NOTE GEOSTATISTIQUE N° 67

N-64

LE MILIEU POREUX A DEUX COMPOSANTES

Avril 1966

G. MATHERON

N-64

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 67

LE MILIEU POREUX A DEUX COMPOSANTES

Table des Matières

---++++++---

N O T E   G E O S T A T I S T I Q U E   N° 6 7

LE MILIEU POREUX A DEUX COMPOSANTES

Introduction

Nous nous proposons, dans cette Note, d'étudier la composition des perméabilités dans le cas particulier d'un milieu poreux à deux composantes, caractérisées par des perméabilités scalaires k_1 et k_2. Si $f(x)$ représente la fonction aléatoire en tout ou rien associée, par exemple, à la première composante, la perméabilité scalaire $k(x)$ du milieu est :

$$k(x) = k_1 f(x) + k_2 \left[1 - f(x)\right]$$

Nous supposerons, de plus, qu'il existe une certaine symétrie entre les deux composantes du milieu, en ce sens précis que la loi spatiale de $1 - f(x)$ se déduit de celle de $f(x)$ en échangeant les rôles de $p = E(f)$ et $q = E(1 - f)$, et que ces lois spatiales sont isotropes (invariantes par rotation) ou au moins invariantes par rotation de $\frac{\pi}{2}$. Comme exemple de tels milieux, on peut citer le mot croisé aléatoire, où le plan est quadrillé a priori selon un réseau régulier, et où l'appartenance de chaque carreau à l'une ou l'autre des deux composantes est tirée au sort, indépendamment des autres, selon la loi binomiale de paramètres (p, q). On peut citer également le schéma markovien étudié dans la Note 61, où l'on réalise une partition du plan en polygones convexes aléatoires, à l'aide de droites implantées selon un schéma poissonien, et où l'appartenance de chaque polygone est ensuite tirée au sort, comme dans le cas du mot croisé aléatoire.

Sauf mention du contraire, nous nous limiterons au cas de l'espace à deux dimensions. Dans ce cas, en effet, il existe une certaine symétrie entre perméabilité $k(x)$ et résistivité $h(x) = \frac{1}{k(x)}$, ou encore entre gradient et flux, et cette symétrie jouera un grand rôle dans cette étude. En particulier, si $p = q = \frac{1}{2}$, on est dans le cas où $\frac{k}{k_0}$ et $\frac{h}{h_0}$ ont la même loi spatiale et où, par suite, les règles

$$K = \sqrt{\frac{k_0}{h_0}} \qquad \text{ou} \qquad \log K = \log k_0$$

s'appliquent, comme il a été montré dans la NOTE 66. Pour $p \neq q$, les deux règles ci-dessus ne sont plus équivalentes : nous verrons, en fait, qu'aucune d'elles ne s'applique. Outre le cas particulier $p = q = \frac{1}{2}$, le cas limite d'une composante évanescente $(p = 0)$ pourra, également, être résolu rigoureusement. Entre ces deux cas limites, $p = 0$ et $p = \frac{1}{2}$, nous ne disposerons pas de formule exacte, mais seulement de développements du type de Schwydler, que nous pousserons d'ailleurs jusqu'à l'ordre 4. Il nous restera à tenter de passer de ces développements à des formules entières, soumises naturellement à la condition de coincider pour $p = 0$ et $p = \frac{1}{2}$ avec les résultats exacts connus dans ces deux cas particuliers. Dans une première tentative, nous nous inspirerons de la pondération géométrique. Cette règle (nous le montrerons) exprime que la densité d'énergie consommée possède la même valeur dans les deux composantes : $W_1 = W_2$. Le développement de Schwydler permet de voir qu'en fait W_1 et W_2 diffèrent d'un terme d'ordre 2. La première tentative consistera donc à donner à W_1 et W_2 des expressions aussi simples que possibles (coïncidant avec leur développement arrêté à l'ordre 2) et à en déduire, par intégration, la perméabilité macroscopique K : l'expression obtenue, de type exponentiel, se présentera effectivement comme une généralisation de la règle de la moyenne géométrique.

La deuxième tentative s'inspirera plutôt de la règle $K = \sqrt{\frac{k_o}{h_o}}$. Fixant notre attention, non plus sur les densités d'énergie, mais sur les espérances b_1 et b_2 du gradient dans chacune des deux composantes, nous chercherons à leur donner la forme la plus simple possible compatible avec les développements de Schwydler. Ceci nous conduira à déterminer K comme la racine positive d'une certaine équation du second degré, de sorte que l'expression obtenue sera de type algébrique et contiendra des radicaux. Il nous semble - mais c'est très subjectif - que cette deuxième tentative a plus de chances que la première d'aboutir au résultat exact. Le recours à l'expérience permettra de trancher : il est du reste assez irritant d'en être réduit à invoquer l'expérience pour résoudre un problème de nature purement mathématique, dont la solution par conséquent devrait être construite par voie purement déductive.

Dans un premier paragraphe, nous établirons la règle $K = \sqrt{\frac{k_o}{h_o}}$ dans le cas où $\frac{k}{k_o}$ et $\frac{h}{h_o}$ ont la même loi spatiale : la démonstration sera donnée en toute généralité (mais sans faire appel, comme dans la NOTE 66, aux développements de Schwydler) et son application au milieu à deux composantes nous fournira notre premier cas limite. Nous examinerons ensuite les valeurs moyennes du gradient et de l'énergie dans chacune des composantes, et nous constaterons qu'elles se relient de manière simple à K et à ses dérivées partielles $\frac{\partial K}{\partial k_1}$ et $\frac{\partial K}{\partial k_2}$, d'où résultera également l'équivalence de l'équipartition de l'énergie et de la règle de pondération géométrique. Nous étudierons ensuite le deuxième cas limite, qui est celui d'une composante évanescente $(p = 0)$, et nous établirons enfin, dans un quatrième paragraphe, les développements de Schwydler que nous pousserons à l'ordre 4. Les deux paragraphes suivants seront consacrés aux deux tentatives, mentionnées, ci-dessus, de représenter par une formule entière unique l'ensemble des résultats partiels obtenus. Enfin, dans un dernier paragraphe, nous essayerons de généraliser les résultats précédents au cas d'un espace à un nombre $N \neq 2$ de dimensions : les développements de Schwydler, poussés à l'ordre 3, apparaîtront comme compatibles avec une généralisation convenable du principe de la deuxième tentative, et ceci nous conduira à proposer une règle de pondération de nature algébrique.

I.- REGLE $K = \sqrt{\frac{k_o}{h_o}}$

Soit, dans l'espace à 2 dimensions, un milieu infini caractérisé par une perméabilité $k^{ij}(x)$ aléatoire et stationnaire, dont la loi spatiale est supposée invariante pour les rotations de 90 °, et soient χ et $\partial\overline{\omega}$ une solution stationnaire du système de Darcy :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \chi^i &= - k^{ij}\, \partial_j \overline{\omega} \\ \partial_i\, \chi^i &= 0 \end{aligned} \right.$$

On sait que, dans l'espace à 2 dimensions, une rotation de 90 ° transforme un vecteur conservatif en un vecteur gradient, et réciproquement. Les axes étant orthonormés, les vecteurs :

$$G \left\{ \begin{aligned} G_1 &= - \chi^2 \\ G_2 &= \chi^1 \end{aligned} \right. \qquad \text{et} \qquad F \left\{ \begin{aligned} F^1 &= - \partial_2 \overline{\omega} \\ F^2 &= \partial_1 \overline{\omega} \end{aligned} \right.$$

sont le premier un gradient, le deuxième un flux conservatif. Si h_{ij} est la résistivité, inverse de k^{ij}, la loi de Darcy

$$\partial_j \overline{\omega} = - h_{ij}\ \chi^i$$

montre qu'il existe également une relation linéaire entre F et G. Si l'on désigne par P le tenseur déduit de h_{ij} par rotation de 90 ° (qui possède donc la même loi spatiale que h_{ij}), soit :

$$P = \begin{pmatrix} h_{22} & - h_{12} \\ - h_{21} & h_{11} \end{pmatrix}$$

on obtient, en effet :

$$(2) \qquad \begin{cases} F^{i} = - P^{ij} \; G_{j} \\ \partial_{i} F^{i} = 0 \end{cases}$$

C'est là un deuxième système de Darcy. La perméabilité macroscopique K (qui est un scalaire, puisque la loi spatiale est invariante par rotation de $\frac{\pi}{2}$) a pour valeur

$$K = - \frac{E(\chi)}{E(\partial \varpi)}$$

Elle se déduit de la loi spatiale des k^{ij} par un certain nombre d'opérations liées à la structure du système de Darcy. Les mêmes opérations, effectuées sur la loi spatiale de P^{ij} (qui est la même que celle de h^{ij}) conduisent au rapport $- \frac{E(F)}{E(G)}$, égal à $- \frac{E(\partial \varpi)}{E(\chi)}$, c'est-à-dire à H, à cause de la définition même de F et G et de l'invariance de la loi pour les rotations de 90°. D'où la conclusion :

<u>La perméabilité macroscopique K et la résistivité macroscopique H s'obtiennent, dans un espace à deux dimensions, en effectuant les mêmes opérations sur les lois spatiales de k et de h respectivement.</u>

Posons $k_o = E(k)$ et $h_o = E(h)$ (ce sont des scalaires). Dans le cas particulier où $\frac{k^{ij}}{k_o}$ et $\frac{h_{ij}}{h_o}$ ont la même loi spatiale, on a par conséquent

$$\frac{K}{k_o} = \frac{H}{h_o}$$

c'est-à-dire la règle

$$k = \sqrt{\frac{k_o}{h_o}}$$

Nous avons vu, dans la NOTE 66, que, du fait que $\frac{k}{k_o}$ et $\frac{h}{h_o}$ ont même loi spatiale, cette règle est identique à la règle de pondération géométrique

$$\log K = E\left[\log k\right]$$

et montré que cette règle s'appliquait dans le cas où la matrice $k^{ij}(x)$ possède une loi spatiale log normale.

Soit alors un milieu à 2 composantes caractérisé par une fonction aléatoire en tout ou rien $f(x)$ et une perméabilité scalaire

$$k(x) = k_1 \, f(x) + k_2 \left[1 - f(x)\right]$$

Posant $h_1 = \frac{1}{k_1}$ et $h_2 = \frac{1}{k_2}$, la résistivité est

$$h(x) = h_1 f + h_2 (1 - f)$$

$\frac{k}{k_o}$ et $\frac{h}{h_o}$ ont la même loi spatiale si et seulement si f et $1 - f$ ont la même loi spatiale, ce qui entraîne en particulier l'égalité de $p = E(f)$ et $q = E(1 - f)$, soit

$$p = q = \tfrac{1}{2}$$

Dans ce cas, la perméabilité macroscopique est

(3) $$K = \sqrt{k_1 k_2}$$

Dans le cas général où $p \neq q$, aucune règle simple n'apparaît immédiatement. Toutefois, p et q étant fixés, K est une fonction $K(k_1, k_2)$ de k_1 et k_2. La résistivité H s'obtient en substituant (h_1, h_2) à (k_1, k_2) :

$$H = K(h_1, h_2)$$

Par ailleurs, la règle de similitude $K(\lambda k_1, \lambda k_2) = \lambda K(k_1, k_2)$ montre, en prenant $\lambda = k_1 k_2$, que l'on a aussi

(4) $$k_1 k_2 H = K(k_2, k_1)$$

Ainsi, au facteur $k_1 k_2$ près, la résistivité macroscopique H s'identifie à la perméabilité $K(k_2, k_1)$ du milieu dual, obtenu en attribuant la perméabilité k_2 à la première composante et la perméabilité k_1 à la deuxième.

Cette règle (4) - qui n'est valable que dans l'espace à deux dimensions - jouera un grand rôle dans la suite de cette étude.

II.- VALEURS MOYENNES DU GRADIENT ET DE L'ENERGIE

Soit χ et $\partial\varpi$ le vecteur courant et le gradient caractérisant un écoulement macroscopiquement uniforme dans le milieu à 2 composantes. Nous supposerons (ce qui est toujours loisible)

$$E(\partial_1\varpi) = 1 \qquad E(\partial_2\varpi) = 0$$

d'où résulte

$$E(\chi^1) = -K \qquad E(\chi^2) = 0$$

et nous écrirons le plus souvent $E(\partial\varpi)$ et $E(\chi)$ au lieu de $E(\partial_1\varpi)$ et $E(\chi^1)$.

On sait que, dans ce cas, la valeur moyenne de la densité de l'énergie consommée par les forces de viscosité coincide avec la perméabilité macroscopique K

$$W = -E(\chi^i\,\partial_i\varpi) = -E(\chi^i)\;E(\partial_i\varpi) = K$$

En raison de l'importance des notions énergétiques, il y a a priori un grand intérêt à déterminer les densités W_1 et W_2 d'énergie dans chacune des deux composantes. De fait, nous verrons que la donnée du rapport $\frac{W_1}{W}$ selon lequel l'énergie se répartit entre les deux composantes suffit pour déterminer l'expression de K. Mais il n'y a pas moins d'intérêt à déterminer les espérances b_1 et b_2 du gradient $\partial\varpi$ dans chacune des deux composantes : du rapport b_1/b_2, l'expression de K se déduit également. De fait, les deux tentatives qui termineront cette étude partiront l'une de W_1 et l'autre de b_1. Nous commencerons par le cas le plus simple, qui est celui du gradient.

1/ Espérances du gradient dans les deux composantes

Désignons par

$$(5) \qquad \begin{cases} b_1 = \frac{1}{p}\; E\left[f\,\partial\varpi\right] \\ b_2 = \frac{1}{q}\; E\left[(1-f)\,\partial\varpi\right] \end{cases}$$

l'espérance mathématique conditionnelle du gradient en un point appartenant à la première ou à la deuxième composante, c'est-à-dire les valeurs moyennes de ce gradient dans chacune de ces composantes. Les espérances correspondantes du flux χ sont évidemment

$$\begin{cases} -k_1\,b_1 = \frac{1}{p}\; E\left[f\,\chi\right] \\ -k_2\,b_2 = \frac{1}{q}\; E\left[(1-f)\,\chi\right] \end{cases}$$

Si nous nous imposons la condition habituelle $E(\partial\varpi) = 1$, nous obtenons donc les deux relations

$$(6) \qquad \begin{cases} p\, b_1 + q\, b_2 = 1 \\ p\, k_1\, b_1 + q\, k_2\, b_2 = K \end{cases}$$

qui montrent que K se déduit immédiatement du rapport b_1/b_2. Inversement, le système (6) permet d'exprimer b_1 et b_2 en fonction de K :

$$(7) \qquad \begin{cases} b_1 = \dfrac{K - k_2}{p(k_1 - k_2)} \\[2ex] b_2 = \dfrac{K - k_1}{q(k_2 - k_1)} \end{cases}$$

Exemple

Dans le cas particulier $p = q = \frac{1}{2}$, on a $K = \sqrt{k_1\, k_2}$ d'après le paragraphe précédent. Les relations (7) donnent alors

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}} \\[2ex] b_2 = \dfrac{2\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}} \end{cases}$$

et montrent que le gradient se partage, entre les deux composantes, en raison inverse des racines des perméabilités, c'est-à-dire en raison directe des racines des résistivités. Le flux, qui admet les espérances $k_1\, b_1$ et $k_2\, b_2$ dans les deux composantes, se partage au contraire en raison directe des racines des perméabilités.

2/ Espérances de la densité d'énergie dans les deux composantes.

Avec un gradient d'espérance unité $E(\partial\varpi) = 1$, l'espérance de la densité d'énergie W coincide avec la perméabilité macroscopique K, soit

$$W = K = E\left[k^{ij}\, \partial_i \varpi\, \partial_j \varpi\right]$$

Donnons à la perméabilité régionalisée $k^{ij}(x)$ une variation $\delta\, k^{ij}(x)$ qui soit elle-même une fonction aléatoire ergodique et stationnaire. La solution stationnaire dont le gradient possède une espérance unité reçoit elle-même une variation $\delta \overline{\varpi}$, avec $E\left[\partial_j \delta \overline{\varpi}\right] = 0$.

La variation de l'énergie se présente sous la forme d'une somme de deux termes

$$\delta K = \delta W = E\left[\delta k^{ij} \partial_i \overline{\varpi} \partial_j \overline{\varpi}\right] + 2 E\left[k^{ij} \partial_i \overline{\varpi} \partial_j \delta \overline{\varpi}\right]$$

En fait, le deuxième terme est identiquement nul. En effet :

$$E\left[k^{ij} \partial_i \overline{\varpi} \partial_j \delta \overline{\varpi}\right] = - E\left[\chi^j \partial_j \delta \overline{\varpi}\right] = - E(\chi^j) E\left[\partial_j \delta \overline{\varpi}\right] = 0$$

(la première égalité exprime la loi de Darcy, la deuxième résulte du fait que le flux χ^j est conservatif $\partial_j \chi^j = 0$, et la troisième découle de $E\left[\partial_j \delta \overline{\varpi}\right] = 0$).
Finalement, on obtient

(8) $$\delta K = \delta W = E\left[\delta k^{ij} \partial_i \overline{\varpi} \partial_j \overline{\varpi}\right]$$

Appliquons cette relation capitale au cas du milieu à deux composantes, en faisant varier la perméabilité k_1 de la première composante d'une quantité (constante) δk_1, c'est-à-dire

$$\delta k^{ij}(x) = \delta k_1 g^{ij} f(x)$$

On obtient

$$\delta K = \delta W = \delta k_1 E\left[f \overline{\partial \varpi}^2\right]$$

D'où les relations fondamentales

(9) $$\begin{cases} E\left[f \overline{\partial \varpi}^2\right] = \dfrac{\partial K}{\partial k_1} \\ E\left[(1-f) \overline{\partial \varpi}^2\right] = \dfrac{\partial K}{\partial k_2} \end{cases}$$

Désignons maintenant par W_1 et W_2 les valeurs moyennes, dans chacune des composantes, de la densité d'énergie consommée :

$$W_1 = \frac{1}{p} E\left[f k^{ij} \partial_i \overline{\varpi} \partial_j \overline{\varpi}\right] = \frac{1}{p} k_1 E\left[f \overline{\partial \varpi}^2\right]$$

Il suffit de comparer à (9) pour obtenir

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} W_1 &= \frac{k_1}{p} \frac{\partial K}{\partial k_1} \\ W_2 &= \frac{k_2}{q} \frac{\partial K}{\partial k_2} \end{aligned} \right.$$

Ainsi, la manière dont la densité d'énergie $W = K$ se répartit entre les deux composantes ne dépend que de la fonction $K(k_1, k_2)$, c'est-à-dire de la règle de pondération, et inversement si l'on connaît W_1 en fonction de k_1 et k_2 on peut en déduire K par intégration. La relation évidente

$$W = p\, W_1 + q\, W_2$$

se traduit par l'équation différentielle

$$(11) \qquad K = k_1 \frac{\partial K}{\partial k_1} + k_2 \frac{\partial K}{\partial k_2}$$

qui exprime, comme on sait, la règle de similitude

$$K(\lambda\, k_1 , \lambda\, k_2) = \lambda\, K(k_1, k_2)$$

On voit qu'en dernière analyse la relation énergétique

$$E(\chi^i\, \partial_i \overline{\omega}) = E(\chi^i)\, E(\partial_i \overline{\omega})$$

dont on connaît l'importance dans la théorie générale des milieux poreux, conduit simplement ici à la relation (11), c'est-à-dire au fait, évident par ailleurs, que K doit être une fonction homogène d'ordre 1 en k_1, k_2.

Mais des relations (10) nous allons déduire également certains rapprochements nécessaires entre la règle de pondération et la répartition de l'énergie. Ce sera l'objet des 3 théorèmes suivants :

Théorème 1 (Equivalence de la règle de pondération géométrique et du principe de l'équipartition de l'énergie.). Les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour un milieu à deux composantes (dans un espace à un nombre quelconque de dimensions) :

a) La règle de pondération géométrique $K = k_1^p \; k_2^q$ s'applique.

b) La densité d'énergie consommée a même valeur moyenne dans les deux composantes : $W_1 = W_2 = W$.

- Montrons $a \Longrightarrow b$: il suffit de dériver $K = k_1^p \; k_2^q$ pour obtenir

$$W_1 = \frac{k_1}{p} \frac{\partial K}{\partial k_1} = K = W$$

- Montrons que $b \Longrightarrow a$. De $W_1 = W$ et $W_2 = W$ résulte :

$$\frac{\partial K}{\partial k_1} = p \frac{K}{k_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial K}{\partial k_2} = q \frac{K}{k_2}$$

En intégrant la première équation, on trouve

$$\log K = p \log k_1 + F(k_2)$$

La deuxième équation montre ensuite $F(k_2) = q \log k_2 + C$, et la constante C est nulle, comme on le voit en faisant $k_1 = k_2$.

Ainsi, le principe de l'équipartition de l'énergie et la règle de pondération géométrique sont deux propriétés équivalentes. Nous connaissons du reste un cas particulier où elles sont effectivement vérifiées : c'est celui du milieu à deux dimensions lorsque $p = q = \frac{1}{2}$: on a alors $K = W_1 = W_2 = \sqrt{k_1 k_2}$. Mais, en dehors de ce cas très particulier, nous pouvons dès maintenant pressentir que, dans le cas général $p \neq q$, et même si l'espace a deux dimensions, ces deux propriétés équivalentes ne seront pas vérifiées. En effet, un principe comme l'équipartition de l'énergie se présente sous la forme de l'universalité, et sa validité ne peut pas être liée à une particularité aussi contingente que le nombre N des dimensions de l'espace. Or, dans la NOTE 66, l'étude de l'approximation de Schwydler à l'ordre 2, nous a montré que la règle de pondération géométrique ne peut pas s'appliquer pour $N \neq 2$. Par conséquent, le principe de l'équipartition, qui ne s'applique pas pour $N \neq 2$, n'est probablement pas valable non plus, en général, pour $N = 2$, ni non plus la règle de pondération géométrique. Dans le paragraphe 4, nous pousserons le développement de Schwydler jusqu'à l'ordre 4 (pour $N = 2$) et nous constaterons qu'effectivement la règle de pondération géométrique ne s'applique pas pour $p \neq q$.

Les deux théorèmes suivants, où la moyenne géométrique est remplacée par les moyennes arithmétique et harmonique, se présentent sous une forme analogue à celle du théorème 1, mais leur contenu est nettement moins intéressant.

Théorème 2 Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) la règle de pondération arithmétique $K = p\, k_1 + q\, k_2$ s'applique.

b) le carré du gradient a même valeur moyenne dans les deux composantes

$$\frac{1}{p}\, E\left[f\, \partial\overline{\varpi}^2\right] = \frac{1}{q}\, E\left[(1-f)\, \partial\overline{\varpi}^2\right] = E(\partial\overline{\varpi}^2)$$

c) le gradient $\partial\overline{\varpi}$ est un vecteur constant.

- Montrons a $\Longrightarrow$ b. D'après (9), on a, en effet

$$\frac{1}{p}\, E\left[f\, \partial\overline{\varpi}^2\right] = \frac{1}{p}\, \frac{\partial K}{\partial k_1} = 1 = \frac{1}{q}\, \frac{\partial K}{\partial k_2} = \frac{1}{q}\, E\left[(1-f)\, \partial\overline{\varpi}^2\right]$$

D'où résulte aussi que a $\Longrightarrow$ C, puisqu'on a de plus :

$$E(\partial\overline{\varpi}^2) = 1 = \left[E(\partial\,\overline{\varpi})\right]^2$$

- Par ailleurs C $\Longrightarrow$ a : c'est là un résultat général démontré antérieurement (pour qu'il existe des écoulements à gradient constant , k^{ij} doit être conservatif et la règle de pondération arithmétique s'applique alors).

- Enfin b $\Longrightarrow$ a : de la relation $\frac{1}{p}\frac{\partial K}{\partial k_1} = \frac{1}{q}\frac{\partial K}{\partial k_2}$, à laquelle on adjoint la relation générale $k_1 \frac{\partial K}{\partial k_1} + k_2 \frac{\partial K}{\partial k_2} = K$, on tire sans peine

$$\frac{\partial \log K}{\partial k_1} = \frac{\partial}{\partial k_1} \log\, (p\, k_1 + q\, k_2)$$

et la relation analogue en k_2, d'où a résulte par intégration.

Théorème 3

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) La règle de pondération harmonique $H = p\, h_1 + q\, h_2$ s'applique.

b) Le carré du flux a même valeur moyenne dans les deux composantes.

c) Le flux χ est un vecteur constant.

La démonstration de l'équivalence de ces trois propriétés se fait selon le même schéma que pour le théorème 2, et nous ne la reproduirons pas.

Remarquons que les trois propriétés du Théorème 2 ne sont jamais vérifiées, quel que soit le nombre N des dimensions (sauf si $k_1 = k_2$). En effet, la perméabilité n'est jamais conservative. Par contre les trois propriétés du Théorème 3 sont vérifiées pour $N = 1$, et dans ce cas là seulement. Dans un milieu à une seule dimension, en effet, un flux n'est conservatif que s'il est constant.

III.- CAS D'UNE COMPOSANTE EVANESCENTE.

Nous abordons maintenant notre deuxième cas particulier, qui est celui d'une composante évanescente ($p = 0$). Naturellement, pour $p = 0$ on a $K = k_2$, de sorte que l'intérêt va se concentrer sur l'expression de l'espérance b_1 du gradient et de l'espérance W_1 de l'énergie dans la première composante, lorsque celle-ci est évanescente ($p \longrightarrow 0$). On peut imaginer l'espace entier rempli par la composante de perméabilité k_2 à l'exception d'une sphère unique, de rayon R (arbitraire), où la perméabilité est k_1, et chercher directement l'expression du flux et du gradient. En vue de préparer le dernier paragraphe, nous nous placerons dans un espace à un nombre N quelconque de dimensions. Soient $\varpi_1(x)$ et $\varpi_2(x)$ les expressions de la pression à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. Ce sont des fonctions harmoniques en tout point intérieur à leur domaine de définition ($\Delta\varpi = 0$ en tout point, sauf sur la surface de la sphère). Pour représenter un écoulement de gradient moyen unité parallèle à l'axe des x^1, nous chercherons une solution de la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} \varpi_1(x) &= b_1 x^1 = b_1 r \cos\theta \\ \varpi_2(x) &= x^1 + C \frac{x^1}{r^N} = r\cos\theta + C\frac{\cos\theta}{r^{N-1}} \end{aligned} \right.$$

($r = \sqrt{g_{ij} x^i x^j}$ est le rayon vecteur du point x, θ angle de Ox avec l'axe des x^1). On notera qu'une telle solution est caractérisée par un gradient et un flux constants à l'intérieur de la sphère. A l'extérieur de la sphère, c'est seulement à grande distance (asymptotiquement) que gradient et flux redeviennent constants.

Ecrivons la condition de continuité de la pression, ou de sa dérivée tangentielle, à la traversée de la sphère :

$$b_1 = 1 + \frac{C}{R^N} \tag{12}$$

Exprimons ensuite la continuité de la composante normale du flux :

$$k_1 \frac{\partial \varpi_1}{\partial r} = k_2 \frac{\partial \varpi_2}{\partial r} \qquad \text{en} \quad r = R$$

c'est-à-dire

(13) $$k_1 b_1 = k_2 \left[1 - (N-1) \frac{C}{R^N}\right]$$

De deux équations (12) et (13) nous tirons sans peine

(14) $$b_1 = \frac{N k_2}{k_1 + (N-1)k_2}$$

A l'intérieur de la sphère, le flux est constant et égal à $k_1 b_1$ de sorte que la densité d'énergie W_1 dans la sphère est $k_1 (b_1)^2$, soit :

(15) $$W_1 = k_2 \frac{N^2 k_1 k_2}{\left[k_1 + (N-1)k_2\right]^2}$$

Ces deux formules serviront de points de départ aux tentatives de généralisation qui termineront cette étude.

Cas $N = 2$

Dans l'espace à deux dimensions, auquel nous nous intéressons plus spécialement, les formules (14) et (15) prennent l'aspect très symétrique suivant :

(16) $$\left\{ \begin{aligned} b_1 &= \frac{2 k_2}{k_1 + k_2} \\ W_1 &= \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \; k_2 \end{aligned} \right.$$

IV.- LES DEVELOPPEMENTS DE SCHWYDLER LIMITES A L'ORDRE QUATRE.

Nous nous placerons en premier lieu dans l'espace à N dimensions, et nous chercherons le développement de Schwydler de K, en appliquant la méthode exposée dans la NOTE 66 et en nous limitant à l'ordre 3. (le terme d'ordre 4 sera obtenu par une autre méthode dans le cas particulier où $N = 2$). La perméabilité scalaire, qui est

$$k(x) = k_1 f(x) + k_2 \left[1 - f(x)\right]$$

se met (en posant $k_o = E(k) = p\,k_1 + q\,k_2$, et de même $h_o = E(h) = p\,h_1 + q\,h_2$) sous la forme :

$$(17)\quad \begin{cases} k(x) = k_o\left[1 + \varepsilon\,(f-p)\right] \\ \varepsilon = \dfrac{k_1 - k_2}{k_o} = \dfrac{k_1 - k_2}{p\,k_1 + p\,k_2} \end{cases}$$

Ainsi, $f - p$ joue le rôle de la composante γ de la Note 66. Selon la méthodologie de cette Note, nous devons, partant d'un terme d'ordre 0, $\partial\overline{\omega}_o$ d'espérance unité, construire par approximation successive un gradient B dont l'espérance (différente de l'unité) admet le développement

$$E(B) = 1 + \varepsilon^2\ E(\partial\overline{\omega}_2) + \varepsilon^3\ E(\partial\overline{\omega}_3) + \dots$$

Les coefficients des termes d'ordre 2 et 3 se déduisent de la fonctionnelle (19) de la Note 66. Posant

$$\begin{cases} R_2(\xi_1, \xi_2) = E\left[(f(\xi_1)-p)\ (f(\xi_2)-p)\right] \\ R_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = E\left[(f(\xi_1)-p)\ (f(\xi_2)-p)\ (f(\xi_3)-p)\right] \end{cases}$$

nous obtenons, avec les notations de la note 66 :

$$(18)\quad \begin{cases} E(\partial_1\overline{\omega}_2) = \displaystyle\int g^{i_1u_1}\ g^{i_2 1}\ \partial_{1\,i_1}\ \alpha(x-\xi_1)\partial_{u_1i_2}\ \alpha(\xi_1-\xi_2)\ R_2(\xi_1,\xi_2)\ d\xi_1\ d\xi_2 \\ E(\partial_1\overline{\omega}_3) = \displaystyle\int g^{i_1u_1}\ g^{i_2\,u_2}\ g^{i_3 1}\ \partial_{1\,i_1}\ \alpha(x-\xi_1)\ \partial_{u_1i_2}\ \alpha(\xi_1-\xi_2)\ \partial_{u_2\,i_3}\ \alpha(\xi_2-\xi_3) \\ \qquad R_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\ \xi_1\ d\xi_2\ d\xi_3 \end{cases}$$

(l'indice 1 est muet, mais la convention de sommation s'applique aux indices littéraux). Comme la loi spatiale de f ou de $f-p$ est invariante pour les rotations de 90 °, nous sommes dans les conditions de subisotropie étudiées dans la NOTE 66, et la première relation (18) se réduit, selon la formule (21) de la NOTE 66, à :

$$E(\partial\overline{\omega}_2) = \frac{1}{N^2}\ E\left[(f-p)^2\right] = \frac{1}{N^2}\ pq$$

L'évaluation de $E(\partial\overline{\omega}_3)$ est, de prime abord, plus délicate. Toutefois nous savons que K et $E(\partial\overline{\omega})$ sont invariants pour toute homothétie effectuée sur la loi spatiale. Effectuant une homothétie de module infiniment grand, nous obtenons, à la limite, un milieu totalement aléatoire où l'appartenance à l'une ou l'autre composante de points quelconques, même très voisins (mais distincts) est tirée au sort, pour chacun de ces points, indépendamment les uns des autres. Pour ce milieu $R(\xi_1, \xi_2\, \xi_3)$ est identiquement nulle, sauf si les trois points ξ_1, ξ_2, ξ_3 coincident, auquel cas elle est égale à $E\left[(f-p)^3\right] = qp(q-p)$. Pour une telle fonction, les $\partial_{ij}\alpha$ se réduisent à leur composante de Dirac, et on obtient

$$E(\partial\overline{\omega}_3) = -\frac{1}{N^3}\; pq(q-p)$$

Finalement, donc, nous obtenons le développement :

$$E(B) = 1 + \frac{1}{N^2}\, pq\, \varepsilon^2 - \frac{1}{N^3}\; pq(q-p)\, \varepsilon^3$$

Il faut ensuite utiliser la relation (17) de la NOTE 66, soit :

$$\frac{K}{k_o} = \frac{N}{E(B)} - (N-1)$$

L'inversion de $E(B)$ au troisième ordre en ε est immédiate, et on obtient:

(19) $$\frac{K}{k_o} = 1 - \frac{1}{N}\, pq\, \varepsilon^2 + \frac{1}{N^2}\, pq(q-p)\, \varepsilon^3$$

Au lieu du paramètre $\varepsilon = \dfrac{k_1 - k_2}{k_o}$, qui dépend de p et de q, nous utiliserons un paramètre sans dimension λ, qui ne dépendra plus de p et q, défini par :

(20) $$\lambda = 2\,\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

Il est immédiat que l'on a :

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{1 - (q-p)\,\frac{\lambda}{2}} = \lambda\left[1 + (q-p)\,\frac{\lambda}{2} + (q-p)^2\,\frac{\lambda^2}{4} + \ldots\right]$$

Portant cette expression dans (19), et en nous limitant au troisième ordre, nous obtenons le développement cherché :

$$\frac{K}{k_o} = 1 - \frac{1}{N} pq \; \lambda^2 - \frac{(N-1)}{N^2} \; pq(q-p) \; \lambda^3 \tag{21}$$

Nous réservant de revenir sur le cas général dans le dernier paragraphe de cette étude, nous allons maintenant nous limiter, dans le reste de ce paragraphe et dans les deux suivants, au cas d'un espace à $N = 2$ dimensions.

Cas $N = 2$

Le développement (21), augmenté d'un terme en λ^4 dont nous déterminerons dans un instant le coefficient A, s'écrit :

$$\frac{K}{k_o} = 1 - \tfrac{1}{2} pq \; \lambda^2 - \frac{1}{4} pq(q-p) \; \lambda^3 - A \; \lambda^4 \tag{22}$$

Le principe de symétrie en k et h, dégagé dans le premier paragraphe pour $N = 2$, nous indique que $\frac{H}{h_o}$ admet le même développement limité (22) que $\frac{K}{k_o}$, à condition de remplacer $\lambda = \dfrac{2(k_1 - k_2)}{k_1 + k_2}$ par

$$\lambda' = \frac{2(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2} = \frac{2(k_2 - k_1)}{k_1 + k_2} = -\lambda$$

C'est du reste la raison pour laquelle nous avons substitué λ au paramètre primitif ε. Remplaçant donc λ par $-\lambda$, il vient :

$$\frac{H}{h_o} = 1 - \tfrac{1}{2} \; pq \; \lambda^2 + \frac{1}{4} \; pq(q-p) \; \lambda^3 - A \; \lambda^4 \tag{23}$$

Effectuons ensuite le produit $\frac{K}{k_o} \frac{H}{h_o} = \frac{1}{k_o \, h_o}$. A l'aide de (22) et (23), nous trouvons, à l'ordre 4 :

$$\frac{1}{h_o \, k_o} = 1 - pq \; \lambda^2 - \left[2 \; A - \frac{1}{4} \; p^2 \; q^2 \right] \lambda^4 + \ldots$$

Le terme en λ^3 a disparu (la méthode utilisée ici ne permettrait donc pas de déterminer son coefficient : d'une manière générale, elle permettrait de déterminer, de proche en proche, tous les termes pairs à condition que les termes impairs soient connus). Mais d'autre part, on a directement :

$$\frac{1}{k_o\ h_o} = \frac{k_1\ k_2}{(p\ k_1 + q\ k_2)(q\ k_1 + p\ k_2)} = \frac{1 - \frac{\lambda^2}{4}}{1 - (q-p)^2\ \frac{\lambda^2}{4}}$$

Soit

$$\frac{1}{k_o\ h_o} = 1 - pq\ \lambda^2 - \frac{1}{4}\ pq(q-p)^2\ \lambda^4 + \ldots$$

Par identification des termes en λ^4 de ces deux expressions de $\frac{1}{k_o\ h_o}$ on a donc :

$$A = \frac{1}{8}\ pq \left[pq + (q-p)^2\right] = \frac{1}{8}\ pq(1 - 3pq)$$

D'où finalement le développement poussé à l'ordre 4 :

$$\boxed{\frac{K}{k_o} = 1 - \frac{1}{2}\ pq\ \lambda^2 - \frac{1}{4}\ pq(q-p)\ \lambda^3 - \frac{1}{8}\ pq(1 - 3\ pq)\ \lambda^4 + \cdots} \tag{24}$$

Comparaison avec $\sqrt{\frac{k_o}{h_o}}$

Pour $p = q = \frac{1}{2}$, le terme en λ^3 disparaît, et le développement pair qui subsiste en (24) coincide - d'après la manière même dont nous avons déterminé le coefficient du terme en λ^4 - avec le développement de $\frac{1}{\sqrt{k_o\ h_o}}$. En dehors du cas $p = q$, cette coincidence ne subsiste pas, et par suite la règle $K = \sqrt{\frac{k_o}{h_o}}$ ne s'applique pas. En fait, on trouve immédiatement :

$$\frac{1}{\sqrt{k_o\ h_o}} = 1 - \frac{1}{2}\ pq\ \lambda^2 - \frac{1}{8}\ pq(1 - 3\ pq)\ \lambda^4 + \cdots$$

Les termes en λ^2 et λ^4 sont bien les mêmes qu'en (24), mais le terme en λ^3 est absent. On a

$$K - \sqrt{\frac{k_o}{h_o}} = -2\ k_o\ pq(q-p)\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^3 + \ldots$$

Par conséquent (au moins pour $k_1 - k_2$ petit) $K - \sqrt{\frac{k_o}{h_o}}$ a le signe de

$(p-q)(k_1-k_2)$. Autrement dit, si la composante la mieux représentée est également la plus perméable, la perméabilité macroscopique est supérieure à $\sqrt{\frac{k_o}{h_o}}$, et inversement.

Comparaison avec la moyenne géométrique

Soit

$$K_G = k_1^{\,p} \quad k_2^{\,q}$$

la moyenne géométrique. Cherchons, pour le comparer à (24), le développement en λ de $\frac{K_G}{k_o}$. On a d'abord au quatrième ordre :

$$\log \frac{K_G}{k_o} = p \log \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) + q \log\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) - \log \left[1 -(q-p) \frac{\lambda}{2}\right]$$

$$= - pq \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{6} pq(q-p)\lambda^3 - \frac{1}{16} pq \left[1 +(q-p)^2\right]\lambda^4$$

et on en déduit par passage à l'exponentielle :

$$\frac{K_G}{k_o} = 1 - pq \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{6} pq(q-p) \lambda^3 - \frac{1}{8} pq(1 - 3pq)\lambda^4$$

Les termes pairs coincident encore avec ceux de (24). Mais, s'il y a bien un terme en λ^3, son coefficient est trop faible ($\frac{1}{6}$ au lieu de $\frac{1}{4}$). On a ici (à l'ordre 4) :

$$K - K_G = - \frac{2}{3} \ k_o \ pq(q-p) \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^3$$

L'écart est trois fois plus faible qu'entre K et $\sqrt{\frac{k_o}{h_o}}$, et, en ce sens, la moyenne géométrique est plus proche de la vérité que $\sqrt{\frac{k_o}{h_o}}$. Mais elle ne s'applique que pour $p = q = \frac{1}{2}$. L'écart, par ailleurs, a le même signe que dans le cas précédent : Si la composante la mieux représentée est également la plus perméable, la perméabilité macroscopique K est supérieure à la moyenne géométrique K_G, et inversement.

En définitive, nous avons montré qu'<u>en dehors du cas</u> $p = q = \frac{1}{2}$, <u>la perméabilité n'est donnée ni par la règle de pondération géométrique ni par la règle</u> $\sqrt{\frac{k_o}{h_o}}$, comme du reste des considérations d'ordre général nous l'avaient fait prévoir dans le paragraphe 2. Nous allons maintenant (toujours dans le cas $N = 2$) procéder à deux tentatives successives pour interpréter le développement (24) à l'aide d'une formule entière. Dans la première tentative nous donnerons à la densité d'énergie W_1 une expression aussi simple que possible, et cela nous conduira à une formule de type exponentiel (ce que le théorème d'équivalence démontré au paragraphe 2 permet de comprendre aisément). Dans la deuxième tentative, au contraire, c'est à la valeur moyenne b_1 du gradient que nous attribuerons une expression simple, et ce procédé nous conduira à une formule de type algébrique, qui, à son tour, pourra se généraliser au cas d'un espace à $N \neq 2$ dimensions (ce sera l'objet du dernier paragraphe). La possibilité d'une telle extension (exclue par la formule de type exponentiel de la première tentative) nous incite à penser, en l'absence d'arguments décisifs, que cette formule de type algébrique a plus de chances que l'autre de correspondre à la réalité.

V.- PREMIERE TENTATIVE : REGLE DE TYPE EXPONENTIEL.

Comme nous l'avons indiqué, nous fixerons d'abord notre attention sur la densité d'énergie, donnée par la formule (10).

$$W_1 = \frac{k_1}{p} \frac{\partial K}{\partial k_1}$$

et nous attribuerons une expression aussi simple que possible au rapport

$$\frac{W_1}{W} = \frac{1}{p} \frac{\partial \log K}{\partial \log k_1} .$$

Dans notre premier cas particulier ($p = q$), on avait l'expression simple $\frac{W_1}{W} = 1$. Dans le deuxième cas particulier (composante évanescente, $p = 0$), on avait, d'après la formule (16), et puisque, pour $p = 0$, $k_2 = K = W$:

$$\frac{W_1}{W} = \frac{4\, k_1\, k_2}{(k_1 + k_2)^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{4}$$

Ici, il ne s'agit pas d'un développement limité en λ, mais d'une formule exacte. Généralisant ce résultat, nous allons supposer que $\frac{W_1}{W}$ est un polynome du deuxième ordre en λ.

A partir du développement (24) de Schwydler, que nous écrirons

$$\frac{K}{k_o} = \Phi(\lambda)$$

formons l'expression de W_1 :

$$W_1 = \frac{k_1}{p}\frac{\partial K}{\partial k_1} = k_1\,\Phi(\lambda) + \frac{k_o}{p}\,\Phi'(\lambda)\,k_1\frac{\partial\lambda}{\partial k_1}$$

Remarquant que l'on a

$$k_1\frac{\partial\lambda}{\partial k_1} = \frac{4\,k_1\,k_2}{(k_1+k_2)^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{4}$$

il vient ainsi

(25) $$W_1 = K\left[\frac{1+\frac{\lambda}{2}}{1-(q-p)\frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{p}\left(1-\frac{\lambda^2}{4}\right)\frac{\Phi'(\lambda)}{\Phi(\lambda)}\right]$$

Compte tenu de l'expression (24) de $\Phi(\lambda) = \frac{K}{k_o}$, on obtient facilement le développement de l'expression entre crochets. Du fait que l'on a effectué une dérivation en λ, ce développement doit être arrêté à l'ordre 3 (et non plus à l'ordre 4). On constate que le coefficient du terme en λ^3 s'annule identiquement :

$$W_1 = K\left[1 - \frac{1}{4}\,q(q-p)\lambda^2 + O(\lambda^4)\right]$$

Rien ne prouve, en fait, que le terme en λ^4 s'annule également. Si nous le supposons, néanmoins, conformément au principe d'approximation qui sert de point de départ à cette première tentative, nous sommes conduits à prendre l'équation ci-dessus non plus pour un développement limité, mais pour une expression exacte, soit :

(26) $$W_1 = \frac{1}{p}\,k_1\frac{\partial K}{\partial k_1} = K\left[1 - \frac{1}{4}\,q(q-p)\lambda^2\right]$$

L'équation différentielle (26) peut s'intégrer, et cette intégration va nous conduire à une fonction entière $K(k_1,k_2)$. Posons, (puisque K est une fonction homogène d'ordre 1 en k_1,k_2).

$$K = k_1\,F(\lambda)$$

et déterminons $F(\lambda)$. Compte tenu de la relation déjà obtenue

$$k_1 \frac{\partial \lambda}{\partial k_1} = 1 - \frac{\lambda^2}{4}$$

on a

$$\frac{\partial K}{\partial k_1} = F(\lambda) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) F'(\lambda)$$

et

$$k_1 \frac{\partial K}{\partial k_1} = K \left[1 + \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) \frac{F'(\lambda)}{F(\lambda)}\right]$$

et l'équation différentielle

$$1 + \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) \frac{F'(\lambda)}{F(\lambda)} = p - \frac{1}{4} pq(q-p)\lambda^2$$

qui s'intègre, compte tenu de $F(0) = 1$, sous la forme

$$\log F = pq(q-p)\lambda - \left[q + pq(q-p)\right] \log\left(\frac{1 + \frac{\lambda}{2}}{1 - \frac{\lambda}{2}}\right)$$

ou

$$F(\lambda) = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{q+pq(q-p)} e^{\lambda\, pq(q-p)}$$

D'où l'expression de K :

(27) $$\boxed{K = e^{2pq \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}} \; k_1^{p-pq(q-p)} \; k_2^{q+pq(q-p)}}$$

Telle est la formule de type exponentiel que nous avions annoncée. Elle se met sous la forme

$$K = K_G \left(e^{\lambda} \frac{k_2}{k_1}\right)^{pq(q-p)}$$

avec $\lambda = \dfrac{2(k_1 - k_2)}{k_1 + k_2}$, et K_G désignant la moyenne géométrique. On remarque facilement que, pour $k_1 > k_2$ ou $\lambda > 1$, on a toujours $\dfrac{k_2}{k_1} e^{\lambda} < 1$, d'où résulte $K > K_G$ si $p > q$ et $K < K_G$ si $p < q$.

Ainsi, la formule (27) implique cette conséquence : Si la composante la plus perméable est la plus étendue, la perméabilité macroscopique est supérieure à la moyenne géométrique, et inversement. Ce résultat est très satisfaisant, puisque le développement de Schwydler arrêté à l'ordre 4 nous a déjà permis de l'énoncer, au paragraphe précédent, lorsque $k_1 - k_2$ est petit.

La formule (26) montre également que la densité d'énergie consommée est toujours plus grande dans la composante la plus étendue, que celle-ci soit ou non la plus perméable. La différence $W_1 - W_2$, en effet, a toujours le signe de $p-q$. Et ce résultat (qui n'est démontré, pour des valeurs quelconques de k_1 et k_2, que sous l'hypothèse, adoptée ici, selon laquelle (26) est une formule exacte et non un développement limité) subsiste indépendamment de cette hypothèse lorsque $k_1 - k_2$ est petit. Il exprime le fait que les lignes de courant, là où elles disposent de plus de place pour se déployer, c'est-à-dire dans la composante la plus étendue, se rapprochent davantage du régime linéaire, qui constitue le mode de transmission le plus efficace.

Néanmoins, nous ne pensons pas que la formule de type exponentiel (27) corresponde à la réalité. En effet, le principe qui nous a conduit à cette formule, tel qu'il est exprimé par l'équation (26), soulève deux objections que nous allons formuler sous forme de remarque :

Remarque 1

Effectuant le développement de $\frac{W_1}{K}$, nous avons constaté que le terme en λ^3 s'annulait identiquement. Mais en fait ce n'est pas le moins du monde un argument en faveur de (26). En effet, K et H étant inverses l'un de l'autre ainsi que k_1 et h_1 on a toujours

$$\frac{k_1}{K}\frac{\partial K}{\partial k_1} = \frac{h_1}{H}\frac{\partial H}{\partial h_1}$$

Or, l'espace ayant deux dimensions, K s'exprime à partir de k_1 et k_2 de la même manière que H à partir de h_1 et h_2. Si donc nous posons $\frac{k_1}{K}\frac{\partial K}{\partial k_1} = F(\lambda)$ nous avons aussi : $\frac{h_1}{H}\frac{\partial H}{\partial h_1} = F(-\lambda)$. L'égalité ci-dessus, c'est-à-dire $F(\lambda) = F(-\lambda)$ entraîne donc que $F(\lambda)$ est une fonction paire de λ. Il n'est donc pas étonnant que le terme en λ^3 soit nul : tous les termes impairs le sont, mais on ne peut en conclure aucune indication en faveur de la disparition des termes pairs à partir de l'ordre 4.

Toutefois, pour $p = q = \frac{1}{2}$, l'égalité $W_1 = K$ est rigoureuse. Ainsi le coefficient a_{2n} du terme en λ^{2n} contient $(q-p)$ en facteur. De même, pour $p = 0$, $\frac{W_1}{K}$ se réduit à $1 - \frac{\lambda^2}{4}$. Par suite a_{2n} contient également p en facteur. Jouant sur la symétrie entre W_1 et W_2, on en conclut que a_{2n} est de la forme $p\,q^2(q-p)\;A_{2n}(p,q)$, la fonction A_{2n} étant symétrique en p et q, mais non nécessairement identiquement nulle.

2/ D'autre part, le principe d'approximation exprimé en (26) ne peut pas se généraliser à un espace à $N \neq 2$ dimensions. En effet, considérons le cas de la composante évanescente. Comme ici $K = k_2$, la formule (15) nous donne :

$$\frac{W_1}{K} = \frac{N^2 \; k_1 \, k_2}{\left[k_1 + (N-1)k_2\right]^2} = \frac{1 - \frac{\lambda^2}{4}}{\left[1 - \frac{N-2}{2N}\,\lambda\right]^2}$$

C'est donc seulement dans le cas particulier $N = 2$ que cette expression se réduit à un polynome.

VI.- DEUXIEME TENTATIVE : REGLE DE TYPE ALGEBRIQUE.

Dans cette deuxième tentative, nous allons partir des valeurs moyennes b_1 et b_2 du gradient de la pression dans chacune des deux composantes. Puisqu'il y a, dans l'espace à deux dimensions, une certaine symétrie entre flux et gradient, nous devrons, outre b_1, considérer également la valeur moyenne $-k_1\,b_1$ du flux dans la première composante. Si $E(\partial\varpi) = 1$, $-E(\chi) = K$. Par suite c'est plutôt $\frac{k_1\,b_1}{K}$ qui doit intervenir. En effet, $\frac{k_1\,b_1}{K}$ se déduira de l'expression de b_1 en fonction de k_1 et k_2 en remplaçant k_1 et k_2 par h_1 et h_2. Autrement dit si b_1, grandeur sans dimension, est une fonction $F(\lambda)$, $\frac{k_1\,b_1}{K}$ est $F(-\lambda)$. Ainsi la somme

$$b_1 + \frac{k_1\,b_1}{K}$$

est une <u>fonction paire</u> de λ. Examinons alors comment se présente cette fonction paire dans les deux cas particuliers que nous avons réussi à traiter complètement.

Pour $p = q = \frac{1}{2}$, tout d'abord, on a $K = \sqrt{k_1 k_2}$, et, d'après les relations (7).

$$b_1 = \frac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}$$

Par suite, on trouve dans ce cas

$$b_1 + \frac{k_1}{K} b_1 = 2$$

En deuxième lieu, dans le cas de la composante évanescente $(p = 0)$, on a $K = k_2$ et, d'après (16)

$$b_1 = \frac{2\, k_2}{k_1 + k_2}$$

D'où, à nouveau, dans ce cas

$$b_1 + \frac{k_1}{K} b_1 = 2$$

Le point de départ de notre deuxième tentative consistera à supposer que cette relation subsiste dans le cas général, autrement dit à admettre que l'on a :

$$\boxed{b_1 + \frac{k_1\, b_1}{K} = b_2 + \frac{k_2\, b_2}{K} = 2} \tag{28}$$

On observera que la valeur commune des deux premiers membres de ces relations est obligatoirement égale à 2 : cela résulte immédiatement des relations (6).

Développement limité de b_1

Naturellement, il faut vérifier que le principe exprimé par les relations (28) est compatible avec les développements limités dont nous disposons. Cherchons donc le développement de b_1, à partir de son expression (7).

$$b_1 = \frac{K - k_2}{p(k_1 - k_2)}$$

Nous poserons, comme nous l'avons déjà fait, $\frac{K}{k_o} = \Phi(\lambda)$, cette fonction $\Phi(\lambda)$ étant donnée, au 4ème ordre, par le développement (24). On a alors :

$$b_1 = \frac{\left[1-(q-p)\frac{\lambda}{2}\right]\Phi(\lambda)}{\lambda\ p} - \frac{1-\frac{\lambda}{2}}{\lambda\ p}$$

ou, sous une forme plus commode, que nous utiliserons à nouveau dans le paragraphe suivant,

(29) $$b_1 = 1 - \frac{\left[1-\Phi(\lambda)\right]\left[1-(q-p)\frac{\lambda}{2}\right]}{\lambda\ p}$$

Compte tenu de (24), on obtient sans peine le développement limité suivant, que nous devons arrêter au terme en λ^3 à cause de la division par $\lambda\ p$:

(30) $$b_1 = 1 - \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}\, pq\, \lambda + \frac{1}{8}\, p^2\, q^2\, \lambda^3 + \dots\right]$$

On constate que le terme en λ^2 est identiquement nul. Comme $\frac{k_1\, b_1}{K}$ se déduit de b_1 en changeant λ en $-\lambda$, on voit que l'égalité

$$b_1 + \frac{k_1}{K}\, b_1 = 2$$

est vérifiée au moins jusqu'à l'ordre 3.

Expression de K

On obtiendra l'expression de K en écrivant que les relations (28) sont compatibles avec les relations (6), c'est-à-dire en annulant le déterminant du système :

$$\begin{cases} p\, b_1 + q\, b_2 = 1 \\ p\, k_1\, b_1 + q\, k_2\, b_2 = K \\ \left(1+\frac{k_1}{K}\right)b_1 - \left(1+\frac{k_2}{K}\right)b_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$q(K+k_1)\,(K-k_2) + p(K+k_2)\,(K-k_1) = 0$$

c'est-à-dire l'équation du second degré :

(31) $$\boxed{K^2 - K(p-q)\,(k_1-k_2) - k_1\, k_2 = 0}$$

Seule, naturellement, convient la racine positive de cette équation, d'où par conséquent l'expression cherchée de K :

(32) $$\boxed{K = \tfrac{1}{2}(p-q)\,(k_1 - k_2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(p-q)^2\,(k_1 - k_2)^2 + 4\,k_1\,k_2}}$$

La racine négative de l'équation (31) n'est d'ailleurs pas dépourvue de signification. Elle est égale à $-\frac{k_1\,k_2}{K} = -\,k_1\,k_2\,H$, c'est-à-dire, au signe près, à la perméabilité macroscopique $K(k_2, k_1)$ du milieu dual obtenu en échangeant k_1 et k_2. On peut, si l'on veut, remplacer l'équation (31), par un système reliant les perméabilités $K(k_1, k_2)$ et $K(k_2, k_1)$ des deux milieux en dualité :

$$\begin{cases} K(k_1,k_2) - K(k_2,k_1) = (p-q)\,(k_1 - k_2) \\ K(k_1,k_2)\;K(k_2,k_1) = k_1\,k_2 \end{cases}$$

On peut encore exprimer le même système à l'aide de K et H et des moyennes $k_o = p\,k_1 + q\,k_2$ et $h_o = p\,h_1 + q\,h_2$. On obtient ainsi la relation très symétrique :

(33) $$\boxed{\frac{K - k_o}{\sqrt{k_1\,k_2}} = \frac{H - h_o}{\sqrt{h_1\,h_2}}}$$

Enfin, de (32) on déduit sans peine l'expression de $\frac{K}{k_o}$ en fonction du paramètre habituel $\lambda = \frac{2\,(k_1 - k_2)}{k_1 + k_2}$, soit :

(34) $$\frac{K}{k_o} = \frac{\frac{1}{2}(p-q)\lambda + \sqrt{1 - pq\,\lambda^2}}{1 - (q-p)\,\frac{\lambda}{2}}$$

On vérifiera sans peine que les quatre premiers termes du développement en λ de cette expression coïncident bien avec ceux de la relation (24).

Il convient, maintenant, de procéder à quelques vérifications indispensables sur la formule (32). Sans constituer le moins du monde une démonstration du principe dont nous sommes partis, elles en augmenteront la vraisemblance.

Inégalités $K < k_o$ et $H < h_o$

Il suffit, en fait, de vérifier la première de ces inégalités, qui doivent obligatoirement être satisfaite, la deuxième se déduisant immédiatement de la première en passant au milieu dual.

Si l'on remplace K par k_o dans le premier membre de (31), on obtient :

$$k_0^2 - k_o(p-q)\,(k_1-k_2) - k_1\,k_2 = k_o\,(qk_1 + pk_2\,) - k_1\,k_2$$

c'est-à-dire $k_1\,k_2(k_o\,h_o - 1)$, expression obligatoirement positive. Ainsi k_o, qui est positif, est supérieur à la racine positive de (31), c'est-à-dire à K : $k_o > K$, comme nous voulions le vérifier.

Densité d'énergie.

Il faut également vérifier que les densités W_1 et W_2 d'énergie consommée sont obligatoirement positives. Plutôt que l'expression (32), nous dériverons en k_1 l'équation (31) elle-même, mise sous la forme

$$e^{\log K} - (p-q)\,(k_1 - k_2) - k_1\,k_2\;e^{-\log K} = 0$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{K}\,\frac{\partial K}{\partial k_1}\left[K + k_1\,k_2\,H\right] = k_2\,H + (p-q)$$

et par suite

(35)
$$\frac{\partial K}{\partial k_1} = K\,\frac{k_2 + (p-q)\,K}{K^2 + k_1\,k_2}$$

Vérifions donc que cette expression est toujours positive. Si $p \geqslant q$ cela est immédiat. Pour $p < q$, nous devons comparer $\frac{k_2}{q-p}$, qui est positif, aux racines de (31). Remplaçant donc K par $\frac{k_2}{q-p}$ dans le premier membre de (31), nous trouvons

$$\frac{k_2^2}{(p-q)^2} + k_2\,(k_1 - k_2) - k_1\,k_2 = k_2^2\left[\frac{1}{(p-q)^2} - 1\right] \geqslant 0$$

Ainsi, pour $q > p$, on a $k_2 > (q-p)K$ et $\frac{\partial K}{\partial k_1}$ est bien positif.

Comparaison de W_1 et W_2

De (35), découlent immédiatement les densités moyennes d'énergie consommée dans les deux composantes :

$$\begin{cases} W_1 = \dfrac{k_1}{p}\dfrac{\partial K}{\partial k_1} = \dfrac{K}{p}\,\dfrac{k_1\,k_2 + (p-q)\,K\,k_1}{K^2 + k_1\,k_2} \\ W_2 = \dfrac{k_2}{q}\dfrac{\partial K}{\partial k_2} = \dfrac{K}{q}\,\dfrac{k_1,\,k_2 + (q-p)\,K\,k_2}{K^2 + k_1\,k_2} \end{cases}$$

Supposons, par exemple, $p > q$ et examinons si $W_1 > W_2$, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{k_1\,k_2}{p} + (p-q)\,\frac{K\,k_1}{p} > \frac{k_1\,k_2}{q} + (q-p)K\,\frac{k_2}{q}$$

ou encore ($p-q$ étant positif)

$$K(q\,k_1 + p\,k_2) > k_1\,k_2$$

Or cette dernière inégalité n'est autre que $K > \dfrac{1}{h_o}$, qui est toujours vérifiée. Ainsi, c'est toujours la composante la plus étendue, qu'elle soit ou non la plus perméable, qui possède la plus forte densité moyenne d'énergie consommée. La règle de type exponentiel du paragraphe précédent conduisait à la même conclusion, déjà suggérée d'ailleurs, par les développements limités eux-mêmes.

Comparaison de K et $\sqrt{\dfrac{k_o}{h_o}}$

Si nous remplaçons K par $\sqrt{\dfrac{k_o}{h_o}}$ dans le premier membre de (31), nous obtenons :

$$\frac{k_o}{h_o} - \sqrt{\frac{k_o}{h_o}}\,(k_o - h_o\,k_1\,k_2) - k_1\,k_2$$

On vérifie que cette expression est négative (et par suite $K > \sqrt{\dfrac{k_o}{h_o}}$) lorsque $\dfrac{k_o}{\sqrt{k_1\,k_2}} > \dfrac{h_o}{\sqrt{h_1\,h_2}}$, c'est-à-dire lorsque $(p-q)\,(k_1 - k_2) > 0$, et inversement.

Ainsi K est supérieur à $\sqrt{\dfrac{k_o}{h_o}}$ lorsque la composante la plus étendue est également la plus perméable, et inversement. C'est là un résultat que suggéraient déjà les développements de Schwydler.

Comparaison de K et K_G

Comparons maintenant l'expression (32) de K avec la moyenne géométrique $K_G = k_1^p\ k_2^q$. Portant K_G au lieu de K dans le premier membre de (31), nous obtenons

$$k_1^{2p}\ k_2^{2k} - k_1^{p}\ k_2^{q}\,(p-q)\,(k_1 - k_2) - k_1\,k_2$$

Il s'agit d'étudier le signe de cette expression. Supposons, par exemple, $k_1 > k_2$ (dans le cas contraire, on échange p et q et k_1 et k_2) et posons

$$\mu = \frac{k_1}{k_2} > 1$$

Divisant l'expression ci-dessus par $k_1\,k_2$, nous sommes ramenés à étudier le signe de :

$$\mu^{p-q} - (p-q)\,(\mu^{p} - \mu^{-q}) - 1$$

ou (en multipliant par μ^q) celui de :

$$\mu^p - (p-q)\,(\mu - 1) - \mu^q$$

Comme $\mu > 1$, on pose $\mu = 1 + x$ $(x > 0)$, et cette expression devient :

$$\varphi(x) = (1 + x)^p - (1 + x)^q - (p-q)\,x$$

Les dérivées de cette fonction sont

$$\left\{\begin{aligned} \varphi'(x) &= p(1+x)^{p-1} - q(1+x)^{q-1} - (p-q) \\ \varphi''(x) &= p(p-1)\,(1+x)^{p-2} - q(q-1)\,(1+x)^{q-2} = \frac{pq}{(1+x)^2}\left[(1+x)^q - (1+x)^p\right] \end{aligned}\right.$$

Comme x est positif, la dérivée seconde a le signe de $(q-p)$. $\varphi'(x)$ étant nulle en $x = 0$, on a également le signe de $q - p$, et enfin, comme $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ elle-même possède aussi le signe de $q - p$. Ainsi, pour $q-p > 0$ on a $K_G > K$ et inversement.

Autrement dit, <u>si la composante la plus étendue est également la plus perméable, la perméabilité macroscopique est supérieure à la moyenne géométrique, et inversement</u>. Ici encore, nous généralisons un résultat qui se lisait sur les développements de Schwydler, dans le cas où $k_1 - k_2$ était petit.

Il nous reste maintenant à examiner dans quelle mesure la formule de type algébrique (32) est susceptible d'être généralisée au cas d'un espace à N dimensions.

VII.- EXTENSION AU CAS DE L'ESPACE A N DIMENSIONS.

Le développement limité au troisième ordre en λ de $\frac{K}{k_o}$ a déjà été établi en (21) :

$$\frac{K}{k_o} = 1 - \frac{1}{N} pq \lambda^2 - \frac{(N-1)}{N^2} pq(q-p)\lambda^3 - \ldots.. \tag{36}$$

Il convient d'examiner, tout d'abord, les valeurs moyennes dans les deux composantes, de la densité d'énergie et du gradient.

<u>Expression de la densité d'énergie W_1</u>

Si l'on désigne par $\Phi(\lambda)$ le rapport $\frac{K}{k_o}$, la densité d'énergie est encore donnée par la formule (25), dans l'établissement de laquelle le nombre N des dimensions ne jouait aucun rôle. Il suffit de remplacer, dans cette formule, $\Phi(\lambda)$ par son expression (36) pour obtenir, après quelques calculs sans difficultés, le développement suivant, que nous devons arrêter à l'ordre 2 puisqu'il y a eu une dérivation :

$$W_1 = K\left[1 + \frac{N-2}{N} q\lambda + q(q-p)\left(\frac{1}{2} - 3\frac{N-1}{N^2}\right)\lambda^2 + \ldots\right] \tag{37}$$

Le cas $N = 1$ étant trivial, limitons-nous à $N > 2$. Une différence essentielle avec le cas $N = 2$ se manifeste par la présence d'un terme du premier degré en λ dont le coefficient est toujours positif. Ainsi (au moins pour λ petit, c'est-à-dire pour k_1 pas trop différent de k_2), <u>c'est toujours la composante la plus perméable, qu'elle soit ou non la plus étendue, qui possède la plus forte densité d'énergie</u>. On notera que, pour $N = 2$, on aboutissait à la conclusion exactement inverse : c'était alors la composante la plus étendue qui contenait toujours la plus forte densité d'énergie. Dans ces questions de perméabilités, le nombre des dimensions de l'espace joue apparemment toujours un rôle décisif, et c'est toujours la valeur $N = 2$ qui apparaît comme la valeur critique de part et d'autre de laquelle les conclusions s'inversent.

Ceci dit, l'expression (37) ne semble se prêter à aucune hypothèse simplificatrice simple, et c'est donc plutôt l'expression du gradient que nous devrons prendre comme point de départ.

Espérances conditionnelles du gradient et du flux.

Pour établir le développement limité de l'espérance b_1 du gradient, nous pouvons utiliser directement la formule (29), puisque celle-ci a été établie sans faire d'hypothèse sur N, à condition d'y remplacer $\Phi(\lambda)$ par le développement (36) et de nous limiter au deuxième ordre, à cause de la division par λ. On obtient ainsi, après quelques calculs élémentaires :

(38) $$b_1 = 1 - \frac{1}{N} q \lambda - \frac{N-2}{2 N^2} q(q-p) \lambda^2 + \ldots..$$

Contrairement à ce qui se passait pour $N = 2$, ce développement contient des termes pairs.

Il convient ensuite de calculer l'espérance conditionnelle du flux normée par son espérance a priori, c'est-à-dire l'expression $\frac{k_1 b_1}{K}$. Mais ici, pour $N \neq 2$, nous ne bénéficions plus de la symétrie en k et h et nous ne pouvons pas passer de b_1 à $\frac{k_1 b_1}{K}$ en changeant λ en $-\lambda$. Un calcul direct est nécessaire. On a

$$b_1 \frac{k_1}{K} = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \frac{b_1}{\left[1 - (q-p)\frac{\lambda}{2}\right] \left[1 - \frac{1}{N} pq \lambda^2 - \frac{N-1}{N^2} pq(q-p)\lambda^3 + \ldots\right]}$$

Compte tenu de (38), et en nous limitant par conséquent à l'ordre 2, nous obtenons, après des manipulations sans grande difficulté, mais un peu longues :

(39) $$\frac{k_1}{K} b_1 = 1 + \frac{N-1}{N} \lambda q + \frac{(N-1)(N-2)}{2 N^2} q(q-p)\lambda^2 + \ldots..$$

Expression de K

Si nous comparons les expressions (38) et (39) du gradient et du flux dans la première composante, nous voyons apparaître une relation remarquable, qui se trouve vérifiée au moins jusqu'au deuxième ordre en λ :

(40) $$\boxed{(N-1) b_1 + \frac{k_1}{K} b_1 = N}$$

Il s'agit là d'une généralisation évidente de la relation (28) qui nous a servi de point de départ pour la deuxième tentative dans le cas $N = 2$. D'autre part, dans le cas d'une composante évanescente, ($p = 0$), la formule (14) montre - compte tenu de $k_2 = K$ - que la relation (40) est vérifiée en toute rigueur, et non plus seulement à l'ordre 2.

Pour ces raisons, donc, la relation (40), supposée rigoureusement vérifiée, paraît devoir fournir une bonne base de départ pour une tentative de généralisation. Admettant donc cette relation, nous devons exprimer que les trois équations

$$\begin{cases} p\, b_1 + q\, b_2 = 1 \\ p\, k_1\, b_1 + q\, k_2\, b_2 = K \\ \left(N-1 + \dfrac{k_1}{K}\right) b_1 - \left(N-1 + \dfrac{k_2}{K}\right) b_2 = 0 \end{cases}$$

sont compatibles, ce qui se traduit par la condition

$$q(K-k_2)\left[(N-1)K + k_1\right] + p(K-k_1)\left[(N-1)K + k_2\right] = 0$$

c'est-à-dire, ici encore, par une équation du second degré :

$$\boxed{(N-1)K^2 + K\left[(1-Np)k_1 + (1-Nq)k_2\right] - k_1\, k_2 = 0} \tag{41}$$

Seule, naturellement, peut convenir la racine positive de cette équation, ce qui nous conduit à la formule algébrique :

$$K = \frac{1}{2(N-1)}\left[(Np-1)k_1 + (Nq-1)k_2 + \sqrt{\left[(1-Np)k_1 + (1-Nq)k_2\right]^2 + 4(N-1)k_1k_2}\right] \tag{42}$$

ou encore, en exprimant $\dfrac{K}{k_0}$ à l'aide du paramètre habituel λ :

$$\frac{K}{k_0} = \frac{N-2 + N(p-q)\frac{\lambda}{2} + N\sqrt{1 + \frac{N-2}{N}(p-q)\lambda + \left[\left(\frac{N-2}{2N}\right)^2 - pq\right]\lambda^2}}{2(N-1)\left[1 - \frac{\lambda}{2}(q-p)\right]} \tag{43}$$

A partir de (43) des calculs, assez fastidieux, permettent de retrouver au 3ème ordre en λ le développement (36) dont nous sommes partis.

On notera qu'ici la dualité qui caractérisait le cas $N = 2$ ne subsiste plus. La deuxième racine de l'équation (41), changée de signe, est ici $\frac{k_1 k_2}{N-1} H$, mais elle ne coïncide plus avec la perméabilité $K(k_2, k_1)$ du milieu dual. Par contre, la relation (33) peut se généraliser. En effet, la somme des racines de (41) est :

$$K - \frac{k_1 k_2}{N-1} H = \frac{(Np-1)k_1 + (Nq-1)k_2}{N-1} = k_o - \frac{k_1 k_2}{N-1} h_o$$

D'où la relation suivante, où subsiste une symétrie atténuée entre k et h :

$$\boxed{\frac{K - k_o}{\sqrt{k_1 k_2}} = \frac{1}{N-1} \frac{H - h_o}{\sqrt{h_1 h_2}}} \tag{44}$$

Cette relation est intéressante. Elle donne, en effet, dans le cas particulier du milieu à deux composantes, un sens précis, à la proposition, pressentie dans la NOTE 66, selon laquelle <u>la perméabilité macroscopique K, toujours comprise entre les moyennes harmonique et arithmétique, est d'autant plus proche de la moyenne arithmétique que le nombre N des dimensions de l'espace est plus élevé, et coïncide asymptotiquement avec celle-ci lorsque N tend vers l'infini.</u>

<u>Inégalités $K < k_o$ et $H < h_o$</u>

D'après (44), il suffit de vérifier la première de ces inégalités. Portant k_o au lieu de K dans le premier membre de (41), nous obtenons

$$(N-1)k_o^2 + k_o\left[k_1 k_2 h_o - (N-1)k_o\right] - k_1 k_2 = k_1 k_2(k_o h_o - 1) > 0$$

expression toujours positive, d'où résulte bien $k_o > K$.

La comparaison de la formule (42) avec l'expression $k_o^{1-\frac{1}{N}} \quad h_o^{-\frac{1}{N}}$ proposée dans la NOTE 66 ne semble pas conduire à des résultats simples. Passons donc aux densités d'énergie.

<u>La densité d'énergie W_1</u> - Dérivant en k_1 l'équation (41), on obtient la dérivée partielle sous la forme :

$$\frac{\partial K}{\partial k_1} = K \frac{k_2 + (Np-1)K}{(N-1)K^2 + k_1 k_2} \tag{45}$$

Il faut en premier lieu s'assurer que cette dérivée est toujours positive, puisque les densités d'énergie le sont nécessairement. Si $p > \frac{1}{N}$, cela est évident. Il faut examiner de plus près le cas $1 - Np > 0$, et montrer que, dans ce cas, on a l'inégalité

$$K < \frac{k_2}{1 - Np}$$

Or, substituant $\frac{k_2}{1 - Np}$ dans le premier membre de (41), on obtient

$$k_2^2 \left[\frac{N-1}{(1-Np)^2} + \frac{1 - Nq}{1 - Np} \right] = k_2^2 \frac{N^2 pq}{(1-Np)^2} > 0$$

expression toujours positive, d'où résulte bien l'inégalité cherchée.

De (45) découle immédiatement l'expression des densités d'énergie

$$\begin{cases} W_1 = \dfrac{k_1}{p} \dfrac{\partial K}{\partial k_1} = \dfrac{(Np-1)K k_1 + k_1 k_2}{(N-1)K^2 + k_1 k_2} \dfrac{K}{p} \\[2ex] W_2 = \dfrac{k_2}{q} \dfrac{\partial K}{\partial k_2} = \dfrac{(Nq-1)K k_2 + k_1 k_2}{(N-1) K^2 + k_1 k_2} \dfrac{K}{q} \end{cases}$$

Le signe de $W_1 - W_2$ ne semble pas se rattacher à un critère simple, comme c'était le cas pour $N = 2$.

VIII.- COMPLEMENTS.

Il existe une deuxième manière d'exprimer le principe qui nous a servi de point de départ lors de la première tentative. Cela résulte de la proposition suivante :

Proposition - Dans un milieu à deux composantes, dans l'espace à 2 dimensions, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) On a l'égalité $b_1(1 + \frac{k_1}{K}) = b_2(1 + \frac{k_2}{K}) = 2.$

b) <u>Le gradient a même dispersion relative dans les deux composantes</u>, ou (ce qui est équivalent), on a :

(46) $$\frac{1}{p(b_1)^2} \frac{\partial K}{\partial k_1} = \frac{1}{q(b_2)^2} \frac{\partial K}{\partial k_2}$$

En effet, montrons d'abord a $\Longrightarrow$ b. On a vu, dans le paragraphe VI, que a) entraînait d'une part l'équation du second degré :

$$K^2 - (p-q)(k_1 - k_2) K - k_1 k_2 = 0$$

de l'autre l'expression suivante de la dérivée partielle :

$$\frac{\partial K}{\partial k_1} = \frac{k_2 + (p-q)K}{K^2 + k_1 k_2} K$$

En exprimant $(p-q)K$ à l'aide de l'équation du second degré, on obtient aussi bien :

$$\frac{\partial K}{\partial k_1} = K \frac{K + k_2}{K^2 + k_1 k_2} \frac{K - k_2}{k_1 - k_2} = p\, b_1 \frac{K + k_2}{K^2 + k_1 k_2} K$$

Compte tenu de a), cette relation donne :

(47) $$\frac{1}{p(b_1)^2} \frac{\partial K}{\partial k_1} = \frac{1}{2} \frac{(K + k_1)(K + k_2)}{K^2 + k_1 k_2}$$

Cette expression est symétrique en k_1 k_2, et par suite b) est démontré.

- Montrons maintenant b $\Longrightarrow$ a. De

$$K = k_2 + pb_1(k_1 - k_2) = k_1 + q\, b_2(k_2 - k_1)$$

découle d'abord

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial k_1} = p(k_1-k_2)\,\dfrac{\partial b_1}{\partial k_1} + p\, b_1 \\[2ex] \dfrac{\partial K}{\partial k_2} = q(k_2 - k_1)\,\dfrac{\partial b_2}{\partial k_2} + q\, b_2 \end{cases}$$

de sorte que (46) s'écrit aussi bien :

$$\frac{1}{b_1} - (k_1 - k_2)\,\frac{\partial \frac{1}{b_1}}{\partial k_1} = \frac{1}{b_2} - (k_2 - k_1)\,\frac{\partial \frac{1}{b_2}}{\partial k_2} \tag{48}$$

Mais $\dfrac{1}{b_1}$ et $\dfrac{1}{b_2}$ sont des fonctions homogènes de degré 0 en k_1, k_2, d'où résulte

$$\begin{cases} k_1\,\dfrac{\partial \frac{1}{b_1}}{\partial k_1} + k_2\,\dfrac{\partial \frac{1}{b_1}}{\partial k_2} = 0 \\[2ex] k_1\,\dfrac{\partial \frac{1}{b_2}}{\partial k_1} + k_2\,\dfrac{\partial \frac{1}{b_2}}{\partial k_2} = 0 \end{cases}$$

Compte tenu de ces deux conditions, (48) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial k_1}\left[\frac{k_1}{b_2} - \frac{k_2}{b_1}\right] + \frac{\partial}{\partial k_2}\left[\frac{k_1}{b_2} - \frac{k_2}{b_1}\right] = 0$$

La solution générale d'une telle équation aux dérivées partielles est :

$$\frac{k_1}{b_2} - \frac{k_2}{b_1} = \Phi\left[k_1 - k_2\right]$$

Mais, par ailleurs, cette fonction Φ doit être homogène et de degré 1 en k_1, k_2, elle est donc de la forme $C(k_1-k_2)$, où C est une constante :

(49) $$\frac{k_1}{b_2} - \frac{k_2}{b_1} = C(k_1 - k_2)$$

En passant au milieu dual, c'est-à-dire en changeant k_1 en k_2 et b_1 en $\frac{k_1 b_1}{K}$, on obtient également

$$K\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1}\right) = C'(k_1 - k_2)$$

Ajoutons membre à membre ces deux équations :

$$\frac{k_1 + K}{b_2} - \frac{k_2 + K}{b_1} = (C + C')\ (k_1 - k_2)$$

Or l'expression $\frac{k_1 + K}{b_2}$ est invariante lorsque l'on échange k_1 et k_2.

Dans le milieu dual, en effet, cette expression devient

$$\frac{k_2 + H\, k_1\, k_2}{\frac{k_2\, b_2}{K}} = \frac{k_1 + K}{b_2}$$

Par suite on a nécessairement $C + C' = 0$ et aussi

$$b_1(k_1 + K) = b_2(k_2 + K)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il se pourrait que la relation (46) constitue un meilleur point de départ que (40) pour l'extension à N dimensions. Elle fait, en effet, intervenir des moments d'ordre 2 qui possèdent une signification énergétique immédiate.

Extension à N dimensions.

Admettons donc que la relation(46)subsiste dans l'espace à N dimensions.En reprenant les mêmes raisonnements que dans la deuxième partie de la démonstration précédente,on obtient encore la relation(49),qui ne dépend pas de N.Utilisant ensuite le développement de Schwydler (38),on vérifie la relation (49) à l'ordre 2 (nous ne reproduisons pas ce calcul élémentaire) et on obtient, par identification, la valeur de C, qui est $1 - \frac{1}{N}$. D'où la relation

(50) $$\frac{k_1}{b_2} - \frac{k_2}{b_1} = \frac{N-1}{N}\ (k_1 - k_2)$$

En remplaçant b_1 et b_2 par leurs expressions en fonction de K, k_1 et k_2, on obtient

$$q \frac{k_1}{K - k_1} + \frac{p\, k_2}{K - k_2} + \frac{N - 1}{N} = 0$$

et on vérifie sans peine que cette relation conduit à nouveau à l'équation du second degré écrite en (41). Ainsi, l'équivalence des deux propriétés constatée pour $N = 2$ dans la proposition énoncée ci-dessus subsiste encore dans le cas d'un nombre quelconque de dimensions. (On remarquera que pour $N = 1$ la relation (50) se réduit à $k_1\, b_1 = k_2\, b_2$ et se trouve vérifiée trivialement).

Il ne reste plus, maintenant, qu'à trouver une raison vraiment satisfaisante pour expliquer que le gradient a même dispersion relative dans les deux composantes...

G. MATHERON.

3 Mai 1966.