

Fontainebleau CG

N-66

Note Géostatistique N° 70

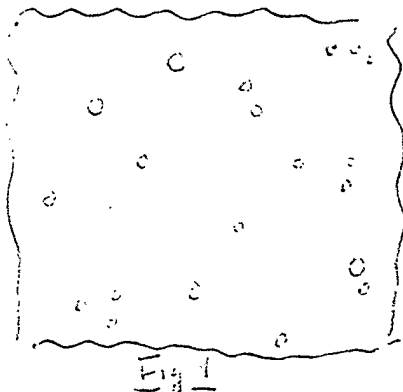
**Morphologie mathématique et
granulométries en place**

Georges MATHERON

Février 1967

NOTE GESTATISTIQUE N° 70Morphologie mathématique et Granulometries.Introduction.

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'appliquer les méthodes de la morphologie mathématique à l'étude des granulometries en place. Il s'agit, on le devine, de caractériser les formes, souvent complexes, que l'on peut, par exemple, observer sur une lame mince, à l'aide de critères indépendants des propriétés structurales de notre ~~XX~~ appareil perceptif. Cet appareil, en effet, ne peut fonctionner qu'en s'appropriant son objet, en reorganisant ce qui lui est donné, de manière à le rendre conforme à ses propres structures. Les représentations immédiates que nous fournit la perception sont donc souvent trompeuses. La figure I montre des petits cercles implantés au hasard



dans le plan, selon un schéma de Poisson. L'œil humain, lui, perçoit des groupes de points agglomérés, séparés par de grandes places vides. Il devine des centres d'attraction et de repulsion, et tout un réseau complexe de relations mutuelles parfaitement imaginaires.

Telle qu'on la comprend habituellement, la notion de granulometrie repose sur l'existence de grains individualisables sans ambiguïté.

Elle se rapporte à un schéma analogue à celui que nous représentons sur la figure 2 : des grains fortement individualisés, de forme convexe de préférence, apparaissent en relief au dessus d'un fond ou d'un ciment dépourvu d'existence propre. Le ciment n'est là que pour remplir l'espace laissé libre par les grains qu'il moule en creux. Il ne détermine pas lui-même ses formes, mais se les laisse

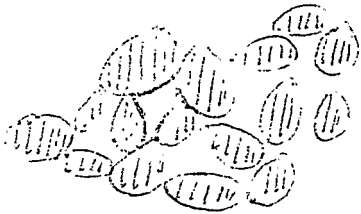


Figure 2

imposer par l'autre. Il faut d'ailleurs un certain effort d'attention pour arriver à voir ces formes négatives. L'observateur, donc, va compter les grains, mesurer leurs surfaces, et construire une courbe granulométrique. Il ne s'occupera pas du ciment ou des pores. Il obtiendra ainsi des renseignements relatifs à la forme moyenne des grains considérés comme des individus indépendants les uns des autres.

Mais il ne connaîtra pas leurs relations mutuelles, la manière dont ils s'arrangent dans l'espace (en langage pétrographique, la texture de la roche). Pour représenter cet arrangement, il faudrait connaître la répartition des intervalles d'espace séparant les grains, c'est à dire justement la granulométrie des pores ou du ciment. Cette dernière est sans doute au moins aussi importante que celle des grains dans un grand nombre de questions. Les propriétés hydrodynamiques d'une roche, en particulier, sont de toute évidence liées directement à la granulométrie des pores beaucoup plus qu'à celle des grains.

D'ailleurs, le schéma de la figure 2 correspond à un cas extrême : On n'a pas toujours une opposition aussi nette entre des grains convexes affirmant fortement leur individualité et leur ciment indifférencié. Les grains peuvent se souder, présenter des concavités, contenir des enclaves etc... Toute concavité des grains a pour corollaire

une convexité des pores. Au fur et à mesure que la notion de grain individualisable s'estompe et devient plus floue, on voit apparaître, en contrepartie, et se développer au sein du ciment, des ébauches d'individualisations, d'abord informes, qui vont en s'affirmant sans cesse d'avantage..

Si donc nous désirons éviter les pièges que nous tendent les représentations spontanément anthropomorphiques (ou mieux, zoomorphiques) fournies par l'appareil perceptif humain, nous devons, en premier lieu construire un concept de granulométrie indépendant de toute notion de grain individualisable. Cette construction a été présentée par ailleurs dans sa généralité. Nous nous limiterons ici aux granulométries linéaires : granulométries des traversées des grains et des pores, que nous exprimerons sous une forme probabiliste. Ces granulométries linéaires, déduites d'observations effectuées exclusivement le long de droites, permettent cependant de reconstituer certains paramètres caractéristiques des milieux à 2 ou 3 dimensions dont elles sont extraites : l'étoile, d'abord, qui généralise la notion de surface moyenne, ou de volume moyen d'un grain individuel, mais qui s'applique aussi bien aux pores ; en deuxième lieu, la surface spécifique de contact entre les grains et les pores (ou, plus généralement, entre deux constituants d'un milieu à plusieurs composantes). Ces divers paramètres ne caractérisent les propriétés structurales du milieu qu'à l'échelle de la granulométrie. Ils expriment seulement des rapports de voisinage immédiat. Pour atteindre les structures qui pourraient se manifester à plus vaste échelle, nous disposerons de la fonction de covariance,

T- G. Matheron " Elements pour une théorie des milieux poreux", Masson et C°, Paris, sous presse.

et nous en deduirons un rayon d'ergodicité, ou portée, qui représentera l'ordre de grandeur des dimensions de ces structures plus vastes.

Nous consacrerons la deuxième partie de cette étude à ce que l'on pourrait appeler l'analysis situs des granulometries planes, (ce terme ancien convient très bien aux considerations geometriques elementaires que nous avons en vue, dans lesquelles les notions d'ouverture et de fermeture topologiques ne jouent pour ainsi dire aucun rôle). Il s'agira ici de construire une notion precise de l'individualité pour les grains, comme pour les pores. Du point de vue de la convexité, considérée comme la plus haute forme d'affirmation de soi dont soit capable un individu appartenant au règne minéral, nous caracteriserons un milieu poreux par deux nombres specifiques de convexité, $\bar{V}_1$ et $\bar{V}_0$, representant les nombres d'individus convexes equivalents aux grains et aux pores contenus dans l'unité de surface. Mais il est également possible de rattacher la notion d'individualité à celle de composante connexe. On appelle alors individu un ensemble connexe (d'un seul tenant) maximal constitué de points appartenant à une seule des deux composantes du milieu. Outre les grains proprement dits, nous devons considerer les enclaves qu'ils contiennent. Ce point de vue conduit à définir un nombre specifique de connexité $\bar{V}_c$, egal au nombre de grains connexes contenus dans la surface unité ~~et~~ diminué du nombre des enclaves qu'ils contiennent. La solidarité qui lie étroitement les grains et les pores dans leurs efforts antagonistes pour s'affirmer sous une forme convexe s'exprimera par la relation $\bar{V}_c = \bar{V}_1 - \bar{V}_0$. Dans le cas d'un milieu à trois dimensions, le nombre de connexité observé sur les sections planes pourra de plus être rattaché à la courbure moyenne de la surface de séparation des grains et des pores.

A la difference des notions purement lineaires introduites dans la première partie, l'analysis situs n'est possible que si l'on dispose

d'observations faites simultanément sur deux droites paralleles, très proches l'une de l'autre : la deuxième dimension intervient effectivement, mais seulement sous la forme d'une amorce. Nous devons naturellement examiner de quelle manière on peut réaliser des observations de ce genre, en utilisant des procédés de balayage discontinu.

En approfondissant ensuite la notion de nombre spécifique de convexité, nous constaterons qu'elle se relie de manière simple à la courbure du périmètre des grains. Il est même possible de déterminer expérimentalement la loi de répartition de cette courbure, et, en particulier, de distinguer les portions du périmètre où cette courbure est positive ou négative, selon que le grain a un comportement convexe ou concave. Ici, cependant, on rencontrera certaines difficultés expérimentales si le contour des grains présente des points anguleux.

Dans une troisième partie, enfin, nous examinerons le cas particulier des grains sphériques. La sphère représente la perfection de la forme convexe, c'est à dire l'idéal le plus élevé auquel puissent aspirer des grains déjà individualisés. Il en résulte des relations remarquables qui permettent, dans ce cas, et dans ce cas seulement, de reconstituer intégralement le nombre et la granulométrie des grains sphériques originels de l'espace à 3 dimensions, à partir de la granulométrie des cercles ou des segments induits que l'on peut observer sur des plans ou sur des droites.

1-NOTIONS DEDUITES D'OBSERVATIONS PUREMENT LINEAIRES.

Dans cette première partie, nous allons faire l'inventaire des renseignements que l'on peut tirer des observations les plus faciles à réaliser expérimentalement, c'est à dire des observations purement linéaires, pour lesquelles on n'a jamais besoin de considérer simultanément que des points alignés sur une même droite. Nous présenterons les outils mathématiques de base, qui sont la covariance et les granulometries des traversées, et nous examinerons les informations que chacun d'eux nous apporte relativement aux diverses échelles de structure.

1°/ La covariance

a/ Considérations géométriques préliminaires. Considérons un grain

A, c'est à dire une figure géométrique limitée par un contour fermé (Fig. 3). Il est parfaitement défini si l'on se donne une fonction $k(x)$ égale à 1 ou à 0, selon que le point x appartient ou non au grain. Le volume V (dans l'espace à 3 dimensions) ou la surface S (dans l'espace à 2 dimensions) de ce grain est évidemment l'intégrale :

$$V = \int k(x) dx$$

Cette donnée numérique est intéressante, mais ne suffit évidemment pas à caractériser la structure et l'aspect morphologique de notre grain. Si l'on définit la structure d'un ensemble comme le système des relations existant entre ses éléments ou ses parties, on voit qu'il n'est possible d'obtenir une information sur la structure de ce

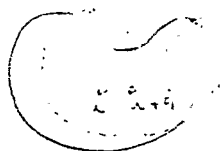


Figure 3

grain qu'à la condition de faire intervenir au moins deux points simultanément. Soient donc x et $x + h$ deux points se déduisant l'un de l'autre dans une translation définie par le vecteur h . Ces deux points appartiennent tous les deux au grain A si, et seulement si, $k(x) k(x + h) = 1$, ou encore, si le point x appartient à la fois à A et à son translate A_h dans la translation réciproque $-h$. Introduisons donc la fonction :

$$(I) \quad K(h) = \int k(x) k(x + h) dx$$

Elle représente la mesure (le volume, ou la surface) de l'intersection de A et de son translate A_{-h} , soit $A \cap A_{-h}$. On peut aussi bien remplacer A_{-h} par A_h (translate de A dans la translation directe h), les deux ensembles $A \cap A_{-h}$ et $A \cap A_h$ se déduisant l'un de l'autre dans cette même translation. Ainsi :

$$K(h) = K(-h) = \text{Mes}(A \cap A_{-h}) = \text{Mes}(A \cap A_h)$$

Si le grain est isolé, $K(h)$ s'annule lorsque le module du vecteur h dépasse le plus grand diamètre du grain. Mais si nous avons plusieurs grains, et non plus un seul, il arrivera que x et $x + h$ tombent dans des grains différents. Ainsi $K(h)$, qui contient la mesure de l'intersection de chacun des grains avec les translates de tous les autres, renseigne également sur les rapports existant entre les différents grains.

Pour $h = 0$, $K(0)$ représente le volume V du (ou des) grain. L'intégrale $\int K(h) dh$ possède aussi une signification précise : si, dans le deuxième membre de (I), nous intégrons d'abord en h puis ensuite en x , nous faisons apparaître le carré du volume. Ainsi :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(0) = V \\ \int K(h) dh = V^2 \end{array} \right.$$

Si l'on designe par $r = |h|$ et α le module et la direction du vecteur h , $K(h)$ est en realite une fonction de la forme $K(h; \alpha)$. La maniere dont cette fonction varie avec α , r restant fixe, donne une image des proprietes d'anisotropie des grains.

Il est egalement interessant de considerer la derivee en r , $\frac{d}{dr} K(r, \alpha)$ et en particulier les valeurs qu'elle prend en $r = 0$; elles dependent de la direction α , et nous les designerons, pour abreger, par $K'_\alpha(0)$. Pour en degager la signification, considerons un vecteur de module δh tres petit et de direction α . La difference :

$$K(0) - K(\delta h) = -\delta h K'_\alpha(0)$$

represente la moitie du volume balaye par un vecteur equipollent à δh dont l'origine decrirait le contour du grain (ou des grains). Pour un grain convexe unique, ce volume est egal à $\delta h S_\alpha$, S_α designant l'aire du contour apparent du grain en projection sur un plan perpendiculaire à la direction α . Dans le cas general, on a encore une expression de la forme $\delta h S_\alpha$, S_α representant cette fois la ^(de mi-) somme des projections sur le plan perpendiculaire à α des elements d'aire dS de la surface limite des grains. Si l'on designe par θ l'angle de la normale à la surface d'un grain et de la direction α , on obtient :

$$(3) \quad -K'_\alpha(0) = \frac{1}{2} \sum_i \int_{S_i} |\cos \theta| dS$$

(l'integrale est prise sur la surface limite S_i du grain N° i, et la somme $\sum_i$ est etendue à l'ensemble des grains). Ainsi, $K'_\alpha(0)$ est lie à l'aire totale de la surface limite des grains. $\sum_i S_i$. Il est facile d'explicitier cette relation en prenant la valeur moyenne de (3) pour toutes les directions de l'espace. On obtient sans difficulte: (en echangeant l'ordre des integrations) :

$$(4) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} K'_\alpha(\alpha) d\alpha = \frac{1}{4} \sum_i S_i$$

On retrouve facilement le coefficient $1/4$ en remarquant que la sphère de rayon R possède la surface $4\pi R^2$ pour un contour apparent de πR^2 .

Dans l'espace à deux dimensions, les surfaces S_i sont remplacées par les périmètres $2L_i$ des grains, et les relations (3) et (4) deviennent :

$$(5) \quad \begin{aligned} -K'_\alpha(0) &= \frac{1}{2} \sum_i \int_0^{2\pi} |\cos(\theta - \alpha)| d\theta \\ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K'_\alpha(\alpha) d\alpha &= \frac{1}{\pi} \sum_i 2L_i \end{aligned}$$

b/ L'interprétation probabiliste. Les notions que nous avons introduites jusqu'ici sont de nature purement géométrique. Il n'y entre aucun élément aléatoire. Il est clair, cependant, que l'extrême complexité des milieux dont nous avons en vue la description va nous conduire, presque inévitablement, à adopter un langage probabiliste. A partir de maintenant, nous considérerons donc l'ensemble constitué par les grains comme un ensemble aléatoire. D'une manière plus précise, la fonction en tout ou rien $k(x)$, égale à 1 dans les grains et à 0 dans les pores, va être considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire stationnaire. Le milieu auquel nous nous intéressons est donc (virtuellement) illimité et statistiquement homogène dans l'espace (stationnaire). La probabilité :

$$p = E [k(x)]$$

pour qu'un point donné x appartienne aux grains est alors une constante p , caractéristique du milieu. Si l'on convient d'appeler pores l'ensemble complémentaire des grains, la probabilité $q = 1 - p$ pour que x appartienne aux pores est la porosité constante du milieu.

A la fonction $K(h)$, définie par l'intégrale (I), nous allons substituer la probabilité $C(h)$ pour que les deux points x et $x+h$ appartiennent simultanément aux grains A :

$$C(h) = P(x \in A, x+h \in A)$$

Cette fonction ne dépend que de h , et non du point d'appui x , à cause du caractère stationnaire. En $h = 0$, on a évidemment :

$$C(0) = p$$

Lorsque le module h devient très grand, on constate, en général, que $C(h)$ tend vers p^2 : en effet, les points x et $x+h$, étant alors très éloignés l'un de l'autre peuvent être regardés comme indépendants. La manière dont $C(h)$ varie de p à p^2 en fonction du module et de la direction du vecteur h va donc nous présenter un reflet des propriétés structurales du milieu envisagé à différentes échelles.

c/ La surface spécifique.

La dérivée $C'_\alpha(0)$ de $C(h)$ prise en $h = 0$ dans la direction α possède une signification intéressante, liée à la surface spécifique. Designons, en effet, par σ la surface spécifique, et par $d\sigma(\omega)$ la portion de celle-ci qui correspond aux éléments d'aire de la surface limite pour lesquels la normale (orientée, par exemple, vers l'intérieur des grains) possède une direction comprise dans un angle solide $d\omega$. La relation (3) se transpose immédiatement sous la forme :

$$(6) \quad -C'_\alpha(0) = \frac{1}{2} \int |\cos \theta| d\sigma(\omega)$$

et la relation (4) devient de son côté :

$$(7) \quad -\frac{1}{4\pi} \int C'_\alpha(0) d\alpha = \frac{1}{4} \cdot \sigma$$

Ainsi donc, il est possible de déterminer la surface spécifique σ d'un milieu poreux à partir d'observations effectuées sur lame mince, et même à partir d'observations purement linéaires. On en verra plus loin des exemples expérimentaux. Si le milieu est anisotrope, il est nécessaire de disposer de plusieurs lames minces d'orientations différentes, afin d'évaluer la valeur moyenne de $-C'_{\alpha}(0)$ pour différentes directions α de l'espace $\mathbb{R}^3$. Dans le cas particulier d'un milieu isotrope, $C(h)$ ne dépend que du rayon vecteur r et non de la direction α . $C'_{\alpha}(0)$ est alors une constante $C'(0)$, et (7) se réduit à :

$$(8) \quad \sigma = -4C'(0)$$

Dans le cas où il y a anisotropie, on remarquera que $C'_{\alpha}(0)$, grandeur à signification directionnelle, contient bien d'avantage d'informations sur la structure du milieu que la surface spécifique σ , grandeur purement scalaire.

Comme la covariance $C(h)$ a un comportement linéaire au voisinage de l'origine, elle admettra souvent un développement de la forme :

$$C(h) = C(0) - \sqrt{\sum_{i,j} C_{ij} h_i h_j}$$

et d'ailleurs, $C_{ij} = -C'_{ij}(0) = \sqrt{C_{ij} \alpha_i \alpha_j}$

(α_i designant les cosinus directeurs de h). Le tenseur C_{ij} que l'on met ainsi en évidence pourra être corréle avec le tenseur des perméabilités du milieu poreux, ou plutôt avec son inverse, qui est le tenseur des résistivités. (Nous avons indiqué ailleurs les raisons théoriques pour lesquelles il ne peut pas y avoir de relation fonctionnelle rigoureuse entre ces deux tenseurs)

Remarques. Si le milieu est constitué de plus de deux composantes, on obtiendra de la même manière la surface spécifique de contact du constituant i avec le constituant s en dérivant la probabilité $C_{ij}(h)$

pour que les points x et $x+h$ appartiennent, respectivement, à chacun des constituants l et s .

Enfin, si l'on étudie un milieu à deux dimensions seulement, la notion de surface spécifique $\bar{G}$ cède la place à celle de périmètre spécifique 2λ . Les relations (5) se transposent d'elles-mêmes, avec des notations évidentes :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} - C'_{\alpha}(0) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |c_{\alpha}(\theta-\alpha)| d[2\lambda(\omega)] \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C'_{\alpha}(0) d\alpha = \frac{2\lambda}{\pi} \end{array} \right.$$

En particulier, dans le cas d'un milieu isotrope, covariance $C(r)$, surface spécifique $\bar{G}$, et périmètre spécifique 2λ des sections planes de ce milieu sont liés par la relation instructive :

$$(10) \quad - C'(0) = \frac{2\lambda}{\pi} = \frac{\bar{G}}{4}$$

d/ La portée.

La dérivée de la covariance $C(r; \alpha)$ en $r = 0$ est liée à la surface spécifique du milieu, et renseigne sur les relations de contact de ses constituants. Au contraire, l'intégrale de la covariance va nous apporter des informations sur les relations existant à plus grandes distances. On appelle portée d'une fonction aléatoire ergodique et stationnaire la distance a à partir de laquelle les corrélations sont pratiquement éteintes, et $C(h)$ pratiquement égale à p^2 . Nous utiliserons une définition plus précise : nous appellerons portée $a(\alpha)$, dans la direction α l'intégrale :

$$(II) \quad a(\alpha) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} [C(r, \alpha) - p^2] dr$$

La portée a a la dimension d'une longueur, et possède une signification directionnelle. Elle est liée aux propriétés ergodiques de la

fonction aleatoire en tout ou rien $k(x)$. En effet, si nous prenons la valeur moyenne

$$p^* = \frac{1}{l} \int_0^l k(x) dx$$

de $k(x)$ sur un segment de longueur l et de direction α , nous obtenons un estimateur p^* de la probabilité p (du volume occupe par les grains rapporte au volume total), et, lorsque l devient très grand, la variance de p^* est asymptotiquement egale à :

$$D(p^*) = \frac{c(\alpha)}{l} \quad \text{p. 9}$$

Elle tend vers 0 comme $1/l$, pourvu que la portee soit finie. Une portee elevee indique que l'ergodicite n'est atteinte que lentement (le milieu n'apparait comme statistiquement homogène que sur de grandes distances), ce qui denote l'existence de structures à grande echelle. Nous donnerons plus bas des critères precis, fondees sur la comparaison de la portee et des dimensions granulometriques, qui nous permettront d'apprécier dans quelle mesure une structuration hyper-granulometrique existe reellement.

2°/ Granulometries des traversees des pores et des grains.

Nous allons maintenant nous interesser à la morphologie propre des grains et des pores envisages à l'echelle des dimensions "granulometriques", et chercher à la caracteriser à l'aide de paramètres n'exigeant que des observations purement lineaires.

a/ Les moments fonctionnels $P(h)$ et $C(h)$.

Designons par h un vecteur de module r et de direction α , dont l'origine est prise en un point x de l'espace. Nous appellerons $P(h)$ la probabilité pour que ce vecteur soit tout entier inclus à l'intérieur

interieur de la composante du milieu que nous designons par l'expression "les grains ". C'est aussi la probabilité pour que ce vecteur ne rencontre pas l'autre composante, celle que nous designons par l'expression " les pores". Symetriquement, nous appellerons $q(h)$ la probabilité pour que ce meme vecteur soit tout entier contenu dans les pores, ou ne rencontre pas les grains.

On a evidemment :

$$\begin{cases} P(0) = C(0) = p \\ Q(0) = q = 1 - p \end{cases}$$

et aussi :

$$p'_\lambda(0) = q'_\lambda(0) = c'_\lambda(0)$$

ainsi que les inegalités $0 \leq P(h) \leq C(h)$. En fait, h croissant, $C(h)$ tend vers $p^2 > 0$, tandis que $P(h)$ doit tendre assez rapidement vers 0, une fois que le module de h a depasse les dimensions moyennes des grains.

b/ Les granulometries en nombre.

Plaçons sur une droite fixe de direction α donnee, et adoptons pour abreger des notations à une seule dimension, en ecrivant, par exemple $p'(0)$ au lieu de $p'_\alpha(0)$. Sur cette droite, nous voyons se succeder des traversees, de longueurs aleatoires, comprises alternativement dans les grains et dans les pores. Le nombre moyen des traversees des pores (ou des grains) rencontrees par unite de longueur est $-p'(0) = -q'(0) = -c'(0)$, puisque $-p'(0) dh$ represente la probabilité pour qu'une transition des grains aux pores ait lieu dans le petit intervalle $(x, x + dh)$. La relation (10) nous a déjà montre comment ce nombre spécifique de traversees rencontrees par unité de longueur se relie au perimètre spécifique (par unite de

surface) et à la surface spécifique (par unite de volume)

Après avoir effectué des observations le long d'une droite, nous pouvons également faire la statistique des traversées des grains (ou des pores), en construisant l'histogramme $f_1(l)$ des grains (ou $f_0(l)$ des pores). Ainsi $f_1(l)dl$ représente la probabilité pour qu'une traversée donnée des grains ait une longueur comprise entre l et $l+dl$. Or la probabilité pour qu'une traversée des grains commence dans l'intervalle $(x-dh_1, x)$ et se termine dans l'intervalle $(x+l, x+l+dh_2)$ est $p''(l)dh_1dh_2$, tandis que la probabilité pour qu'elle commence dans l'intervalle $(x-dh_1, x)$, sans spécifier à quel endroit elle se termine, a pour valeur $-p'(0)dh_1$. Nous avons donc, d'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$(I2) \quad f_1(l) = - \frac{p''(l)}{p'(0)}$$

La granulométrie en nombre des traversées des grains possède une densité de fréquence proportionnelle à la dérivée seconde du moment fonctionnel $P(h)$. La fonction de répartition F_1 , ou courbe granulométrique cumulée, s'en déduit par intégration :

$$(I3) \quad 1 - F_1(l) = \frac{p'(l)}{p'(0)}$$

Cette relation (I3), peut être démontrée directement, et reste valable même si $p(l)$ n'est pas deux fois dérivable (donc, si la densité $f_1(l)$ n'existe pas) pourvu, bien sûr que $p'(l)$ existe.

Nous désignerons par $E[(L_1)^n]$ le moment d'ordre n associé à la granulométrie en nombre des traversées des grains, soit :

$$E[(L_1)^n] = \int_0^\infty l^n dF_1(l)$$

Pour $n = 1$, nous obtenons le moment du premier ordre, $E(L_1)$, qui

est la moyenne en nombre des traversées des grains. De (I2) ou de (I3), nous deduisons :

$$(I4) \quad E(L_1) = - \frac{P'(0)}{P'(0)} = - \frac{1}{P'(0)}$$

Cette relation prend un sens intuitif evident, si l'on se souvient que $-P'(0)$ représente le nombre moyen des grains rencontres par unite de longueur.

Pour $n > 1$ (nous aurons surtout à considerer les cas $n = 2$ et $n = 3$) des integrations par parties effectuees sur (I2) ou sur (I3) nous donnent :

$$(I5) \quad E[(L_1)^n] = - \frac{n(n-1)}{P'(0)} \int_0^\infty e^{-\ell} P(\ell) d\ell$$

Au lieu de la traversée L_1 des grains, dont la granulometrie est $F_1(\ell)$, on peut s'interesser à la traversée L_0 des pores, dont la granulometrie sera designee par $F_0(\ell)$. Les relations (I2) à (I5) subsistent, à condition de remplacer partout $P(\ell)$ par $Q(\ell)$, et l'indice 1 par l'indice 0. En particulier, la valeur moyenne en nombre des traversées des pores est :

$$(I6) \quad E(L_0) = - \frac{Q'(0)}{Q'(0)} = - \frac{1}{Q'(0)}$$

Comme $P'(0) = Q'(0) = C'(0)$ represente le nombre moyen des grains (ou des pores) rencontres par unite de longueur, nous deduisons de (I4) et de (I6) :

$$(I7) \quad \begin{cases} - C'(0) = \frac{1}{E(L_0 + L_1)} \\ p = \frac{E(L_1)}{E(L_0 + L_1)} \\ q = \frac{E(L_0)}{E(L_0 + L_1)} \end{cases}$$

Le sens intuitif des relations (I7) est parfaitement clair : les

probabilités p et $q = I - p$ sont proportionnelles aux traversées moyennes (en nombre) des grains et des pores, tandis que le nombre total de grains rencontrés par unité de longueur est évidemment égal à l'inverse de la somme des longueurs moyennes traversées dans les grains et dans les pores.

c/ Granulometries en longueur.

Au lieu de compter pour 1 chacune des traversées des grains, nous pouvons lui attribuer un poids proportionnel à sa longueur L_1 ; au lieu de la densité de fréquence $f_1(\ell)$, nous obtenons alors une nouvelle densité $g_1(\ell)$ qui vaut :

$$(18) \quad g_1(\ell) = \frac{\ell}{E(L_1)} f_1(\ell)$$

A cette densité $g_1(\ell)$ correspond une fonction de repartition, ou courbe granulométrique cumulée, $G_1(\ell)$. Compte tenu de (12) et de (17) nous obtenons sans peine :

$$(19) \quad 1 - G_1(\ell) = \frac{1}{I} \left[P(\ell) - \ell P'(\ell) \right]$$

relation que l'on peut aussi obtenir directement par un raisonnement probabiliste élémentaire : en effet, $p[1 - G_1(\ell)]$ représente la probabilité pour qu'un point donné x appartienne à un segment de longueur égale ou supérieure à ℓ et contenu dans les grains. Cet événement peut se réaliser de deux manières incompatibles, à savoir : ou bien l'intervalle $(x, x+\ell)$ est dans les grains, ce qui a lieu avec la probabilité $P(\ell)$; ou bien l'intervalle $(x-\ell, x)$ est dans les grains, tandis que x tombe dans les pores (le point x est un point limite), ce qui a lieu avec la probabilité

$$- \int_{-\ell}^0 P'(\ell) d\ell = - \ell P'(\ell)$$

Inversement, on peut reconstituer le moment $P(\ell)$ à partir de la

granulometrie en longueur $G_1(l)$. On trouve :

$$(20) \quad P(l) = p \int_l^{\infty} \frac{y-l}{l} dG_1(y)$$

Ici encore, cette relation peut se retrouver par un raisonnement direct. Lorsque l'on sait qu'un point x appartient à une traversée des grains de longueur comprise entre y et $y+dy$, ce qui a lieu avec la probabilité $p dG_1(y)$, l'un des extremités de cette traversée (par exemple l'extremité droite) peut tomber n'importe où sur le segment $(x, x+y)$ avec une egale probabilité. Il y a donc une probabilité $\frac{y-l}{l}$ (avec $l \leq y$) pour que cette extremité tombe à une distance de x superieure à l . Le theoreme de sprobabilites composees conduit alors immediatement à la relation (20).

Avec cette granulometrie $G_1(l)$ exprimee en mesure (en longueur) et non en nombre, nous pouvons definir des moments que nous designerons par le symbole M :

$$M[(L_1)^n] = \int_0^{\infty} l^n dG_1(l)$$

Compte tenu de (18) et de (15), les moments en mesure se deduisent des moments en nombre par les relations :

$$(21) \quad M[(L_1)^n] = \frac{E[(L_1)^{n+1}]}{E(L_1)} = \frac{n(n+1)}{b} \int_0^{\infty} l^{n-1} P(l) dl$$

On transposera sans difficulté les definitions precedentes à la granulometrie (en longueur) $G_2(r)$ de la traversée des pores, ainsi qu'aux moments $M[(L_2)^n]$ associes.

On ne perdra pas de vue que ces granulometries et leurs moments possèdent une signification directionnelle, puisu'ils dependent de la direction de la droite sur laquelle on a effectue les observations. Nous allons maintenant examiner leur signification structurale. En derivant $P(l)$ ou $Q(l)$, nous obtiendrons des renseignements sur la

courbure ou l'angulosité des grains et des pores. En intégrant, au contraire, c'est à dire en utilisant les moments ($2I$), nous mettrons en évidence leurs dimensions moyennes, en longueurs, en surface et en volume.

d/ Courbure moyenne et angulosité.

Examinons, en premier lieu, le comportement au voisinage de l'origine de la granulométrie (en nombre) des traversées des grains. Une traversée des grains, de longueur inférieure à une quantité petite l , peut correspondre (Fig. 4) soit à un isthme étroit, soit à une terminaison anguleuse, soit enfin à une terminaison arrondie d'un grain possédant un rayon de courbure supérieur à l .

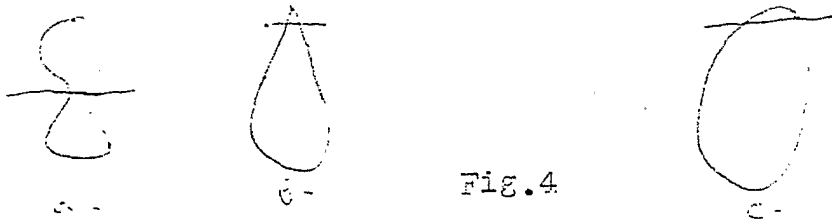


Fig. 4

~~XXXXXXXXXXXX~~ Supposons, en premier lieu, qu'il n'y ait ni isthmes étroites, ni terminaisons anguleuses. Parmi le nombre total des traversées de longueur inférieure à l , qui est proportionnel à $-P'(0)F_1(l)$, un grain, tel que celui que nous avons représenté sur la figure 4-c, apporte une contribution proportionnelle à $\frac{l^2}{8R}$. Si donc $V_1(l)$ désigne le nombre moyen de ces terminaisons arrondies observées dans la direction α et par unité de surface, (nous examinerons plus loin le sens de ce nombre spécifique de convexité, et la manière dont on peut le déterminer expérimentalement), nous aurons :

$$V_1 \frac{l^2}{8} E\left(\frac{1}{R}\right) = -P'(0) F_1(l)$$

$E\left(\frac{1}{R}\right)$ designant la valeur moyenne de la courbure $1/R$ de ces terminaisons arrondies. Par conséquent, la densité $f_1(l)$ s'annule en $l = 0$ et l'on a :

$$(22) \quad \begin{aligned} f_1(\cdot) &= 0 \\ f_1'(0) &= - \frac{f_1}{f_1(0)} \in \left\{ \frac{1}{R} \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, l'absence d'isthmes étroits et de terminaisons anguleuses se traduit par une densité $f_1(\cdot)$ nulle à l'origine, et la pente $f_1'(0)$ à l'origine de l'histogramme est alors proportionnelle à la valeur moyenne de la courbure.

Au contraire, s'il existe des isthmes étroites ou des terminaisons anguleuses, on vérifie facilement que $F_1(\cdot)$ a un comportement linéaire à l'origine, autrement dit que la densité $f_1(\cdot)$ ne s'annule pas en $\bar{x} = 0$. Ainsi $f_1(0)$ constitue un indice de l'angulosité des grains.

Exemple. Lorsque les grains ont une forme convexe bien affirmée, et même si deux grains peuvent éventuellement se rencontrer, on a $f_1(0) = 0$, mais les pores, qui constituent le négatif de ces figures convexes, présentent des angulosités, et $f_0(0)$ n'est pas nul.

Il en est ainsi dans les schémas semi-markoviens, que nous avons étudiés dans l'ouvrage déjà cité. Rappelons rapidement leur définition. On dit qu'un ensemble C sépare deux ensembles E et E' si tout segment de droite joignant un point de E et un point de E' rencontre C en un point au moins. Un milieu poreux aléatoire est alors dit semi-markovien (vis-à-vis des pores) s'il y a indépendance conditionnelle entre tout événement intéressant E et tout événement intéressant E' lorsque l'on sait que C est contenu dans les pores. Le procédé le plus simple possible pour fabriquer un schéma semi-markovien consiste à implanter au hasard dans l'espace (ou le plan) des figures aléatoires convexes, (schéma booléen à grains primaires convexes), étant entendu que ces figures peuvent très bien se rencontrer. On démontre que, dans un schéma semi-markovien, la granulométrie, en nombre, des traversées

des pores obéit toujours à une loi exponentielle de densité $\lambda e^{-\lambda r}$ avec $\lambda = 1/E(L_p) = -C'(0)/q$. Ainsi, $f_p(0) = \lambda$ est différent de 0, et les pores possèdent un indice d'angulosité égal à l'inverse de leur traversée moyenne. Au contraire, pour les grains, on a en général $f_g(0) = 0$, sauf bien sûr, dans le cas où les figures convexes implantées au hasard ont elles-mêmes un contour anguleux.

On notera qu'une loi exponentielle pour les traversées des pores (en nombre), souvent vérifiée approximativement en pratique, correspond à un cas idéal, où l'opposition entre les grains convexes "positifs", et leur ciment indifférencié "négatif" se présente sous sa forme extrême. Chaque fois, au contraire, que la densité $f_p(1)$ est nulle à l'origine, on peut conclure que les pores commencent à affirmer leurs formes propres aux dépens des grains.

e/ L'Etoile des grains et l'Etoile des pores.

Considérons la figure 5. Nous y avons représenté des grains, d'ailleurs convexes, et un point x des pores. A ce point, nous avons associé l'ensemble des points des pores qu'il peut voir directement, c'est à dire l'ensemble des points y tels que le segment (x,y) soit contenu dans les pores. La figure obtenue présente la

Figure 5

forme d'une étoile. Nous désignerons donc par S_p^* l'étoile des pores, c'est à dire la valeur moyenne de l'aire que l'on peut voir directement à partir d'un point des pores. De même, on désignera par L_g^* et V_g^* les étoiles à une et trois dimensions (longueur et volume vus, en moyenne, à partir d'un point des pores), et on définira de la même manière l'étoile des grains L_g^* , S_g^* ou V_g^* , selon le nombre des dimen-

sions que l'on prend en considération.

Lorsque les grains sont convexes et disjoints, tout point x des grains voit directement les points du grain auquel il appartient, et ceux-là seulement. Dans ce cas-là, on a :

$$\begin{cases} L^* = \mathcal{M}(L) \\ S^* = \mathcal{M}(S) \\ V^* = \mathcal{M}(V) \end{cases}$$

A deux dimensions, l'étoile S^* représente la valeur moyenne de la surface d'un grain convexe pour une granulométrie en mesure (dans laquelle chaque grain compte pour un poids proportionnel à sa surface). A trois dimensions, l'étoile V^* représente de même le volume moyen d'un grain convexe pour une granulométrie exprimée en volume.

Ainsi, dans le cas de grains convexes et disjoints (et dans ce cas là seulement, semble-t-il), il est possible de déterminer la surface moyenne et le volume moyen des grains, correspondant à des granulométries exprimées en mesure, à partir d'observations purement linéaires. En outre, on notera qu'il n'est pas nécessaire de connaître le nombre des grains présents par unité de surface ou de volume, que des observations purement linéaires ne permettraient d'ailleurs pas de déterminer à elles seules.

L'étoile, en effet, se relie de manière simple à la granulométrie $g(l)$ exprimée en longueur. Notons que $g(l)$ est en réalité de la forme $g(l, \alpha)$, puisque la granulométrie des traversées dépend de la direction α selon laquelle celles-ci sont mesurées.

En ce qui concerne L^* , tout d'abord, on note qu'un segment $d\bar{l}$ placé à la distance $\bar{l}$ d'un point x des grains appartient à l'étoile

linéaire de x avec une probabilité (conditionnelle) égale à $\frac{1}{n} P(r)$

Nous avons donc, en tenant compte de (21) :

$$(23) \quad L_v^* = \frac{1}{n} \int_0^\infty P(r) r dr = M(L)$$

Passons à l'étoile S_v^* à deux dimensions. L'élément d'aire $r dr d\alpha$ appartient à l'étoile d'un point x des grains avec une probabilité conditionnelle égale à $\frac{1}{n} P(r, \alpha) dr d\alpha$. Par suite, il vient :

$$S_v^* = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty r^2 P(r, \alpha) dr$$

D'après (21), l'intégrale $\frac{1}{n} \int_0^\infty r P(r, \alpha) dr$ vaut $\frac{1}{n} M[(L_v)^2]$, et par suite :

$$S_v^* = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} M[(L_v)^2] d\alpha$$

Pour obtenir une expression condensée, nous pouvons désigner par $M[(L_v)^2]$ la valeur moyenne relativement à α du moment d'ordre 2 pris dans la direction α . On trouve alors :

$$(24) \quad S_v^* = \frac{\pi}{2} M[(L_v)^2]$$

Enfin, pour l'étoile à trois dimensions, on fera de la même manière apparaître la valeur moyenne $M[(L_v)^3]$ du moment d'ordre 3 pris dans les différentes directions de l'espace, et on trouvera :

$$(25) \quad V_v^* = \frac{\pi}{3} M[(L_v)^3]$$

De même, l'étoile des pores se relie à la granulométrie (en longueur) des traversées des pores par les formules :

$$(26) \quad \begin{cases} L_v^* = M(L_v) \\ S_v^* = \frac{\pi}{2} M[(L_v)^2] \\ V_v^* = \frac{\pi}{3} M[(L_v)^3] \end{cases}$$

f/ Relation entre l'étoile et la portée.

En l'absence de structures à grande échelle, on se rend compte que la portée a (dans une direction donnée) doit être du même ordre de grandeur que les étoiles L_1^* et L_2^* des grains et des pores. Pour obtenir un critère plus précis, nous pouvons prendre comme référence la valeur que prendrait la portée dans l'hypothèse où les traversées des grains et des pores qui se succèdent le long d'une même droite sont des variables aléatoires indépendantes. La théorie des processus de renouvellement permet de montrer que, dans cette hypothèse, la portée vaut :

$$(27) \quad a_{\infty} = p \frac{D^2(L_0)}{E(L_0)} + q \frac{D^2(L_1)}{E(L_1)}$$

(moyennes et variances se rapportant aux granulométries en nombre), ce que l'on peut écrire aussi :

$$a_{\infty} = p \left[\overline{NL(L_0)} - E(L_0) \right] + q \left[\overline{NL(L_1)} - E(L_1) \right]$$

Cette portée dépend, de manière très significative, de la différence entre les moyennes en longueur et en nombre.

En particulier, pour un schéma semi-markovien (relativement aux pores), la granulométrie des traversées des pores est exponentielle, de sorte que l'on a :

$$\frac{D^2(L_1)}{E(L_1)} = E(L_1) = \frac{q}{p} E(L_0)$$

et (27) prend alors la forme très simple :

$$(28) \quad a_{\infty} = q \overline{NL(L_1)} = q L_1^*$$

La relation (28) entre l'étoile et la portée caractérise à la fois l'absence de structures à grande échelle, et une individualisation des grains poussée à l'extrême aux dépens des pores. La relation plus générale (27) indique encore l'absence de macrostructures, mais

permet aux pores d'affirmer librement leurs formes propres. Si la portée a dépasse la valeur de référence a_0 , l'existence de macrostructures est certaine.

Il peut également arriver que a soit inférieur à a_0 , ou même que l'on ait $a = 0$. Cette circonstance traduit l'existence d'un effet compensateur, selon lequel un grand grain est suivi en moyenne par un grand pore, et inversement. La fonction $C(h)$ présente alors un effet de trou très caractéristique. On a pu observer ce genre de phénomène en étudiant la migration de la calcite dans le gisement de fer lorrain : chaque germe rassemble autour de lui la calcite diffuse dans son voisinage, de sorte qu'à la fin du processus les concrétions calcaires sont séparées par des intervalles grossièrement proportionnels à leurs tailles.

Très schématiquement, et à une seule dimension, on peut imaginer que

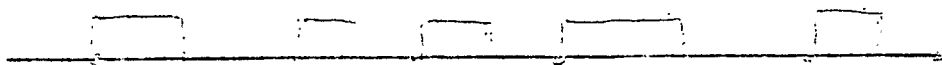


Fig. 6

La teneur initiale p en calcaire était constante dans le gisement. Des germes se sont ensuite mis en place au hasard, avec une densité poissonnienne λ , et chacun d'eux a rassemblé la totalité de la calcite disponible à sa droite jusqu'au germe suivant; si l est la distance entre deux germes, on voit se succéder les longueurs pl de calcite et ql de minerai. Les granulometries sont exponentielles :

$$p(h) = p e^{-\lambda \frac{h}{p}}$$

$$q(h) = q e^{-\lambda \frac{h}{q}}$$

Pour la covariance, on trouve :

$$C(h) = \frac{pq}{p+q} e^{-\lambda \frac{h}{p+q}}$$

On trouve aussi :

$$C(h) - p = \frac{h^2}{4-1} e^{-\lambda \frac{h}{2}} + \frac{q h^2}{4-1} e^{-\lambda \frac{h}{4}} \quad 26$$

et l'intégrale $\int_0^h (C(x) - p) dx$ est nulle. On trouve donc $a = 0$. Ce résultat est une conséquence directe de l'hypothèse faite sur la constance de la teneur initiale p en calcite. Les migrations ultérieures n'ont dérangé cette constance qu'à des échelles de l'ordre de $1/\lambda$. Pour des distances plus grandes, il y a un effet compensateur très puissant. La variance de l'intégrale $\frac{1}{h} \int_0^h k(x) dx$ décroît ici plus vite que $1/h$, ce qui est une autre manière d'exprimer que la portée a est nulle.

Dans cette deuxième partie, nous allons essayer de caractériser l'individualité des grains et des pores du point de vue de la connexité et de la convexité, en nous limitant au cas d'un milieu à deux dimensions (lampe mince). Contrairement aux notions introduites dans la première partie, les paramètres que nous allons définir ne peuvent plus être déterminés à partir d'observations purement linéaires. Il faut disposer au moins d'une amorce de deuxième dimension, c'est à dire, pratiquement, pouvoir effectuer des observations simultanément sur deux droites parallèles très voisines. Il conviendra donc d'examiner et de discuter les procédés permettant de déterminer ces paramètres à l'aide d'appareils du type de l'analyseur de textures de J. Serra.

1°/ Le nombre spécifique de connexité.

La notion topologique la plus simple qui traduise l'idée d'individu est celle de composante connexe. Dans un milieu composé de deux constituants -un ensemble A et son complémentaire $\bar{A}$ -nous pouvons appeler grains individuels les ensembles connexes (d'un seul tenant) maximaux formés de points de A . Par définition, ici, deux grains ne peuvent se rencontrer (s'ils se rencontrent, ils constituent un grain unique). Nous avons donc ici une notion parfaitement claire, mais assez pauvre : elle ne tient, en effet, aucun compte de la plus ou moins grande complexité morphologique des grains.



Fig. 7

En vue d'expliciter cette notion, considérons d'abord un grain simplement connexe, (ne contenant pas d'enclaves). Nous avons déjà caractérisé ce grain par une fonction $K(h)$ définie en (I), et

et note que la dérivée $-K'_A(0)$ représentait la projection sur une direction perpendiculaire à α des éléments d'arc constituant son contour. Nous allons faire varier cette quantité. Considérons, en effet, un petit vecteur $\vec{c}$ perpendiculaire à α , et le translate $A_{\vec{c}}$ notre grain A . Si nous remplaçons A par la réunion $A \cup A_{\vec{c}}$ (si nous dilatons le grain selon le vecteur $\vec{c}$), la projection des éléments d'arc du contour sur la direction de $\vec{c}$ augmente d'une quantité exactement égale à $\vec{c}$. Si, au contraire, nous remplaçons A par l'intersection $A \cap A_{\vec{c}}$, (si nous érosons le grain selon $\vec{c}$) cette projection diminue de cette même quantité $\vec{c}$, et cela quelle que soit la forme convexe ou non de notre grain. Plaçons nous dans le cas d'une dilatation. Nous trouvons :

$$\delta [-K'_A(0)] = \vec{c} \cdot \alpha$$

Si, au lieu d'un grain, nous avons n grains simplement connexes, la variation de $-K'_A(0)$ sera, de la même manière :

$$\delta [-K'_A(0)] = n \vec{c} \cdot \alpha$$

Mais, si les grains ne sont pas simplement connexes, c'est à dire s'ils contiennent des enclaves, celles-ci se comportent négativement, et l'on fait apparaître la différence $n - i$ entre le nombre n des grains et le nombre i des enclaves qu'ils contiennent.

Dans la formulation probabiliste, si l'on désigne par χ le nombre spécifique de connexité, égal au nombre de grains, dans l'hypothèse où ceux-ci ne contiennent pas d'enclaves (ou plus généralement à la différence entre les nombres de grains et d'enclaves) contenus dans l'unité de surface, et si l'on désigne par $C(h)$ la covariance, on obtient :

$$(629) \quad \delta [-C'_A(0)] = \chi \delta \alpha$$

Ainsi donc, pour déterminer le nombre spécifique de connexité, il suffit de connaître la variation du $-C'(0)$ pour une petite dilatation vectorielle des grains $\vec{a}$. On remarque, d'ailleurs, que $\vec{a}$ est indépendant de la direction λ considérée.

Si l'on effectue l'érosion de A par $\vec{a}$, c'est à dire l'intersection $A \cap A_{\vec{a}}$, on retombe sur les relations précédentes, à condition d'attribuer à $\vec{a}$ un signe négatif. Experimentalement, toutefois, cette coïncidence ne subsiste que si $\vec{a}$ est très petit. Mais, dans le cas d'un appareil fonctionnant par balayage discontinu, $\vec{a}$ est imposé : c'est la maille du balayage. Elle possède une valeur petite, mais non pas infiniment petite, de sorte que les deux définitions de V_v (par dilatation et par érosion) risquent de conduire à des résultats légèrement différents.

L'origine de cette petite difficulté apparaît sur la Figure 10.

```

0 0 0 0
0 + + 0
0 + + 0 0 0
0 0 0 + + 0
    0 + + 0
    0 0 0 0

```

Figure 10

Le balayage ponctuel remplace le milieu réel par un réseau à maille carrée $\vec{a}$ dont chaque nœud est noté + ou 0 selon qu'il tombe dans les grains ou dans les pores. Du point de vue de l'érosion selon

$\vec{a}$, la figure 10 comporte deux grains distincts. Du point de vue de la dilatation, elle n'en comporte qu'un seul. En effet, vis-à-vis de l'érosion, les seules connexions autorisées entre les grains sont des connexions selon les lignes ou les colonnes, tandis que la dilatation autorise également les liaisons selon les diagonales.

Dans ce qui suit, nous adopterons plutôt le point de vue de la dilatation, conformément à la représentation spontanée selon laquelle les grains constituent la composante forte, et apparaissent en relief dans le milieu.

Pour évaluer $C'_2(0)$ avant dilatation, on doit faire l'inventaire des configurations $0 +$ rencontrées dans le balayage du milieu. Designons par $N(0 +)$ leur nombre, et par N le nombre total d'observations. On a :

$$-C'_2(0) = \frac{N(0 +)}{N \cdot \bar{c}a}$$

Après la dilatation, on doit, pour évaluer la nouvelle valeur $-C'_2(0) + \bar{c}[-C'_2(0)]$, faire l'inventaire des configurations :

$$\begin{array}{cc} 0 + & \text{XXX} \\ 0 + & , \end{array} \quad \begin{array}{cc} 0 + & \\ 0 0 & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cc} \text{XX} & 0 0 \\ & 0 + \end{array}$$

Si N' désigne leur nombre, on aura donc :

$$N' = \frac{N' - N(0 +)}{N(\bar{c}a)^2}$$

Remarquons, d'ailleurs, que la configuration $0 +$ se décompose en quatre configurations portant sur quatre points :

$$\begin{array}{cc} 0 0 & 0 + \\ 0 + & , \end{array} \quad \begin{array}{cc} 0 + & + 0 \\ 0 + & , \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cc} \text{XX} & + + \\ & 0 + \end{array}$$

La première et la deuxième de ces configurations interviennent déjà dans le décompte de N' . Les deux dernières équivalent à la configuration unique : $0 +$. Nous avons donc :

$$(54) \quad N' = \frac{N \left(\begin{array}{cc} 0 + \\ 0 0 \end{array} \right) - N \left(\begin{array}{cc} + + \\ 0 + \end{array} \right)}{N(\bar{c}a)^2}$$

Le sens de cette relation est assez clair : on doit prendre la différence des nombres d'angles droits saillants et d'angles droits rentrants séparant un pore au S.O. et un grain au N.E. Cette différence est égale à l'unité pour chaque grain simplement connexe.

Si nous avons adopté la deuxième définition, (érosion des grains) selon la et, corrélativement, dilatation des pores), nous aurions trouvé la valeur plus forte :

La difference entre les deux est naturellement imputable au nombre $N \div 0$ + $N(0 \div)$ des configurations diagonales. De plus, l'érosion des grains equivalent à la dilatation des pores, on voit que $-V_c$ se definit à partir des pores de la meme manière que V_v à partir des grains. On peut donc dire que $-V_c$ est le nombre de connexité des pores. Mais, en fait, (abstraction faite de la latitude que nous avons quant au choix de la composante à dilater) il n'est pas possible de caractériser separement la connexité des grains et celle des pores.

Lorsque les grains sont simplement connexes, en effet, V_v represente le nombre des composantes connexes des grains. Mais si les grains contiennent des enclaves, celles-ci se comportent negativement : pour une dilatation du grain, le contour de l'enclave est reduit, et non augmente de δa . Ainsi la signification generale de V_v est la suivante : Le nombre specifique de connexité represente, dans le cas general, le nombre des grains connexes diminue du nombre des enclaves qu'ils contiennent. Ou encore, si nous faisons abstraction d'une des composantes des pores (celle qui joue le role du fond general au sein duquel s'individualisent les grains que l'on voit en relief), le nombre V_v represente la difference entre les nombres des composantes des grains et des pores. Il ne permet pas de connaitre chacun de ces nombre separement.

Indiquons encore, rapidement, une autre signification de V_v . Dans un milieu à trois dimensions, $V_v(\omega)$ est une fonction de la direction ω de la normale du plan de la section à deux dimensions dans laquelle on a determine ce nombre de connexité. La valeur moyenne

$$\bar{V}_v = \frac{1}{4\pi} \int V_v(\omega) d\omega$$

de ce nombre pour toutes les directions de l'espace est liée à l'intégrale de la courbure moyenne $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ de la surface de séparation des grains et des pores. En s'appuyant sur un théorème classique de Meusnier, on peut, en effet, démontrer que l'on a :

$$\bar{C} = \frac{1}{4\pi} \int (C) d\Omega$$

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

l'intégrale définissant C étant étendue à la surface de séparation contenue dans le volume unité. Il est essentiel de noter que la courbure moyenne est prise ici algébriquement.

2°/ Nombres spécifiques de convexité des grains et des pores.

Nous allons maintenant envisager la notion d'individualité du point de vue de la convexité, en partant de la représentation spontanée selon laquelle grains et pores entrent en conflit pour s'affirmer



Fig. II

sous forme convexe. Nous voyons, sur la figure II un grain lancer deux pseudopodes à l'assaut des pores. Chacun d'eux constitue une ébauche d'individualisation. Ce grain, du point de vue de la convexité, doit compter pour plus de 1, et cependant pour moins de 2, puisque ces deux ébauches n'ont pas abouti à une séparation

complète, mettons qu'il soit équivalent à 1,5 grains convexes. Mais ces deux pseudopodes, du fait même qu'ils tendent vers une existence autonome, sont séparés l'un de l'autre par une langue ou une avancée convexe des pores à l'intérieur des grains. Le point de vue se renverse et nous sommes maintenant tentés de dire que les pores s'efforcent de conquérir une individualité aux dépens des grains. Il ne s'agit,

cependant, là aussi, que d'une ébauche inachevée, équivalente, par exemple, à la moitié d'un individu convexe. La différence entre les nombres d'individus convexes équivalents aux grains et aux pores, ici $1,5 - 0,5 = 1$, doit rester constante et égale à l'unité (c'est à dire au nombre d'individus connexes), tant que les deux pseudopodes ne se rejoignent pas, et tant que l'avancée des pores ne parvient pas à couper en deux le grain qu'elle attaque. Cette constance, qui exprime la solidarité des grains et des pores dans leurs efforts antagonistes vers la forme convexe, va se trouver brusquement rompue si l'avancée des pores parvient à traverser le grain de part en part, et perd ainsi brusquement son individualité : il y a alors deux grains disjoints, mais plus aucune tendance des pores vers la convexité. Nous sommes passés brusquement de $+1$ à $+2$. Au contraire, si les deux pseudopodes émis par le grain parviennent à se rejoindre, ils perdent d'un seul coup leur début d'autonomie. Mais comme ils ont encerclé une enclave, c'est à dire un individu complet des pores, le nombre de connexité est passé cette fois brusquement de $+1$ à 0 . Donnons de ces notions une définition géométrique plus précise.

a/ La rotation de la normale. Soit ds un élément d'arc du contour séparant des pores le grain de la figure II, et R son rayon de courbure. Là où le grain a un comportement convexe, le centre de courbure tombe du côté du grain, et R est positif. Là, au contraire, où le grain a un comportement concave, le centre de courbure tombe dans les pores, et R est négatif. D'autre part $d\alpha = \frac{ds}{R}$ représente la rotation de la normale, et ce petit angle est positif ou négatif en même temps que R. Si donc nous posons :

$$(32) \quad N_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{R>0} \frac{ds}{R}$$

$$N_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{R<0} \frac{ds}{|R|}$$

nous obtenons deux nombres positifs. N_1 vaut 1 si le grain est parfaitement convexe, et N_1 est supérieur à 1 si le grain possède des concavités. N_1 , de même, est lié à ces concavités des grains, qui sont des convexités pour les pores. Comme la rotation totale de la normale, comptée algébriquement, le long d'un contour simple fermé vaut toujours 2π , on a ici :

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega}{R} = 1$$

Si le grain de la figure II contenait une enclave, le contour de cette enclave devrait être décrit dans le sens négatif. On aurait alors $N_1 - N_2 = 0$. Ainsi, dans le cas général, la différence $N_1 - N_2$ va représenter le nombre des composantes connexes des grains diminuée du nombre des enclaves qu'ils contiennent. Elle est donc égale au nombre de connexité.

Ces notions se transposent sans peine sous une forme probabiliste. Nous appellerons nombre spécifique de convexité des grains $\bar{V}_1$, l'espérance mathématique de la rotation positive de la normale (divisée par 2π), lorsque l'on décrit les contours séparant les grains et les pores contenus dans l'unité de surface. De même, nous appellerons nombre spécifique de convexité des pores $\bar{V}_2$, l'espérance de la rotation négative de la normale (divisée par 2π).

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_1 = \frac{1}{2\pi} E \left[\int_{R>0} \frac{\omega}{R} \right] \\ \bar{V}_2 = \frac{1}{2\pi} E \left[\int_{R<0} \frac{\omega}{R} \right] \end{array} \right.$$

Les intégrales sont prises, respectivement, sur les portions positive et négatives de la ligne séparant les grains et les pores contenus dans l'unité de surface Σ .

Le nombre spécifique de connexité $\bar{V}_c$, lié à la rotation totale de

la normale (comptée algébriquement) apparaît alors comme la différence des deux nombres précédents :

$$(54) \quad \dots = \dots$$

B/ Determination expérimentale — Considérons, sur la figure II, une droite D et sa normale (orientée) de direction α . Lorsque D balaye le plan, dans la direction de sa normale, cette droite rencontrera séparément chacun des deux pseudopodes. Pour ce balayage, tout se passe comme s'il existait deux grains distincts. Pour un balayage effectuée dans une autre direction, par exemple dans la direction opposée $\alpha + \pi$, le grain de la figure II n'est rencontré qu'une fois. Designons par $N(\alpha)$ le nombre apparent des grains rencontrés dans un balayage effectuée dans la direction α , et cherchons à évaluer sa valeur moyenne pour toutes les directions α , c'est à dire l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(\alpha) d\alpha$$

Soit ds un élément d'arc du contour. Si R est négatif, c'est à dire s'il s'agit d'un arc concave pour le grain, cet arc n'apparaîtra pour aucune direction α comme le germe d'une nouvelle composante des grains venant à naître sur D au cours du processus de balayage. Si R est positif, l'arc est convexe, et, la rotation de la normale étant $d\alpha = \frac{ds}{R}$, cet arc apparaîtra comme un germe chaque fois que la direction du balayage tombera dans cet angle $d\alpha = \frac{ds}{R}$. Ainsi, la valeur moyenne du nombre $N_+(\alpha)$ est égale au nombre de convexité N_+ du grain. :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_+(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{R>0} \frac{ds}{R} = N_+$$

On désignera, de la même manière, par $N_-(\alpha)$ le nombre apparent des pores rencontrés dans le balayage, et la valeur moyenne de $N_-(\alpha)$ est

egale au nombre N_c de convexité des pores :

$$N_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_c(\alpha) d\alpha$$

Dans la presentation probabiliste, enfin, on introduit les nombres spécifiques $V_v(\alpha)$ et $V_c(\alpha)$ des grains et des pores rencontrés par unité de surface dans le balayage effectuée selon la direction α , et les nombres spécifiques s'en déduisent par les relations :

$$(35) \quad \begin{aligned} V_v &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_v(\alpha) d\alpha \\ V_c &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_c(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

Ces nombres $V_v(\alpha)$ et $V_c(\alpha)$ sont accessibles expérimentalement. Pour un balayage effectuée du Sud vers le Nord ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), il suffit, en effet, de faire l'inventaire des configurations :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 + 0 & , & 0 + + 0 & , & 0 + + + 0 & , & 0 + + + + 0 \\ 0 0 0 & , & 0 0 0 0 & , & 0 0 0 0 0 & , & 0 0 0 0 0 0 \end{array} \quad \text{etc...}$$

pour obtenir $V_c(\frac{\pi}{2})$. En ce qui concerne V_v , qui se rapporte à la composante considérée comme faible (les pores), pour laquelle les connexions diagonales ne sont pas autorisées, le balayage effectuée du Nord vers le Sud permet d'évaluer $V_v(-\frac{\pi}{2})$ en faisant l'inventaire des configurations :

$$\begin{array}{ccccccc} + & & + + & & + + + & & + + + + \\ + 0 + & , & + 0 0 + & , & + 0 0 0 + & , & + 0 0 0 0 + \end{array} \quad \text{etc...}$$

On vérifiera sans peine que la différence entre les nombres des configurations utilisées pour déterminer $V_v(+\frac{\pi}{2})$ et $V_c(-\frac{\pi}{2})$ coïncide avec le nombre

$$N \left(\begin{array}{c} 0 + \\ 0 0 \end{array} \right) - N \left(\begin{array}{c} + \\ 0 + \end{array} \right)$$

qui sert à l'estimation du nombre spécifique de connexité V_c . On a donc toujours la relation suivante, plus précise que (34) :

$$\bar{V}_c = \bar{V}_1(\alpha) - \bar{V}_0(-\alpha)$$

Ayant déterminé $\bar{V}_1(\alpha)$ et $\bar{V}_0(-\alpha)$ pour différentes directions α , on en déduit, en prenant les valeurs moyennes en α , une estimation des nombres spécifiques de convexité $\bar{V}_1$ et $\bar{V}_c$.

c/ Loi des rayons de courbure, l'inventaire des configurations du

type : $\begin{matrix} 0 & + & + & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

permet de construire une granulometrie (en nombre) des traversées marginales des grains. Il est clair qu'une telle granulometrie est en relation étroite avec la loi de repartition du rayon de courbure R du contour (limité aux portions $R > 0$)

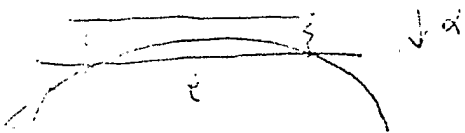


Fig. 12

Soit, en effet, $\bar{\Phi}_1(\ell)$ la fonction de repartition associée à cette granulometrie (elle dépend de α), et par conséquent l'expression :

$$\bar{V}_1(\alpha) [1 - \bar{\Phi}_1(\ell)] \delta \alpha$$

représente le nombre total des traversées marginales dont la longueur dépasse ℓ .

Chaque terminaison convexe des grains dont la normale positive possède la direction α apporte à ce total une contribution égale à :

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{8R} & \quad \text{si le rayon de courbure } R > \frac{\rho^2}{8\delta\alpha} \\ 0 & \quad \text{si } \dots\dots\dots R < \frac{\rho^2}{8\delta\alpha} \end{aligned}$$

Par suite, si nous désignons par $\Psi_1(r)$ la probabilité pour que le rayon de courbure d'une terminaison donnée soit inférieur à une valeur r , nous obtenons la relation :

$$(37) \quad \bar{V}_1(\alpha) [1 - \bar{\Phi}_1(\ell)] = \bar{V}_1(\alpha) \int_{\frac{\rho^2}{8\delta\alpha}}^{\infty} \left[1 - \frac{\rho^2}{8R\delta\alpha} \right] d\Psi_1(R)$$

Ainsi, la loi $\psi(R)$ de repartition des rayons de courbure, correspondant à une direction λ donnée de la normale, se relie de manière simple à la granulometrie $\bar{\Phi}_1(\ell)$ des traversées marginales. Pour expliciter cette relation, nous devons résoudre l'équation intégrale (37). Designons par

$$\varphi_1(\ell) = \frac{d}{d\ell} \bar{\Phi}_1(\ell)$$

la densité de fréquence associée à $\bar{\Phi}_1$, et dérivons (37) en ℓ . Il vient

$$\varphi_1(\ell) = \frac{\ell}{4\pi a} \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{1}{R} d\psi_1(R)$$

Differentiant à nouveau en ℓ , nous obtenons après un changement de variables évident, la relation cherchée, qui est :

$$1 - \psi_1\left(\frac{\ell^2}{4\pi a}\right) = - \int_{\ell}^{\infty} \frac{\ell^2}{2} \frac{d}{d\ell} \left[\frac{\varphi_1(\ell)}{\ell} \right] d\ell$$

Une intégration par parties nous permet de mettre cette relation sous la forme plus maniable suivante :

$$(38) \quad 1 - \psi_1\left(\frac{\ell^2}{4\pi a}\right) = \frac{\ell}{2} \varphi_1(\ell) + 1 - \bar{\Phi}_1(\ell)$$

Cette relation, cependant, n'a de sens que si les grains ne présentent pas d'angulosités (elle suppose, en effet, R grand devant la maille a). Il faut, pour qu'il en soit ainsi, que $\frac{d\psi_1}{dR}$ s'annule en $R = 0$. On vérifie, à l'aide de (38), que cette condition est vérifiée si :

$$\varphi_1(\ell) = 0$$

La valeur en $\ell = 0$ de la densité de fréquence des traversées marginales des grains a le même sens que celle des traversées elles-mêmes : elle représente un indice d'angulosité.

Les granulometries ψ_1 et Φ_1 dependent de la direction α . Il convient de leur substituer leurs valeurs moyennes :

$$\bar{\psi}_1(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\alpha) \psi_1(R; \alpha) d\alpha$$

$$\bar{\psi}_1 \bar{\Phi}_1(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\alpha) \bar{\Phi}_1(R; \alpha) d\alpha$$

$\bar{\psi}_1(R)$ represente alors veritablement la loi de repartition du rayon de courbure sur les portion positives (convexes) du contour limite. Chaque rayon de courbure est ici compte pour un poids proportionnel à la rotation positive de la normale, qui est $d\alpha = \frac{ds}{R}$.

d/ Decomposition du perimetre specifique en ses portions convexes et concaves. Du point de vue experimental, le debut des courbes $\bar{\psi}_1(R)$ et $\bar{\Phi}_1(R)$ risque d'etre mal connu, à cause de la presence d'angulosites ou de ~~XXXXXXXX~~ rayons de courbure inferieurs à la maille. Par contre les moments de ces granulometries seront mieux connus. En particulier, considerons le moment du premier ordre ~~XX~~ :

$$E(R_1) = \int_0^{\infty} [1 - \bar{\psi}_1(R)] dR$$

Compte tenu de (38), nous trouvons :

$$E(R_1) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\frac{\ell}{2}} \varphi_1(\ell) + 1 - \bar{\Phi}_1(\ell) \right] \frac{\rho d\rho}{4\delta a}$$

c'est à dire :

$$E(R_1) = \frac{1}{4\delta a} \int_0^{\infty} \ell^2 \varphi_1(\ell) d\ell$$

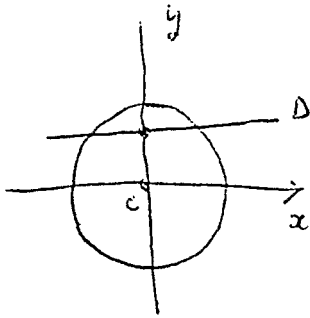
La valeur moyenne du rayon de courbure sur les portion convexes du contour se deduit directement du moment d'ordre deux de la granulometrie des traversees marginales des grains. On exprimera de la meme façon la valeur moyenne $E(R_0)$ du rayon de courbure sur les portions concaves du contour, à l'aide de la granulometrie $\varphi_0(\ell)$ des traversees

$$\frac{4}{3} \pi m_3(3) = \pi m_2(3) \times 2 m_1(1) = 2 m_1(3) \times \pi m_2(2)$$

$$\pi m_2(2) = 2 m_1(2) \times 2 m_1(1)$$

dont le sens intuitif est evident : le volume moyen de la sphere est egal au produit de son contour apparent moyen par la traversee moyenne des grains induits sur une droite, etc...

Toutefois, les relations (44) ne permettent pas, à elles seules, de determiner θ_2 et θ_3 à partir d'observations lineaires, puisque l'on ne connait que les moments $m_\lambda(1)$ de la granulometrie lineaire, et non les moments $m_\lambda(2)$ et $m_\lambda(3)$ qui sont les moments des granulometries originelles. Dans le paragraphe suivant, nous trouverons un procede très general permettant de resoudre cette difficulté. Pour l'instant, nous nous contenterons d'indiquer des methodes plus particulières.



Soit, tout d'abord, à determiner θ_1 , connaissant θ_1 et F_1 . Considerons dans le plan un cercle de rayon R, et une traversee observée le long d'une droite D parallèle à l'axe des x, dont la demi-longueur est :

Fig. I3

$$h(y) = \sqrt{R^2 - y^2} \quad y \leq R$$

considerons l'integrale :

$$2 \int_0^R \frac{dy}{h(y)} = 2 \int_0^R \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \pi$$

Elle possède la même valeur (sans dimension) π , quel que soit le rayon R. Par conséquent, si, dans le carré unité, existent θ_2 cercles, la somme de toutes ces integrales pour ces θ_2 cercles vaut $\pi \theta_2$. Mais cette somme peut être évaluée à partir d'observations faites sur une droite. Elle représente, en effet, le produit de θ_1 (nombre

plan par la formule

$$(47) \quad \theta_3 = \theta_2 \frac{m_{-1}(\lambda)}{\pi}$$

3°/ Reconstitution de la granulometrie des sphères.

Proposons nous, en premier lieu, de reconstituer la granulometrie F_3 des sphères connaissant le nombre θ_1 et la granulometrie F_1 des demi-traversees ~~(parallèles à l'axe des x)~~ qu'elles induisent. Dans le cube unite, les demi-traversees (parallèles à l'axe des x) de longueur supérieure à h occupent, dans le plan des (y, z) , une aire égale à $\theta_1 [1 - F_1(h)]$. A cette aire, chaque sphère de rayon R apporte une contribution $\pi (R^2 - h^2)$, si R est supérieur à h (et nulle si R est inférieur à h). Nous avons donc l'égalité :

$$\theta_1 [1 - F_1(h)] = \theta_3 \int_h^{\infty} \pi (R^2 - h^2) dF_3(R)$$

Effectuant une integration par parties, nous trouvons :

$$(48) \quad \theta_1 [1 - F_1(h)] = 2\pi \theta_3 \int_h^{\infty} R [1 - F_3(R)] dR$$

Il suffit de derivier en h l'équation (48) pour obtenir une relation entre l'histogramme $f_1(h)$ et la granulometrie F_3 :

$$\theta_1 f_1(h) = 2\pi \theta_3 h [1 - F_3(h)]$$

Pour $h = 0$, on doit avoir $F_3(0) = 0$. Donc, necessairement, $f_1(0) = 0$ et de plus :

$$\theta_3 = \frac{\theta_1}{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(h)}{h} = \theta_1 \frac{f_1'(0)}{2\pi}$$

Nous retrouvons ainsi la relation (46) établie anterieurement.

Compte tenu de cette relation, il vient :

$$(49) \quad 1 - F_3(R) = \frac{1}{R} \frac{f_1(R)}{f_1'(0)}$$

Ainsi, la granulometrie des spheres peut etre integrelement reconstituee à partir de l'histogramme des demi-traversees.

Nous pouvons, en particulier, calculer les moments associes à F_3 . Comme on a :

$$m_\alpha(3) = \int_0^\infty \alpha R^{\alpha-1} [1 - F_3(R)] dR$$

on trouve immediatement :

$$(50) \quad m_\alpha(3) = \alpha \frac{m_{\alpha-2}(1)}{f_1'(0)}$$

La relation (43) permet ensuite d'obtenir les moments en mesure. On remarque que le facteur $f_1'(0)$ disparaît de leur expression.

Il vient :

$$M_\alpha(3) = \frac{m_{\alpha+3}(3)}{m_3(3)} = \frac{\alpha+3}{3} \frac{m_{\alpha+1}(1)}{m_1(1)}$$

c'est à dire :

$$(51) \quad M_\alpha(3) = \frac{\alpha+3}{3} M_\alpha(1)$$

Les moments de meme ordre des granulometries (en mesure) originales et induites se deduisent directement les uns des autres. C'est là, comme nous le verrons, une circonstance generale. Dans le cas de grains convexes, l'étoile se deduisait déjà directement du moment correspondant de la granulometrie des traversees. (exprimee en longueur). Dans le cas où les grains sont spheriques, cette relation s'étend à tous les moments.

4°/ Reconstitution de la granulometrie des cercles.

Pour reconstituer F_2 à partir de θ_1 et de F_1 , nous remarquons que, dans le carré unité, les demi-traversees parallèles à l'axe des x et de longueur supérieures à h interceptent sur l'axe des y une longueur $\theta_1 [1 - F_1(h)]$. Mais chaque cercle de rayon $R \geq h$ apporte une contribution égale à $2 \sqrt{R^2 - h^2}$. Nous avons donc :

$$\theta_1 [1 - F_1(h)] = 2 \theta_2 \int_h^\infty \frac{1}{\sqrt{R^2 - h^2}} dF_2(R)$$

En effectuant une intégration par parties, nous trouvons :

$$(52) \quad \theta_1 [1 - F_1(h)] = 2 \theta_2 \int_h^\infty [1 - F_2(R)] \frac{R dR}{\sqrt{R^2 - h^2}}$$

Cette équation intégrale est un tout petit peu plus compliquée que (48), du fait que h figure explicitement sous le signe somme. On sait¹ cependant la résoudre. Si l'on désigne par $f_1(h) = F_1'(h)$ l'histogramme des demi-traversees, on démontre, en effet, que l'équation intégrale (52) a comme unique solution :

$$\theta_2 [1 - F_2(R)] = \frac{\theta_1}{\pi} \int_R^\infty \frac{1}{\sqrt{h^2 - R^2}} f_1(h) dh$$

Pour $R = 0$, on doit avoir $F_2(0) = 0$. Par conséquent, il vient :

$$\theta_2 = \frac{\theta_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{h} f_1(h) dh$$

Ceci n'est pas autre chose que la relation (45) déjà établie antérieurement et que nous redémontrons ici grâce à un procédé plus général et plus puissant. Compte tenu de cette relation, nous trouvons :

$$(53) \quad 1 - F_2(R) = \frac{1}{m_{-1}(1)} \int_R^\infty \frac{1}{\sqrt{h^2 - R^2}} f_1(h) dh$$

¹ - G. Matheron "Elements pour une théorie des milieux poreux" Masson, Paris, sous presse.

Ici encore, donc, il est possible de reconstituer integralement la granulometrie des cercles à partir de l'histogramme des demi-traversees. La relation obtenue est cependant moins simple que dans le cas de la sphere.

En ce qui concerne les moments, nous obtiendrons $m_\alpha(2)$ en multipliant le deuxieme membre de (53) par $\alpha R^{\alpha-1}$ et en integrant en R. Il suffit d'intervertir l'ordre des integrations pour obtenir :

$$(54) \quad m_\alpha(2) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})} \frac{m_{\alpha-1}(1)}{m_{-1}(1)}$$

Le symbole Γ represente la fonction eulerienne habituelle. Pour $\alpha = 1, 2$ et 3 , on trouve explicitement :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1(2) = \frac{\pi}{2 m_{-1}(1)} \\ m_2(2) = 2 \frac{m_1(1)}{m_{-1}(1)} \\ m_3(2) = 3 \frac{\pi}{4} \frac{m_2(1)}{m_{-1}(1)} \end{array} \right.$$

On n'oubliera pas que $m_\alpha(1)$ represente le moment d'ordre α des demi-traversees, et non des traversees elles-memes. En ce qui concerne les moments en mesure, on partira de leur definition (43) et des relations (53). Des calculs elementaires montrent que l'expression $m_{-1}(1)$ s'elimine, et que les moments en mesure de meme ordre $M_\alpha(1)$ et $M_\alpha(2)$ se deduisent directement l'un de l'autre par la formule :

$$(55) \quad M_\alpha(2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(2 + \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1 + \frac{1+\alpha}{2})} M_\alpha(1)$$

En particulier, pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1(2) = \frac{3\pi}{8} M_1(1) \\ M_2(2) = \frac{4}{3} M_2(1) \end{array} \right.$$

Remarque. Il est possible également de reconstituer la granulométrie F_n des sphères à partir de la granulométrie F_n des cercles induits. On obtient la même équation intégrale (52), en écrivant θ_2 et θ_3 au lieu de θ_1 et θ_2 , F_2 et F_3 au lieu de F_1 et F_2 etc... Ainsi, θ_3 est donné par l'équation (47), qui est une simple transposition de (45), et les relations (53) et (54) se transposent elles aussi sans difficulté. Il n'y a que les moments en mesure qui exigent un examen spécial. On trouve :

$$M_1(3) = \frac{32}{9\pi} M_1(2)$$

$$M_2(3) = \frac{5}{4} M_2(2)$$

Table des matières.

<u>INTRODUCTION</u>	I
<u>II-NOTIONS DEDUITES D'OBSERVATIONS PUREMENT LINEAIRES.</u>	6
<u>1°/ La covariance.</u>	6
a/ Considerations geometriques preliminaires.	6
b/ L'interpretation probabiliste.	9
c/ La surface specifique.	10
d/ La portee	12
<u>2°/ Granulometries des traversees des pores et des grains.</u>	13
a/ Les moments fonctionnels $P(h)$ et $Q(h)$	13
b/ Les granulometries en nombre.	14
c/ Les granulometries en longueur.	17
d/ Courbure moyenne et angulosite.	19
e/ L'etoile des grains et l'etoile des pores.	21
f/ Relation entre l'etoile et la portee.	24
<u>II-ANALYSIS SITUS DES GRANULOMETRIES PLANES.</u>	27
<u>1°/ Le nombre specifique de connexite</u>	27
<u>2°/ Nombres specifiques de convexite des grains et des pores</u>	32
a/ La rotation de la normale.	33
b/ Determination experimentale.	35
c/ Loi des rayons de courbure.	37
d/ Decomposition du perimetre specifique.	39
<u>III-CAS DES GRAINS SPHERIQUES.</u>	41
<u>1°/ Notations.</u>	41
<u>2°/ Determination des nombres specifiques.</u>	42
<u>3°/ Reconstitution de la granulometrie des spheres.</u>	46
<u>4°/ Reconstitution de la granulometrie des cercles.</u>	47