N-67
Avril 1967

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 71

Le Krigeage en representations transitives.

Nous nous proposons, dans cette Note, d'adapter le procede du krigeage aux representations transitives. Les equations auxquelles nous parviendrons sont pratiquement equivalentes à celles du krigeage intrinsèque, la fonction intrinsèque $\gamma(h)$ cèdant ici la place au covariogramme transitif $g(h)$. Ce resultat n'est pas dêpourvu d'une certaine importance methodologique. On pouvait craindre, en effet, que les methodes usuelles de krigeage ne soient inapplicables au cas des fonctions aleatoires non stationnaires. En fait, le $\gamma(h)$ que l'on obtient, en appliquant les methodes de calcul habituelles dans le cas d'une variable regionalisee non-stationnaire, possède, en realite, la signification d'un covariogramme transitif. Il est donc equivalent d'utiliser les methodes de krigeage intrinsèque avec un tel $\gamma(h)$, ou celles du krigeage transitif avec le $g(h)$ correspondant. Celà revient à dire que les methodes de krigeage telles que nous les utilisons en pratique, avec les $\gamma(h)$ construits selon les procedes habituels, conservent toute leur valeur, meme si la variable regionalisee n'est pas stationnaire.

Nous examinerons successivement le krigeage discontinu, puis le krigeage continu et ce que l'on pourrait appeler le cokrigeage, c'est à dire l'estimation d'une variable $f_1(x)$ à partir des valeurs connues prises par une autre variable $f_2(x)$ dans un domaine donne. Nous indiquerons, pour terminer une application possible au probleme dit de la deconvolution des sondages radiocarottes, c'est à dire de la reconstitution des teneurs en Uranium à partir des radioactivites que l'on observe dans les sondages.

I- Krigeage discontinu.

Soit f(x) une variable regionalisee,et $g = f * \check{f}$ son covariogramme transitif, defini par :

$$g(h) = \int f(x)\ f(x+h)\ dx$$

On suppose connues les valeurs $f(y+x_1)$,...$f(y+x_n)$ prises par f(x) en n points de prelevements $y+x_1$,...$y+x_n$,et on cherche à estimer la valeur f(y) de f en point y ,ou,plus generalement, une moyenne ponderee de la forme :

$$\text{(I)} \qquad Q(y) = \int f(x)\ \varphi(x-y)\, dx = \int f(x+y)\ \varphi(x)\, dx$$

φ etant une fonction de prelevement donnee (il n'est pas necessaire de la supposer de somme unité).On va prendre un estimateur lineaire de la forme :

$$Q^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ f(y+x_i)$$

et determiner les coefficients λ_i par la condition de rendre minimale l'integrale :

$$\text{(2)} \qquad I = \int [\ Q(y) - Q^*(y)\ ]^2\, dy$$

Cette integrale I jouera le rôle d'une variance d'estimation.On voit que ce procede consiste à rendre minimale l'erreur moyenne,le terme "moyenne" se rapportant ici,non pas à une esperance mathematique, mais à l'ensemble des positions que le système de points $(y, y+x_1, \dots, y+x_n)$ occupa dans l'espace lorsqu'on le deplace dans son ensemble sans le deformer (translation y).Explicitons I :

$$I = \iiint f(x+y)\,\varphi(x)\,f(x'+y)\,\varphi(x')\,dx\,dx'\,dy$$

$$-2\sum_i \lambda_i \iint f(y+x_i)\,f(y+x)\,\varphi(x)\,dx\,dy$$

$$+\sum_{ij} \lambda_i\lambda_j \int f(y+x_i)\,f(y+x_j)\,dy$$

Il vient donc :

$$(3) \qquad I = \langle g, \varphi * \check{\varphi} \rangle - 2\sum_i \lambda_i \int \varphi(x)\,g(x-x_i)\,dx + \sum_{ij} \lambda_i\lambda_j\, g(x_i - x_j)$$

Cette expression est minimale lorsque les λ_i verifient le système :

$$(4) \qquad \sum_j \lambda_j\, g(x_i - x_j) = \int \varphi(x)\, g(x - x_i)\,dx$$

et la valeur minimale correspondante de I est :

$$(5) \qquad I_o = \langle g, \varphi * \check{\varphi} \rangle - \sum_i \lambda_i \int \varphi(x)\,g(x-x_i)\,dx$$

Le système (4) ne differe des equation habituelles du krigeage intrinsèque que par l'absence de la condition de normalisation

et du multiplicateur de Lagrange qu'elle fait apparaitre. Du point de vue pratique, cette difference ne joue pas un grand rôle, et le système (4) peut etre regardé comme equivalent au système que l'on obtient dans le cadre de la théorie intrinsèque.

<u>Remarque</u> L'identification est encore meilleure si au lieu d'un schema intrinsèque, nous prenons en consideration une fonction aleatoire f(x) d'esperance nulle :

$$E\left[f(x)\right] = 0$$

de variance a priori finie K(0) et de covariance :

$$K(h) = E\left[f(x)\,f(x+h)\right]$$

On doit alors minimiser la variance de $Q(y) - \overset{*}{Q}(y)$,qui est :

$$E\left[\left(\varphi(y)-\varphi^*(y)\right)^2\right] = \iint K(x-x')\ \varphi(x)\ \varphi(x')\,dx\,dx'$$

$$-2\sum_i \lambda_i \int K(x-x_i)\ \varphi(x)\,dx \quad + \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j\ K(x_i - x_j)$$

Ce minimum est atteint avec des coefficients λ_i verifiant :

(4)'
$$\sum_j \lambda_j\ K(x_i - x_j) = \int K(x-x_i)\ \varphi(x)\,dx$$

et la variance minimale correspondante est :

(5)'
$$D^2\left[\varphi(y)-\varphi^*(y)\right] = \ <K, \varphi * \check{\varphi}> \ - \sum_i \lambda_i \int K(x-x_i)\ \varphi(x)\,dx$$

Il suffit de remplacer la covariance $K(h)$ par le covariogramme transitif $g(h)$ pour retrouver les equations (4) et (5).On voit que, dans cette analogie, on passe du transitif à l'aleatoire stationnaire d'ordre deux en diluant dans l'espace entier la variable regionalisee $f(x)$ - ce qui implique la condition $E\left[f(x)\right] = 0$ -et en remplaçant l'integration dans l'espace par un passage à l'esperance mathematique.

II-Krigeage continu.

Nous nous proposons toujours d'estimer l'integrale $Q(y)$ definie en (I),mais cette fois nous connaissons les valeurs prises par $f(x)$ sur un ensemble infini de points,que nous designeronspar V_y (translate d'un ensemble V donne dans une translation y : l'idee est ici encore d'imprimer une translation y à l'ensemble constitue par le domaine où les valeurs de f sont connues et la zone que l'on cherche à estimer).On forme alors un estimateur du type :

$$\overset{*}{Q}(y) = \int_V \lambda(x)\ f(y+x)\,dx = \int_{V_y} \lambda(x-y)\ f(x)\,dx$$

où $\lambda(x)$ represente une fonction nulle en dehors de V qu'il s'agit de determiner. Considerons donc le carré de la difference Q(y) - $Q^*(y)$,et integrons en y, ce qui donne :

$$\begin{aligned} I &= \int [\varphi(y) - \varphi^*(y)]^2 dy \\ &= \iiint f(x+y)\, \varphi(x)\, f(x'+y)\, \varphi(x')\, dx\, dy\, dx' \\ &\quad - 2 \iiint f(x+y)\, \varphi(x)\, f(x'+y)\, \lambda(x')\, dx\, dy\, dx' \\ &\quad + \iiint f(x+y)\, \lambda(x)\, f(x'+y)\, \lambda(x')\, dx\, dx'\, dy \\ &= \langle g, \varphi * \check{\varphi} \rangle - 2 \iint g(x-x')\, \varphi(x)\, \lambda(x')\, dx\, dx' \\ &\quad + \iint g(x-x')\, \lambda(x)\, \lambda(x')\, dx\, dx' \end{aligned}$$

Pour exprimer que cette integrale est minimale,nous donnons à $\lambda(x)$ une variation $\delta\lambda(x)$ nulle en dehors de V, et nous exprimons que la varietion de I est nulle.On obtient ainsi une equation integrale qui est une simple transposition de (4) :

(4)'' $$\int_V \lambda(x)\, g(x-x')\, dx = \int \varphi(x)\, g(x-x')\, dx \qquad (\forall x' \in V)$$

et qui doit etre verifiée <u>pour tout point x' appartenant à V</u>.La valeur minimale de l'integrale I,qui represente l'erreur associee à ce krigeage, est alors :

(5)'' $$I_0 = \langle g, \varphi * \check{\varphi} \rangle - \iint g(x-x')\, \varphi(x)\, \lambda(x')\, dx\, dx'$$

III-Cokrigeage.

Nous nous donnons maintenant une coregionalisation à deux composantes $f_1(x)$ et $f_2(x)$,et son covariogramme transitif matriciel :

(6) $$g_{ij}(h) = \int f_i(x)\, f_j(x+h)\, dx \qquad (i,j = 1,2)$$

Nous nous proposons d'estimer une moyenne ponderee $Q_1(y)$ de la forme :

$$Q_1(y) = \int f_1(x)\,\varphi(x-y)\,dx = \int f_1(x+y)\,\varphi(x)\,dx$$

à partir des valeurs supposees connues prises dans un domaine V_y par la deuxième variable $f_2(y)$. Comme ci-dessus, on va chercher à former un estimateur du type :

$$(7)\qquad Q_1^*(y) = \int_V \lambda(x)\, f_2(x+y)\,dx = \int_{V_y} \lambda(x-y)\, f_2(x)\,dx$$

où $\lambda(x)$ est une fonction identiquement nulle à l'exterieur de V, et qu'il va s'agir de determiner. Pour celà, on introduit l'integrale :

$$I = \int [\,Q_1(y) - Q_1^*(y)\,]^2\,dy$$
$$= \langle g_{11}, \varphi * \check{\varphi} \rangle - 2 \iint g_{12}(x'-x)\,\varphi(x)\,\lambda(x')\,dx\,dx'$$
$$+ \iint g_{22}(x'-x)\,\lambda(x)\,\lambda(x')\,dx\,dx'$$

On exprime ensuite que cette integrale est minimale, en ecrivant que la variation de I est nulle pour toute variation $\delta\lambda(x)$ identiquement nulle à l'exterieur de V. On obtient ainsi le système (toujours le meme) :

$$(4)''' \qquad \int_V g_{22}(x'-x)\,\lambda(x)\,dx = \int g_{12}(x'-x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (\forall x' \in V)$$

qui doit etre vérifié pour tout x' appartenant à V. La valeur minimale correspondante de l'integrale I est :

$$(5)''' \qquad I_0 = \langle g_{11}, \varphi * \check{\varphi} \rangle - \iint g_{12}(x'-x)\,\varphi(x)\,\lambda(x')\,dx\,dx'$$

<u>Cas particuliers.</u> I/ On cherche à estimer la valeur prise par f_1 en un point y, soit $Q_1(y) = f_1(y)$. La fonction φ est remplacee par la mesure de Dirac, et on obtient :

$$\begin{cases} \int_V g_{22}(x'-x)\,\lambda(x)\,dx = g_{12}(x') & (\forall x' \in V) \\ I_0 = g_{11}(0) - \int g_{12}(x)\,\lambda(x)\,dx \end{cases}$$

g-Le domaine V est identique à l'espace entier, autrement dit les valeurs de le deuxième variable f_2 sont connues partout. On obtient alors des équations de convolution :

$$\begin{cases} g_{22} * \lambda = g_{12} * \varphi \\ I_0 = \langle g_{11}, \varphi * \check{\varphi} \rangle - \langle g_{12}, \lambda * \check{\varphi} \rangle \end{cases}$$

IV-Application à la déconvolution des sondages radiocarottes

I)/ Methode de Coulomb-Grammakov.

Da ns un gisement d'Uranium, designons par :

- $f_0(x)$ la teneur en Uranium au point x
- $f_1(x)$ la teneur en radium au point x
- $f_2(x)$ la radioactivité que l'on pourrait mesurer au point x

Les deux variables $f_0(x)$ et $f_1(x)$, considerées comme des variables aleatoires, sont supposees lognormales et fortement correlées; le coefficient de correlation, cependant, n'est pas égal à l'unité, de sorte qu'il n'y a pas de relation fonctionnelle entre f_0 et f_1. La courbe de regression donnant la valeur probable de la teneur en U en fonction de la teneur en Ra est une droite en coordonnees logarithmiques, mais en general ce n'est pas une droite en coordonnees arithmetiques.

Au contraire, f_1 et f_2 sont reliees par un operateur lineaire. L'emission radioactive du point x est, en effet, proportionnelle à la teneur $f_1(x)$ de ce point en radium, et s'amortit, en fonction de la distance r, selon une loi en $\frac{1}{r^2} e^{-\mu r}$. Designons par $\alpha(x)$ cette fonction d'amortissement, avec $r = |x|$, soit :

$$\alpha(x) = \frac{1}{r^2} e^{-\mu x} \tag{8}$$

La radioactivite $f_2(y)$ que l'on pourrait observer en un point y est alors une moyenne, ponderée par la fonction d'amortissement $\alpha(x-y)$, des teneurs $f_1(x)$ en radium de tous les points x du gisement, soit :

$$f_2(y) = \int \alpha(x-y)\, f_1(x)\, dx \tag{9}$$

(En fait, cette fonction $\alpha(x)$ ne serait vraiment de la forme (8) que s'il etait possible de faire des observations ponctuelles. Du fait que les sondes utilisees possedent leurs caracteristiques geometriques propres, la veritable fonction de ponderation α que l'on doit utiliser dans l'equation (9) est quelque peu plus compliquée que (8). Mais nous n'aurons pas à tenir compte de cette difficulte.)

Si donc l'on connaissait les radioactivites $f_2(y)$ en tous les points du gisement, il suffirait de resoudre l'equation integrale (9) c'est à dire de deconvoluer f_2 pour reconstituer la teneur $f_1(x)$ en radium en tous les points x du gisement. Il suffirait ensuite d'utiliser la regression de f_0 en f_1 pour obtenir les valeurs probables de la teneur en U en chaque point de l'espace.

Mais naturellement, on ne connait pas $f_2(y)$ en tous les points du gisement. On connait seulement les profils des radioactivites mesurees le long d'un nombre fini n de sondages verticaux. Le problême que l'on se pose alors consiste à reconstituer le profil des teneurs en radium à partir du profil des radioactivites.

Ce problême n'est pas soluble, en general (il est indetermine) à moins que nous n'introduisions des hypothèses supplementaires : l'hypothèse que l'on fait dans la methode de Grammakov, et dans la methode qui en derive mise au point par Coulomb au C.E.A., consiste à supposer que les teneurs en radium restent constantes dans les plans horizontaux (au moins au voisinage de chaque sondage).

A partir de maintenant, nous utiliserons des notations explicites, en designant par $(x,y,z,)$ les coordonnees d'un point de l'espace. L'hypothèse de Grammakov et de Coulomb consiste donc à admettre que la teneur en radium est une fonction $f_1(z)$ de la seule coordonnee z. La radioactivite devient alors une fonction $f_2(z)$ constante egalement dans les plans horizontaux (au moins au voisinage de chaque sondage). L'equation (9) qui representait une convolution dans l'espace à 3 dimensions, cède alors la place à l'equation plus simple :

$$\text{(II)} \qquad f_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi(\zeta - z)\, f_1(\zeta)\, d\zeta$$

qui represente une convolution dans l'espace à une seule dimension. La fonction de ponderation à une seule variable $\varpi(z)$ se deduit très simplement de la fonction d'amortissement initiale $\alpha(x,y,z,)$ à trois variables, selon la formule :

$$\text{(I2)} \qquad \varpi(z) = \iint \alpha(x,y,z)\, dx\, dy$$

L'operation (I2) permettant de passer de α à ϖ est une <u>montee</u> d'ordre deux. Si α est de la forme (8), on trouve, en passant en coordonnées polaires :

$$\varpi(z) = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\rho^2+z^2}\, \rho\, d\rho$$

ρ designant le rayon vecteur $\sqrt{x^2 + y^2}$ du plan des (x,y), soit encore en prenant $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$$\text{(I3)} \qquad \varpi(z) = 2\pi \int_z^{\infty} e^{-\mu r}\, \frac{dr}{r}$$

Ainsi, la forme (8) de la fonction d'amortissement conduit à une fonction <u>integro-exponentielle</u> pour la fonction de pponderation ϖ . Mais nous n'aurons pas besoin de specifier la forme de ces fonctions.

Il est possible de resoudre une equation de convolution telle que (II), soit en passant par une transformation de Laplace, soit en la discretisant et en resolvant le système de n equations lineaires à n inconnues ainsi obtenu. Tel est le principe de la methode de Coulomb Grammakov. La solution de (II) se presente sous la forme :

$$f_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(\zeta - z)\, f_2(\zeta)\, d\zeta \tag{I4}$$

avec une fonction $\lambda(z)$ que l'on sait construire. Il reste ensuite à utiliser la regression de f_0 en f_1 pour transformer le profil des ~~XX~~ teneurs en radium en un profil de teneurs probables en Uranium.

Cette methode est inattaquable dans son principe. En ce qui concerne sa mise en oeuvre dans les applications, un certain nombre de questions ou d'objections viennent à l'esprit :

1-Connait-on reellement la fonction d'amortissement α , et, en particulier, si elle est bien de la forme (8), est-il legitime de considérer le coefficient d'absorption μ comme une constante ?

2-~~Quelle sorte de perturbation va apporter à ce schema une variabilite laterale des teneurs~~ Que se passe-t-il si les couches ne sont pas horizontales, mais presentent un pendage oblique ?

Nous n'examinerons pas ces deux objections de caractère technique. Par contre, nous nous interesserons aux deux suivantes :

3-Quelle sorte de perturbation va apporter à ce schema une variabilite laterale des teneurs? De fait, il n''est pas exclu que les teneurs se modifient aussi rapidement dans les plans horizontaux que selon la direction verticale.Dans ce cas,le probleme n'admet plus de solution rigoureuse,mais seulement une solution optimale au sens des moindres carrés.

4-De toutes manières,on s'interesse aux teneurs en U et non en Ra. Au lieu de reconstituer d'abord f_1 à partir de f_2 par une methode rigoureuse, puis f_0 à aprtir de f_1 par une methode de regression, n'est-il pas possible de reconstituer directement f_0 à partir de f_2 par une methode de moindres carres?

Dans le cas d'une regression lineaire de f_0 en f_1 ,cette methode directe serait parfaitement legitime,et n'entrainerait la perte d' aucune information.Mais la regression lognormale n'est pas lineaire en general. La methode que nous proposons,qui est un cokrigeage de f_0 par f_2 ,entrainera donc une certaine deterioration de notre information, puisque nous remplaçons implicitement la regression curviligne,qui est la meilleure possible,par une simple regression lineaire. Cette substitution est cependant necessaire,si nous voulons rester dans le cadre de l'algèbre lineaire, et l'on peut penser, sous reserve de verification, qu'elle n'aura pas de consequences trop graves. (Dans le meme ordre d'idee, on sait que D.G.Krige a ete conduit,pour le gisement d'or du Rand,à substituer un simple krigeage lineaire à son estimateur lognormal,theoriquement le meilleur possible,mais lourd à mettre en oeuvre en pratique.Il considère comme très faible la perte de precision qui en resulte.)

2°/ Methode du cokrigeage transitif.

La methode que nous proposons va donc consister à former directement un estimateur lineaire $f_0^*(z)$ de la teneur $f_0(z)$ au point de cote z d'un sondage en fonction des radioactivites $f_2(z)$ mesurees le long de ce sondage :

(I5) $$f_o^*(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(\zeta - z)\, f_2(\zeta)\, d\zeta$$

Pour determiner la fonction $\lambda(z)$, nous ecrirons que l'expression:

(I6) $$I = \sum \int_{-\infty}^{+\infty} [f_o(z) - f_o^*(z)]^2\, dz$$

est minimale. Le signe $\sum$ signif ie que l'on fait la somme de toute s les integrales correspondant à chacun des sondages etalonnes (pour lesquels on connait à la fois $f_o(z)$ et $f_2(z)$.)

Explicitons l'expression de I, en tenant compte de (I5). Il vient :

$$I = \sum \Big\{ \int [f_o(z)]^2 dz - 2 \iint f_o(z)\, \lambda(\zeta - z)\, f_2(\zeta)\, dz\, d\zeta + \iiint \lambda(\zeta - z)\, \lambda(\zeta' - z)\, f_2(\zeta)\, f_2(\zeta')\, d\zeta\, d\zeta'\, dz \Big\}$$

Introduisons donc la matrice des covariogrammes, qui se presente sous la forme habituelle, à ceci près que les expressions obtenues doivent etre sommees sur les differents sondages qui servent d'etalon.

$$\begin{cases} g_{oo}(h) = \sum \int_{-\infty}^{+\infty} f_o(z)\, f_o(z+h)\, dz \\ g_{o2}(h) = \sum \int_{-\infty}^{+\infty} f_o(z)\, f_2(z+h)\, dz \\ g_{22}(h) = \sum \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z)\, f_2(z+h)\, dz \end{cases}$$

Ces fonctions peuvent etre construites à partir des donnees experimentales. L'integrale I à minimiser s'ecrit :

$$I = g_{oo}(0) - 2 \int g_{o2}(h)\, \lambda(h)\, dh + \iint g_{22}(u-v)\, \lambda(u)\, \lambda(v)\, du\, dv$$

La fonction λ et la valeur minimale I_o de I sont alors données par le système habituel :

$$(I7) \quad \begin{cases} \int_{-\vartheta}^{+\vartheta} g_{22}(u-v)\,\lambda(u)\,du = g_{02}(v) \\ I_0 = g_{00}(0) - \int_{-\vartheta}^{+\vartheta} g_{02}(h)\,\lambda(h)\,dh \end{cases}$$

Il s'agit d'une equation de convolution que l'on pourra resoudre, numeriquement, à l'aide des procedes habituels de discretisation.

L'<u>erreur</u> commise sur l'estimation d'une <u>teneur individuelle</u> peut et re evaluee à partir de I_0 .Si, en effet $L = \sum L_i$ represente la longueur utile cumulee de tous les sondages etalons, la variance-valeur moyenne de l'erreur quadratique- a pour valeur :

$$(I8) \qquad \sigma^2 = \frac{I_0}{L}$$

Cette variance (I8) represente l'erreur commise dans l'estimation d'une teneur individuelle, et on ne peut rien en deduite en ce qui conserne l'erreur globale commise dans l'estimation du gisement dans son ensemble. L'evaluation de cette dernière erreur necessitera la mise au point d'une theorie speciale .

<u>3°/ Cokrigeage reciproque.</u>

Il sera interessant de comparer directement les resultats fournis par l'estimateur (I6) avec ceux que l'on obtient par la methode de Coulomb-Grammakov. Mais cette comparaison peut aussi etre faite en sens inverse.

En effet, si l'on suppose qu'une relation fonctionnelle telle que (II) existe reellement, on doit pouvoir en determiner un reflet en cherchant le meilleur estimateur donnant la radioactivite $f_2(z)$ en fonction des teneurs en Uranium $f_0(z)$ (ou meme, si celles ci sont connues, en fonction des teneurs en radium f_1: la comparaison sera alors beaucoup plus directe.) Cet estimateur sera de la forme :

$$f_{\lambda}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi'(\zeta - z)\, f_0(\zeta)\, d\zeta$$

(on mettra f_1 au lieu de f_0 si l'on introduit les teneurs en radium.) La fonction ϖ' et l'expression minimale I_0 sont donnes par le système habituel :

$$\text{(I8)} \qquad \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} g_{00}(u-v)\, \varpi'(u)\, du = g_{20}(v) = g_{02}(-v) \\ &I_0 = g_{22}(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} g_{20}(v)\, \lambda(v)\, dv \end{aligned}$$

Il serait interessant, en particulier, de comparer la fonction de ponderation ϖ' ainsi obtenue empiriquement avec la fonction theorique ϖ utilisé dans la methode de Grammakov et de Coulomb, et notamment d'examiner si la decroissance à l'infini est bien celle que suggère la fonction integro-exponentielle (I3).