . . . . . 64

64

LA METHODE DE SCHWYDLER

Introduction

Nous nous proposons, dans cette Note, d'étudier de manière systématique la composition des perméabilités à l'aide de la méthode d'approximation de SCHWYDLER. On connaît le principe de cette méthode. Etant donné un milieu dont la perméabilité régionalisée  $k^{ij}(x)$  est interprétée comme une réalisation d'une fonction aléatoire tensorielle ergodique et stationnaire, elle consiste à poser :

$$(1) \quad k^{ij} = E(k^{ij}) + \varepsilon \gamma^{ij}$$

et à construire les solutions de l'écoulement sous la forme de développements (limités, ou en séries entières) en fonction du scalaire  $\varepsilon$  considéré comme petit.

Appliquée à la recherche des solutions stationnaires de l'équation de Darcy, c'est-à-dire des écoulements macroscopiquement uniformes, cette méthode permet (théoriquement) de déterminer la perméabilité macroscopique constante  $K^{ij}$  du milieu, sous réserve de convergence des séries entières obtenues. Les fonctionnelles obtenues sont, en fait, trop complexes pour que l'on puisse espérer les calculer numériquement dans les applications. Leur structure, cependant, montre que les perméabilités macroscopiques constantes  $K^{ij}$  sont invariantes lorsque l'on transforme par homothétie la loi spatiale des  $k^{ij}$  : invariance que des considérations de similitude permettent aisément de prévoir a priori. Or, parmi les fonctionnelles de la loi spatiale invariantes par homothétie figure une classe particulièrement simple, celle des fonctionnelles qui ne dépendent que de la loi de probabilité des composantes  $k^{ij}(x)$  de la perméabilité - prises au même point d'appui  $x$  -. On peut se demander, par conséquent, s'il existe des cas particuliers où les  $K^{ij}$  ne dépendent que de la loi des  $k^{ij}$  prises au même point d'appui. Dans de tels cas particuliers, nous dirons qu'il existe une règle de pondération. Une règle de pondération s'exprimera nécessairement par une égalité de la forme :

$$(2) \quad \bar{\Phi}(K) = E \left[ \bar{\Phi}(k) \right]$$

avec une fonction  $\bar{\Phi}$  (de matrice) déterminée. Par exemple, avec des perméabilités conservatives, on a la règle de pondération arithmétique

$$K = E(k)$$

et, si les  $h_{ij}$ , inverses des  $k^{ij}$ , constituent un tenseur gradient on la règle de pondération harmonique

$$K^{-1} = E(k^{-1})$$

Enfin, dans un milieu stratifié à 3 dimensions, l'axe des  $x^1$  étant pris perpendiculaire au plan des strates, on a la règle :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{K^{11}} & \frac{K^{12}}{K^{11}} & \frac{K^{13}}{K^{11}} \\ \frac{K^{12}}{K^{11}} & K^{22} - \frac{K^{12}{}^2}{K^{11}} & K^{23} - \frac{K^{12} K^{13}}{K^{11}} \\ \frac{K^{13}}{K^{11}} & K^{23} - \frac{K^{12} K^{13}}{K^{11}} & K^{33} - \frac{K^{13}{}^2}{K^{11}} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \frac{1}{k^{11}} & \frac{k^{12}}{k^{11}} & \frac{k^{13}}{k^{11}} \\ \frac{k^{12}}{k^{11}} & k^{22} - \frac{k^{12}{}^2}{k^{11}} & k^{23} - \frac{k^{12} k^{13}}{k^{11}} \\ \frac{k^{13}}{k^{11}} & k^{23} - \frac{k^{12} k^{13}}{k^{11}} & k^{33} - \frac{k^{13}{}^2}{k^{11}} \end{pmatrix}$$

Ces trois exemples, empruntés à la Note Géostatistique n°62, prouvent qu'il existe certains cas (très particuliers il est vrai) où une règle de pondération du type (2) s'applique effectivement. Il serait souhaitable de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi. Dans cette étude, nous montrerons seulement que la règle de pondération géométrique

$$\log K = E(\log k)$$

s'applique rigoureusement dans le cas particulier très intéressant d'un milieu isotrope à deux dimensions et à perméabilités lognormales. Ce résultat est lié étroitement au nombre  $N = 2$  des dimensions de l'espace. L'étude de l'approximation de SCHWYDLER au deuxième ordre montre qu'il ne subsiste pas dans l'espace à 3 dimensions.

D'une manière générale, nous avons montré antérieurement que la perméabilité macroscopique  $K$  est toujours intermédiaire entre les moyennes harmonique et géométrique :

$$\left[ E(k^{-1}) \right]^{-1} \leq K \leq E(k)$$

Les résultats auxquels conduit la méthode de SCHWYDLER suggèrent une loi, de forme encore purement qualitative, qui serait la suivante : Dans les milieux isotropes au moins, la perméabilité macroscopique serait d'autant plus proche de la moyenne arithmétique que le nombre  $N$  des dimensions de l'espace est plus élevé. Pour  $N = 4$ , on sait que la règle de pondération harmonique s'applique toujours. Pour  $N = 2$ , on doit être à mi-chemin entre les moyennes harmonique et arithmétique (ce qui est le sens d'une moyenne géométrique), et, pour  $N = 3$  on

devrait se situer aux deux tiers du chemin. Ces remarques conduisent à proposer la règle

$$(3) \quad K^N = E(k)^{N-1} \left[ E(k^{-1}) \right]^{-1}$$

Toujours vérifiée pour  $N = 1$ , démontrée pour  $N = 2$  dans le cas d'un milieu isotrope à perméabilité lognormale, cette règle est purement hypothétique pour  $N = 3$  (mais compatible avec les indications que donne, dans ce cas, l'approximation de SCHWYDLER limitée à l'ordre 2). En concurrence avec la règle (3), nous nous proposerons aussi une règle de pondération homographique :

$$\left[ K + (N - 1) E(k) \right]^{-1} = E \left[ \left[ k + (N - 1) E(k) \right]^{-1} \right]$$

Suggérée par la forme même des fonctionnelles générales auxquelles conduisent les développements en série de SCHWYDLER, cette règle suppose, pour être valable, que se produisent certaines simplifications dont il ne nous a pas été possible de montrer la possibilité. Elle reste hypothétique, et doit donc être considérée comme douteuse, d'autant plus qu'elle n'est pas compatible avec la règle (3) dans le cas où cette dernière est certainement valable.

En fait, l'étude de l'approximation d'ordre 2 nous conduira à une relation du type

$$E(k^{ij}) - K^{ij} = \varepsilon^2 S^{ij}$$

où le tenseur de SCHWYDLER  $S^{ij}$  est une fonctionnelle de la fonction de covariance des  $k^{ij}$ . Ce n'est que dans certains cas particuliers (hypothèse de subisotropie) que  $S^{ij}$  peut s'exprimer à l'aide de la seule matrice des covariances des perméabilités prises au même point d'appui : c'est donc seulement dans ces cas particuliers (d'ailleurs importants pour les applications) qu'il n'est pas vain de rechercher une règle de pondération du type 2.

Les deux premières parties de cette étude seront consacrées à l'étude de la composition des perméabilités et à la recherche de règles de pondération éventuelles, la première partie utilisant des développements en série et la deuxième se limitant aux développements d'ordre deux. Mais la perméabilité macroscopique constante  $K^{ij}$  ainsi déterminée ne donne une description correcte que des écoulements uniformes ou localement uniformes au niveau macroscopique. Or il existe une classe d'écoulements particulièrement importants dans les applications, et que l'on ne peut en aucune manière considérer comme localement uniformes au niveau macroscopique : il s'agit des écoulements radiaux. Au voisinage d'un puits, en effet l'écoulement n'est pas uniforme, et ne peut être considéré comme localement uniforme que

pour des domaines de dimension inférieure au diamètre du sondage, domaines généralement beaucoup trop petits pour que l'homogénéité statistique du milieu  $y$  soit déjà réalisée par ergodicité.

Dans une troisième partie, nous étudierons donc directement les écoulements radiaux, par la méthode d'approximation de SCHWYDLER limitée au deuxième ordre. La perméabilité apparente, relative aux écoulements radiaux, que nous mettrons en évidence sera une variable aléatoire (et non une quantité déterminée, comme la perméabilité macroscopique). Sa variance, toutefois, tendra vers 0 lorsque le rayon  $R_1$  de la zone de drainage tendra vers l'infini. Son espérance mathématique, d'autre part, ne coïncide pas avec la perméabilité macroscopique, mais converge vers elle si le rayon  $R_1$  de la zone de drainage et le rayon  $R_0$  du sondage tendent vers l'infini et zéro respectivement.

\*

\* \*

C H A P I T R E    I

ETUDE DES ECOULEMENTS UNIFORMES  
SOUS FORME DE SERIES DE SCHWYDLER

Dans ce chapitre, nous étudierons en premier lieu les développements en série du flux et du gradient d'un écoulement stationnaire, et la relation remarquable qui lie leurs espérances mathématiques. Nous en déduirons, dans un deuxième paragraphe, le développement des perméabilités macroscopiques  $K^{ij}$ . Nous examinerons ensuite une possibilité (hypothétique) de simplification, qui nous conduira à proposer une règle de pondération homographique, d'ailleurs assez douteuse. Enfin, dans un quatrième paragraphe, la symétrie en  $k$  et  $h$ , pour un espace à  $N = 2$  dimensions, nous permettra d'établir qu'un milieu isotrope à deux dimensions et perméabilités logarithmiques obéit nécessairement à la règle de pondération géométrique.

I.- ESPERANCES DU GRADIENT ET DU FLUX.

Soit un milieu infini à  $N$  dimensions, dont la perméabilité régionalisée  $k^{ij}(x)$  est interprétée comme une réalisation d'une fonction aléatoire tensorielle ergodique et stationnaire. Nous supposons que l'espérance de  $k^{ij}$  est le tenseur métrique (tenseur unité)  $g^{ij}$  :

$$E(k^{ij}) = g^{ij}$$

Il est toujours possible de se ramener à ce cas en effectuant une transformation linéaire des coordonnées. Autrement dit, nous poserons :

$$(4) \quad k^{ij} = g^{ij} + \varepsilon \gamma^{ij}$$

avec :

$$(5) \quad E(\gamma^{ij}) = 0$$

Le flux  $q^i$  et le gradient  $\partial_j p$  d'un écoulement permanent quelconque vérifient le système de Darcy

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} q^i = -k^{ij} \partial_j p \\ \partial_i q^i = 0 \end{array} \right.$$

Parmi les solutions de ce système, nous nous intéresserons exclusivement, dans les deux premiers chapitres, aux solutions stationnaires, et nous chercherons à les représenter sous forme de développements en séries :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} q^i &= q_0^i + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n q_n^i \\ \partial_j p &= \partial_j p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \partial_j p_n \end{aligned} \right.$$

La première équation (6) donne, compte tenu de (4) et en identifiant les termes en  $\varepsilon^n$  :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} q_0^i &= -g^{ij} \partial_j p_0 \\ q_n^i &= -g^{ij} \partial_j p_n - \gamma^{ij} \partial_j p_{n-1} \end{aligned} \right.$$

et l'équation de continuité conduit à :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta p_0 &= 0 \\ \Delta p_n + \partial_i (\gamma^{ij} \partial_j p_{n-1}) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Pour  $\varepsilon = 0$ ,  $k^{ij} = g^{ij}$  est constante, et les solutions stationnaires correspondent à des écoulements uniformes. Par suite le gradient  $\partial_j p_0$  et le flux  $q_0^i = -g^{ij} \partial_j p_0$  correspondants sont des constantes.

Soit alors  $\alpha$  la solution élémentaire de l'équation

$$(10) \quad \Delta \alpha + \delta = 0$$

où  $\delta$  est la mesure de Dirac.

[ pour  $N = 2$ ,  $\alpha = \frac{1}{2\pi} \log r$ ; pour  $N = 3$   $\alpha = \frac{1}{4\pi r}$ ; plus généralement, pour  $N \neq 2$ ,

$$\alpha = \frac{1}{4} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)}{\pi^{\frac{N}{2}}} \frac{1}{r^{N-2}} \right]$$

Toute équation du type

$$(11) \quad \Delta f + \varphi = 0$$

admet alors la solution

$$f = \alpha * \varphi$$

et, si  $\varphi$  est une fonction aléatoire stationnaire la fonction  $f$  ainsi obtenue (sous réserve que le produit de convolution ait un sens) constitue la solution

stationnaire de l'équation (11). Ainsi (formellement) la solution de la 2ème équation (9) peut s'écrire

$$p_n = \alpha * \left[ \partial_i \gamma^{ij} \partial_j p_{n-1} \right]$$

D'où l'on tire, d'après les propriétés des produits de convolution

$$(12) \quad \partial_j p_n = \partial_{ij} \alpha * (\gamma^{iu} \partial_u p_{n-1})$$

Prenons l'espérance mathématique des deux membres de cette équation (12). Comme  $\gamma^{iu} \partial_u p_{n-1}$  est stationnaire, son espérance est une constante. Or, dans l'espace à N dimensions, on a pour toute constante C :

$$\partial_{ij} \alpha * C = - \frac{1}{N} g_{ij} C$$

Par suite, nous obtenons une première relation remarquable :

$$(13) \quad \boxed{E(\partial_j p_n) = - \frac{1}{N} g_{ij} E \left[ \gamma^{iu} \partial_u p_{n-1} \right]}$$

En ce qui concerne le terme  $q_n^i$  d'ordre n de l'expression du flux, les équations (8) et (13) donnent :

$$\begin{aligned} E(q_n^i) &= - g^{ij} E(\partial_j p_n) - E(\gamma^{iu} \partial_u p_{n-1}) \\ &= \frac{1}{N} E(\gamma^{iu} \partial_u p_{n-1}) - E(\gamma^{iu} \partial_u p_{n-1}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$(14) \quad \boxed{E(q_n^i) = (N - 1) g^{ij} E(\partial_j p_n)}$$

sauf, naturellement, pour  $n = 0$ , puisque dans ce cas on a

$$q_0^i = - g^{ij} \partial_j p_0$$

Ainsi, le flux total  $q^i$  est :

$$q^i = q_0^i + \sum_n \varepsilon^n q_n^i$$

et a pour espérance :

$$E(q^i) = q^i_0 + \sum \varepsilon^{n(N-1)} g^{ij} E(\partial_j p_n) = q^i_0 + (N-1)g^{ij} [E(\partial_j p) - \partial_j p_0]$$

D'où, finalement, la relation remarquable :

(15)

$$E(q^i) = (N-1)g^{ij} E(\partial_j p) - N g^{ij} \partial_j p_0$$

Le terme constant du gradient,  $\partial_j p_0$ , peut être choisi arbitrairement. La formule (12) permet d'en déduire, de proche en proche, toutes les composantes d'ordre n. Pour construire un système de solutions privilégiées, on peut partir de

$$\partial_j p^l_0 = \delta_j^l$$

La relation (15) donne alors :

$$E(q^{il}) = (N-1) g^{ij} E(\partial_j p^l) - N g^{il}$$

Si l'on désigne par B le tenseur gradient

$$B_j^l = \partial_j p^l$$

et par C le tenseur conservatif

$$C^{il} = -q^{il}$$

la relation précédente s'écrit :

(16)

$$E(C) + (N-1) E(B) = N$$

Or la perméabilité macroscopique constante K est :

$$K = E(C) [E(B)]^{-1}$$

Par suite (16) nous donne :

$$K + (N-1) = N [E(B)]^{-1}$$

Du fait que  $E(k^{ij}) = g^{ij}$  a été supposé sans dimensions dans l'équation (4) cette relation n'apparaît pas comme homogène. Prenant, plus généralement

$$k^{ij} = k_0 (g^{ij} + \gamma^{ij})$$

avec

$$\begin{cases} E(k^{ij}) = k_0 g^{ij} \\ E(\gamma^{ij}) = 0 \end{cases}$$

les équations (9) et (12) subsistent, et on obtient

$$(17) \quad \boxed{\frac{K + (N-1)k_0}{N k_0} = [E(B)]^{-1}}$$

La relation (17) ne constitue pas, à proprement parler, une règle de pondération, au sens que nous avons attribué à cette expression, puisqu'il n'est nullement évident que l'espérance  $E(B)$  du gradient de pression, telle que l'on peut la calculer de proche en proche à partir de la relation (12), ne dépende que de la loi de probabilité des perméabilités  $k^{ij}(x)$  prises au même point d'appui  $x$ . Elle montre, cependant, que la perméabilité macroscopique ne dépend que de cette espérance.

## II.- EXPRESSION DE LA PERMEABILITE MACROSCOPIQUE $K^{ij}$

Conformément à l'équation (17), il suffit, pour déterminer la perméabilité macroscopique  $K$ , de calculer l'espérance  $E(B)$  du gradient de pression à l'aide de la relation (12). De cette dernière relation, on déduit, de proche en proche :

$$\partial_j p_1 = \int \partial_{ij} \alpha(x-\xi) \gamma^{iu}(\xi) \partial_u p_0(\xi) d\xi$$

$$\partial_j p_2 = \int \partial_{i_1 j} \alpha(x-\xi_1) \partial_{i_2 u_1} \alpha(\xi_1 - \xi_2) \gamma^{i_1 u_1}(\xi_1)$$

$$\gamma^{i_2 u_2}(\xi_2) \partial_{u_2} p_0(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

---


$$\partial_j p_n = \int \partial_{j i_1} \alpha(x-\xi_1) \partial_{i_1 i_2} \alpha(\xi_1 - \xi_2) \dots \partial_{i_{n-1} i_n} \alpha(\xi_{n-1} - \xi_n)$$

$$\gamma^{i_1 u_1}(\xi_1) \gamma^{i_2 u_2}(\xi_2) \dots \gamma^{i_n u_n}(\xi_n) \partial_{u_n} p_0(\xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$$

Remplaçons  $\partial_{u_n} p_0$  par  $\partial_{u_n} p_0^l = \delta_{u_n}^l$  et passons aux espérances mathéma-

tiques. On voit s'introduire le moment fonctionnel d'ordre  $n$  de la loi spatiale des  $k^{ij}$ . Désignons par

$$R^{i_1 u_1, i_2 u_2, \dots, i_n u_n}(\xi_1, \dots, \xi_n) = E \left[ \gamma^{i_1 u_1}(\xi_1) \gamma^{i_2 u_2}(\xi_2) \dots \gamma^{i_n u_n}(\xi_n) \right]$$

ce moment fonctionnel. Nous obtenons :

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} E(\mathcal{D}_j p_n^{\ell}) &= \int \mathcal{D}_{j i_1} \alpha(x = \xi_1) \mathcal{D}_{i_1 i_2} \alpha(\xi_1 - \xi_2) \dots \mathcal{D}_{i_{n-1} i_n} \alpha(\xi_{n-1} - \xi_n) \\ &\quad \int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_{i_1 i_2 \dots i_n}^{\ell}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n \end{aligned} \right.$$

En raison du caractère stationnaire, cette expression ne dépend pas réellement de  $x$ . La relation (19) résoud théoriquement le problème que nous nous étions posé. En effet, il suffit d'écrire

$$E(B_j^{\ell}) = \delta_j^{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n E(\mathcal{D}_j p_n^{\ell})$$

de vérifier la convergence du développement obtenu (nous ne discuterons pas ce point) et de porter dans la relation (17) pour obtenir la perméabilité macroscopique constante.

En fait, il ne semble pratiquement pas possible de réaliser effectivement ce programme. La fonctionnelle (19) - qui doit être prise au sens des distributions, car les  $\mathcal{D}_{ij} \alpha$  introduisent nécessairement des mesures de Dirac - devient vite inextricable lorsque  $n$  augmente, et son calcul numérique pratiquement impossible au delà de  $n = 2$  ou  $3$ . Dans le chapitre suivant, consacré à l'approximation d'ordre 2, nous étudierons en détail l'espérance  $E(\mathcal{D}_j p_2)$ , avec comme objectif principal de chercher dans quels cas une règle de pondération du type (2) n'est pas exclue a priori. Auparavant, nous allons examiner la manière dont la fonctionnelle (19) est construite, et chercher à mettre en évidence des cas de simplification possible.

Une première remarque, très importante, est la suivante : la fonctionnelle (19) est invariante pour toute homothétie effectuée sur la loi spatiale des  $k^{ij}$

En effet, la distribution  $\alpha$ , solution élémentaire de  $\Delta \alpha + \delta = 0$ , est en  $r^{2-n}$  (ou  $\log r$  pour  $n = 2$ ), donc homogène et de degré 2 :

$$\int \alpha(x) \varphi(\lambda x) dx = \int \alpha\left(\frac{x}{\lambda}\right) \varphi(x) \frac{dx}{\lambda^n} = \frac{1}{\lambda^2} \int \alpha(x) \varphi(x) dx$$

et par suite  $\mathcal{D}_{ij} \alpha$  est homogène et de degré 0 :

$$\int \mathcal{D}_{ij} \alpha(x) \varphi(\lambda x) dx = \int \mathcal{D}_{ij} \alpha(x) \varphi(x) dx$$

Par suite si, dans (19), nous remplaçons

$$R^{i_1 u_1 \dots i_n u_n} (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

par

$$R^{i_1 u_1 \dots i_n u_n} (\lambda \xi_1, \dots, \lambda \xi_n)$$

l'espérance  $E(\mathcal{D}_j p_n^l)$  n'est pas modifiée. Ainsi, toute homothétie effectuée sur la loi spatiale des  $k^{ij}$  laisse invariante les fonctionnelles (19) et la perméabilité macroscopique  $K$ . Ce résultat pouvait facilement être prévu a priori à l'aide de considérations élémentaires de similitude. Deux milieux de perméabilités  $k_1^{ij}$  et  $k_2^{ij}$  telles que l'on ait

$$k_1^{ij}(x) = k_2^{ij}(\lambda x)$$

ont, en effet, même perméabilité macroscopique constante.

Parmi les fonctionnelles invariantes par homothétie figurent toutes celles qui ne dépendent que de la loi des  $k^{ij}(x)$  prises au même point d'appui. On est donc conduit à rechercher s'il existe des cas où les fonctionnelles (19) ne dépendraient que des moments d'ordre  $n$ ,  $R^{i_1 u_1 \dots i_n u_n}(0, \dots, 0)$  pris au même point d'appui. C'est dans de tels cas seulement qu'il existera une règle de pondération.

### III.- LA REGLE (HYPOTHETIQUE) DE PONDERATION HOMOGRAPHIQUE.

La distribution  $\mathcal{D}_{ij} \alpha$  qui intervient dans la fonctionnelle (19) est étroitement apparentée à la mesure de Dirac  $\delta$ . En effet, on a par définition :

$$g^{ij} \mathcal{D}_{ij} \alpha = \Delta \alpha = - \delta$$

Par suite, agissant sur une fonction possédant la symétrie sphérique, c'est-à-dire de la forme  $\varphi(r)$ , la distribution  $\mathcal{D}_{ij} \alpha$  donne :

$$(20) \quad \int \mathcal{D}_{ij} \alpha(x) \varphi(x) dx = - \frac{1}{N} g_{ij} \varphi(0)$$

Autrement dit elle coïncide, sur le sous-espace des fonctions à symétrie sphérique, avec la mesure de Dirac  $-\frac{1}{N} g_{ij} \delta$ .

Considérons alors la fonctionnelle (19) écrite pour  $n = 2$  :

$$E(\partial_j p_2^l) = \int \partial_{ji} \alpha(x - \xi_1) \partial_{uv} \alpha(\xi_1 - \xi_2) R^{iu, vl}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

Ici  $R^{iu, vl}(\xi_1, \xi_2)$  est de la forme  $R^{iu, vl}(\xi_1 - \xi_2)$ , puisque les perméabilités sont stationnaires. Par suite, on a aussi bien

$$E(\partial_j p_2^l) = \int \partial_{ji} \alpha(x - \xi) d\xi \int \partial_{uv} \alpha(\eta) R^{iu, vl}(\eta) d\eta$$

$$= - \frac{1}{N} \varepsilon_{ji} \int \partial_{uv} \alpha(\eta) R^{iu, vl}(\eta) d\eta$$

Si, de plus,  $R^{iu, vl}(\eta)$  ne dépend que du rayon vecteur  $|\eta|$ , la relation (20) conduit à :

$$(21) \quad E(\partial_j p_2^l) = \frac{1}{N^2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{uv} R^{iu, vl}(0)$$

Dans ce cas, donc, l'espérance du terme d'ordre 2 ne dépend que de la matrice  $R^{iu, vl}(0)$  des covariances des perméabilités prises au même point d'appui. Nous reviendrons plus longuement au chapitre suivant sur cette circonstance remarquable, dont la possibilité est ainsi établie en ce qui concerne le terme d'ordre 2. Imaginons, un instant, que cette règle de simplification puisse s'appliquer non seulement au terme d'ordre 2, mais à tous les termes (en fait, il est vraisemblable que cette possibilité n'existe pas réellement. Il ne nous a pas été possible de le démontrer, mais nous n'avons réussi à former aucun exemple simple où une telle simplification se produit. On peut penser qu'une telle simplification n'a de chances de se produire que si la loi spatiale présente le maximum d'isotropie, et, en particulier, est invariante par rotation. Or, dans le cas particulier de deux dimensions, et pour des perméabilités lognormales, nous verrons qu'un milieu isotrope obéit à la règle de pondération géométrique, incompatible avec la règle de pondération homographique à laquelle conduit l'hypothèse envisagée ici). Avec une telle règle de simplification, la fonctionnelle (19) se réduirait à :

$$(22) \quad E(\partial_j p_n^l) = \frac{(-1)^n}{N^n} \varepsilon_{j_1 i_1} \varepsilon_{u_1 i_2} \dots \varepsilon_{u_{n-1} i_n} R^{i_1 u_1, i_2 u_2, \dots, i_n}^l(0)$$

Or, par définition

$$R^{i_1 u_1, \dots, i_n l} (0) = E \left[ \gamma^{i_1 u_1}(x) \gamma^{i_2 u_2}(x) \dots \gamma^{i_n l}(x) \right]$$

Introduisons donc les puissances successives  $\gamma^n$  du tenseur  $\gamma$ . Les composantes  $\gamma_n^{ij}$  de  $\gamma^n$  sont par définition :

$$\gamma_n^{i_1 l} = \gamma^{i_1 u_1} \varepsilon_{u_1 i_2} \gamma^{i_2 u_2} \varepsilon_{u_2 i_3} \dots \varepsilon_{u_{n-1} i_n} \gamma^{i_n l}$$

et (22) se réduit, par conséquent à :

$$E(\partial_j p_n^l) = \frac{(-1)^n}{N^n} \varepsilon_{j i_1} E(\gamma_n^{i_1 l})$$

ou, sous forme matricielle :

$$E(\partial p_n) = \frac{(-1)^n}{N^n} E(\gamma^n)$$

Par suite, le gradient  $B = \sum_0^\infty \varepsilon^n \partial p_n$  a pour espérance

$$E(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{N^n} \varepsilon^n E(\gamma^n) = E \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon}{N} \gamma \right)^{-1} \right]$$

Soit encore

$$(23) \quad E(B) = N E \left[ (N - 1 + k)^{-1} \right]$$

Il convient, avant de porter dans (17), de remplacer  $k$  par  $\frac{k}{k_0}$  dans (23), lorsque  $E(k^{ij}) = k_0 g^{ij}$ . La règle (17) se met alors sous la forme d'une règle de pondération homographique qui s'écrit :

$$(24) \quad \boxed{\left[ K + (N-1)k_0 \right]^{-1} = E \left[ \left( k + (N-1)k_0 \right)^{-1} \right]}$$

Bien qu'il n'existe probablement pas de cas où cette règle soit réellement applicable si  $N \neq 1$  (voir ci-dessus) la forme de la relation (24) est instructive. Pour  $N = 1$ , elle se réduit à la règle de pondération harmonique  $K^{-1} = E(k^{-1})$ , qui s'applique effectivement dans les milieux unidimensionnels. Lorsque  $N$  augmente, la règle (24) tend à s'éloigner de la pondération harmonique et à se rapprocher de la pondération arithmétique, vers laquelle elle converge lorsque  $N$  tend vers l'infini.

Ainsi se trouve suggérée une loi importante que l'étude de l'approximation d'ordre deux confirmera au chapitre suivant. Dans les milieux isotropes (plus précisément : lorsque la loi spatiale des perméabilités est invariante par rotation), la règle de pondération, s'il en existe, dépend étroitement du nombre N des dimensions. Pour N = 2, la perméabilité macroscopique s'obtient toujours par la règle de pondération harmonique. Toujours comprise entre les moyennes harmonique et arithmétique, elle tend, lorsque le nombre N des dimensions de l'espace augmente, à se rapprocher de la moyenne arithmétique et se confond asymptotiquement avec celle-ci lorsque N devient infini.

#### IV.- PARTICULARITES DES MILIEUX A DEUX DIMENSIONS.

Cette influence déterminante du nombre N des dimensions de l'espace est bien soulignée par une particularité que l'on observe dans le cas N = 2, et dans ce cas seulement : à deux dimensions, le flux  $q^i$  et le gradient  $\partial_j p$  jouent des rôles symétriques.

En effet, soient dans l'espace à 2 dimensions, supposé rapporté à une base orthonormée,  $q^i$  et  $\partial_j p$  une solution du système de Darcy .

$$\left\{ \begin{array}{l} q^i = -k^{ij} \partial_j p \\ \partial_i q^i = 0 \end{array} \right.$$

Posons

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} F^1 = \partial_2 p \\ G_1 = q^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} F^2 = -\partial_1 p \\ G_2 = -q^1 \end{array} \right.$$

Pour que  $q^i$  soit conservatif (vérifie  $\partial_i q^i = 0$ ), il faut et il suffit que  $G_i$  soit un gradient. Pour que  $F^i$  soit conservatif, de même, il faut et il suffit que  $\partial_j p$  soit un gradient. Ainsi, au gradient  $\partial_j p$  est associé le vecteur  $F^i$  qui possède les propriétés d'un flux, et au flux  $q^i$  est associé le vecteur  $G_i$  qui est un gradient.

La loi de Darcy, avec le tenseur des résistivités  $h_{ij}$  inverse de  $k^{ij}$ , peut aussi bien s'écrire :

$$(26) \quad \partial_j p = -h_{ji} q^i$$

Si l'on pose

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} P^{11} = h_{22} \\ P^{22} = h_{11} \\ P^{12} = P^{21} = -h_{12} \end{array} \right.$$

on vérifie immédiatement, compte tenu de (25), que la loi de Darcy (26) s'écrit de manière équivalente :

$$F^i = -P^{ij} G_j$$

[On montre, en calcul tensoriel, que les relations (25) et (27) définissent des vecteurs  $F^i$  et  $G_j$  et un tenseur  $P^{ij}$ , pourvu que l'espace soit rapporté à une base orthonormée. Plus généralement, en axes quelconques,  $g_{ij}$  désignant le tenseur métrique et  $\sqrt{g}$  son déterminant, on introduit le tenseur antisymétrique  $\eta$  de composantes contravariantes et covariantes :

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{g}} \\ \frac{-1}{\sqrt{g}} & 0 \end{pmatrix} \quad \eta^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{g} \\ -\sqrt{g} & 0 \end{pmatrix}$$

Les relations (25) et (27) s'écrivent, sous forme tensorielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} F^i = \eta^{ij} \partial_j p \\ G_i = \eta_{ij} q^j \\ P^{ij} = \eta^{il} \eta^{jk} h_{lk} \end{array} \right.$$

$F^i$  et  $G_i$  sont les vecteurs adjoints de  $\partial_j p$  et  $q^j$ . On voit que cette dualité entre flux et gradient est liée étroitement au nombre  $N = 2$  des dimensions de l'espace. Dans l'espace à  $N$  dimensions, en effet, l'adjoint d'un vecteur est un tenseur d'ordre  $N-1$ .

$G_j$  doit être un gradient, soit  $G_j = \partial_j G$ , et  $F^i$  doit être conservatif. Ainsi le système de Darcy est équivalent au système suivant :

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} F^i = -P^{ij} \partial_j G \\ \partial_i F^i = 0 \end{array} \right.$$

Or ce système (28) possède la même forme que le système de Darcy lui-même, la perméabilité originelle  $k^{ij}$  étant simplement remplacée par le tenseur  $p^{ij}$  construit, selon (27), à partir de l'inverse  $h_{ij}$  des perméabilités. Ainsi, dans l'espace à 2 dimensions, perméabilités et résistivités jouent des rôles symétriques. Autrement dit, chaque fois que l'on a une règle de pondération du type

$$\varphi(K) = E \left[ \varphi(k) \right]$$

on doit s'attendre à ce que la règle duale

$$\varphi \begin{pmatrix} H_{22} & - H_{12} \\ - H_{12} & H_{11} \end{pmatrix} = E \left[ \varphi \begin{pmatrix} h_{22} & - h_{12} \\ - h_{12} & h_{11} \end{pmatrix} \right]$$

soit simultanément vérifiée. Par exemple, dans un milieu à stratifications parallèles à l'axe des  $y$ , la règle connue

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{k^{12}}{k_{11}} \\ \frac{k^{12}}{k_{11}} & k^{22} - \frac{k^{12}{}^2}{k_{11}} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \frac{1}{k_{11}} & \frac{k^{12}}{k_{11}} \\ \frac{k^{12}}{k_{11}} & k^{22} - \frac{k^{12}{}^2}{k_{11}} \end{pmatrix}$$

est équivalente (on le vérifie facilement par un calcul élémentaire) à la règle duale.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{H_{22}} & - \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ - \frac{H_{12}}{H_{22}} & H_{11} - \frac{H_{12}{}^2}{H_{22}} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{22}} & - \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ - \frac{h_{12}}{h_{22}} & h_{11} - \frac{h_{12}{}^2}{h_{22}} \end{pmatrix}$$

Nous allons, dans le paragraphe suivant, essayer de tirer certaines conséquences de cette règle de dualité.

V.- PONDERATION GEOMETRIQUE DANS L'ESPACE A DEUX DIMENSIONS.

Plaçons-nous dans l'hypothèse où les espérances de  $k^{ij}$  et de  $h_{ij}$  sont proportionnelles au tenseur unité :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(k^{ij}) = k_0 g^{ij} \\ E(h_{ij}) = h_0 g_{ij} \end{array} \right.$$

Alors, les méthodes de développement en série exposées aux paragraphes 1 et 2 vont s'appliquer :

- d'une part au système de Darcy proprement dit : partant de  $\partial_j p_0^l = \delta_j^l$  on obtient les développements de  $\partial_j p^l$  et  $q^{il}$  à l'aide des fonctionnelles de type (19) où figurent les moments de la loi spatiale des  $k^{ij}$ , et la relation (15) avec  $N = 2$  nous donne :

$$(30) \quad k_0 g^{ij} E(\partial_j p^l) - E(q^{il}) = 2 g^{il} k_0$$

- d'autre part au système dual (28) : partant de  $\partial_j G_0^l = \delta_j^l$ , on obtient les développements de  $\partial_j G^l$  et  $F^{il}$  à l'aide de fonctionnelles de type (19) où figurent, cette fois, les moments de la loi spatiale des  $h_{ij}$  (ou, plus précisément, des  $P^{ij}$  qui s'en déduisent par les relations (27), et la relation (15) nous donne :

$$(31) \quad h_0 g^{ij} E(\partial_j G^l) - E(F^{il}) = 2 g^{il} h_0$$

L'espace étant rapporté à une base orthonormée, désignons par  $\varepsilon^{ij} = \varepsilon_{ij}$  l'indicateur de permutation ( $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ ,  $\varepsilon_{12} = 1$ ,  $\varepsilon_{21} = -1$ ).

D'après les relations (25), nous pouvons poser :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_j G^l = \varepsilon_{ja} Q^{al} \\ F^{il} = \varepsilon^{ia} \partial_a P^l \end{array} \right.$$

Les  $Q^{al}$  et les  $\partial_a P^l$  constituent un système de solutions stationnaires de l'écoulement, qui n'a d'ailleurs pas de raisons a priori de coïncider avec le système des  $q^{il}$ ,  $\partial_j p^l$ , mais se présentent nécessairement sous la forme de combinaisons li-

néaires de ce dernier système :

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} q^{al} = J_{ab}^l q^{ab} \\ \partial_a p^l = J_{ab}^l \partial_a p^{ab} \end{array} \right.$$

(cela résulte de l'unicité, à une substitution linéaire près, des systèmes de solutions stationnaires).

Dans le cas général, la matrice des  $J_{ab}^l$  est quelconque, et on n'obtient pas de résultat plus précis. Dans le cas isotrope, nous allons voir que cette matrice a nécessairement une forme simple.

### Le cas isotrope

Nous dirons que le milieu est isotrope, si la loi spatiale des  $k^{ij}$  est invariante par rotation (rappelons que, les  $k^{ij}$  étant stationnaires, la loi spatiale est également invariante par translation). Cette isotropie ne signifie pas obligatoirement que les perméabilités soient proportionnelles au tenseur métrique :

$$(34) \quad k^{ij}(x) = k(x) g^{ij}$$

mais seulement que tous les moments fonctionnels  $R^{i_1, u_1, \dots, i_n, u_n}(\xi_1, \dots, \xi_n)$  sont invariants lorsque l'on effectue une même rotation sur les points d'appui  $\xi_1, \dots, \xi_n$  et sur les axes de coordonnées. L'isotropie n'entraîne donc nullement la relation (34). Inversement, la relation (34) n'entraîne pas non plus l'isotropie : il faut, de plus, que la fonction aléatoire scalaire  $k(x)$  soit elle-même isotrope, c'est-à-dire possède une loi spatiale invariante par rotation. Le cas où la relation (34) est vérifiée et où  $k(x)$  est isotrope constitue l'exemple le plus simple (mais non le seul) possible de milieu isotrope.

Dans un milieu isotrope, la perméabilité macroscopique constante est nécessairement proportionnelle au tenseur unité.

$$\left\{ \begin{array}{l} K^{ij} = K g^{ij} \\ H_{ij} = H g_{ij} \end{array} \right. \quad (H = \frac{1}{K})$$

et, lorsque l'on construit les développements de Schwydlar à partir de  $\partial_j p_0^l = \delta_j^l$ , les espérances de  $\partial_j p^l$  et  $q^{il}$  sont elles aussi proportionnelles au tenseur unité, soit

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(\partial_j p^l) = \bar{w} \delta_j^l \\ E(q^{il}) = q g^{il} \end{array} \right. \quad (\bar{w} \text{ et } q \text{ constantes})$$

Mais si la loi spatiale des  $k^{ij}$  est invariante par rotation, il en est nécessairement de même de celle des  $h_{ij}$  (donc aussi des  $P^{ij}$  du système (28) associé au système de Darcy). Par suite  $E(\partial_j G^l)$  et  $E(F^{il})$  sont elles aussi proportionnelles au tenseur unité, et, en prenant les espérances des relations (32), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\partial_j G^l) = \varepsilon_{ja} E(Q^{al}) = q' \delta_j^l \\ E(F^{il}) = \varepsilon^{ia} E(\partial_a P^l) = \bar{\omega}' g^{il} \end{array} \right.$$

$q'$  et  $\bar{\omega}'$  étant des constantes. De ces relations on tire immédiatement

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(Q^{al}) = -\varepsilon^{al} q' \\ E(\partial_a P^l) = -\varepsilon_{ab} g^{lb} \bar{\omega}' \end{array} \right.$$

Prenons alors l'espérance mathématique des relations (33), en tenant compte de (35) et de (36). Il vient :

$$\begin{aligned} -\varepsilon^{al} q' &= q J_b^l g^{ab} = q J_a^l \\ -\varepsilon_{ab} g^{lb} \bar{\omega}' &= \bar{\omega} J_b^l \delta_a^b = \bar{\omega} J_a^l \end{aligned}$$

Par conséquent, on a nécessairement

$$\left\{ \begin{array}{l} J_a^l = -\frac{q'}{q} \varepsilon^{al} \\ J_l^a = -\frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}} \varepsilon_{al} \\ \frac{q'}{q} = \frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}} \end{array} \right.$$

De leur côté, les relations (30) et (31) se réduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 \bar{\omega} - q = 2 k_0 \\ h_0 q' - \bar{\omega}' = 2 h_0 \end{array} \right.$$

Compte tenu de la loi de Darcy macroscopique ( $q = -K \bar{\omega}$  et  $q' = -K \bar{\omega}'$ ), on obtient :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega} (k_0 + K) = 2 k_0 \\ -\bar{\omega}' (h_0 K + 1) = 2 h_0 \end{array} \right.$$

Il suffirait de connaître la valeur du rapport  $\frac{\overline{\omega}}{\overline{\omega}_0}$  pour déduire de ces relations l'expression de  $K$  en fonction de  $k_0$  et  $h_0$ . En général, il n'est pas possible de calculer ce rapport. Mais il y a au moins un cas particulier où ce calcul peut se faire a priori.

Cas particulier où  $\frac{k}{k_0}$  et  $\frac{h}{h_0}$  ont même loi spatiale.

Supposons que  $\frac{k^{ij}}{k_0}$  et  $\frac{h^{ij}}{h_0}$  (les axes étant orthonormés) aient même loi spatiale, invariante par rotation. Alors  $\frac{p^{ij}}{h}$ , qui se déduit de  $\frac{h^{ij}}{h_0}$  par une rotation de  $90^\circ$  (de matrice  $\varepsilon^{ij}$ ) possède également la même loi spatiale que  $\frac{k^{ij}}{k_0}$ . Les fonctionnelles (19) ne dépendant que de cette loi spatiale commune, on aura :

$$E(\partial_j p^l) = E(\partial_j g^l)$$

c'est-à-dire

$$\overline{\omega} = q' = -K \overline{\omega}'$$

Le système (37) qui s'écrit

$$-\frac{\overline{\omega}}{\overline{\omega}'} \frac{k_0 + K}{1 + h_0 K} = \frac{k_0}{h_0}$$

donne alors

$$\frac{K(k_0 + K)}{1 + h_0 K} = \frac{k_0}{h_0}$$

ou, sous forme plus symétrique (avec  $H = \frac{1}{K}$ )

$$\frac{k_0 + K}{h_0 + K} = \frac{k_0}{h_0}$$

On en tire immédiatement

$$\frac{K}{k_0} = \frac{H}{h_0}$$

c'est-à-dire

$$K^2 = \frac{k_0}{h_0}$$

Ainsi, dans le cas particulier considéré il existe une règle de pondération qui est

(38)

$$K^2 = \frac{E(k)}{E(h)}$$

Dans ce même cas particulier, la règle (38) est identique à la règle de pondération géométrique

(39)

$$\log K = E [\log k]$$

Pour le voir, remarquons d'abord que la matrice  $k$  étant définie positive, son logarithme  $\log k$  existe également :  $\log k$  est la matrice admettant les mêmes vecteurs propres que  $k$  et comme valeurs propres les logarithmes des valeurs propres de  $k$  (qui sont positives), et on a les relations matricielles :

$$k = e^{\log k} = \sum \frac{(\log k)^n}{n!}$$

$$h = e^{-\log k} = \sum \frac{(-1)^n}{n!} (\log k)^n$$

D'autre part, par hypothèse,  $\frac{k}{k_0}$  et  $\frac{h}{h_0}$  ont même lois spatiales. Il en est donc de même de  $\log \frac{k}{k_0}$  et de  $\log \frac{h}{h_0}$ . En particulier on a :

$$E(\log k) - \log k_0 = E(\log h) - \log h_0 = -E(\log k) - \log h_0$$

donc aussi :

$$2 E(\log k) = \log \frac{k_0}{h_0}$$

Par suite, la relation

$$K^2 = \frac{k_0}{h_0}$$

équivalent bien à  $\log K = E(\log k)$ .

### Perméabilités lognormales

Il reste à montrer qu'il est effectivement possible que  $\frac{k}{E(k)}$  et  $\frac{h}{E(h)}$  aient même loi spatiale. Il y a au moins un cas où il en est toujours ainsi, c'est celui où la loi spatiale est lognormale. Nous dirons qu'une matrice aléatoire  $k$  est lognormale si elle est de la forme

$$k = e^A = \sum \frac{A^n}{n!}$$

les composantes de la matrice  $A$  étant elles-mêmes gaussiennes. Si la matrice  $A$  est symétrique, la matrice  $k$  est symétrique et définie positive (puisque à toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$  correspond la valeur propre  $e^\lambda > 0$  de  $k$ ). Enfin, si  $A(x)$  est une fonction aléatoire matricielle à loi spatiale gaussienne, la fonction aléatoire matri-

cielle  $k(x) = e^{A(x)}$  sera dite posséder une loi spatiale lognormale.

Si, de plus, la matrice  $A(x)$  gaussienne possède une loi spatiale invariante par rotation, il est clair que  $\frac{k}{k_0}$  et  $\frac{h}{h_0}$  ont même loi spatiale. Posons, en effet

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) = E(A) + \alpha(x) \\ \mu = e^{E(A)} \end{array} \right.$$

on a

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \mu e^{\alpha} \\ h = \frac{1}{\mu} e^{-\alpha} \end{array} \right.$$

Comme  $\alpha$  est gaussienne et de moyenne nulle,  $\alpha$  et  $-\alpha$ , et par suite aussi  $e^{\alpha}$  et  $e^{-\alpha}$  ont même loi spatiale, donc aussi

$$\frac{k}{k_0} = \frac{e^{\alpha}}{E(e^{\alpha})}$$

et

$$\frac{h}{h_0} = \frac{e^{-\alpha}}{E(e^{-\alpha})}$$

En résumé, nous avons établi le résultat suivant :

Dans l'espace à deux dimensions, si les matrices aléatoires  $\frac{k}{E(k)}$  et  $\frac{h}{E(h)}$  ont la même loi spatiale et si celle loi spatiale est invariante par rotation, les perméabilités se composent selon la règle de pondération géométrique. Il en est ainsi, en particulier, dans le cas d'un milieu isotrope à perméabilités lognormales.

#### VI.- SUGGESTIONS SUPPLEMENTAIRES.

Nous nous posons les deux questions suivantes :

- Dans un milieu isotrope à deux dimensions mais où  $\frac{k}{k_0}$  et  $\frac{h}{h_0}$  n'ont pas la même loi spatiale, les règles  $K^2 = \frac{k_0}{h_0}$  et  $\log K = \frac{1}{\sigma} E[\log \frac{k}{k_0}]$  ne sont plus équivalentes. Dans la mesure où il existe une règle de pondération (ce qui n'est pas démontré), se rapproche-t-elle davantage de l'une ou l'autre des deux règles précédentes ?

- Dans un milieu isotrope à 3 ou à  $N \neq 2$  dimensions, la règle de pondéra-

tion, (s'il en existe) ne peut pas être géométrique, comme nous le verrons au chapitre suivant. Est-il possible d'envisager une généralisation de la règle (38) sous la forme

$$(40) \quad K^N = [E(k)]^{N-1} [E(h)]^{-1}$$

La réponse à ces questions ne peut être qu'expérimentale. La meilleure méthode semble consister à utiliser l'analogie électrique. On pourrait, à deux dimensions, fabriquer un "mot croisé aléatoire" dans lequel chaque carreau posséderait une résistivité tirée au sort, indépendamment des autres, selon une loi donnée. En particulier, le milieu à deux composantes où chaque carreau posséderait

- soit la perméabilité  $k_1$  avec la probabilité  $p$
- soit la perméabilité  $k_2$  avec la probabilité  $q$

permettrait une expérience décisive. En effet,  $\frac{k}{k_0}$  et  $\frac{h}{h_0}$  n'ont ici même loi spatiale que si  $p = q$ . La règle de pondération géométrique conduirait à

$$K = k_1^p k_2^q$$

La règle (38) donnerait, de son côté

$$K = \sqrt{k_1 k_2 \frac{p k_1 + q k_2}{p k_2 + q k_1}}$$

Enfin, la règle de pondération homographique (24) donnerait

$$K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{(p k_1 + q k_2)^2}{k_1 + k_2}$$

On remarquera aussi la circonstance suivante : si  $k_2$  par exemple tend vers 0, les deux premières règles montrent que  $K$  tend également vers 0 (comme  $k_2^q$  dans le premier cas et comme  $\sqrt{k_2}$  dans le deuxième, donc à des allures très différentes si  $q$  est franchement différent de  $\frac{1}{2}$ ). La règle homographique, au contraire, implique que  $K$  tend vers la limite  $p^2 k_1$  différente de 0.

En fait, pour  $k_2 = 0$ , il est bien possible que  $K$  soit nulle. On peut

penser en effet que, dans le milieu infini auquel cette théorie se rapporte, il existera presque certainement quelque part une barrière continue. Cela devrait pouvoir se démontrer théoriquement. Expérimentalement, par contre, il ne sera pas possible de vérifier la nullité de  $K$ . En effet, toute expérience sera réalisée sur un milieu fini, et, dans un milieu fini, il y aura toujours une probabilité non nulle pour qu'il n'existe pas de barrière continue. On trouvera donc, à chaque expérience, une valeur non nécessairement nulle de  $K$ , mais cette valeur ne sera pas stabilisée: si grand que soit le milieu artificiel sur lequel on travaille, la valeur expérimentale de  $K$  sera toujours aléatoire, autrement dit variera d'une réalisation à l'autre de ce même milieu aléatoire.

\*

\*      \*

C H A P I T R E    I I'

ETUDE DES ECOULEMENTS UNIFORMES

A L'APPROXIMATION D'ORDRE 2

Dans un premier paragraphe, nous calculerons moyennes et variances, à l'approximation du deuxième ordre, du flux et du gradient et nous donnerons les expressions de la perméabilité  $K$  et de son inverse. Nous examinerons ensuite les propriétés du tenseur de Schwydlar, à l'aide duquel s'exprime, au deuxième ordre, la différence  $E(k) - K$  (symétrie et caractère défini positif). Enfin, nous examinerons les simplifications qui se produisent sous différentes hypothèses (isotropie et subisotropie), et nous montrerons que, lorsque le nombre  $N$  des dimensions augmente,  $K$ , toujours compris entre  $[E(k^{-1})]^{-1}$  et  $E(k)$ , tend à se rapprocher de  $E(k)$ . Il en résultera, en particulier, l'impossibilité d'une règle de pondération géométrique pour  $N \neq 2$ .

I.- EQUATIONS GENERALES DE L'APPROXIMATION D'ORDRE 2.

Soit, dans un espace à  $N$  dimensions, une perméabilité de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} k^{ij} = g^{ij} + \varepsilon \gamma^{ij} \\ E(\gamma^{ij}) = 0 \end{array} \right.$$

Nous allons réécrire les résultats des paragraphes 1 et 2 du chapitre précédent, en nous limitant au deuxième ordre en  $\varepsilon$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} q^{il} = -g^{il} + \varepsilon q_1^{il} + \varepsilon^2 q_2^{il} \\ \partial_j p^l = \delta_j^l + \varepsilon \partial_j p_1^l + \varepsilon^2 \partial_j p_2^l \end{array} \right.$$

Calcul de l'espérance du flux et du gradient.

En premier lieu, remarquons que l'on a

$$E(q_1^i) = E(\partial_j p_1^l) = 0$$

En effet, la fonctionnelle (19) se réduit à :

$$E(\partial_j p_1^l) = \partial_{ju} \alpha * E(\gamma^{ul}) = 0$$

et la relation générale (14) montre que  $E(q_1^{il})$  est nulle également. Pour le terme d'ordre 2, la fonctionnelle (19) nous donne

$$\begin{aligned} E(\partial_j p_2^l) &= \int \partial_{ju} \alpha(x - \xi_1) \partial_{iv} \alpha(\xi_2 - \xi_1) R^{ui, vl}(\xi_2 - \xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int \partial_{ju}(x - \xi) d\xi \int \partial_{iv} \alpha(\eta) R^{ui, vl}(\eta) d\eta \end{aligned}$$

D'après un calcul déjà effectué plusieurs fois, on sait que le produit de convolution de  $\partial_{ju} \alpha$  par une constante  $C$  est  $-\frac{1}{N} g_{ju} C$ . Donc :

$$E(\partial_j p_2^l) = -\frac{1}{N} g_{ju} \int \partial_{iv} \alpha(\xi) R^{ui, vl}(\xi) d\xi$$

Introduisons le tenseur  $S^{ij}$ , ou tenseur de Schwydlar, défini par

$$(41) \quad S^{ij} = - \int \partial_{lb} \alpha(\xi) R^{il, js}(\xi) d\xi$$

manifestement symétrique puisque  $\partial_{lb} \alpha(\xi)$  est une distribution paire et que  $R^{js, il}(\xi) = R^{il, js}(-\xi)$  par définition même de la covariance :

$$R^{il, js}(\xi) = E \left[ \gamma^{il}(x) \gamma^{js}(x + \xi) \right]$$

L'espérance de  $\partial_j p_2^l$  s'exprime donc à l'aide du tenseur de Schwydlar :

$$(42) \quad E(\partial_j p_2^l) = \frac{1}{N} g_{ju} S^{ul} = \frac{1}{N} S_j^l$$

La relation générale (14) nous donne ensuite

$$E(q_2^{il}) = (N - 1) g^{ij} E(\partial_j p_2^l)$$

D'où l'espérance du flux :

$$(43) \quad E(q_2^{il}) = \frac{N - 1}{N} S^{il}$$

Calcul de la perméabilité macroscopique.

La matrice  $K$  est égale au produit de  $-E(q^{il})$  par l'inverse de  $E(\partial_j p^l)$ .  
 Au deuxième ordre en  $\varepsilon$ , on a, d'après (42)

$$E(\partial_j p^l) = \delta_j^l + \frac{\varepsilon^2}{N} S_j^l$$

Au deuxième ordre en  $\varepsilon$ , l'inverse de ce tenseur est :

$$(44) \quad \delta_j^l - \frac{\varepsilon^2}{N} S_j^l$$

De même, au deuxième ordre en  $\varepsilon$ , (43) nous donne :

$$E(q^{il}) = -g^{il} + \varepsilon^2 \frac{N-1}{N} S^{il}$$

Par suite, on obtient  $K^{ij}$  en faisant le produit contracté de  $-E(q^{il})$  par le tenseur écrit en (44), ce qui donne, toujours au 2ème ordre en  $\varepsilon$

$$(45) \quad \boxed{K^{ij} = g^{ij} - \varepsilon^2 S^{ij}}$$

Ainsi, le tenseur de Schwydlar exprime l'écart entre perméabilité moyenne et perméabilité macroscopique. [Si l'on pose  $k^{ij} = k_0(g^{ij} + \varepsilon \gamma^{ij})$ , avec  $E(k^{ij}) = k_0 g^{ij}$ , la relation (45) devient

$$\varepsilon^2 S^{ij} = \frac{K^{ij} - E(k^{ij})}{k_0}$$

En inversant (45) au deuxième ordre, on obtient :

$$(46) \quad \boxed{H_{ij} = g_{ij} + \varepsilon^2 S_{ij}}$$

On remarquera que, du fait que l'on a supposé  $E(k^{ij}) = g^{ij}$ , l'espérance  $E(h_{ij})$  de la résistivité n'est pas égale à  $g_{ij}$ . Si l'on inverse  $k^{ij} = g^{ij} + \varepsilon \gamma^{ij}$  au deuxième ordre, on trouve :

$$h_{ij} = g_{ij} - \varepsilon \gamma_{ij} + \varepsilon^2 \gamma_{il} \gamma_{jk} g^{lk}$$

D'où

$$(47) \quad E(h_{ij}) = \varepsilon_{ij} + \varepsilon^2 g^{lb} R_{il,jb}^{(0)}$$

Ainsi, l'écart entre la résistivité macroscopique et la résistivité moyenne est :

$$(47)^{\text{bis}} \quad E(h_{ij}) - H_{ij} = \varepsilon^2 \left[ g^{lb} R_{il,jb}^{(0)} - S_{ij} \right]$$

Elle dépend à la fois du tenseur de Schwydlar et des covariances  $R_{il,jb}^{(0)}$  des perméabilités prises au même point d'appui.

### Fluctuations des Isobares

Au deuxième ordre en  $\varepsilon$ , les fluctuations des isobares sont représentées par le tenseur d'ordre 4

$$(48) \quad S_{ij}^{lb} = E \left[ \partial_i p_1^l \partial_j p_1^b \right]$$

A cette approximation, en effet,  $S_{ij}^{lb}$  est la matrice des covariances de  $\partial_i p^l$  et  $\partial_j p^b$ . Explicitons ce tenseur. De

$$\partial_i p_1^l = \int \partial_{ia} \alpha(x - \xi) \gamma^{al}(\xi) d\xi$$

on tire

$$(49) \quad S_{ij}^{lb} = \iint \partial_{ia} \alpha(x - \xi) \partial_{jb} \alpha(x - \eta) R^{al,bb}(\xi - \eta) d\xi d\eta$$

Désignons par  $P^{al,bb}(u)$  la transformée de Fourier de  $R^{al,bb}(h)$ . De son côté  $\partial_{ia} \alpha$  a pour transformée  $-\frac{u_i u_a}{g^{mn} u_m u_n} = -\frac{u_i u_a}{\rho^2}$  ( $\rho$  désignant le rayon vec-

teur  $\rho^2 = g^{mn} u_m u_n$  de l'espace des transformées de Fourier). La formule de Plancherel - Parseval donne alors

$$(50) \quad S_{ij}^{lb} = \int \frac{u_i u_a u_j u_b}{\rho^4} P^{al,bb}(u) du$$

Sous forme intrinsèque (c'est-à-dire à un déplacement près) les fluctuations des isobares sont représentées par un tenseur des déformations dont l'espérance mathématique est

$$\varepsilon^2 g^{ij} S_{ij}^{lb} = \varepsilon^2 E(g^{ij} \partial_i p_1^l \partial_j p_1^b)$$

D'après (50), et compte tenu de la simplification  $g^{ij} u_i u_j = \rho^2$ , on obtient :

$$g^{ij} S_{ij}^{ls} = \int \frac{u_a u_b}{\rho^2} P^{al,bb}(u) du$$

Comme  $\frac{u_a u_b}{\rho^2}$  est la transformée de  $-\partial_{ab} \alpha$ , on obtient (d'après la formule de Plancherel-Parseval déjà utilisée)

$$g^{ij} S_{ij}^{ls} = - \int \partial_{ab} \alpha(\xi) R^{al,bs}(\xi) d\xi$$

c'est-à-dire, d'après (41) :

(51)

$$g^{ij} S_{ij}^{ls} = S^{ls}$$

Ainsi, le tenseur de Schwydlar représente également, sous forme intrinsèque, la déformation moyenne des isobares.

#### Fluctuations des lignes de courant.

De la même manière, la déformation moyenne des lignes de courant est représentée par le tenseur

$$\varepsilon^2 E(q_1^{il} q_1^{js})$$

On obtient immédiatement :

$$(52) \left\{ \begin{aligned} E(q_1^{il} q_1^{js}) &= E \left[ (g^{ia} \partial_a p_1^l + \gamma^{il}) (g^{jb} \partial_b p_1^s + \gamma^{js}) \right] \\ &= E(\gamma^{il} \gamma^{js}) + g^{ia} E(\partial_a p_1^l \gamma^{js}) + g^{jb} E(\gamma^{il} \partial_b p_1^s) \\ &\quad + g^{ia} g^{jb} E(\partial_a p_1^l \partial_b p_1^s) \end{aligned} \right.$$

Or

$$\partial_a p_1^l = \int \partial_{au} \alpha(x - \xi) \gamma^{ul}(\xi) d\xi$$

entraîne

$$g^{ia} E(\partial_a p_1^l \gamma^{jb}) = g^{ia} \int \partial_{au} \alpha(x - \xi) R^{ul, jb}(x - \xi) d\xi$$

et, en multipliant par  $g_{ij}$

$$(53) \quad E(\partial_j p_1^l \gamma^{jb}) = \int \partial_{ju} \alpha(x) R^{ul, jb}(x) dx = -S^{lb}$$

Ainsi, multipliant (52) par  $g_{ij}$ , nous trouvons :

$$E(g_{ij} q_1^{il} q_1^{jb}) = g_{ij} R^{il, jb}(0) - S^{lb} - S^{lb} + g^{ab} S_{ab}^{lb}$$

soit, compte tenu de (51)

$$(54) \quad \boxed{E(g_{ij} q_1^{il} q_1^{jb}) = g_{ij} R^{il, jb}(0) - S^{lb}}$$

Le tenseur représentant, sous forme intrinsèque, la déformation moyenne des lignes de courant ne dépend que du tenseur de Schwydlar et de la matrice des covariances prises au même point d'appui.

Comparons d'autre part (54) avec (47), et (51) avec (45). On obtient les relations remarquables :

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(k^{ij}) - K^{ij} = \varepsilon^2 S^{ij} = \varepsilon^2 E \left[ g^{ab} \partial_a p_1^j \partial_b p_1^i \right] \\ E(h^{ij}) - H^{ij} = \varepsilon^2 \left[ g_{lb} R^{il, jb}(0) - S^{ij} \right] = \varepsilon^2 E \left[ g_{ab} q_1^{ai} q_1^{bj} \right] \end{array} \right.$$

Ces relations expriment qu'au deuxième ordre en  $\varepsilon$  l'écart entre perméabilité moyenne et perméabilité macroscopique est lié uniquement aux fluctuations des isobares. De même, l'écart entre résistivité moyenne et résistivité macroscopique est lié uniquement aux déformations des lignes de courant.

La relation énergétique. La déformation relative des isobares et des lignes de courant est représentée, sous forme intrinsèque, par l'espérance du produit scalaire des flux et des gradients

$$\chi^{ls} = E(q_1^{il} \partial_i p^s) = E(q_1^{il}) E(\partial_i p^s)$$

dont on connaît la signification énergétique (valeur probable du tenseur d'énergie

consommée par les forces de viscosités). Au deuxième ordre en  $\varepsilon$ , compte tenu de (42) et (43), on obtient :

$$\chi^{ls} = \left( -g^{il} + \frac{N-1}{N} \varepsilon^2 S^{il} \right) \left( \delta_i^s + \frac{1}{N} \varepsilon^2 S_i^s \right)$$

D'où

$$(56) \quad \chi^{ls} = -g^{ls} + \frac{N-2}{N} \varepsilon^2 S^{ls}$$

Remarque

Ces diverses propriétés soulignent l'importance du tenseur de Schwydler, qui permet à la fois d'exprimer les écarts  $E(k^{ij}) - K^{ij}$  et  $E(h_{ij}) - H_{ij}$ , ainsi que les déformations intrinsèques des isobares et des lignes de courant. Nous étudierons plus à fond ce tenseur dans le paragraphe suivant. Il n'est peut-être pas inutile de donner une deuxième démonstration, indépendante des résultats du premier chapitre, des résultats établis ci-dessus. Comme il convient d'introduire des notations différentes de celles que nous avons utilisées jusqu'ici, nous renvoyons cette démonstration en annexe A.

II.- LES PROPRIETES DU TENSEUR DE SCHWYDLER.

Nous avons déjà noté en cours de route que le tenseur de Schwydler est symétrique. D'autre part, un théorème général nous indique que les deux tenseurs  $E(k^{ij}) - K^{ij}$  et  $E(h_{ij}) - H_{ij}$  sont symétriques et définies positifs (inégalités  $[E(k^{-1})]^{-1} \leq K \leq E(k)$ ). Les relations (55) suffisent donc pour affirmer que les deux tenseurs :

$$S^{ij} \text{ et } \left[ g_{ls} R^{il, js}(0) - S^{ij} \right] \quad \left( \begin{array}{l} \text{sous forme matricielle} \\ S \text{ et } E(\gamma^2) - S \end{array} \right)$$

sont définis positifs. En raison de l'importance extrême de ce résultat, il nous paraît utile d'en donner une démonstration directe. Pour ce faire, reportons-nous à l'expression (41) du tenseur de Schwydler :

$$S^{ij} = \int \partial_{ls} \alpha(\xi) R^{il, js}(\xi) d\xi$$

Effectuons une transformation de Fourier.  $\partial_{ls} \alpha$  se transforme en  $-\frac{u_l u_s}{\rho^2}$ , et  $R^{il, js}(\xi)$  en un tenseur  $P^{il, js}(u)$ . La formule de Plancherel-Parseval donne alors :

$$(57) \quad S^{ij} = \int \frac{u_l u_s}{\rho^2} P^{il, js}(u) du$$

Soient alors  $a_i$  et  $b_i$  des constantes. La fonction aléatoire scalaire  $a_i b_\ell Y^{i\ell}(x)$  admet la covariance :

$$K(h) = a_i b_\ell a_j b_\lambda R^{i\ell, j\lambda}(h)$$

$K(h)$  est une fonction de type positif. Sa transformée de Fourier est donc non négative (théorème de Bochner), soit :

$$(58) \quad a_i b_\ell a_j b_\lambda P^{i\ell, j\lambda}(u) \geq 0$$

Prenons  $b_\ell = \frac{u_\ell}{\rho}$ . Quels que soient les  $a_i$ , on a l'inégalité :

$$a_i a_j \frac{u_\ell u_\lambda}{\rho^2} P^{i\ell, j\lambda}(u) \geq 0$$

Il suffit de se reporter à (57) pour voir que l'on a également

$$a_i a_j S^{ij} \geq 0$$

Par suite, le tenseur de Schwydlar est défini positif.

D'autre part, dans l'inégalité (58), on peut remplacer  $b_\ell b_\lambda$  par un tenseur défini positif quelconque. Le tenseur

$$\varepsilon_{\ell\lambda} (g^{ab} u_a u_b) - u_\ell u_\lambda = \varepsilon_{\ell\lambda} \rho^2 - u_\ell u_\lambda$$

est défini positif, d'après l'inégalité de Schwarz. Substituant ce tenseur, dans (58), à  $b_\ell b_\lambda$ , et divisant par  $\rho^2$ , on obtient :

$$a_i a_j \frac{u_\ell u_\lambda}{\rho^2} P^{i\ell, j\lambda}(u) \leq a_i a_j \varepsilon_{\ell\lambda} P^{i\ell, j\lambda}(u)$$

Intégrons. D'après (57), et les propriétés élémentaires des transformées de Fourier, il vient :

$$a_i a_j S^{ij} \leq a_i a_j \varepsilon_{\ell\lambda} R^{i\ell, j\lambda}(0)$$

Par suite, le tenseur  $\varepsilon_{\ell\lambda} R^{i\ell, j\lambda}(0) - S^{ij}$  est défini positif.

Les inégalités

$$(59) \quad \boxed{0 \leq a_i a_j S^{ij} \leq a_i a_j \varepsilon_{\ell\lambda} R^{i\ell, j\lambda}(0)} \quad (0 \leq S \leq E(\chi^2))$$

encadrent de manière assez stricte le tenseur de Schwydlar. Au deuxième ordre en  $\varepsilon$ , elles coïncident avec les inégalités fondamentales rappelées au début de ce paragraphe

III.- CAS DE SIMPLIFICATION ET REGLES DE PONDERATION.

Au deuxième ordre en  $\varepsilon$ , l'existence d'une règle de pondération doit se manifester par le fait que le tenseur de Schwydlar ne dépend que de la matrice  $R^{il, jk}(0)$  des covariances des perméabilités prises au même point d'appui. Il s'agit d'ailleurs seulement d'une condition nécessaire, mais il est clair que l'approximation d'ordre deux ne peut rien nous donner de plus.

L'expression (41) du tenseur de Schwydlar montre que, en général  $S^{ij}$  dépend des valeurs prises par  $R^{il, jk}(\xi)$  dans l'espace entier, et non pas seulement en  $\xi = 0$ . Ainsi, dans le cas général, il ne peut pas exister de règle de pondération. Mais d'autre part,  $\alpha$  étant la solution élémentaire de  $\Delta\alpha + \delta = 0$ , la distribution  $\partial_{l_b}\alpha$  est apparentée à la mesure de Dirac: elle comporte une composante  $-\frac{1}{N} g_{l_b}\delta$ , sans se réduire pour autant à cette seule mesure de Dirac. Si  $R^{il, jk}(\xi)$  présente des propriétés convenables de symétrie, il peut arriver que l'action de la distribution  $\partial_{l_b}\alpha$  sur cette fonction se réduise à celle de sa seule composante de Dirac. Lorsqu'il en sera ainsi, nous dirons que nous sommes dans le cas sub isotrope. Par définition, dans le cas sub isotrope, l'expression (41) du tenseur de Schwydlar se réduit à :

$$(60) \quad \boxed{S^{ij} = \frac{1}{N} g_{l_b} R^{il, jk}(0)} \quad . \quad S = \frac{1}{N} E(\gamma^2)$$

et l'existence d'une règle de pondération est possible (mais non démontrée cependant)

Il existe au moins un cas où la condition de sub-isotropie est toujours réalisée, et où par suite la relation (60) est valable : c'est le cas où la covariance  $R^{il, jk}(h)$  ne dépend que du rayon vecteur  $r = |h|$ . En effet, dans ce cas la transformée de Fourier de la covariance est de la forme  $P^{il, jk}(\rho)$ , et des considérations de symétrie élémentaire montrent que (57) se réduit à :

$$S^{ij} = \frac{1}{N} g_{l_b} \int P^{il, jk}(u) du = \frac{1}{N} g_{l_b} R^{il, jk}(0)$$

Cette condition est toujours réalisée, en particulier, si  $k^{ij}(x)$  est de la forme  $g^{ij} k(x)$ , la fonction aléatoire scalaire  $k(x)$  ayant une covariance  $R(r)$  ne dépendant que du rayon vecteur.

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous plaçons dans l'hypothèse sub-isotrope, et nous supposons par suite que la relation (60) est valable.

Si nous comparons cette expression (60) avec les inégalités générales (59), nous constatons l'influence déterminante du nombre  $N$  des dimensions de l'espace.

Pour  $N = 1$ , le tenseur de Schwydlar coïncide avec sa borne supérieure. Pour  $N = 2$ ,

il est exactement à mi-chemin de ses deux limites. Enfin lorsque  $N$  augmente, il se rapproche de sa borne inférieure et coïncide asymptotiquement avec elle. Or le tenseur de Schwydlar mesure l'écart  $E(k^{ij}) - K^{ij}$  entre la perméabilité moyenne et la perméabilité macroscopique. Plus précisément (en réintroduisant, pour des raisons d'homogénéité dimensionnelle, le terme  $k_0$  tel que  $k^{ij} = k_0(g^{ij} + \gamma^{ij})$ , l'espérance de  $\gamma^{ij}$  étant nulle), nous avons, d'après (45) :

$$E(k^{ij}) - K^{ij} = \varepsilon^2 k_0 S^{ij}$$

D'autre part, inversant (47) au deuxième ordre, nous voyons que le tenseur  $[E(h)]^{-1}$  admet les composantes :

$$k_0 \left[ g^{ij} - \varepsilon^2 g_{\ell\lambda} R^{i\ell, j\lambda(0)} \right]$$

$(R^{i\ell, j\lambda(0)})$  est la covariance des  $\gamma^{ij}$ , quantités sans dimensions).

Ainsi, la perméabilité macroscopique

$$(61) \quad K^{ij} = E(k^{ij}) - \frac{k_0}{N} \varepsilon^2 g_{\ell\lambda} R^{i\ell, j\lambda(0)} \quad \left( K = E(\beta) - \frac{\varepsilon^2}{N\beta_0} E(\beta^2) \right)$$

est, dans le cas sub-isotrope, comprise comme toujours entre la moyenne arithmétique  $E(k^{ij})$  et la moyenne harmonique  $[E(k^{-1})]^{-1}$  de composantes :

$$E(k^{ij}) - k_0 \varepsilon^2 g_{\ell\lambda} R^{i\ell, j\lambda(0)} \quad \left( E(\beta^{-1})^{-1} = E(\beta) - \frac{\varepsilon^2}{\beta_0} E(\beta^2) \right)$$

mais d'autant plus proche de la moyenne arithmétique que  $N$  est plus grand. Pour  $N = 1$ , elle coïncide avec la moyenne harmonique. Pour  $N = 2$ , elle est à mi-chemin de ces deux moyennes, Pour  $N = 3$ , aux deux tiers du chemin, etc ...

Bien que ce résultat ne soit établi qu'à l'approximation d'ordre deux, il doit rester vrai (qualitativement) à tous les ordres. Dans un milieu isotrope où une règle de pondération est applicable, la perméabilité macroscopique se situe à mi-chemin ou aux deux tiers du chemin entre les moyennes harmonique et arithmétique, selon que l'espace est à deux ou à 3 dimensions.

On peut noter également que la règle de pondération géométrique ne peut s'appliquer que dans un espace à deux dimensions. En effet, au deuxième ordre en  $\varepsilon$ , la matrice  $\log k$  admet les composantes :

$$(\log k)^{ij} = g^{ij} \log k_0 + \varepsilon \gamma^{ij} - \frac{\varepsilon^2}{2} \gamma^{i\ell} \gamma^{j\lambda} g_{\ell\lambda}$$

D'où

$$E(\log k^{ij}) = g^{ij} \log k_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} g_{\ell\lambda} R^{i\ell, j\lambda}(0)$$

Tandis que, d'après (61), on a pour  $\log K$  :

$$(\log K)^{ij} = g^{ij} \log k_0 - \frac{\varepsilon^2}{N} g_{\ell\lambda} R^{i\ell, j\lambda}(0)$$

Ces expressions ne coïncident, au deuxième ordre, que si  $N = 2$ .

On vérifiera, par contre, que les règles

$$K^N = [E(k)]^{N-1} [E(k^{-1})]^{-1}$$

et

$$[K + (N-1) E(k)]^{-1} = E \left[ (k + (N-1) E(k))^{-1} \right]$$

sont compatibles, au deuxième ordre en  $\varepsilon$  et pour  $N$  quelconque, avec les relations (61). Cela ne suffit d'ailleurs pas pour établir la validité de l'une ou l'autre de ces règles.

\*

\* \*

CHAPITRE III

ÉCOULEMENTS NON UNIFORMES, ET ÉCOULEMENTS RADIAUX

On sait que la perméabilité macroscopique  $K^{ij}$ , dont l'étude a fait l'objet des deux premiers chapitres de cette Note, permet une description correcte des écoulements localement uniformes au niveau macroscopique - c'est-à-dire des écoulements pouvant être considérés comme uniformes dans des domaines de dimensions peut-être petites à l'échelle macroscopique, mais suffisamment grandes cependant pour que les propriétés du milieu liées aux perméabilités régionalisées  $k^{ij}(x)$  y apparaissent comme homogénéisées par effet d'ergodicité. Or il existe des classes d'écoulements/radiaux, qui ne vérifient nullement cette condition. Au voisinage d'un puits de pompage, l'écoulement n'est pas localement uniforme. La perméabilité apparente observée, c'est-à-dire le rapport  $\frac{Q}{\Delta P}$  du débit à la différence de pression, n'a donc pas de raisons a priori de coïncider avec l'expression que l'on calculerait si le milieu était homogène et de perméabilité constante  $K^{ij}$ . La méthode de Schwydlar, cependant, peut s'appliquer aussi aux écoulements non uniformes. Dans ce qui suit, nous essayerons, en nous limitant au deuxième ordre, de déterminer les caractéristiques de cette perméabilité apparente (moyenne et variance, car il s'agira d'une quantité aléatoire, et non plus d'une constante, comme dans les deux premiers chapitres).

Après avoir défini les conditions aux limites et posé les équations générales (paragraphe 1), nous déterminerons l'espérance et la variance de la perméabilité apparente par des formules générales où figurera une fonction de Green (paragraphe 2). Nous particulariserons ensuite au cas des écoulements radiaux, en examinant les cas de simplification et les limites  $R_0 \rightarrow 0$  et  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_0$  et  $R_1$  désignant les rayons intérieur et extérieur de la zone de drainage (paragraphe 3). Enfin nous évoquerons le cas où la perméabilité  $k^{ij}(0)$  du puits de pompage est connue, et où par suite la loi spatiale des  $k^{ij}(x)$  doit être remplacée par la loi liée (non stationnaire) correspondante.

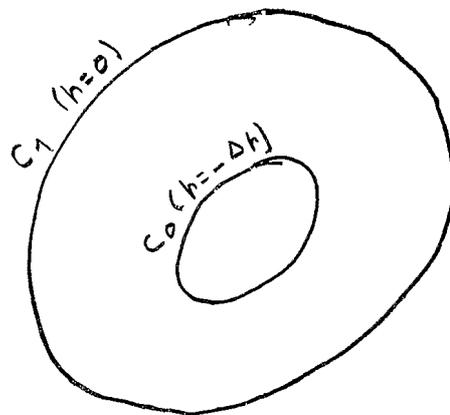
Nous nous limiterons, en principe, au cas d'un espace à 2 dimensions. Mais les résultats des deux premiers paragraphes se transposent sans difficulté à l'espace à 3 dimensions.

Très importantes  
pour les applications  
comme les  
écoulements

I.- EQUATIONS GENERALES ET CONDITIONS AUX LIMITES

Considérons une zone de drainage en forme de couronne limitée par un contour intérieur  $C_0$  et un contour extérieur  $C_1$ , où règne une perméabilité de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} k^{ij} = g^{ij} + \varepsilon \gamma^{ij} \\ E(\gamma^{ij}) = 0 \end{array} \right.$$



Comme conditions aux limites, nous imposons une pression nulle sur le contour extérieur  $C_1$  et une pression constante  $-\Delta p$  sur le contour intérieur  $C_0$  (le signe  $-$  est introduit pour que  $\Delta p > 0$  corresponde à un pompage). Soit  $Q$  le débit total traversant la couronne et recueilli, par conséquent, à l'intérieur de  $C_0$ . Nous désignerons par  $S$  le domaine compris entre  $C_0$  et  $C_1$ , c'est-à-dire la couronne elle-même, et par  $q^i(x)$  et  $\partial_j p(x)$  le flux et le gradient en tout point  $x$  de  $S$ .

Le flux étant conservatif ( $\partial_i q^i = 0$ ), on a :

$$q^i \partial_i p = \partial_i (p q^i)$$

et, en intégrant dans  $S$

$$\int_S q^i \partial_i p \, dx = \int_S \partial_i (p q^i) \, dx = \int_{C_0} p q^i n_i \, d\lambda + \int_{C_1} p q^i n_i \, d\lambda$$

$n_i$  désignant les cosinus directeurs de la normale extérieure aux contours  $C_0$  et  $C_1$  de la couronne. Comme  $p = 0$  sur  $C_0$  et  $p = -\Delta p$  sur  $C_1$ , il reste simplement :

(62)

$$Q \Delta p = - \int_S q^i \partial_i p \, dx$$

Cette relation fondamentale nous permettra de calculer le débit  $Q$ , et par suite la perméabilité apparente  $\frac{Q}{\Delta p}$ . Elle possède la même signification énergétique que la relation

$$E(q^i) E(\partial_i p) = E(q^i \partial_i p)$$

que l'on établit dans le cas d'un milieu infini et d'un écoulement stationnaire : A droite figure l'énergie consommée par les forces de viscosité, à gauche l'énergie

qu'il est nécessaire de fournir de l'extérieur pour entretenir l'écoulement. Grâce au choix des conditions aux limites, cependant, la relation (62) s'applique au flux et au gradient eux-mêmes, et non pas seulement à leurs espérances mathématiques comme dans le cas des écoulements uniformes.

la pression

Nous utiliserons aussi la formule (62) sous la forme, plus technique, suivante. Décomposons en deux termes :

$$p(x) = \overline{w}(x) + \lambda(x)$$

Le premier,  $\overline{w}(x)$  sera une fonction déterminée (non aléatoire) vérifiant les conditions aux limites  $\overline{w} = 0$  sur  $C_1$  et  $\overline{w} = -\Delta p$  sur  $C_2$ , à cela près quelconque. Le deuxième terme  $\lambda(x)$  est, par suite, une fonction aléatoire nulle sur les deux contours  $C_0$  et  $C_1$ . On peut écrire :

$$\begin{aligned} -q^i \partial_i p &= k^{ij} \partial_i p \partial_j p \\ &= k^{ij} \partial_i p \partial_j \overline{w} + k^{ij} \partial_i \overline{w} \partial_j p - k^{ij} \partial_i \overline{w} \partial_j \overline{w} + k^{ij} \partial_i \lambda \partial_j \lambda \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$-q^i \partial_i p = -2 q^i \partial_i \overline{w} - k^{ij} \partial_i \overline{w} \partial_j \overline{w} + k^{ij} \partial_i \lambda \partial_j \lambda$$

Intégrons dans S. on remarque que l'on a :

$$\int_S q^i \partial_i \overline{w} dx = \int_S \partial_i (\overline{w} q^i) dx = -Q \Delta p$$

à cause du choix des conditions aux limites vérifiées par  $\overline{w}$ . Par suite, on obtient :

$$(63) \quad Q \Delta p = \int_S k^{ij} \partial_i \overline{w} \partial_j \overline{w} dx - \int_S k^{ij} \partial_i \lambda \partial_j \lambda dx$$

Cette formule est valable quelle que soit la fonction  $\overline{w}$  vérifiant les conditions aux limites. Si l'on prend pour  $\overline{w}$  le développement de la pression  $p(x)$  arrêté au terme en  $\varepsilon^{n-1}$ , la deuxième intégrale est d'ordre  $2n$  en  $\varepsilon$ . Par conséquent, l'intégrale

$$\int_S k^{ij} \partial_i \overline{w} \partial_j \overline{w} dx$$

représente le développement de  $Q \Delta p$  arrêté au terme d'ordre  $(2n-1)$ .

Cette remarque sera utilisée dans la suite.

Remarquons également que,  $k^{ij}$  étant définie positive, on a, d'après (63), pour toute fonction  $\overline{w}$  vérifiant les conditions aux limites, l'inégalité :

$$Q \Delta p \leq \int_S k^{ij} \partial_i \overline{w} \partial_j \overline{w} dx$$

Autrement dit, parmi tous les écoulements possibles compatibles avec les conditions aux limites, l'écoulement réel est celui qui réalise le minimum de la puissance consommée par les forces de viscosité. On sait que cette condition d'extremum s'exprime justement par la relation

$$\partial_i (k^{ij} \partial_j p) = 0$$

c'est-à-dire l'équation de continuité  $\partial_i q^i = 0$

La relation (63) va nous conduire également à un théorème exprimant - comme dans le cas des écoulements uniformes - que la perméabilité apparente est toujours comprise entre les moyennes harmonique et géométrique. Du fait qu'en général  $Q \Delta p$  est une variable aléatoire, le théorème ne s'énonce ici qu'en espérance mathématique.

Théorème fondamental. - L'espérance de la perméabilité apparente est toujours comprise entre les moyennes harmonique et géométrique. Plus précisément, si l'on désigne par  $Q_A$  et  $Q_H$  les débits des écoulements que l'on obtient, avec les mêmes conditions aux limites, en remplaçant le milieu réel par un milieu homogène de perméabilité constante  $E(k)$  ou  $[E(k^{-1})]^{-1}$ , on a la double inégalité :

$$(63bis) \quad Q_H \Delta p \leq E(Q \Delta p) \leq Q_A \Delta p$$

La deuxième inégalité découle immédiatement de (63). Il suffit de prendre pour  $\overline{w}$  la solution du problème relatif au milieu de perméabilité  $E(k)$ , et de passer aux espérances. Il vient :

$$E(Q \Delta p) \leq \int_S E(k^{ij}) \partial_i \overline{w} \partial_j \overline{w} dx = Q_A \Delta p$$

Pour démontrer la première inégalité (63 bis), mettons le flux  $q^i$  sous la forme

$$q^i = x^i + \theta^i$$

$x^i$  et  $\theta^i$  étant deux vecteurs conservatifs. De

$$\begin{aligned} h_{ij} q^i q^j &= h_{ij} x^i q^j + h_{ij} x^j q^i - h_{ij} x^i x^j + h_{ij} \theta^i \theta^j \\ &= -2 x^i \partial_i p - h_{ij} x^i x^j + h_{ij} \theta^i \theta^j \end{aligned}$$

On tire en intégrant et en désignant par  $\chi$  le débit total du flux  $\chi^i$  :

$$2 \chi \Delta p - \int_S h_{ij} \chi^i \chi^j dx = Q \Delta p - \int_S h_{ij} \theta^i \theta^j dx$$

Comme  $h_{ij}$  est défini positif, on en déduit l'inégalité :

$$2 \chi \Delta p - \int_S h_{ij} \chi^i \chi^j dx \leq Q \Delta p$$

Prenons maintenant comme vecteur  $\chi^i$  le flux qui s'installe, pour les mêmes conditions aux limites, dans le milieu homogène de résistivité  $E(h_{ij})$ . On a  $\chi \Delta p = Q_H \Delta p$ , et aussi

$$\int_S E(h_{ij}) \chi^i \chi^j dx = Q_H \Delta p$$

Passant donc aux espérances dans l'inégalité ci-dessus, il vient :

$$Q_H \Delta p \leq E(Q \Delta p)$$

ce qui achève de démontrer le théorème fondamental.

### Développements de Schwydlar

Comme dans le premier chapitre, nous allons chercher à déterminer des développements de la forme :

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_j p = \partial_j p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \partial_j p_n \\ q^i = q_0^i + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n q_n^i \end{array} \right.$$

La loi de Darcy donne immédiatement

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0^i = -\varepsilon^{ij} \partial_j p_0 \\ q_n^i = -\varepsilon^{ij} \partial_j p_n - \gamma^{ij} \partial_j p_{n-1} \end{array} \right.$$

et l'équation de continuité :

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = 0 \\ \Delta p_n + \partial_i (\gamma^{ij} \partial_j p_{n-1}) = 0 \end{array} \right.$$

On retrouve le même système qu'au chapitre 1. Mais ici, nous choisissons pour  $p_0(x)$  la fonction harmonique nulle sur  $C_0$  et égale à  $-\Delta p$  sur  $C_1$ , c'est-à-dire la solution du problème posé dans le cas  $\varepsilon = 0$ . Pour  $p_n$ , nous prendrons la fonction  $p_n(x)$  vérifiant l'équation (66) et s'annulant sur les deux contours  $C_0$  et  $C_1$

$$p_n(x) = 0 \quad \text{pour } x \in C_0 \text{ ou } x \in C_1$$

On sait que,  $p_{n-1}$ , étant connue, ces conditions déterminent  $p_n(x)$  sans ambiguïté. Soit  $G(x,y)$  la fonction de Green définie (de manière unique) par les deux conditions :

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_x G(x,y) + \delta(x-y) = 0 \quad \text{pour } x \in S \\ G(x,y) = 0 \quad \text{pour } x \in C_0 \text{ ou } x \in C_1 \end{array} \right.$$

On sait que cette fonction est symétrique en  $y$  et  $x$ .

$$(68) \quad G(x,y) = G(y,x)$$

Alors, compte tenu du choix des conditions aux limites, la solution  $p_n(x)$  de (66) s'écrit

$$(69) \quad p_n(x) = \int_S G(x,y) \partial_i \left[ \gamma^{ij}(y) \partial_j p_{n-1}(y) \right] dy$$

Comme  $G(x,y)$  est nulle, d'après (67) et (68), lorsque  $y$  appartient à  $C_0$  ou à  $C_1$ , une intégration par parties donne immédiatement :

$$p_n(x) = - \int \frac{\partial}{\partial y^i} G(x,y) \gamma^{ij}(y) \partial_j p_{n-1}(y) dy$$

D'où l'expression du gradient :

$$(70) \quad \boxed{\partial_\ell p_n(x) = - \int \frac{\partial^2}{\partial x^\ell \partial y^i} G(x,y) \gamma^{ij}(y) \partial_j p_{n-1}(y) dy}$$

Par itération en  $n$ , il serait possible de former l'expression de  $\partial_\ell p_n(x)$  et de son espérance mathématique sous la forme de fonctionnelles analogues aux fonctionnelles (19), les  $\partial_{\ell i} \alpha(x-y)$  étant remplacées par les dérivées  $\frac{\partial^2}{\partial x^\ell \partial y^i} G(x,y)$  de la fonction de Green. Nous n'écrirons pas ces développements, qui n'auraient qu'un intérêt formel.

Développement de  $Q\Delta p$

En vue d'évaluer la perméabilité apparente, nous allons chercher le développement en  $\varepsilon$  de  $Q\Delta p$ . Si, dans l'intégrale qui figure en (62), on remplace  $q^i$  et  $\partial_j p$  par leurs développements (64), on obtient :

$$\int_S q^i \partial_i p \, dx = \sum_{n, m} \varepsilon^{n+m} \int q_n^i \partial_i p_m \, dx$$

Or, pour  $m \neq 0$ , chacun des termes de cette série double est identiquement nul, à cause du choix ( $p_m(x) = 0$  sur  $C_0$  et  $C_1$ ) des conditions aux limites :

$$\int_S q_n^i \partial_i p_m \, dx = \int_S \partial_i (p_m q_n^i) \, dx = 0 \quad (m \neq 0)$$

Il reste donc :

$$(71) \quad \int_S q^i \partial_i p = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \int_S q_n^i \partial_i p_0 \, dx$$

De plus, pour  $n \neq 0$ , on a également

$$\int g^{ij} \partial_j p_n \partial_i p_0 \, dx = \int \partial_j [p_n g^{ij} \partial_i p_0] \, dx - \int p_n \Delta p_0 \, dx = 0$$

à cause du choix des conditions aux limites pour  $p_n$  et de  $\Delta p_0 = 0$ . Si l'on remplace  $q_n^i$  par son expression (65), il reste donc :

$$\int q_n^i \partial_i p_0 \, dx = - \int \gamma^{ij} \partial_j p_{n-1} \partial_i p_0 \, dx$$

La relation  $\int q_1^i \partial_i p_{n-1} \, dx = 0$ , de son côté, montre que l'on a également

(pour  $n > 1$ )

$$\int q_n^i \partial_i p_0 \, dx = \int g^{ij} \partial_j p_{n-1} \partial_i p_1 \, dx$$

D'où, finalement, le développement cherché :

$$\begin{aligned}
 Q \Delta p &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n \varepsilon^n \\
 (72) \quad T_0 &= \int_S \varepsilon^{ij} \partial_i p_0 \partial_j p_0 dx = \Delta p \int_{C_0} \varepsilon^{ij} \partial_j p_0 n_i d\Delta \\
 T_n &= - \int_S \varepsilon^{ij} \partial_j p_{n-1} \partial_i p_1 dx = \int_S \gamma^{ij} \partial_j p_{n-1} \partial_i p_0 dx
 \end{aligned}$$

II.- MOYENNE ET VARIANCE DE  $Q \Delta p$  (à l'approximation d'ordre 2).

A l'approximation d'ordre 2, les développements (72) nous donnent

$$Q \Delta p = T_0 + T_1 \varepsilon + T_2 \varepsilon^2$$

Avec, compte tenu de (70) :

$$\begin{aligned}
 (73) \quad T_1 &= \int_S \gamma^{ij} \partial_j p_0 \partial_i p_0 dx \\
 T_2 &= - \iint_{S S} \gamma^{ij}(x) \partial_i p_0(x) \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial y^l} G(x,y) \gamma^{kl}(y) \partial_k p_0(y) dx dy
 \end{aligned}$$

Les  $T_n$ , et le  $Q \Delta p$  lui-même, sont des variables aléatoires. Nous allons caractériser  $Q \Delta p$  par son espérance mathématique et sa variance calculées à l'approximation d'ordre 2.

Calcul de l'espérance  $E(Q \Delta p)$

Comme  $E(\gamma^{ij}) = 0$  par hypothèse, on a, en premier lieu,  $E(T_1) = 0$ . Comme pour les écoulements uniformes, la chute des perméabilités est du deuxième ordre en  $\varepsilon$ .

Posant ensuite

$$E \left[ \gamma^{ij}(x) \gamma^{kl}(x+h) \right] = R^{ijkl}(h)$$

on obtient :

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(Q\Delta p) = Q_0 \Delta p + \varepsilon^2 E(T_2) \\ E(T_2) = - \iint_S \iint_S R^{ij,kl}(y-x) \partial_i p_0(x) \partial_j p_0(y) \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial y^l} G(x,y) dx dy \end{array} \right.$$

On notera que  $E(T_2)$  est obligatoirement négative, de sorte qu'il y a bien détérioration des perméabilités. Cela se voit sur l'expression, non explicitée, que l'on peut déduire de (72) :

$$(75) \quad T_2 = - \int_S \varepsilon^{ij} \partial_i p_1 \partial_j p_1 dx = - \int_S \overline{\text{grad } p_1^2} dx$$

Calcul de la variance  $D^2(Q \Delta p)$

A l'approximation d'ordre 2, on a

$$(Q\Delta p)^2 = T_0^2 + 2 T_0 T_1 \varepsilon + \varepsilon^2 (T_1^2 + 2 T_0 T_2)$$

et

$$E \left[ (Q\Delta p)^2 \right] = T_0^2 + \varepsilon^2 \left[ E(T_1^2) + 2 T_0 E(T_2) \right]$$

Comme

$$\left[ E(Q\Delta p) \right]^2 = T_0^2 + 2 \varepsilon^2 T_0 E(T_2)$$

Le terme en  $E(T_2)$  s'élimine, et il reste :

$$(76) \quad D^2(Q\Delta p) = \varepsilon^2 E \left[ T_1^2 \right]$$

Tout se ramène donc au calcul de  $E(T_1^2)$ . De (73) on déduit :

$$T_1^2 = \iint_S \iint_S \gamma^{ij}(x) \gamma^{kl}(y) \partial_i p_0(x) \partial_j p_0(x) \partial_l p_0(y) \partial_k p_0(y) dx dy$$

et on tire par conséquent :

$$(77) \quad D^2(Q\Delta p) = \varepsilon^2 \iint_S \iint_S R^{ij,kl}(y-x) \partial_i p_0(x) \partial_j p_0(x) \partial_l p_0(y) \partial_k p_0(y) dx dy$$

On remarque que cette expression ne dépend que de la fonction de covariance  $R^{ij,kl}(h)$  et de la solution  $p_0(x)$  correspondant au milieu homogène ( $\varepsilon = 0$ ). Elle ne dépend pas de la fonction de Green. On notera, également, que cette expression est

toujours différente de 0, tant que S est fini. Son comportement asymptotique pour S infini sera étudié au paragraphe suivant, dans le cas particulier des écoulements radiaux. Ainsi  $Q \Delta p$ , et par suite aussi la perméabilité apparente est toujours une variable aléatoire, et non une quantité constante comme la perméabilité macroscopique.

### III Cas des écoulements radiaux.

En vue d'explicitier les formules (74) et (77), nous allons traiter le cas d'un écoulement radial dans l'espace à deux dimensions. Les contours  $C_0$  et  $C_1$  seront deux cercles concentriques, centrés à l'origine, de rayon  $R_0$  et  $R_1$ . Le domaine S est donc la couronne circulaire comprise entre ces deux cercles. Ce dispositif est celui que l'on utilise pour étudier l'écoulement qui se produit lorsque l'on fait débiter un puits isolé. Le contour extérieur de la zone de drainage (le cercle de rayon  $R_1$ ) a le plus souvent un caractère conventionnel : on s'impose la condition  $p = 0$  sur  $C_1$  à seule fin qu'un écoulement permanent puisse se produire.

De plus, en vue de simplifier au maximum les formules tensorielles du paragraphe précédent, nous supposerons qu'il existe une perméabilité scalaire, autrement dit que l'on a :

$$(78) \quad k^{ij} = (1 + \varepsilon \gamma) g^{ij}$$

$\gamma(x)$  étant une fonction aléatoire stationnaire d'espérance nulle. Nous désignerons sa covariance par  $R(h)$ , et nous supposerons de plus que  $R(h)$  ne dépend que du rayon vecteur  $|h|$ . Alors la covariance matricielle  $R^{ij, \ell \kappa}$  se réduit à :

$$(79) \quad R^{ij, \ell \kappa}(h) = g^{ij} g^{\ell \kappa} R(r) \quad (r = |h|)$$

La solution  $p_0(x)$  correspondant au milieu homogène est :

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0(x) = a \log \frac{r}{R_1} \\ a = \frac{\Delta p}{\log R_1 - \log R_0} \end{array} \right. \quad (r = |x|)$$

et le débit correspondant est :

$$(81) \quad Q_0 = 2 \pi a = \frac{2 \pi \Delta p}{\log R_1 - \log R_0}$$

Nous allons calculer l'espérance et la variance de  $Q \Delta p$ , en commençant par le cas le plus facile, qui est celui de la variance.

Calcul de la variance  $D^2(Q\Delta p)$

Avec les hypothèses faites ci-dessus, l'expression (77) se simplifie. Comme

$$\varepsilon^{ij} \partial_i p_0(x) \partial_j p_0(x) = \frac{a^2}{r^2}$$

on obtient, en passant en coordonnées polaires

$$(82) \quad D^2(Q\Delta p) = 2 \pi a^4 \varepsilon^2 \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r} \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr'}{r'} \int_0^{2\pi} R(\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \theta}) d\theta$$

La variance relative  $\frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2}$  est plus intéressante à considérer. Elle est, en effet, égale à la variance  $(Q_0 \Delta p)^2$  relative de la perméabilité apparente. Comme

$$Q_0 \Delta p = 2 \pi a^2 \log \frac{R_1}{R_0}$$

on obtient :

$$(83) \quad \frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} = \frac{\varepsilon^2}{2\pi \left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2} \int_{R_0}^{R_1} \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr dr'}{r r'} \int_0^{2\pi} R(\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \theta}) d\theta$$

Etudions ce que devient cette expression lorsque  $R_0 \rightarrow 0$  ou  $R_1 \rightarrow \infty$  dans les applications,  $R_0$  est, en effet, généralement très petit et  $R_1$  très grand. On devra, cependant, prendre garde que la convergence vers ces limites se fait à une allure logarithmique, c'est-à-dire très lente.

Pour cela, remarquons, en premier lieu, que de  $|R(\rho)| \leq R(0)$  résulte l'inégalité :

$$\frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} \leq \varepsilon^2 R(0)$$

En deuxième lieu, évaluons la covariance de la perméabilité à l'origine  $k(0)$  avec  $\frac{Q\Delta p}{Q_0 \Delta p}$ , qui est du deuxième ordre en  $\varepsilon$  :  $\varepsilon^2 E \left[ \frac{\gamma(0) T_1}{Q_0 \Delta p} \right]$ .

Compte tenu de l'expression (73) de  $T_1$ , on obtient :

$$(84) \quad \text{Cov} \left[ k(0), \frac{Q\Delta p}{Q_0 \Delta p} \right] = \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} R(r) \frac{dr}{r}$$

L'inégalité de Schwarz nous permet alors d'écrire :

$$(85) \quad \frac{\varepsilon^2}{R(0)} \left[ \frac{1}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} R(r) \frac{dr}{r} \right]^2 \leq \frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} \leq \varepsilon^2 R(0)$$

Limite pour  $R_0 \rightarrow 0$  ( $R_1$  restant fixe).

Lorsque  $R_0 \rightarrow 0$ ,  $R_1$  restant fixe, l'intégrale  $\frac{1}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} R(r) \frac{dr}{r}$

a pour limite  $R(0)$ . Les inégalités (85) montrent donc que l'on a :

$$\lim \frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} = \varepsilon^2 R(0)$$

On a d'ailleurs un résultat plus précis : en effet,  $\text{Cov} \left( k(0), \frac{Q\Delta p}{Q_0 \Delta p} \right)$  tend également vers  $\varepsilon^2 R(0)$ , de sorte que :

$$\lim D^2 \left[ k(0) - \frac{Q\Delta p}{Q_0 \Delta p} \right] = 0$$

La perméabilité apparente  $\frac{Q\Delta p}{Q_0 \Delta p}$  converge en moyenne quadratique vers  $k(0) + C$  ( $C$  étant une constante dont nous  $\frac{Q\Delta p}{Q_0 \Delta p}$  montrerons plus bas qu'elle est nulle).

Lorsque  $R_0$  tend vers 0,  $R_1$  restant fixe, la perméabilité apparente converge, en moyenne quadratique, vers la perméabilité  $k(0)$  à l'origine.

Limite pour  $R_1 \rightarrow \infty$  et  $R_0$  fixe.

Dans ce cas, on démontre (voir annexe B) que

$$\lim \frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} = 0$$

La perméabilité apparente converge donc en moyenne quadratique vers une limite (nous verrons que cette limite correspond à la moyenne harmonique, et non pas à la perméabilité macroscopique des écoulements uniformes).

Plus généralement, on établit dans l'Annexe B le résultat suivant :

$$(86) \quad \lim_{\substack{R_0 \rightarrow 0 \\ R_1 \rightarrow \infty}} \frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} = \varepsilon^2 R(0) \quad \lim_{\substack{R_0 \rightarrow 0 \\ R_1 \rightarrow \infty}} \left( \frac{\log R_0}{\log \frac{R_1}{R_0}} \right)^2$$

Si l'on se reporte à (84), on voit que l'on a aussi :

$$\lim_{\substack{R_0 \rightarrow 0 \\ R_1 \rightarrow \infty}} \text{Cov} \left[ k(0), \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} \right] = \varepsilon^2 \lim_{\substack{R_0 \rightarrow 0 \\ R_1 \rightarrow \infty}} \left( \frac{-\log \frac{R_0}{R_1}}{\log \frac{R_1}{R_0}} \right) R(0)$$

Par conséquent, le coefficient de corrélation de la perméabilité apparente et de la perméabilité à l'origine tend vers +1 quelle que soit la manière dont on fait tendre  $R_0$  vers 0 et  $R_1$  vers l'infini. Nous en déduirons plus bas que  $\frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p}$  converge en moyenne quadratique vers une expression de la forme  $\alpha k(0) + \beta$ .

On montre, dans l'annexe B, que, pour une fonction de la forme

$$R(r) = R(0) e^{-\lambda r^2}$$

on a, en négligeant les termes en  $\lambda R_0^2$  et  $e^{-\lambda R_1^2}$

$$(87) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{D^2(Q \Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} &= \frac{1 + \left( \log \frac{a}{R_0} \right)^2}{\left( \log \frac{R_1}{R_0} \right)^2} \varepsilon^2 R(0) \\ a &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{c}{2}} \quad (c = 0,577216 \dots) \end{aligned} \right.$$

De plus, le coefficient de corrélation  $\rho$  entre perméabilité apparente  $\frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p}$  et perméabilité à l'origine  $k(0)$ , et la variance de la première liée par la deuxième sont :

$$(88) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho &= \frac{\log \frac{a}{R_0}}{\sqrt{1 + \left( \log \frac{a}{R_0} \right)^2}} \\ (1 - \rho^2) \frac{D^2(Q \Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} &= \frac{\varepsilon^2 R(0)}{\left( \log \frac{R_1}{R_0} \right)^2} \end{aligned} \right.$$

Le résultat relatif à la variance liée ne dépend pas de la portée  $a$ , et possède probablement une valeur assez générale.

Calcul de l'espérance  $E(Q\Delta p)$

En se reportant à (74), on voit que l'on a

$$E(Q\Delta p) = Q_0 \Delta p + \varepsilon^2 E(T_2)$$

avec ici

$$E(T_2) = -2\pi a^2 \int_{R_0}^{R_1} dr' \int_{R_0}^{R_1} dr \int_0^{2\pi} R(\rho) \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} G(x,y) d\theta$$

( $r, r'$  et  $\rho$  rayonsvecteurs de  $x, y$  et  $(x-y)$ ). Compte tenu, d'autre part, de l'expression (81) de  $a$ , il vient :

$$(89) \quad \frac{E(Q\Delta p)}{Q_0 \Delta p} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} dr' \int_{R_0}^{R_1} dr \int_0^{2\pi} R(\rho) \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} G(x,y) d\theta$$

Nous sommes ainsi conduits à évaluer la limite pour  $R_0 \rightarrow 0$  et  $R_1 \rightarrow \infty$  de l'intégrale I

$$(90) \quad I = \frac{1}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} dr' \int_{R_0}^{R_1} dr \int_0^{2\pi} R(\rho) \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} G(x,y) d\theta$$

Les calculs, assez délicats, sont renvoyés dans l'annexe C. On trouve que si  $R_0 \rightarrow 0$  ou  $R_1 \rightarrow \infty$  (ou les deux simultanément), I est asymptotiquement égal à  $R(0) - \frac{D^2(Q\Delta p)}{\varepsilon^2 (Q_0 \Delta p)^2}$  - formule (C,8) - et par suite, il vient :

$$(91) \quad \boxed{\frac{E(Q\Delta p)}{Q_0 \Delta p} = 1 + \frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} - \varepsilon^2 R(0)}$$

L'inégalité (85) montre que cette quantité est toujours, comme il se doit, inférieure à l'unité. De plus, on constate :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E(Q\Delta p)}{Q_0 \Delta p} \rightarrow 1 \quad \text{si } R_0 \rightarrow 0, \quad R_1 \text{ restant fixe} \\ \frac{E(Q\Delta p)}{Q_0 \Delta p} \rightarrow 1 - \varepsilon^2 R(0) \quad \text{si } R_1 \rightarrow \infty, \quad R_0 \text{ restant fixe} \end{array} \right.$$

Aucune de ces limites ne correspond à la perméabilité macroscopique

qui est  $1 - \frac{\varepsilon^2}{2} R(0)$ . La première est la moyenne arithmétique, la deuxième la moyenne harmonique. Par contre, si  $R_1 \rightarrow 0$  et  $R_2$  vers l'infini de telle manière que

$$-\frac{\log R_0}{\log \frac{R_1}{R_0}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on constate que l'espérance coïncide avec la perméabilité macroscopique.

On notera la conclusion suivante : la perméabilité apparente possède une espérance comprise entre la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique. Elle est d'autant plus proche de la moyenne arithmétique que  $-\frac{\log R_0}{\log \frac{R_1}{R_0}}$  est plus voisin de 1.

### III.- LOI LIEE DE $Q \Delta p$ LORSQUE $k(0)$ EST CONNUE.

Il peut être intéressant, dans les applications, de prévoir à l'avance le débit d'un puits lorsque l'on connaît sa perméabilité  $k(0)$ . Les résultats du paragraphe ci-dessus permettent de résoudre ce problème au sens des moindres carrés. Il suffit, en effet, de déterminer le coefficient  $\lambda$  tel que l'espérance

$$E \left( \left[ \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} - \frac{E(Q \Delta p)}{Q_0 \Delta p} - \lambda \varepsilon \gamma(0) \right]^2 \right)$$

soit minimale. On obtient

$$(92) \quad \lambda = \frac{\text{Cov} \left( \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p}, k(0) \right)}{\varepsilon^2 R(0)}$$

Nous n'avons évalué ces variances et covariances qu'à l'approximation d'ordre 2, de sorte que nous n'obtiendrons que la partie principale de  $\lambda$ . Par suite, aussi, il serait illusoire d'utiliser l'expression (91) pour  $\frac{E(Q \Delta p)}{Q_0 \Delta p}$ , où figurent des termes en  $\varepsilon^2$ . A l'approximation d'ordre 1, on prendra donc comme estimateur de la perméabilité apparente :

$$(93) \quad \left( \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} \right) = 1 + \lambda \varepsilon \gamma(0) = 1 + \lambda \left[ \frac{k(0) - E(k)}{E(k)} \right]$$

avec, d'après (B,8) :

$$(94) \quad \lambda = \frac{\log \frac{a}{R_0}}{\log \frac{R_1}{R_0}}$$

$a$  est la portée de la covariance  $R(r)$  [bien que la formule (B,8) n'ait été établie que pour une covariance en  $e^{-\mu r^2}$ , la formule (94) doit posséder une signification plus générale. Les limites que nous allons obtenir pour  $R_0 \rightarrow 0$  et  $R_1 \rightarrow \infty$  ont une valeur tout-à-fait générale.]

Si  $R_0 \rightarrow 0$ ,  $R_1$  restant fixe,  $\lambda$  tend vers 1. L'estimateur des moindres carrés conduit alors à la perméabilité à l'origine  $k(0)$ . La variance résiduelle, qui est :

$$(95) \quad \frac{D^2(Q \Delta p)}{(Q \Delta p)^2} - \lambda^2 \varepsilon^2 R(0) = \frac{\varepsilon^2 R(0)}{\left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2}$$

tend vers 0 : il y a convergence en moyenne quadratique vers  $k(0)$ .

Si  $R_0$  reste fixe et  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $\lambda$  tend vers 0. Au premier ordre en  $\varepsilon$ , la perméabilité apparente converge en moyenne quadratique vers l'espérance  $E(k)$ . On a vu qu'au deuxième ordre en  $\varepsilon$  c'était, en réalité, la moyenne harmonique  $[E(k^{-1})]^{-1}$  qui apparaissait.

#### Approximation gaussienne

Il est possible de retrouver ces résultats et de pousser l'approximation jusqu'à l'ordre 2, à condition de supposer que les perméabilités sont gaussiennes. Les formules générales (72) ou (73), en effet, ne supposent nullement le phénomène stationnaire. Prenons pour  $\gamma(x)$  les moments d'ordre 1 et 2 qui sont ceux d'une loi de Gauss liée par  $\gamma(0)$ . On a :

$$(96) \quad \left\{ \begin{aligned} E[\gamma(x)] &= \gamma(0) \frac{R(x)}{R(0)} \\ E[\gamma(x) \gamma(y)] &= R(x-y) + \frac{\gamma(0)^2 - R(0)}{[R(0)]^2} R(x) R(y) \end{aligned} \right.$$

Le calcul est donc possible. De (73), on déduit tout d'abord :

$$(97) \quad \left. \begin{aligned} \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta P} &= 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi \log \frac{R_1}{R_0}} \int_S \gamma(x) \frac{dx}{r^2} \\ &- \frac{\varepsilon^2}{2\pi \log \frac{R_1}{R_0}} \int_S \int_S \gamma(x) \gamma(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial r \partial r'} \frac{dx}{r} \frac{dy}{r} \end{aligned} \right\}$$

Calcul de l'espérance mathématique

De (96) et (97) on déduit l'expression de l'espérance liée par  $\gamma(0)$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{E(Q \Delta p | \gamma(0))}{Q_0 \Delta P} &= 1 + \frac{\varepsilon \gamma(0)}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} \frac{R(r)}{R(0)} \frac{dr}{r} - \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{2\pi} R(x-y) \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial r'} dr dr' d\theta \\ &- \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{R_1}{R_0}} \frac{\overline{\gamma(0)^2} - R(0)}{R(0)^2} \int_{R_0}^{R_1} \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{2\pi} R(r) R(r') \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial r'} dr dr' d\theta \end{aligned} \right\}$$

Les deux premières intégrales ont été calculées en (84) et en (89). Elles se relient à la covariance et à la moyenne a priori. Le calcul de la troisième intégrale est effectué dans l'Annexe C. La formule (C,10) donne

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon^2}{\log \frac{R_1}{R_0}} \iiint R(r) R(r') \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial r'} dr dr' d\theta = \\ &- \frac{\varepsilon^2}{\left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2} \left[ \int_{R_0}^{R_1} \frac{R(r) dr}{r} \right]^2 + \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} [R(r)]^2 \frac{dr}{r} \\ &= - \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \text{Cov} \left( k(0) \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta P} \right) \right]^2 + \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} [R(r)]^2 \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'espérance liée sous la forme suivante :

$$(98) \left\{ \begin{aligned} \frac{E(Q \Delta p | \gamma(0))}{Q_0 \Delta p} &= \frac{E(Q \Delta p)}{Q_0 \Delta p} + \frac{\gamma(0)}{\varepsilon R(0)} \text{Cov} \left[ k(0), \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} \right] \\ &+ \frac{\overline{\gamma(0) - R(0)}^2}{\varepsilon^2 R(0)^2} \left[ \text{Cov} \left( k(0), \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} \right) \right]^2 - \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{R_1}{R_0}} \frac{\overline{\gamma(0) - R(0)}^2}{[R(0)]^2} \int_{R_0}^{R_1} \frac{[R(r)]^2}{r} dr \end{aligned} \right.$$

Pour abrégier, nous poserons :

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon \gamma(0) &= X \\ \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} &= Y \\ \frac{D^2(Q \Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} &= \sigma_y^2 \\ \varepsilon^2 R(0) &= \sigma_x^2 \\ \text{Cov} \left( \varepsilon \gamma(0), \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} \right) &= \sigma_{xy} = \rho \sigma_x \sigma_y \end{aligned} \right.$$

(98) peut s'écrire :

$$(99) \quad E(Y | X) = E(Y) + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} X + \frac{X^2 - \sigma_x^2}{\sigma_x^2} \rho^2 \sigma_y^2 - \frac{X^2 - \sigma_x^2}{\log \frac{R_1}{R_0}} \frac{4}{\sigma_x^2} \int_{R_0}^{R_1} \frac{R(r)^2}{r} dr$$

On notera que cette régression n'est pas linéaire. De fait, même si  $\gamma(x)$  est supposée gaussienne, l'expression (97) montre qu'au deuxième ordre en  $\varepsilon$   $Q \Delta p$  ne peut pas obéir à une loi normale.

Dans le cas où  $R(r)$  est de la forme  $R(0) e^{-\mu r^2}$ , on peut expliciter (99). (Le calcul de la dernière intégrale est immédiat en remarquant que, si  $a$  est la portée de  $R(r)$ , celle de  $[R(r)]^2$  est  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ). On trouve :

$$(100) \quad \mathbb{E} \left( \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} \mid \gamma(0) \right) = 1 + \varepsilon \gamma(0) \frac{\log \frac{a}{R_0}}{\log \frac{R_1}{R_0}} + \varepsilon^2 R(0) \left[ \frac{1}{\left( \log \frac{R_1}{R_0} \right)^2} - \frac{\log \frac{R_1 \sqrt{2}}{a}}{\log \frac{R_1}{R_0}} \right] \\ + \varepsilon^2 [\gamma(0)]^2 \left[ \frac{\left( \log \frac{a}{R_0} \right)^2}{\left( \log \frac{R_1}{R_0} \right)^2} - \frac{\log \frac{a}{R_0 \sqrt{2}}}{\log \frac{R_1}{R_0}} \right]$$

Si  $R_0 \rightarrow 0$ ,  $R_1$  restant fixe, on obtient, à la limite,  $1 + \varepsilon \gamma(0)$ , c'est-à-dire la perméabilité à l'origine : A l'approximation d'ordre 2, la perméabilité apparente converge encore en moyenne quadratique vers  $k(0)$ . On peut penser que ce résultat n'est pas lié à l'approximation de Schwydlar, et reste vrai à tous les ordres.

Si  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_0$  restant fixe, la limite est  $1 - \varepsilon^2 R(0)$ , c'est-à-dire la moyenne harmonique : ici encore, ce résultat subsiste probablement à tous les ordres en  $\varepsilon$ .

Calcul de la variance liée

Pour calculer la variance liée  $\frac{D^2(Q \Delta p \mid \gamma(0))}{(Q_0 \Delta p)^2}$  au deuxième ordre en  $\varepsilon$ , nous élèverons  $\frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} - 1$  au carré et passerons à l'espérance mathématique.

De (96) et (97) on tire (au 2ème ordre en  $\varepsilon$ ) :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} - 1 \right)^2 \right] = \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2 \left( \log \frac{R_1}{R_0} \right)^2} \iint_S \iint_S \mathbb{E} [\gamma(x) \gamma(y)] \frac{dx dy}{r^2 r'^2} \\ = \frac{\varepsilon^2}{2\pi \left( \log \frac{R_1}{R_0} \right)^2} \int_{R_0}^{R_1} \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{2\pi} R(x-y) \frac{dr}{r} \frac{dr'}{r'} d\theta \\ + \frac{\gamma(0) - R(0)}{R(0)^2} \frac{\varepsilon^2}{\left( \log \frac{R_1}{R_0} \right)^2} \left[ \int_{R_0}^{R_1} R(r) \frac{dr}{r} \right]^2 \\ = \frac{D^2(Q \Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} + \frac{\gamma(0) - R(0)}{[R(0)]^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \text{Cov} \left( k(0), \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} \right) \right]^2$$

ou encore, avec les notations de (99)

$$\mathbb{E} \left[ \left( \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} - 1 \right)^2 \right] = \sigma_y^2 + \frac{X^2 - \sigma_x^2}{\sigma_x^2} \rho^2 \sigma_y^2$$

Ensuite nous devons élever l'espérance liée au carré, soit au 2ème ordre d'après (99)

$$\left[ \mathbb{E} \left( \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} \mid \gamma(0) \right) - 1 \right]^2 = \frac{\rho^2 X^2}{\sigma_x^2} \sigma_y^2$$

Par conséquent, la variance liée est :

$$D^2 \left( \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} \mid \gamma(0) \right) = \sigma_y^2 (1 - \rho^2)$$

Bien que  $Q \Delta p$  ne soit pas gaussienne, la variance liée possède au deuxième ordre en  $\varepsilon$ , la même valeur (indépendante de  $\gamma(0)$ ) que pour une loi de Gauss. Compte tenu de (B,9), on trouve

$$D^2 \left( \frac{Q \Delta p}{Q_0 \Delta p} \mid \gamma(0) \right) = \frac{\varepsilon^2 R(0)}{\left( \log \frac{R_1}{R_0} \right)^2}$$

Si  $R_0$  tend vers 0 ou  $R_1$  vers l'infini, cette variance liée tend vers 0. Par conséquent, au deuxième ordre en  $\varepsilon$ , la perméabilité apparente converge en moyenne quadratique vers son espérance mathématique (100). Il y a lieu de penser que ce résultat n'est pas lié à l'approximation d'ordre 2, et subsiste à tous les ordres.

---

A N N E X E A

LE TENSEUR DE SCHWYDLER

Donnons-nous, comme dans le chapitre 2, une perméabilité de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} k^{ij} = g^{ij} + \varepsilon \gamma^{ij} \\ E(\gamma^{ij}) = 0 \end{array} \right.$$

et soit  $\partial_j p^l, q^{il}$  un système de solutions privilégiées vérifiant

$$(A,1) \quad E(\partial_j p^l) = \delta_j^l$$

cherchons un développement de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_j p^l = \delta_j^l + \varepsilon \partial_j p_1^l + \varepsilon^2 \partial_j p_2^l + \dots \\ q^{il} = -g^{il} + \varepsilon q_1^{il} + \varepsilon^2 q_2^{il} + \dots \end{array} \right.$$

on notera que les  $\partial_j p_n$  et  $q_n^{il}$  sont distincts de ceux que l'on obtient par la méthode de Schwydler.

On a (en raison du choix (A,1) des solutions privilégiées.)

$$(A,2) \quad E(\partial_j p_n^l) = 0$$

La loi de Darcy, de son côté, donne :

$$(A,3) \quad q_n^{il} = -g^{ij} \partial_j p_n^l - \gamma^{ij} \partial_j p_{n-1}^l$$

Mais ici la perméabilité macroscopique (puisque  $\partial_j p^l$  a une espérance unitée) est :

$$K^{il} = -E(q^{il}) = g^{il} - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n E(q_n^{il})$$

c'est-à-dire, d'après (A,2) :

$$(A,4) \quad K^{il} = g^{il} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n E(\gamma^{ij} \partial_j p_{n-1}^l)$$

D'autre part, les  $q_n^i$  sont conservatifs

$$\partial_i q_n^{il} = 0$$

Par suite

$$E \left[ q_n^{il} \partial_i p_m^j \right] = E(q_n^{il}) E(\partial_i p_m^j)$$

En particulier, pour  $m \neq 0$

$$E(q_n^{il} \partial_i p_m^j) = 0$$

Compte tenu de (A,3), cette relation s'explique :

$$(A,5) \quad E(g^{ij} \partial_j p_n^l \partial_i p_m^k) + E(\gamma^{ij} \partial_j p_{n-1}^l \partial_i p_m^k) = 0$$

Avec  $n = 1$ , on obtient

$$(A,6) \quad E(g^{ij} \partial_j p_1^l \partial_i p_m^k) + E(\gamma^{ij} \partial_i p_m^k) = 0$$

et, en portant dans (A,4) :

$$(A,7) \quad K^{il} = g^{il} - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n E(g^{uv} \partial_u p_1^i \partial_v p_{n-1}^l)$$

Le terme correspondant à  $n = 1$  est nul. Au deuxième ordre en  $\varepsilon$  il reste donc

$$(A,8) \quad \left\{ \begin{array}{l} K^{il} = g^{il} - \varepsilon^2 S^{il} \\ S^{il} = E(g^{uv} \partial_u p_1^i \partial_v p_1^l) = - E \left[ \gamma^{ij} \partial_j p_1^l \right] \end{array} \right.$$

Ainsi se trouve introduit le tenseur de Schwydlar. Il reste à expliciter son expression.

Exprimons que le tenseur  $q_1^{il}$  est conservatif. En deux points quelconques  $x$  et  $y$  nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{p_1^l} (x) = - \partial_i \gamma^{il} (x) \\ \Delta_{p_1^j} (y) = - \partial_a \gamma^{a,b} (y) \end{array} \right.$$

Multiplions membre à membre et passons aux espérances mathématiques.

Posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{ls}(h) = E \left[ p_1^l(x) p_1^s(x+h) \right] \\ R^{il,as}(h) = E \left[ \gamma^{il}(x) \gamma^{as}(x+h) \right] \end{array} \right.$$

nous obtenons

$$(A,9) \quad \Delta^2 T^{ls}(h) = - \partial_{ia} R^{il,as}(h)$$

Introduisons le tenseur  $S^{ls}(h)$  dont la valeur en  $h=0$  est le tenseur de Schwydlar

$$S^{ls}(h) = E \left[ g^{ij} \partial_i p_1^l(x) \partial_j p_1^s(x+h) \right]$$

On a

$$S^{ls}(h) = -\Delta T^{ls}(h)$$

et l'équation (A,9) s'écrit

$$(A,10) \quad \Delta S^{ls}(h) = \partial_{ia} R^{il,as}(h)$$

En désignant par  $\alpha$  la solution de  $\Delta \alpha + \delta = 0$ , on obtient ainsi

$$S^{ls}(h) = \alpha * \partial_{ia} R^{il,as} = - \partial_{ia} \alpha * R^{il,as}$$

et

$$(A,11) \quad S^{ls} = S^{ls}(0) = - \int \partial_{ia} \alpha(\xi) R^{il,as}(\xi) d\xi$$

On retrouve bien l'expression (41) du tenseur de Schwydlar. Mais la démonstration est plus satisfaisante, puisqu'elle n'utilise que le produit de convolution  $\partial_{ij} \alpha * R^{il,jk}$  qui existe, pourvu que la covariance soit régulière à l'origine et décroisse assez vite à l'infini. Dans le chapitre II, les produits de convolution utilisés étaient du type  $\partial_{ij} \alpha * \gamma^{ls}$ , et leur existence n'est pas évidente a priori.

\*

\* \*

A N N E X E B

VARIANCE DE LA PERMEABILITE APPARENTE

Pour obtenir une majoration de la variance  $\frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0\Delta p)^2}$  plus stricte que (85), considérons les variables

$$X(r) = \int_{C_r} \gamma(x) d\theta$$

où l'intégration est faite sur le cercle  $C_r$  de rayon  $r$ . Elles ont comme variance

$$(B,1) \quad C(r) = D^2 [X(r)] = 2\pi \int_0^{2\pi} R(2r \sin \frac{\theta}{2}) d\theta$$

et comme fonction de covariance

$$C(r, r') = 2\pi \int_0^{2\pi} R(\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}) d\theta$$

L'inégalité de Schwarz donne :

$$|C(r, r')| \leq \sqrt{C(r) C(r')}$$

Or, d'après (83), on a :

$$\frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0\Delta p)^2} = \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2 \left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2} \int_{R_0}^{R_1} \int_{R_0}^{R_1} C(r, r') \frac{dr dr'}{r r'}$$

On en déduit la majoration :

$$(B,2) \quad \frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0\Delta p)^2} \leq \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2 \left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2} \left[ \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{C(r)} \frac{dr}{r} \right]^2$$

Pour les fonctions  $R(r)$  usuelles (ergodiques),  $\sqrt{C(r)}$  décroît assez vite, lorsque  $r$  tend vers l'infini, pour que l'intégrale  $\int_{R_0}^{R_1} \frac{\sqrt{C(r)}}{r} dr$  soit convergente. Ainsi, lorsque  $R_0 \rightarrow 0$ , et  $R_1 \rightarrow \infty$ , l'intégrale est équivalente à  $-\log R_0 \sqrt{C(0)} = -2\pi \log R_0 \sqrt{R(0)}$ , et on a :

$$\lim \frac{D^2(Q \Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} \leq \varepsilon^2 \lim \left( \frac{\log \frac{R_0}{R_1}}{\log \frac{R_1}{R_0}} \right)^2 R(0)$$

Or, d'après la première inégalité (85), on a aussi l'inégalité inverse.  
D'où finalement :

$$(B,3) \quad \lim \frac{D^2(Q \Delta p)}{(Q_0 \Delta p)^2} = \lim \left( \frac{\log \frac{R_0}{R_1}}{\log \frac{R_1}{R_0}} \right)^2 R(0)$$

Toutefois, cette limite ne pourra pas, en général, être utilisée dans les applications. La convergence, en effet, a lieu à une allure logarithmique, donc très lente. Tant que  $R_0$  et  $R_1$  ont des valeurs finies, d'ailleurs, la valeur numérique du rapport  $\frac{\log R_0}{\log \frac{R_1}{R_0}}$  dépend du choix des unités.

Pour obtenir des résultats utilisables numériquement, et non plus seulement des limites théoriques, nous étudierons une fonction  $R(r)$  particulière : l'exponentielle de Gauss  $R(0) e^{-\lambda^2 r^2}$ .

Covariance  $e^{-\lambda^2 r^2}$

Soit à évaluer l'intégrale :

$$(B,4) \quad I = \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r} \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr'}{r'} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda(r^2+r'^2-2rr' \cos \theta)} d\theta$$

lorsque  $\lambda R_0^2$  est très petit et  $\lambda R_1^2$  suffisamment grand pour que les termes en  $e^{-\lambda R_1^2}$  soient négligeables. Nous introduirons la fonction auxiliaire

$$(B,5) \quad I(\lambda, \mu) = \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r} \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr'}{r'} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda(r^2+r'^2) + 2\mu rr' \cos \theta} d\theta$$

et nous calculerons la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial \mu} I(\lambda, \mu) = 2 \int_{R_0}^{R_1} \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda(r^2+r'^2) + 2\mu rr' \cos \theta} \cos \theta dr dr' d\theta$$

Elle ne diffère que par des termes en  $R_0^2$  et en  $e^{-\lambda R_1^2}$  de l'intégrale

obtenue en remplaçant  $R_0$  par 0 et  $R_1$  par l'infini.

Donc

$$\frac{\partial}{\partial \mu} I(\lambda, \mu) \neq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(x^2 + y^2) + 2\mu xy \cos \theta} \, dx \, dy$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial \mu} I(\lambda, \mu) \neq 2 \frac{\pi}{\lambda}$$

En intégrant en  $\mu$ , il vient

$$I(\lambda, \mu) = 2 \pi \frac{\mu}{\lambda} + A(\lambda)$$

On obtient  $A(\lambda)$  en faisant  $\mu = 0$  dans (B,5).

$$A(\lambda) = 2 \pi \left[ \int_{R_0}^{R_1} e^{-\lambda r^2} \frac{dr}{r} \right]^2$$

En négligeant des termes en  $e^{-\lambda R_1^2}$ , on peut poser  $R_1 = \infty$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{R_0}^{\infty} e^{-\lambda r^2} \frac{dr}{r} &= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{-\lambda R_0^2 u} \frac{du}{u} \\ &= -\frac{1}{2} (C + \log \lambda R_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda R_0^2)^{2n}}{n n!} \end{aligned}$$

d'après le développement de l'intégré-exponentielle. Négligeant les termes en  $\lambda R_0^2$ , il vient :

$$A(\lambda) = \frac{2\pi}{4} (C + \log \lambda R_0^2)^2$$

(La constante d'Euler  $C$  vaut 0,577 216 ...). Ainsi

$$I(\lambda, \mu) = 2 \pi \left[ \frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{4} (C + \log \lambda R_0^2)^2 \right]$$

et, pour  $\lambda = \mu$  on obtient (toujours en négligeant  $\lambda R_0^2$  et  $e^{-\lambda R_1^2}$ ) :

$$I = 2 \pi \left[ 1 + \frac{1}{4} (C + \log \lambda R_0^2)^2 \right]$$

Avec la même approximation, on a donc

$$(B,6) \quad \frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0\Delta p)^2} = \varepsilon^2 \frac{1 + \left(\frac{C}{2} + \log(R_0\sqrt{\lambda})\right)^2}{\left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2} R(0)$$

Posant

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{C}{2}}$$

(portée de la covariance), on obtiendra

$$(B,7) \quad \frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0\Delta p)^2} = \frac{1 + \left(\log \frac{a}{R_0}\right)^2}{\left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2} \varepsilon^2 R(0)$$

Il est également intéressant d'évaluer la covariance de  $k(0)$  et  $\frac{Q\Delta p}{Q_0\Delta p}$ .

D'après (84), nous devons évaluer l'intégrale

$$\int_{R_0}^{R_1} e^{-\lambda r^2} \frac{dr}{r} \neq -\frac{1}{2} (C + \log \lambda R_0^2) = \log \frac{a}{R_0}$$

D'où :

$$(B,8) \quad \text{Cov} \left( k(0), \frac{Q\Delta p}{Q_0\Delta p} \right) = \frac{\log \frac{a}{R_0}}{\log \frac{R_1}{R_0}} \varepsilon^2 R(0)$$

D'après (B,7) et (B,8), le coefficient de corrélation de la perméabilité à l'origine et de la perméabilité apparente est ainsi :

$$\rho = \frac{\log \frac{a}{R_0}}{\sqrt{1 + \left(\log \frac{a}{R_0}\right)^2}}$$

et la variance liée de la perméabilité apparente est

$$(B,9) \quad \frac{D^2(Q\Delta p)}{(Q_0\Delta p)^2} (1 - \rho^2) = \frac{\varepsilon^2}{\left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2} R(0)$$

Ce résultat ne dépend plus de la portée  $a$  de la covariance. Il s'applique

pourvu seulement que  $R_0$  soit très petit et  $R_1$  relativement grand devant  $a$ .

\*

\* \*

A N N E X E C

ESPERANCE DE LA PERMEABILITE APPARENTE

Pour évaluer l'intégrale I définie en (90), nous utiliserons des développements en série de Fourier.

En premier lieu, nous devons déterminer le développement de la fonction de Green dans la couronne. On suppose l'angle polaire  $\theta'$  de y égal à 0 (le point y est pris sur le premier axe). Toute fonction paire harmonique et régulière dans la couronne est de la forme

$$(C,1) \quad \varphi(x) = A \log r + B + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \left(\frac{r}{R_1}\right)^n + b_n \left(\frac{R_0}{r}\right)^n \right] \cos n \theta$$

En particulier,  $G(x,y) + \frac{1}{2\pi} \log \rho$  admet un développement de ce type.

Posons :

$$(C,2) \quad \varphi(x,y) = G(x,y) + \frac{1}{2\pi} \log \rho$$

Cette fonction  $\Phi(x,y)$  admet un développement de la forme (C,1) avec A, B,  $a_n$  et  $b_n$  fonctions du rayon vecteur  $r'$  de y. Pour déterminer ces fonctions, on doit écrire que  $\Phi$  coïncide avec  $+\frac{1}{2\pi} \log \rho$  sur le contour extérieur ( $r = R_1$ ) et sur le contour intérieur ( $r = R_0$ ). Or  $-\frac{1}{2\pi} \log \rho$  admet lui-même les développements :

$$(C,3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \log \rho &= -\frac{1}{2\pi} \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{r'}{r}\right)^n \cos n \theta && (\text{pour } r' \leq r) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log r' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{r}{r'}\right)^n \cos n \theta && (\text{pour } r' \geq r) \end{aligned} \right.$$

Identifions avec le développement de  $\Phi$  pour  $r = R_1$  et  $r = R_0$ . On obtient :

$$a_n + b_n \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^n = -\frac{1}{2\pi n} \left(\frac{r'}{R_1}\right)^n$$

$$a_n \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^n + b_n = -\frac{1}{2\pi n} \left(\frac{R_0}{r'}\right)^n$$

$$A \log R_1 + B = +\frac{1}{2\pi} \log R_1$$

$$A \log R_0 + B = +\frac{1}{2\pi} \log r'$$

La résolution de ce système conduit à :

$$\phi(x,y) = A(r,r') + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r,r') \cos n\theta$$

$$(C,4) \quad A(r,r') = -\frac{1}{2\pi \log \frac{R_1}{R_0}} \left[ \log r \log r' - \log R_1 (\log r + \log r') + \log R_1 \log R_0 \right]$$

$$A_n(r,r') = -\frac{1}{2\pi n \left[ \frac{R_1^{2n}}{R_0^{2n}} - 1 \right]} \left[ r^n r'^n - R_0^{2n} \left( \frac{r^n}{r'^n} + \frac{r'^n}{r^n} \right) + \frac{R_0^{2n} R_1^{2n}}{r^n r'^n} \right]$$

L'intégrale I que nous devons évaluer se met, selon (C,2) et (90), sous

la forme

$$I = I_1 + I_2$$

avec

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi \log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} dr \int_{R_0}^{R_1} dr' \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \log \rho}{\partial r \partial r'} R(\rho) d\theta$$

(C,5)

$$I_2 = \frac{1}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} dr \int_{R_0}^{R_1} dr' \int_0^{2\pi} R(\rho) \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial r \partial r'} d\theta$$

Calculons d'abord  $I_2$ , en utilisant le développement (C,4). Le terme indépendant de  $\theta$  - notons le  $I_2(0)$  - donne :

$$I_2(0) = - \frac{1}{2\pi \left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2} \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r} \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr'}{r'} \int_0^{2\pi} R(\rho) d\theta$$

On reconnaît l'expression (83) de la variance de la perméabilité apparente, dont le calcul a déjà été effectué.

$$(C,6) \quad I_2(0) = - \frac{D^2(Q\Delta p)}{\varepsilon^2(Q\Delta p)^2}$$

Il reste à évaluer les termes provenant des composantes périodiques de  $\bar{\Phi}(x,y)$ . Pour  $r$  et  $r'$  compris entre  $R_0$  et  $R_1$ , on peut dériver (C,4) terme à terme :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} \sum A_n(r,r') \cos n\theta &= \sum \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} A_n(r,r') \cos n\theta \\ \frac{\partial^2 A_n(r,r')}{\partial r \partial r'} &= - \frac{n}{2\pi (R_1^{2n} - R_0^{2n})} \left[ r^n r'^n + R_0^{2n} \left( \frac{r^n}{r'^n} + \frac{r'^n}{r^n} \right) + \frac{R_0^{2n} R_1^{2n}}{r^n r'^n} \right] \end{aligned} \right.$$

Nous prenons ensuite un nombre  $\alpha$  (par exemple  $\alpha = 2$ ) tel que

$$\frac{1}{R_1^{2n} - R_0^{2n}} \leq \frac{1}{R_1^{2n}} + \alpha \frac{R_0^{2n}}{R_1^{4n}} \quad \text{pour tout } n$$

Avec une erreur inférieure à

$$\frac{4}{2\pi r r'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n} R_0^{2n}}{R_1^{2n}} \approx \frac{4}{2\pi r r'} \left[ \frac{1}{\left(1 - \alpha^2 \frac{R_0^2}{R_1^2}\right)^2} - 1 \right]$$

donc inférieure à une expression de la forme

$$\frac{\beta}{r r'} \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2$$

il est loisible de remplacer la série  $\sum \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} A_n(r, r') \cos n \theta$  par

$$H(r, r', \theta) = \frac{-1}{2\pi r r'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R_1^{2n}} \left[ r^n r'^n + R_0 \left( \frac{r^n}{r'^n} + \frac{r'^n}{r^n} \right) + \frac{R_0^{2n} R_1^{2n}}{r^n r'^n} \right] \cos n \theta$$

On doit ensuite multiplier par  $R(\rho)$  et intégrer en  $r, r'$  et  $\theta$ . L'erreur commise en remplaçant la série par  $H(r, r', \theta)$  est du type

$$\beta \left( \log \frac{R_1}{R_0} \right)^2 \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2$$

donc négligeable si  $R_0$  est petit devant  $R_1$ . Il faut donc évaluer :

$$(C,7) \quad J = \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r} \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr'}{r'} \int_0^{2\pi} H(r, r', \theta) R(\rho) d\theta$$

Mais  $R(\rho)$  se développe en série de Fourier.

$$\left\{ \begin{aligned} R(\rho) &= C_0(r, r') + \sum C_n(r, r') \cos n \theta \\ C_n(r, r') &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R(\rho) \cos n \theta d\theta \end{aligned} \right.$$

$$\text{D'où} \quad \int_0^{2\pi} H(r, r', \theta) R(\rho) d\theta = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n(r, r')}{r r'} \frac{n}{R_1^{2n}} \left[ r^n r'^n + R_0 \left( \frac{r^n}{r'^n} + \frac{r'^n}{r^n} \right) + \frac{R_0^{2n} R_1^{2n}}{r^n r'^n} \right]$$

Cette expression est majorée en valeur absolue par :

$$4 \sum \frac{|C_n(r, r')|}{r r'}$$

D'autre part, l'inégalité de Schwarz, appliquée aux variables

$$\int_{C_r} \gamma(x) \cos n \theta d\theta \quad \text{et} \quad \int_{C_{r'}} \gamma(x) \cos n \theta d\theta \quad (C_r \text{ et } C_{r'} \text{ étant les cercles de rayons}$$

$r$  et  $r'$ ) donne :

$$\left\{ \begin{aligned} |C_n(r, r')| &\leq \sqrt{C_n(r) C_n(r')} \\ C_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R(2r \sin \frac{\theta}{2}) \cos n\theta \, d\theta \end{aligned} \right.$$

Ainsi J est majoré par

$$J \leq 4 \int_{R_0}^{R_1} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{C_n(r) C_n(r')} \frac{dr \, dr'}{r \, r'} = \left[ 2 \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{C_n(r)} \frac{dr}{r} \right]^2$$

Or  $C_n(0) = 0$ , et  $C_n(r)$  possède une décroissance rapide à l'infini (à cause de l'ergodicité), de sorte que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \sqrt{C_n(r)} \frac{dr}{r}$$

existe. J est donc borné, et  $\frac{1}{\log \frac{R_1}{R_0}}$  J tend vers 0 lorsque  $R_0 \rightarrow 0$

ou  $R_1 \rightarrow \infty$ . Finalement  $(C, 6)$  représente la partie principale de la composante  $I_2$  de (C, 5), soit

$$I_2 = - \frac{D^2(Q \Delta p)}{\varepsilon^2(Q_0 \Delta p)^2}$$

### Calculons $I_1$

Les raisonnements sont très analogues. On doit partir du développement (C, 3) de  $\log \rho$ . D'où

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \log \rho}{\partial r} = - \frac{1}{2\pi r} - \frac{1}{2\pi} \sum \frac{r'^n}{r^{n+1}} \cos n\theta \quad (r' < r)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \log \rho}{\partial r} = + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{r^{n-1}}{r'^n} \cos n\theta \quad (r' > r)$$

Cette première dérivée présente en  $r' = r$  la discontinuité :

$$\sum_{r'} = + \frac{1}{2\pi r} + \frac{1}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta$$

En dérivant en  $r'$ , nous introduirons donc la mesure de Dirac :

$$\sum_{r'} \delta(r - r') = + \frac{1}{2\pi r} \delta(r - r') + \frac{1}{\pi r} \delta(r - r') \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta$$

Soit

$$\sum_{r'} \delta(r - r') = \delta(r - r') \delta(\theta) \frac{1}{r}$$

La dérivée seconde  $-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 \log \rho}{\partial r \partial r'}$  est la somme de cette mesure de Dirac et

de la fonction ordinaire de développement :

$$\frac{1}{2\pi} \sum n \frac{r^{n-1}}{r^{n+1}} \cos n\theta \quad (r' < r)$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum n \frac{r^{n-1}}{r'^{n+1}} \cos n\theta \quad (r' > r)$$

On vérifiera comme ci-dessus que cette composante ordinaire apporte à  $I_1$  une contribution qui s'annule pour  $R_0 \rightarrow 0$  ou  $R_1 \rightarrow \infty$ .

Il reste donc, asymptotiquement

$$I_1 = \frac{1}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} dr \int_{R_0}^{R_1} dr' \int_0^{2\pi} R(\rho) \frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\theta) d\theta$$

c'est-à-dire

$$I_1 = R(0)$$

Finalement, nous obtenons  $I$  sous la forme

$$(C,8) \quad I = R(0) - \frac{D^2(Q \Delta p)}{\varepsilon^2(Q_0 \Delta p)^2}$$

ou encore, selon (86)

$$(C,8) \quad I = R(0) \left[ 1 - \left( \frac{\log \frac{R_0}{R_1}}{\log \frac{R_1}{R_0}} \right)^2 \right]$$

Calcul de l'intégrale  $I'$

$$(C,9) \quad I' = \frac{1}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{2\pi} R(r) R(r') \frac{2}{r r'} G(x, y) dr dr' d$$

Le calcul de (C,9) est assez rapide. En effet,  $R(r)$  et  $R(r')$  ne dépendant pas de  $\theta$ , les termes périodiques du développement de  $\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial r'}$  s'annulent à l'intégration, et  $\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial r'}$  peut être remplacé par

$$-\frac{\Lambda}{2\pi \log \frac{R_1}{R_0}} \frac{1}{r r'} + \frac{\Lambda}{r} \delta(r - r') \delta(\theta)$$

(termes non périodiques de  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial r'}$  et  $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 \log \Phi}{\partial r \partial r'}$ )

Il reste ainsi :

$$(C,10) \quad I' = -\frac{\Lambda}{\left(\log \frac{R_1}{R_0}\right)^2} \left[ \int_{R_0}^{R_1} R(r) \frac{dr}{r} \right]^2 + \frac{1}{\log \frac{R_1}{R_0}} \int_{R_0}^{R_1} [R(r)]^2 \frac{dr}{r}$$

G. MATHERON

Février 1966