N-68

POUR UNE THEORIE DES STRUCTURES ALEATOIRES

par

G. MATHERON - Août-Septembre 1967

AVANT-PROPOS

L'auteur n'est en aucune manière un mathématicien professionnel. C'est une reflexion sur les milieux poreux qui l'a conduit à entreprendre le présent travail. De là provient le principe très physique qui a servi de fil conducteur dans la construction des σ-algèbres et des topologies : identifier deux ensembles dès qu'ils ont même ouverture et même fermeture. Mais de là proviennent aussi les erreurs, maladresses et naïvetés dont ce texte fourmille, et pour lesquelles le lecteur voudra peut-être montrer quelques indulgences.

INTRODUCTION

A toute structure mathématique, il doit être possible d'associer son équivalent sur le mode aléatoire. Toute structure, en effet, se définit par son graphe C , qui est un sous-ensemble d'un espace convenable E, vérifiant les axiomes constitutifs - autrement dit, par un point du sous-espace de $\mathcal{P}(E)$ défini par ces axiomes. Si donc il est possible de construire sur ce sous-espace de $\mathcal{P}(E)$ une σ-algèbre et des probabilités, on aura, par le fait même, défini la structure aléatoire correspondante. On peut ainsi envisager des relations d'ordre aléatoire, des groupes aléatoires, des espaces à topologies aléatoires etc...

Dans la présente étude, nous traitons le cas d'un ensemble, d'une relation d'équivalence d'une fonction et d'une mesure aléatoires. Dans le choix de nos topologies et de nos σ-algèbres, nous nous laissons guider par un principe de nature très intuitive : à savoir que deux ensembles ayant même ouverture et même fermeture, deux fonctions ayant mêmes limites inférieure et supérieure, deux partitions dont les classes ont des ouvertures identiques, deux mesures, enfin, prenant la même valeur sur tout ensemble ouvert ne peuvent pas être réellement distingués l'un de l'autre et constituent une entité unique. Ce point de vue nous conduit à travailler non pas directement sur $\mathcal{P}(E)$, mais sur un espace quotient $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation : " $A \equiv A'$ si A et A' ont même ouverture et même fermeture. Il se trouve qu'il est alors possible de munir $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ d'une topologie pour laquelle cet espace est compact, et aussi de construire effectivement des probabilités sur la σ-algèbre associée à cette topologie.

Bien que certains resultats aient une valeur plus générale, nous supposerons toujours, dans tout ce qui suit, que l'espace de base E sur lequel nous travaillerons est muni d'une topologie localement compacte admettant une base dénombrable d'ouverts.

CHAPITRE I - ENSEMBLES ALEATOIRES

A - TOPOLOGIES SUR $\mathcal{P}$(E)

Dans ce qui suit, E désignera toujours un espace localement compact de type dénombrable, $\mathcal{F}$ (E) la famille des parties fermées de E, $\mathcal{G}$ (E) celle des ouverts de E, et nous écrirons souvent pour abréger $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ au lieu de $\mathcal{F}$(E) et $\mathcal{G}$ (E). Nous désignerons par $\emptyset$ le sous-ensemble vide de E. On aura donc $\emptyset \in \mathcal{F}$ et $\emptyset \in \mathcal{G}$. Le sous-ensemble vide de $\mathcal{P}$ (E) ,de $\mathcal{F}$ ou de $\mathcal{G}$ sera noté $\emptyset$: c'est une famille particulière d'éléments de E $\mathcal{P}$(E) (ou de $\mathcal{F}$,ou de $\mathcal{G}$) à savoir la famille vide. On notera que l'on a $\{\emptyset\} \neq \emptyset$,et $\emptyset \notin \emptyset$.

Enfin, nous désignerons souvent par $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie de E vérifiant les deux propriétés suivantes :

I- Tout B $\in \mathcal{B}$ est un ouvert relativement compact dans E ($\overline{B}$ est compact)

2_ Tout ouvert G $\in \mathcal{G}$ est réunion dénombrable de compacts $\overline{B}_n$ avec $B_n \in \mathcal{B}$ pour tout n.

La possibilité de construire une telle base resulte du lemme suivant :

LEMME- Si $\mathcal{B}'$ est une base dénombrable de la topologie de l'espace localement compact E, on peut extraire de $\mathcal{B}'$ une base possédant les deux propriétés énoncées ci-dessus.

Désignons, en effet, par $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ l'ensemble des ouverts B $\in \mathcal{B}'$ relativement compacts dans E. Soit x un point de E, B'$\in \mathcal{B}'$,B un voisinage de x, K$\subset$B' un voisinage compact de x contenu dans B', et $B_x \in \mathcal{B}'$, $B_x \subset K$ un voisinage de x contenu dans K. On a $\overline{B}_x \subset K$, donc $\overline{B}_x$ est compact, et $B_x \in \mathcal{B}$. On a bien $E = \bigcup_{x \in E} B_x$,et $\mathcal{B}$ constitue une base dénombrable de la topologie de E.

I°/ L'espace compact $\mathcal{F}$ (E)

Définition de la topologie $\mathcal{C}$ ($\mathcal{F}$) sur $\mathcal{F}$. K étant un compact de E et G un ouvert de E, nous désignerons par V^K et V_G les sous-ensembles de $\mathcal{F}$ (familles de fermés de E) définis par $F \in V^K \Leftrightarrow F \cap K = \emptyset$ et $F \in V_G \Leftrightarrow F \cap G \neq \emptyset$.

Les V^K sont stables pour l'intersection finie : $V^K \cap V^{K'} = V^{K \cup K'}$; et les V_G sont stables pour la réunion, finie ou non : $\bigcup_{i \in I} V_{G_i} = V_{\bigcup_{i \in I} G_i}$.

On notera que $V^{\emptyset} = \mathcal{F}$ et $V_{\emptyset} = \emptyset$ (partie vide de $\mathcal{F}$). Soit $\mathcal{V}$ la famille stable pour l'intersection finie engendrée par les V^K et les V_G.. Ses éléments sont de la forme : $V^{K_1} \cap \dots \cap V^{K_n} \cap V_{G_1} \cap \dots \cap V_{G_p} = V^{K_1, \dots K_n}_{G_1, \dots G_p}$.
(K_i compacts, G_j ouverts) . Comme $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ est compact, on peut se limiter aux $V^K_{G_1, \dots G_p}$. Nous désignerons par $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ la topologie de base $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{F}$.

Ainsi, $V^K_{G_1, \dots G_n}$ (K compact, G_i ouverts) est un voisinage ouvert de $F \in \mathcal{F}$ si, et seulement si : $K \cap F = \emptyset$, $K \cap G_i \neq \emptyset$ ($i = 1,2,.. n$)

Les voisinages de $\emptyset \in \mathcal{F}$ sont les V^K. Les voisinages de $E \in \mathcal{F}$ sont les $V_{G_1, \dots G_n}$ Ces deux éléments sont donc caractérisés par la pauvreté du filtre de leurs voisinages.

<u>THEOREME I</u> - Si la topologie $\mathcal{G}$ de E admet une base dénombrable, il en est de même de la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ de $\mathcal{F}$.

En effet, soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie de E constituée comme dans le lemme introductif. Soit $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ la famille des parties de $\mathcal{F}$ de la forme $V^{\overline{B}'_1, \dots \overline{B}'_k}_{B_1, \dots B_n}$ où les B_i et les B'_j appartiennent à $\mathcal{B}$. On a $\mathcal{V}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{V}$. Inversement, soit $V^K_{G_1, \dots G_\ell} \in \mathcal{V}$ et $F \in V^K_{G_1, \dots G_\ell}$. Il faut montrer que l'on peut trouver $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ avec $F \in V \subset V^K_{G_1, \dots G_\ell}$.

Pour chaque i ($i = 1,2,\dots \ell$) prenons $x_i \in F \cap G_i$, et soit $B_i \in \mathcal{B}$ avec : $x_i \in B_i \subset \overline{B}_i \subset G_i \cap \complement K$. Soit ensuite un recouvrement fini du compact K par des $B'_j \in \mathcal{B}$ ($j = 1, 2, \dots h$) vérifiant pour tout j : $\overline{B}'_j \cap \overline{B}_i = \emptyset$ ($i = 1,2 \dots \ell$) et $\overline{B}'_j \cap F = \emptyset$. On a bien :

$$F \in V^{\overline{B}'_1, \dots \overline{B}'_h}_{B_1, \dots B_\ell} \subset V^K_{G_1, \dots G_\ell}$$

<u>PROPOSITION I</u> - L'espace $\mathcal{F}$ est <u>séparé</u> pour la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{V})$.

En effet, soient F et F' deux fermés distincts de $\mathcal{F}$. Il existe au moins un point x de E avec $x \in F$ et $x \notin F'$ (ou inversement, $x \notin F$ et $x \in F'$). F' étant fermé, soit K_x un voisinage compact de x disjoint de F', et B_x un ouvert tel que $x \in B_x \subset K_x$. On a $F \in V_{B_x}$, $F' \in V^{K_x}$ et $V_{B_x} \cap V^{K_x} = V^{K_x}_{B_x} = \emptyset$: $\mathcal{F}$ est séparé .

<u>THEOREME 2</u>- L'espace $\mathcal{F}$ est <u>compact</u> pour la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{V})$.

Les parties fermées de $\mathcal{F}$ sont engendrées par les V_K et les V^G définies par :

$F \in V_K \iff F \cap K \neq \emptyset$ (K compact dans E)

$F \in V^G \iff F \cap G = \emptyset$ (G ouvert dans E)

Désignons par $\mathcal{C}$ la classe des parties de $\mathcal{F}$ de la forme V_K ou V^G . $\mathcal{C}$ Est une classe compacte, en ce sens que de toute famille C_i , $i \in I$, $C_i \in \mathcal{C}$ d'intersection vide $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$ on peut extraire une famille finie d'intersection vide. Pour le voir, supposons, en effet,

$$\left(\bigcap_{i \in I} V_{K_i} \right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} V^{G_j} \right) = \emptyset$$

Posant : $\Omega = \bigcup_{j \in J} G_j$ on a $\bigcap_{j \in J} V^{G_j} = V^{\Omega}$, et par suite $\bigcap_{i \in I} V_{K_i}^{\Omega} = \emptyset$

Cette intersection n'est vide que s'il existe un indice $i_0 \in I$ avec $K_{i_0} \subset \Omega$. En effet, dans le cas contraire, l'ensemble fermé : $\complement \Omega \cap \left(\bigcup_{i \in I} K_i \right)$ est disjoint de Ω et rencontre tous les K_i , donc appartient à $\bigcap_{i \in I} V_{K_i}^{\Omega}$

Soit donc i_0 avec $K_{i_0} \subset \Omega = \bigcup_{j \in J} G_j$: K étant compact est recouvert par un nombre fini de G_j , soient G_{j_1}, G_{j_2} ... G_{j_n}, et $V_{K_{i_0}} \cap V^{G_{j_1}} \cap \ldots \cap V^{G_{j_n}}$ est vide.–

Ainsi $\mathcal{C}$ est une classe compacte. Mais on sait que la classe stable pour ~~XXXXXXXX~~ la réunion finie et pour l'intersection (finie ou non) engendrée par une classe compacte est elle-même une classe compacte. Par suite l'espace $\mathcal{F}$ est compact.

Remarque. C'est pour assurer cette compacité qu'il nous a fallu considérer l'ensemble vide $\emptyset$ comme un élément de $\mathcal{F}$. Pour des $G_j \neq E$ recouvrant E ,on a : $\bigcap_{j \in J} V^{G_j} = V^E = \{\emptyset\}$

Cette intersection se réduit au seul élément $\emptyset$, mais on ne peut pas, en général, en extraire une famille finie d'intersection vide: $\mathcal{F} - \{\emptyset\}$ n'est pas compact.

COROLLAIRE - I - Si E est localement compact, il en est de même des espaces successifs $\mathcal{F}(E)$, $\mathcal{F}[\mathcal{F}(E)]$ ... formés par itération et munis de leurs topologies $\mathcal{C}(\mathcal{V})$ respectives.

COROLLAIRE 2 - De même, si l'espace localement compact E admet une base dénombrable, les itérés successifs sont également de type dénombrable.

Ces corollaires resultent immédiatement des théorèmes I et 2.

Nous allons maintenant étudier la convergence dans $\mathcal{F}$ en nous limitant à la convergence des suites $F_n \in \mathcal{F}$, puisque $\mathcal{F}$ est de type dénombrable.

PROPOSITION 2 - Pour qu'une suite F_n d'éléments de $\mathcal{F}$ converge vers $F \in \mathcal{F}$, il faut et il suffit que pour tout ouvert G et tout compact K de E les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$\text{I- } F \cap G \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad F_n \cap G \neq \emptyset$$
$$\text{2- } F \cap K = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad F_n \cap K = \emptyset$$

Celà resulte des définitions mêmes.

THEOREME 3 -. Pour qu'une suite F_n converge dans $\mathcal{F}$ vers $F \in \mathcal{F}$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

I' - Tout $x \in F$ est limite dans E d'une suite de points $x_n \in F_n$ (n prenant toutes les valeurs entières, sauf au plus un nombre fini) .

2' - Toute suite constituée d'éléments $x_{n_k} \in F_{n_k}$, où F_{n_k} est une suite partielle de F_n, a ses valeurs d'adhérence dans F.

De plus, la condition I' est équivalente à la condition I de la proposition 2, et la condition 2' est équivalente à la condition 2 de cette même proposition.

Il suffit évidemment de démontrer la dernière partie de l'énoncé.

Montrons I $\Rightarrow$ I'. Si F est vide, I' est trivialement vérifiée. Supposons $F \neq \emptyset$, et soit $x \in F$. Soit $G_1 = E \supset G_2 \supset G_3$ ... un système fondamental de voisinages ouverts et décroissants de x. Tout G_k rencontre F, et, d'après I, on peut trouver N_k avec $F_n \cap G_k \neq \emptyset$ pour $n \geqslant N_k$. Construisons une suite x_n dans E en ~~XXXXXX~~ prenant :

$$x_1 \in F_1 \quad \emptyset \quad \ldots\ldots \quad x_{N_2-1} \in F_{N_2-1} \quad \emptyset$$
$$x_{N_k} \in F_{N_k} \cap G_k \quad \ldots \quad x_{N_{k+1}-1} \in F_{N_{k+1}-1} \cap G_k$$

Cette suite converge vers x et vérifie la condition $x_n \in F_n$.

Montrons I' $\Rightarrow$ I . Si F est vide, I est vérifié. Soit donc x un point et G un ouvert avec $x \in F \cap G$. Par hypothèse, il existe $x_n \in F_n$, $x_n \Rightarrow x$ dans E. Donc, G étant voisinage de x, il existe N avec $x_n \in F_n \cap G$ pour $n \geqslant N$.

Montrons 2 $\Rightarrow$ 2'. Si F = E , le résultat est acquis. Soit donc $x \notin F$ et K un voisinage compact de x., disjoint de F. D'après 2, il existe N avec $F_n \cap K = \emptyset$ pour $n \geqslant N$. Donc x n'est valeur d'adhérence pour aucune suite $x_{n_k} \in F_{n_k}$, ce qui prouve 2'.

Montrons que la négation de 2 entraine celle de 2'. Autrement dit, supposons qu'il existe K compact dans E disjoint de F rencontrant une infinité de F_n, soient F_{n_1},.. F_{n_k} ... Pour tout k, prenons $x_{n_k} \in F_{n_k} \cap K$. Cette suite admet sur le compact K une valeur d'adhérence $x \in K$ qui n'appartient pas à F.

<u>COROLLAIRE I</u> – Si une suite F_n converge vers F dans $\mathcal{F}$, F coïncide avec l'ensemble des points x tels qu'il existe une suite $x_n \in F_n$ convergeant vers x dans E (n prenant toutes les valeurs entières, sauf au plus un nombre fini).

En effet, si $x_n \in F_n$ et si $x_n \to x$ dans E, $x \in F$ d'après 2'. Inversement, si $x \in F$, il existe, d'après 1', une suite $x_n \in F_n$ convergeant vers x.

<u>COROLLAIRE 2</u>– L'application $(F,F') \to F \cup F'$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ est continue.

En effet, soit $F_n \to F$ et $F'_n \to F'$. Montrons $F_n \cup F'_n \to F \cup F'$. Tout $x \in F \cup F'$ appartient à F ou à F', donc est limite d'une suite $x_n \in F_n$ ou d'une suite $x_n \in F'_n$, et 1' est vérifiée. Si x est valeur d'adhérence d'une suite $x_{n_j} \in F_{n_j} \cup F'_{n_j}$ il est valeur d'adhérence pour une suite partielle $x_{n'_j} \in F_{n'_j}$ (ou $x_{n'_j} \in F'_{n'_j}$), donc appartient à F (ou à F') et 2' est vérifiée.

On notera que l'intersection $F \cap F'$ n'est pas une opération continue.

<u>PROPOSITION 3</u>– Si l'espace E est connexe, $\mathcal{F}(E)$ est connexe.

Soit un recouvrement de $\mathcal{F}$ par deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$. Il faut montrer que l'un de ces deux ouverts est vide.

Considérons d'abord le sous-ensemble E_k de $\mathcal{F}$ formé des parties $F = \{x_1, \dots x_k\}$ de E constituées de k éléments distincts ou non. On a $E_1 \subset E_2 \subset \dots$. Munissons E_k de la topologie induite par celle de $\mathcal{F}$. La bijection $(x_1, \dots x_k) \to \{x_1, \dots x_k\}$ de E^k sur E_k est <u>continue</u>. En effet, soit $V^K_{G_1,\dots G_n}$ un voisinage de $\{x_1, \dots x_k\}$. Il est toujours loisible de supposer les ouverts G_i disjoints. On a $x_i \in \complement K$ $(i = 1,2..k)$, et tout x_i appartient à un ouvert G_{j_i} qui est soit E, soit l'un des $G_1, \dots G_n$, l'ensemble $\{G_{j_1}, \dots G_{j_k}\}$ contenant l'ensemble $\{G_1, \dots G_n\}$ (ce qui suppose $k \geq n$). Alors l'ouvert $\complement K \cap G_{j_1} \times \dots \times \complement K \cap G_{j_k}$ de E^k contient $(x_1, \dots x_k)$ et tout point de cet ouvert a son image $\{x_1, \dots x_k\}$ dans $V^K_{G_1,\dots G_n}$ ce qui montre la continuité annoncée. Comme E^k est connexe, il en est de même de E_k. De plus, les E_k étant croissants sont contenus dans le même ouvert $\mathcal{O}_1$ ou $\mathcal{O}_2$. Supposons, par exemple $\bigcup_{k>0} E_k \subset \mathcal{O}_1$.

Soit maintenant $F \in \mathcal{F}$ un fermé non vide. Si $F \in \mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_2$ étant ouvert, il existe un voisinage $V^K_{G_1,\dots G_k}$ de F contenu dans $\mathcal{O}_2$, avec des $G_1 \dots G_k$ non vides, et $K \neq E$, puisque $F \neq \emptyset$. Soit donc $x_1 \in G_1 \cap \complement K, \dots x_k \in G_k \cap \complement K$. On a : $\{x_1, \dots x_k\} \in V^K_{G_1,\dots G_k} \subset \mathcal{O}_2$ ce qui contredit $E_k \subset \mathcal{O}_1$. Donc $F \in \mathcal{O}_1$.

Enfin, si $\emptyset$ appartient à $\mathcal{a}_2$, un voisinage V^K de $\emptyset$ est contenu dans $\mathcal{a}_2$, et, pour $x \notin K$, on a $\{x\} \in V^K \subset \mathcal{a}_2$, ce qui est impossible. Donc $\emptyset \in \mathcal{a}_1$, et $\mathcal{F}$ est connexe.

<u>COROLLAIRE</u>- Si E est connexe, les itérés $\mathcal{F}(E)$, $\mathcal{F}[\mathcal{F}(E)]$,... sont connexes.

<u>PROPOSITION 4</u> - Si B est un ouvert relativement compact dans E, la fermeture de V_B dans $\mathcal{F}(E)$ est $V_{\overline{B}}$.

En effet, de $V_B \subset V_{\overline{B}}$, résulte que la fermeture de V_B dans $\mathcal{F}$ est contenue dans le fermé $V_{\overline{B}}$ de $\mathcal{F}$. Inversement, soit $F \in V_{\overline{B}}$ et $V^K_{G_1,..G_n}$ un voisinage quelconque de F. On ne peut pas avoir $K \supset B$, car cette inclusion entraine $K \supset \overline{B}$ et $F \notin V_{\overline{B}}$. Soit donc $x \in B \cap \complement K$. $F \cup \{x\}$ est fermé dans E et appartient à la fois à V_B et à $V^K_{G_1,..G_n}$. Par conséquent, F est adhérent à V_B, et $V_{\overline{B}}$ est contenu dans la fermeture de V_B.

<u>COROLLAIRES</u> - 1 - L'ouverture de V^B dans $\mathcal{F}$ est $V^{\overline{B}}$ (B ouvert relativement compact).
2 - La fermeture dans $\mathcal{F}$ de $V_{B_1,..B_n} = V_{B_1} \cap .. \cap V_{B_n}$ est $V_{\overline{B}_1,..\overline{B}_n}$ - (B_1,.. B_n, ouverts relativement compacts.)
3 - Même énoncé pour une réunion finie.

<u>PROPOSITION 5</u> - Si B est un ouvert relativement compact de E vérifiant $B = \overset{\circ}{\overline{B}}$, la fermeture de $V^{\overline{B}}$ dans $\mathcal{F}(E)$ est V^B.

Cette fermeture est contenue dans le fermé V^B, puisque $V^{\overline{B}} \subset V^B$. Inversement, soit $F \in V^B$, c'est à dire $F \cap B = \emptyset$, et $V^K_{G_1,..G_n}$ un voisinage quelconque de F. Posons $G'_i = G_i \cap \complement K \cap \complement \overline{B}$ (i=1,2..n). G'_i n'est pas vide. (En effet, on a pour chaque i un point au moins $x_i \in G_i \cap F \cap \complement K$, et $x_i \notin B$ puisque $F \in V^B$. La relation $B = \overset{\circ}{\overline{B}}$ montre que x_i est limite de points de $\complement \overline{B}$, et le voisinage G'_i de x_i rencontre $\complement \overline{B}$) Par suite, l'ouvert $V^{K \cup \overline{B}}_{G'_1,..G'_n}$ n'est pas vide. Mais cet ouvert est contenu dans $V^K_{G_1,..G_n}$ et aussi dans $V^{\overline{B}}$? Ainsi, tout voisinage de F rencontre $V^{\overline{B}}$, donc F adhère à $V^{\overline{B}}$, et V^B est contenu dans la fermeture de $V^{\overline{B}}$.

<u>COROLLAIRE</u> - Si B est relativement compact et vérifie $B = \overset{\circ}{\overline{B}}$, l'ouverture de $V_{\overline{B}}$ dans $\mathcal{F}$ est V_B : la relation $B = \overset{\circ}{\overline{B}}$ dans E entraine la relation $V_B = \overset{\circ}{\overline{V_B}}$ dans $\mathcal{F}$.

2º/ L'espace $\mathcal{G}(E)$

L'application $G \to \complement G$ est une bijection de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{F}$. C'est un homéomorphisme si nous munissons $\mathcal{G}$ de la topologie engendrée par les W_K et les W^B définis comme suit :

$G \in W_K \Leftrightarrow G \supset K$ (K, compact dans E)

$G \in W^B \Leftrightarrow G \not\supset B$ (B, ouvert dans E)

En effet, $G \in W_K \Leftrightarrow \complement G \in V^K$ et $G \in W^B \Leftrightarrow \complement G \in V_B$. Les resultats du paragraphe précédent se transposent donc d'eux-mêmes.

THEOREME 1 - La topologie de $\mathcal{G}(E)$ admet une base dénombrable.

PROPOSITION 1 - $\mathcal{G}(E)$ est un espace séparé.

THEOREME 2 - $\mathcal{G}(E)$ est compact.

THEOREME 3 - Pour qu'une suite G_n converge vers G dans $\mathcal{G}$ il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1' -Tout $x \notin G$ est limite dans E d'une suite $x_n \notin G_n$ (n prenant toutes les valeurs entières sauf, au plus, un nombre fini)

2' - Aucun $x \notin G$ n'est valeur d'adhérence pour une suite $x_{n_k} \in \complement G_{n_k}$ de points extraits d'une suite partielle $\complement G_{n_k}$.

COROLLAIRE - L'application $(G,G') \to G \cap G'$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ est continue.

PROPOSITION 3 - Si E est connexe, $\mathcal{G}(E)$ est connexe.

Proposition 4 - Si B est un ouvert relativement compact dans E, la fermeture de W^B dans $\mathcal{G}(E)$ est $W^{\bar{B}}$

PROPOSITION 5 - Si B est relativement compact dans E et vérifie $B = \mathring{\bar{B}}$, la fermeture de $W_{\bar{B}}$ dans $\mathcal{G}(E)$ est W_B.

3º/ L'espace compact $\mathcal{K} = \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$

Dans ce qui suit, nous identifierons deux ensembles de E ayant même ouverture et même fermeture. Plus précisément, si nous désignons par $\mathcal{R}$ la relation : "$A \equiv A'$ si $\mathring{A} = \mathring{A}'$ et $\bar{A} = \bar{A}'$" dans $\mathcal{P}(E)$, nous travaillirons dans l'espace quotient $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$.

PROPOSITION 1 - L'application $A \to (\mathring{A}, \bar{A})$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$ applique $\mathcal{P}(E)$ sur le sous-ensemble $\mathcal{K}$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$ constitué des éléments (G,F) vérifiant l'inclusion $G \subset F$.

Comme $\mathring{A} \subset \bar{A}$ il s'agit d'une application dans le sous-espace " $G \subset F$ ". Inversement, soit $G \in \mathcal{G}$, $F \in \mathcal{F}$ avec $G \subset F$. Montrons qu'il existe $A \subset E$ avec $\mathring{A} = G$ et $\bar{A} = F$.

Un tel ensemble, s'il existe, doit :

- contenir G
- être dense dans l'ouvert $\complement \bar{G} \cap \mathring{F}$, sans cependant contenir aucun sous-ensemble ouvert de cet ouvert.
- contenir le fermé $F \cap \complement \mathring{F}$, et être contenu dans F.

Ainsi, A doit être de la forme $A = G \cup (\complement \bar{G} \cap \mathring{F} \cap D) \cup (F \cap \complement \mathring{F})$
D étant une partie dense dans E ainsi que son complémentaire ($\bar{D} = \overline{D^c} = E$).
Mais in versement, il est clair qu'un ensemble ainsi construit vérifie bien $\mathring{A} = G$ et $\bar{A} = F$.

<u>COROLLAIRE</u> – L'application $A \to (\mathring{A}, \bar{A})$ définit une bijection de $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ sur $\mathcal{H}$.

En effet, $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$ associée canoniquement à cette application de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{H}$.

Nous <u>identifierons</u> donc $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ avec ce sous-espace $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$: autrement dit, la classe selon $\mathcal{R}$ de $A \in \mathcal{P}(E)$ est identifiée au couple $(\mathring{A}, \bar{A})$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$, Nous munirons cet espace $\mathcal{H} = \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ de la topologie induite par la topologie produit $\mathcal{T}(\mathcal{W}) \otimes \mathcal{T}(\mathcal{V})$ de l'espace produit $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$.

<u>THEOREME 1</u> – E étant localement compact de type dénombrable, l'espace $\mathcal{H}$ est un sous-espace fermé, donc <u>compact</u>, de $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$ et sa topologie admet une base dénombrable.

$\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ étant compacts et de type dénombrable, il en est de même de l'espace produit $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$. Tout revient donc à montrer que $\mathcal{H}$ est fermé dans $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$. Puisqu'il existe une base dénombrable d'ouverts de $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$, il suffit de montrer que, si deux suites G_n et F_n convergent vers G et F dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ respectivement, et si l'on a $G_n \subset F_n$ pour tout n, alors $G \subset F$.

Si G est vide, le resultat est acquis. Soit donc $g \in G$ et $\bar{B}$ un voisinage compact de g contenu dans G. Comme $W_{\bar{B}}$ est un voisinage de G pour la topologie de $\mathcal{G}$, tous les G_n contiennent $\bar{B}$ à partir d'un certain rang. On a donc $g \in G_n \subset F_n$ pour n assez grand, et, par suite, (§ 2, Th. 3, corollaire 1) $g \in F$, d'où $G \subset F$

4º/ Les fonctionnelles $\overline{X}$ et $\overset{c}{X}$.

Désignons par $k(x)$ la fonction indicatrice d'un ensemble $A \in \mathcal{F}$, et posons pour tout ouvert G et pour tout compact K de E :

$$\overline{X}(A,G) = \operatorname*{Sup}_{x \in G} k(x)$$

$$\overline{X}(A,K) = \operatorname*{Sup}_{x \in K} k(x)$$

PROPOSITION 1 – Les ouverts de $\mathcal{F}$ sont engendrés par les parties de $\mathcal{F}$ de la forme " $\overline{X}(A,G) = 1$ " ou " $\overline{X}(A,K) = 0$ ", G ouvert et K compact quelconques dans E.

Celà resulte des équivalences $\overline{X}(A,G) = 1 \Leftrightarrow A \in V_G$ et $\overline{X}(A,K) = 0 \Leftrightarrow A \in V^K$

(et prenant les valeurs 0 ou 1

PROPOSITION 2 – Pour qu'une fonction $\overline{X}(G)$ définie sur $\mathcal{G}$ (ou sur une base $\mathcal{B}$ de la topologie de E) soit la fonctionnelle associée à un ensemble ,nécéssairement unique, $A \in \mathcal{F}$, il faut et il suffit que l'on ait pour toute famille G_i, $i \in I$, $G_i \in \mathcal{G}$:

$$\overline{X}\Big(\bigcup_{i \in I} G_i\Big) = \operatorname*{Sup}_{i \in I} \overline{X}(G_i)$$

La fonction indicatrice de $A \in \mathcal{F}$ est alors $k(x) = \operatorname*{Inf}_{G \in \mathcal{V}_x} \overline{X}(G)$, où $\mathcal{V}_x$ est le filtre des voisinages de x dans E, et, inversement, on a $\overline{X}(G) = \operatorname*{Sup}_{x \in G} k(x)$.

La condition de l'énoncé est évidemment nécéssaire, et, si $\overline{X}$ est la fonctionnelle associée à $A \in \mathcal{F}$ on a bien $k(x) = \operatorname*{Inf}_{G \in \mathcal{V}_x} X(G)$ puisque A est fermé.

In versement, soit $\overline{X}$ une fonctionnelle vérifiant la condition de l'énoncé, et posons $k(x) = \operatorname*{Inf}_{G \in \mathcal{V}_x} \overline{X}(G)$. Si $k(x) = 0$, il existe un voisinage ouvert G de x avec $\overline{X}(G) = 0$. Comme $G \in \mathcal{V}_y$ pour tout $y \in G$, on a $k(y) = 0$ sur G, et l'ensemble $A =$ " $k(x) = 1$ " est fermé dans E.

Il reste à vérifier que $\overline{X}(G)$ est bien la fonctionnelle associée à A. Posons $\overline{Y}(G) = \operatorname*{Sup}_{x \in G} k(x)$. Si $\overline{Y}(G) = 1$, on a $k(x) = 1$ pour un $x \in G$, et par suite $\overline{X}(G') = 1$ pour tout $G' \in \mathcal{V}_x$, donc en particulier $\overline{X}(G) = 1$. Si au contraire $\overline{Y}(G) = 0$, $k(x)$ est nul pour tout $x \in G$. Pour tout $x \in G$, on peut donc trouver $B_x \in \mathcal{V}_x$ avec $\overline{X}(B_x) = 0$. Mais $G \subset \bigcup_{x \in G} B_x$ entraine, d'après la condition de l'énoncé,

$$\overline{X}(G) \leq \overline{X}\Big(\bigcup_{x \in G} B_x\Big) = \operatorname*{Sup}_{x \in G} \overline{X}(B_x) = 0$$

On a donc bien $\overline{Y}(G) = \overline{X}(G)$.

On peut évidemment étendre la définition de la fonctionnelle $\overline{X}$ à des parties de $\mathcal{P}(E)$ plus étendues, et, en particulier, considérer la fonction $\overline{X}(F)$ définie pour $F \in \mathcal{F}$.

<u>PROPOSITION 3 -</u> Pour tout $F \in \mathcal{F}(E)$, $\mathcal{F}(F)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{F}(E)$.

En effet, les fermés de F sont des fermés de E, et $\mathcal{F}(F) \subset \mathcal{F}(E)$. D'autre part, si une suite F_n converge vers F_0 dans $\mathcal{F}(E)$ avec $F_n \subset F$ pour tout n, tout point $x \in F_0$ est limite de points $x_n \in F_n \subset F$, et , F étant fermé, on a $x \in F$ d'où $F_0 \subset F$.

<u>Définition.</u> (continuité en K). Une fonction d'ensemble $\overline{X}(K)$ définie sur la famille des parties compactes K de E est dite continue en un compact K_0 si, pour tout compact $K' \supset K$ la restriction de $\overline{X}$ à $\mathcal{F}(K')$ est continue en K_0 (pour la topologie induite sur $\mathcal{F}(K')$ par celle de $\mathcal{F}$.)

<u>PROPOSITION 4 -</u> La fonctionnelle $\overline{X}(K)$ associée à un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est continue en un compact K_0 si et seulement si on a $A \cap K_0 = \emptyset$ ou $\mathring{A} \cap K_0 \neq \emptyset$.

En effet, soit K' un compact quelconque. Si $\overline{X}(K_0) = 0$, on a $A \cap K_0 = \emptyset$, et $\overline{X}(K)$ est nul pour tout $K \in V^{A \cap K'} \cap \mathcal{F}(K')$: la continuité en K_0 est toujours vérifiée.

Supposons maintenant $\overline{X}(K_0) = 1$. On a $A \cap K_0 \neq \emptyset$. Si $\mathring{A} \cap K_0$ n'est pas vide, il suffit de prendre $x \in \mathring{A} \cap K_0$ et un ouvert G avec $x \in G \subset \mathring{A}$ pour avoir ~~X(K)XXpourXtoutX~~ $\overline{X}(K) = 1$ pour tout compact $K \in V_G$. Supposons, au contraire, $\mathring{A} \cap K_0 = \emptyset$. Tout ouvert G rencontrant K_0 contient des points de $\complement A$, et par suite $\overline{X}(K)$ ne peut pas être égal à 1 ~~s'annuler~~ pour tous les compacts appartenant à un voisinage de K_0 , et la continuité en K_0 n'est pas vérifiée.

Par <u>dualité</u>, on associera à tout $A \in \mathcal{G}$ la fonctionnelle $\mathring{X}$ définie pour tout $H \in \mathcal{P}(E)$ par : $\mathring{X}(A;H) = \operatorname*{Inf}_{x \in H} k(x)$,k(x) étant l'indicatrice de $A \in \mathcal{G}$.

Si A^c est le complémentaire de $A \in \mathcal{G}$, on a évidemment $A^c \in \mathcal{F}$ et $\mathring{X}(A,H) = 1 - \overline{X}(A^c,H)$ Ainsi, chacun des énoncés précedents se transpose de lui-même.

On note que, si A est un sous-ensemble quelconque de E, les fonctionnelles définies sur $\mathcal{G}$ par :

$$\overline{X}(A;G) = \operatorname*{Sup}_{x \in G} k(x)$$
$$\mathring{X}(A;G) = \operatorname*{Inf}_{x \in G} k(x)$$

où $k(x)$ est l'indicatrice de A, ne dépendent que de $\overline{A}$ et de $\mathring{A}$, c'est à dire de la classe de A dans $\mathcal{H}$: celà résulte des équivalences $A \cap G = \emptyset \iff \overline{A} \cap G = \emptyset$ et $A \supset G \iff \mathring{A} \supset G$. Ainsi :

PROPOSITION 5 - Un élément $(\mathring{A}, \overline{A})$ de $\mathcal{H}$ est determiné par les deux fonctionnelles $\overline{X}(\overline{A}, G) = \overline{X}(A, G)$ et $\mathring{X}(\mathring{A}, G) = \mathring{X}(A, G)$ ($A \in \mathcal{P}(E)$ élément quelconque de la classe $(\mathring{A}, \overline{A})$ de $\mathcal{H}$), Ces fonctionnelles vérifient les trois conditions suivantes :

$$
\begin{aligned}
1 - \quad & \overline{X}\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) = \sup_{i \in I} \overline{X}(G_i) \\
2 - \quad & \mathring{X}\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) = \inf_{i \in I} X(G_i) \qquad (G, G_i \in \mathcal{G}) \\
3 - \quad & \mathring{X}(G) \leq \overline{X}(G)
\end{aligned}
$$

Les indicatrices $\mathring{k}$ de $\mathring{A}$ et $\overline{k}$ de $\overline{A}$ s'en déduisent par les relations :

$$
\begin{aligned}
4 - \quad & \overline{k}(x) = \inf_{G \in \mathcal{V}_x} \overline{X}(G) \\
5 - \quad & \mathring{k}(x) = \sup_{G \in \mathcal{V}_x} \mathring{X}(G)
\end{aligned}
$$

Inversement, deux fonctions $\mathring{X}$ et $\overline{X}$ définies sur $\mathcal{G}$ et vérifiant les conditions 1,2 et 3 sont les fonctionnelles associées à un élément unique $(\mathring{A}, \overline{A})$ de $\mathcal{H}$, les indicatrices de $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ étant déterminées par les relations 4 et 5.

* 5º/ Cas où E est un espace métrique.

Si E est un espace métrique muni d'une distance d, la topologie de $\mathcal{F}$ est engendrée par les $V_{\mathring{B}_\varepsilon(x)}$ et les $V^{B_\rho(y)}$ où $\mathring{B}_\varepsilon(x)$ est la boule ouverte de rayon ε et de centre $x \in E$ et $B_\rho(y)$ la boule fermée de centre $y \in E$ et de rayon ρ. On vérifie immédiatement les équivalences :

$$
\begin{aligned}
A \in V_{\mathring{B}_\varepsilon(x)} & \iff d(x, A) < \varepsilon \\
A \in V^{B_\rho(y)} & \iff d(y, A) > \rho
\end{aligned}
$$

pour tout $A \in \mathcal{F}$, $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ désignant la distance de $x \in E$ au fermé A non vide. Pour $A = \emptyset$, on posera $d(x, A) = \infty$ et les équivalences ci-dessus restent valables dans ce cas.

PROPOSITION 1 - Pour qu'une suite A_n converge vers A dans $\mathcal{F}$ il faut et il suffit que, pour tout $x \in E$, la suite $d(x,A_n)$ converge vers $d(x,A)$ pour la topologie de la demi-droite compacte $\overline{R}_+$.

Celà résulte immédiatement des équivalences précédentes.

PROPOSITION 2 - Pour qu'une suite A_n soit convergente dans $\mathcal{F}$ il faut et il suffit que la suite $d(x,A_n)$ soit convergente dans $\overline{R}_+$ pour tout $x \in E$.

La condition est nécéssaire d'après la proposition précédente. Inversement, supposons que, pour tout $x \in E$, $d(x,A_n)$ converge dans $\overline{R}_+$ vers une limite $f(x)$. Comme $\mathcal{F}$ est compact, il existe une suite partielle A_{n_j} convergeant vers un $A \in \mathcal{F}$, et, d'après la proposition 1, $d(x,A_{n_j})$ converge vers $d(x,A)$. On a donc $d(x,A) = f(x)$, et la suite A_n converge vers A d'après la même proposition 1.

COROLLAIRE - Si, pour tout $x \in E$, $d(x,A_n)$ converge dans $\overline{R}_+$ vers une limite $f(x)$, cette limite $f(x)$ est une fonction continue. Si $f(x) = \infty$ en un point x, on a $f(y) = \infty$ en tout point $y \in E$.

L'espace compact $\mathcal{F}(E)$ peut être muni d'une structure uniforme compatible avec sa topologie et pour laquelle il est complet. Nous pouvons introduire plus commodément les suites de Cauchy dans $\mathcal{F}(E)$ à partir de la proposition suivante :

PROPOSITION 3 - L'espace $\mathcal{F}(E)$ est homéomorphe à un sous-espace de l'espace $\mathcal{C}(E, \overline{R}_+)$ des applications continues de E dans la demi-droite compacte $\overline{R}_+$ muni de la topologie induite par la topologie de la convergence simple.

En effet, l'application $\alpha : A \to d(x,A)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{C}(E,\overline{R}_+)$ est injective, puisque A est determiné par $d(x,A) = 0$. Il faut montrer que α est une application bicontinue de $\mathcal{F}$ sur $\alpha(\mathcal{F})$. Mais celà resulte immédiatement du fait que les voisinages " $\beta < d(x_0, A)$ " ou " $d(x_0, A) < \delta$ " d'un $d(x,A)$ de $\alpha(\mathcal{F})$ correspondent bijectivement aux $V^{B_\beta(x_0)}$ et aux $V_{\mathring{B}_\delta(x_0)}$

COROLLAIRE 1 - $\alpha(\mathcal{F})$ est compact dans $\mathcal{C}(E, \overline{R}_+)$.

COROLLAIRE 2 – Pour que A_n soit une suite de Cauchy de l'espace complet $\mathcal{F}(E)$, il faut et il suffit que, pour tout $x \in E$, $d(x, A_n)$ soit une suite de Cauchy de $\overline{R}_+$, ou encore que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes soit vérifiée :

$$\forall x \in E, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists N, \ \forall n, m \geq N \quad |d(x, A_n) - d(x, A_m)| \leq \varepsilon$$

$$\forall x \in E, \ \forall \lambda > 0, \ \exists N, \ \forall n \geq N \quad d(x, A_n) > \lambda$$

✳ 6º/ Cas où E est un groupe topologique abélien.

Nous noterons additivement la loi de composition du groupe topologique abélien E, et nous poserons :

$$A_x = \bigcup_{y \in A} \{y+x\} \qquad \text{pour tout } A \subset E$$

$$A \oplus B = \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \{x+y\} \qquad \text{pour tout } A \subset E \text{ et tout } B \subset E$$

Enfin le transposé d'un ensemble $A \subset E$ sera noté $\check{A} = \bigcup_{x \in A} \{-x\}$

On remarque que pour $B = \emptyset$, $A \oplus B = \emptyset$ quel que soit $A \subset E$.

PROPOSITION 1 – Si B est ouvert dans E, $A \oplus B$ est ouvert dans E quel que soit $A \subset E$. Si $F \in \mathcal{F}$ et si $K \subset E$ est compact, $F \oplus K$ est fermé.

Ce sont des resultats classiques.

PROPOSITION 2 – Si K est une partie compacte de E, l'application $F \to F \oplus K$ de $\mathcal{F}$ dans lui-même est continue.

En effet, $F \oplus K$ est fermé, d'après la proposition 1. Les équivalences :

$$(F \oplus K) \cap C = \emptyset \iff F \cap (C \oplus \check{K}) = \emptyset$$

montrent que l'image inverse d'un ouvert $V^{K'}_{G_1, \ldots G_n}$ est $V^{K' \oplus \check{K}}_{G_1 \oplus \check{K}, \ldots G_n \oplus \check{K}}$

Mais cet ensemble est ouvert dans $\mathcal{F}$, car les $G_i \oplus \check{K}$ sont des ouverts de E, et $K' \oplus \check{K}$ est compact, comme image du compact $K' \times \check{K}$ de $E \times E$ par l'application continue $(x,y) \to x+y$ de $E \times E$ dans E.

B - σ-ALGEBRES ET PROBABILITES SUR $\mathcal{P}(E)$

1º/ Lois spatiales et σ-algèbres maigre.

D'une manière générale, nous utiliserons la notation $S_B^{B'}$ au lieu de $V_B \cap V^{B'}$ pour désigner le sous-ensemble $\{ A : A \subset E , A \supset B , A \cap B' \neq \emptyset \}$ de $\mathcal{P}(E)$. Lorsque I et I' décrivent les parties finies de E, les $S_I^{I'}$ constituent manifestement une semi-algèbre de Boole. Nous appellerons σ-algèbre maigre et désignerons par $\sigma(\mathcal{M})$ la σ-algèbre engendrée par les $S_I^{I'}$, qui est celle de la loi spatiale.

Mais la formule :

$$\bigcap_{j \in J} S_{I_j}^{I'_j} = S_{\bigcup_j I_j}^{\bigcup_j I'_j}$$

montre que les $S_I^{I'}$ constituent également une classe compacte. Ainsi, d'après un théorème classique, toute fonction d'ensemble P simplement additive appliquant la semi-algèbre des $S_I^{I'}$ sur $[0,1]$ - c'est à dire toute loi spatiale de la forme :

$$P (x_1 \in A, \dots x_n \in A ; y_1 \notin A , \dots y_k \notin A)$$

se prolongera en une probabilité sur la σ-algèbre maigre et permettra de définir un ensemble aléatoire A sur $\mathcal{P}(E)$ muni de $\sigma(\mathcal{M})$.

Toutefois des propositions aussi utiles que : "l'ouvert G est contenu dans A" n'appartiennent pas à $\sigma(\mathcal{M})$, et nous devrons construire des σ-algèbres plus riches.

Il est également possible de munir $\mathcal{P}(E)$ de la topologie maigre $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ engendrée par les S_I et les $S^{I'}$, I et I' parties finies de E. On note que S_I et S^I sont complémentaires, donc à la fois ouverts et fermés dans $\mathcal{P}(E)$ pour $\mathcal{T}(\mathcal{M})$.

PROPOSITION 1 - L'espace $\mathcal{P}(E)$ est compact pour la topologie maigre $\mathcal{T}(\mathcal{M})$

En effet, c'est un espace séparé : si $A \neq A'$, soit (par exemple) $x \in A$ et $x \notin A'$. On a $A \in S_{\{x\}}$, $A' \in S^{\{x\}}$ et $S_{\{x\}} \cap S^{\{x\}} = \emptyset$.

On note ensuite que les S_I et les $S^{I'}$ constituent une classe compacte, et qu'il en est de même de la classe stable pour la réunion finie et pour l'intersection engendrée par les S_I et les $S^{I'}$, c'est à dire de la classe des fermés de $\mathcal{T}(\mathcal{M})$.

PROPOSITION 2 - La convergence dans $\mathcal{P}(E)$ pour la topologie maigre s'identifie à la convergence usuelle des familles d'ensemble.

En effet, soit A_j une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ filtrée par une base de filtre $\mathcal{J}$. Dire que cette famille converge vers A dans $\mathcal{P}(E)$ signifie que les deux conditions suivantes sont remplies :

1 - Pour tout $x \in A$ il existe $J \in \mathcal{J}$ avec $x \in A_j$ pour tout $j \in J$, c'est à dire :

$$A \subset \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \bigcap_{j \in J} A_j = \liminf_{\mathcal{J}} A_j$$

2 - Pour tout $y \notin A$, il existe $J \in \mathcal{J}$ avec, pour tout $j \in J$, $y \notin A_j$, c'est à dire :

$$\complement A \subset \liminf_{\mathcal{J}} \complement A_j$$

Ces deux conditions équivalent à :

$$A = \liminf_{\mathcal{J}} A_j = \limsup_{\mathcal{J}} A_j = \lim_{\mathcal{J}} A_j$$

On notera que cette limite peut très bien être l'ensemble vide $\emptyset$.

2º/ Ensembles fermés aléatoires.

Pour définir un ensemble fermé aléatoire, nous allons munir $\mathcal{P}(E)$ de la σ-algèbre $\sigma(\mathcal{V})$ engendrée par les ouverts de $\mathcal{F}$, c'est à dire par les V^K et les V_G. Mais la topologie de E possède une base dénombrable, et tout compact K possède un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts G_n : dire : " $K \cap F = \emptyset$ " pour $F \in \mathcal{F}$ équivaut à : " $\exists\, n$, $G_n \cap F = \emptyset$ ", et l'on a $V^K = \bigcup_{n>0} V^{G_n}$.
Autrement dit, $\sigma(\mathcal{V})$ est engendrée par les seuls évènements V_G = " $F \cap G \neq \emptyset$ "

Il est possible également de munir $\mathcal{P}(E)$ lui-même de la σ-algèbre engendrée dans $\mathcal{P}(E)$ par les V_G = " A : $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \cap G \neq \emptyset$ ". Mais les équivalences :

$$A \cap G \neq \emptyset \iff \bar{A} \cap G \neq \emptyset$$

montrent que V_G a le même sens dans $\mathcal{F}$ et dans $\mathcal{P}(E)$. Etudier un ensemble A quelconque à l'aide de $\sigma(V_G)$ équivaut à l'étudier par l'intermédiaire de sa seule fermeture $\bar{A}$ $\bar{A} \in \mathcal{F}$, et ce point de vue revient à <u>identifier</u> deux ensembles A et A' ayant même fermeture dans E . Ainsi :

PROPOSITION 1 - Si $\mathcal{R}_f$ est la relation " $A \equiv A'$ si $\bar{A} = \bar{A'}$ " dans $\mathcal{P}(E)$, l'espace quotient $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}_f$ muni de la σ-algèbre engendrée par les V_G est isomorphe à $\mathcal{F}$ muni de $\sigma(\mathcal{V})$.

La fonctionnelle $\bar{X}(A\ ;\ G)$ introduite en A-4º est, pour tout $G \in \mathcal{G}$,une variable aléatoire sur $\mathcal{F}$, $\sigma(V_G)$. Celà resulte de sa définition même. Cette fonctionnelle est donc une fonction aléatoire $\left(\bar{X}(G)\right)_{G \in \mathcal{G}}$.

PROPOSITION 2 - La σ-algèbre $\sigma(V_G)$ sur $\mathcal{F}$ est engendrée par la famille des variables aléatoires $\left(\bar{X}(G)\right)_{G \in \mathcal{G}}$ vérifiant les conditions : $\bar{X}(G) = 0$ ou 1 , et $\bar{X}(\bigcup_{i \in I} G_i) = \sup_{i \in I} \bar{X}(G_i)$

On peut, en effet, (A-4º, Prop. 2) identifier $\mathcal{F}$ avec l'ensemble des fonctionnelles vérifiant ces conditions, et V_G est le sous-ensemble " $\bar{X}(G) = 1$ " de $\mathcal{F}$.

Examinons maintenant s'il est possible de probabiliser l'espace $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$.

THEOREME - Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie de E constituée d'ouverts relativement compacts. La famille $\mathcal{A}$ des parties de $\mathcal{F}$ de la forme $V^{C'_1, \ldots, C'_k}_{C_1, \ldots, C_n}$ où chaque C_i , C'_j , est dans $\mathcal{B}$ ou est la fermeture d'un $B \in \mathcal{B}$, est une semi-algèbre de Boole, qui engendre $\sigma(\mathcal{V})$ et contient la classe compacte $\mathcal{C}$ constituée des parties de $\mathcal{F}$ de la forme $V^{B'_1, \ldots, B'_k}_{\bar{B}_1, \ldots, \bar{B}_n}$ avec B_i , $B'_j \in \mathcal{B}$.

Soient $\mathcal{A}_s$ l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{A}$, et $\mathcal{C}_s \subset \mathcal{A}_s$ la classe compacte stable pour la réunion finie engendrée par $\mathcal{C}$. Une fonction P appliquant $\mathcal{A}_s$ sur $[0,1]$ se prolonge en une probabilité sur $\sigma(\mathcal{V})$ si, et seulement si , elle vérifie pour tout $A \in \mathcal{A}_s$ la propriété d'approximation :

$$P(A) = \sup\left\{P(C) : C \subset A\ ,\ C \in \mathcal{C}_s\right\}$$

On vérifie facilement que $\mathcal{A}$ est une semi-algèbre. Les inclusions $\sigma(\mathcal{V}) \supset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \supset \mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ donnent $\sigma(\mathcal{V}) = \sigma(\mathcal{A})$ puisque $\sigma(\mathcal{V}) = \sigma(\mathcal{V}_{\mathcal{B}})$. Enfin $\mathcal{C}_s$ est une classe compacte, puisque tout élément de $\mathcal{C}_s$ est compact pour la topologie de $\mathcal{F}(E)$.

Il resulte d'un théorème classique que la propriété d'approximation est une condition suffisante pour que P se prolonge en une probabilité. C'est également une condition nécéssaire. En effet, pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a ici :

$$B = \bigcup_{i \in I_B} \overline{B_i} \qquad (B_i \in \mathcal{B}\ ,\ i \in I_B \Leftrightarrow \overline{B_i} \subset B)$$

$$\overline{B} = \bigcap_{j \in J_B} B_j \qquad (B_j \in \mathcal{B}\ ,\ j \in J_B \Leftrightarrow B_j \supset \overline{B})$$

Par suite aussi, ($\overline{B}$ étant compact) :

$$V^{\overline{B}} = \bigcup_{j \in J_B} V^{B_j} \qquad (V^{B_j} \subset V^{\overline{B}})$$

$$V_B = \bigcup_{i \in I_B} V_{\overline{B_i}} \qquad (V_{\overline{B_i}} \subset V_B)$$

Tout ouvert $V^{\overline{B}}$ ou V_B est donc réunion dénombrable des compacts de $\mathcal{C}$ qu'il contient. Il en est encore de même pour tout ouvert de $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ (intersection finie de $V^{\overline{B_i}}$ et de V_{B_j} avec B_i et B_j dans $\mathcal{B}$), donc encore pour $\mathcal{A}$ (dont les éléments sont les intersections d'un élément de $\mathcal{C}$ et d'un élément de $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$). Enfin, tout élément de $\mathcal{A}_\delta$ est réunion finie d'éléments de $\mathcal{A}$, donc ~~intersection~~ réunion dénombrable d'éléments de la classe compacte $\mathcal{C}_\delta$. La nécéssité de la condition de l'énoncé en résulte.

Donnons maintenant un procédé permettant de construire effectivement une probabilité P.

PROPOSITION 3 - Si D est une partie dénombrable dense dans E, l'application α : $A \to \overline{A \cap D}$ de $\mathcal{P}(E)$, $\sigma(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V})$ est mesurable.

Cherchons, en effet, l'image inverse de V_G. De $\overline{A \cap D} \cap G \neq \emptyset \Leftrightarrow A \cap D \cap G \neq \emptyset$ résulte aussitot $\alpha^{-1}(V_G) = V_{G \cap D}$ et cet ensemble est dans $\sigma(\mathcal{M})$ puisque D est dénombrable.

COROLLAIRE - Si P' est une probabilité sur $\mathcal{P}(E)$, $\sigma(\mathcal{M})$ (obtenue, par exemple, en prolongeant une loi spatiale) la formule $P(V) = P'[\alpha^{-1}(V)]$ pour $V \in \sigma(V_G)$ définit une probabilité sur $\mathcal{P}(E)$, $\sigma(V_G)$, ou, ce qui revient au même, sur $\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V})$.

Séparabilité. La formule de base $\alpha^{-1}(V_G) = V_{G \cap D}$ montre que l'ensemble aléatoire défini sur $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$ par cette probabilité P est séparable au sens de la :

Définition - Une partie D dénombrable dense dans E est séparante pour l'ensemble aléatoire A défini par $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$, P s'il y a une probabilité unité pour que tout point de A soit limite de points de $A \cap D$, autrement dit si : $P(A = \overline{A \cap D}) = 1$.

Il n'ya pas lieu ici de parler des points de $\complement A$: cet ensemble étant ouvert, ils sont toujours limite de points de $\complement A \cap D$. Il faut toutefois vérifier que " $A = \overline{A \cap D}$ " est bien un évènement de $\sigma(\mathcal{V})$. Si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de la topologie de E, le complémentaire de cet évènement est :

$$" A \neq \overline{A \cap D} " = " \exists B \in \mathcal{B} ,\ A \cap B \neq \emptyset ,\ A \cap B \cap D = \emptyset "$$

En effet, $A \neq \overline{A \cap D}$ si et seulement si on peut trouver $x \in A$ et un voisinage $B \in \mathcal{B}$ de x disjoint de $A \cap D$. Cet évènement est manifestement dans $\sigma(\mathcal{V})$.

PROPOSITION 4 - Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie de E. Une partie D dénombrable dense dans E est séparante pour l'ensemble aléatoire $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$, P si et seulement si on a, pour tout $B \in \mathcal{B}$: $P(V_B^{B \cap D}) = 0$, ou, ce qui revient au même, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} V_B^{B \cap D} \underset{p.s.}{=} \emptyset$.

Celà resulte aussitot de la relation établie ci-dessus : " $A \neq \overline{A \cap D}$ " $= \bigcup_{B \in \mathcal{B}} V_B^{B \cap D}$

COROLLAIRE - D est une partie séparante si et seulement si on a, pour tout ouvert G de E : $V_G \underset{p.s.}{=} V_{G \cap D}$, ou encore $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} V_G^{G \cap D} \underset{p.s.}{=} \emptyset$

En effet, tout ouvert G est réunion dénombrable d'ouverts de la base $\mathcal{B}$.

PROPOSITION 5 - L'application $\alpha : F \to \overline{F \cap D}$ de $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$ est mesurable.

Celà résulte, comme pour la proposition 3, de $\alpha^{-1}(V_G) = V_{G \cap D}$.

COROLLAIRE - Si A est un ensemble aléatoire défini par $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{O})$, P', $\alpha(A)$ admet la partie séparante D. De plus, la probabilité P sur $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$ définissant l'ensemble aléatoire $\alpha(A)$ ne dépend que de la loi spatiale de A.

En effet, on a $P(V_G) = P'[\alpha^{-1}(V_G)] = P'(V_{G \cap D})$

PROPOSITION 6 – L'ensemble $S_G = \{ A : A \in \mathcal{F}, A \supset G, G \in \mathcal{G} \}$ est dans $\sigma(\mathcal{D})$.

En effet, pour $A \in \mathcal{F}$, $G \subset A$ équivaut à $\bar{G} \subset A$. Mais $\bar{G} = \overline{G \cap D}$ pour toute partie $\mathcal{D}$ dénombrable dense dans E. Ainsi $G \subset A \Leftrightarrow G \cap D \subset A$ et $S_G = S_{G \cap D} \in \sigma(\mathcal{D})$.

Définition. (Continuité presque sûre) Un ensemble aléatoire A défini par $\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{D})$ P est presque sûrement continu en un point x_0 s'il est presque certain que x_0 est un point extérieur ou intérieur, autrement dit si $P(x_0 \in \mathrm{Fr} A) = 0$. L'ensemble aléatoire A est presque sûrement continu en tout point si, pour tout $x \in E$, on a : $P(x \in \mathrm{Fr}\, A) = 0$.

Soit $\mathcal{B}_x$ un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts de x. L'évènement " $x \notin \mathrm{Fr}\, A$ " est $\bigcup_{B \in \mathcal{B}_x} (S_B \cup V^B) \in \sigma(\mathcal{D})$

PROPOSITION 7 – Un ensemble aléatoire est p.s. continu en tout point pour $\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{D}), P$ si, et seulement si, pour toute partie $\mathcal{D}$ dénombrable dense dans E on a $P(A \cap D \subset \mathring{A}) = 1$

En effet, si A est p.s. continu en tout point, il y a une probabilité 1 pour que " tout $x \in D$ soit dans $\mathring{A}$ ou dans $\complement \bar{A}$ ", donc " $A \cap D \subset \mathring{A}$ " est presque certain. Inversement, si " $A \cap D \subset \mathring{A}$ " est presque sûr pour toute partie dense D, il suffit de prendre une partie dense D contenant un point x pour obtenir ~~la conclusion~~. $P(x \in \mathrm{Fr}\, A) = 0$.

PROPOSITION 8 – Si un ensemble aléatoire A sur $\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{D})$ est p.s. continu en tout point et admet une partie séparante D_0, alors toute partie D dénombrable dense dans E est séparante.

C'est un résultat classique qui se retrouve facilement ici. Pour tout ouvert G, la continuité p.s. donne, d'après la proposition 7 :

$$\{ D \cap G \cap A \neq \emptyset \} \underset{\text{p.s.}}{=} \{ G \cap \mathring{A} \neq \emptyset \} \underset{\text{p.s.}}{=} \{ G \cap D_0 \cap \mathring{A} \neq \emptyset \}$$

Comme D_0 est séparante, ce dernier ensemble est p.s. égal à V_G et on a bien :

$$P(V_G^{G \cap D}) = 0$$

<u>PROPOSITION 9 -</u> Si A est à la fois séparable et p.s. continu en tout point, on a p.s. $A = \overline{\mathring{A}}$.

En effet, pour D dénombrable dense, on a p.s. à la fois $A = \overline{A \cap D}$ (Prop. 8), et $A \cap D \subset \mathring{A}$ (Prop. 7), d'où p.s. $A \subset \overline{\mathring{A}}$, c'est à dire p.s. $A = \overline{\mathring{A}}$.

<u>PROPOSITION 10 -</u> Le sous-ensemble Ω = " $A = \overline{\mathring{A}}$ " des ouverts-fermés de $\mathcal{F}$ est mesurable pour $\sigma(\mathcal{V})$.

En effet, si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de la topologie de E, $A = \overline{\mathring{A}}$ équivaut à : " pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a $B \cap A = \emptyset$ ou il existe $B' \in \mathcal{B}$ avec $B' \subset B$ et $B' \subset A$ " d'où :

$$\Omega = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \Big(V^B \bigcup \bigcup_{\substack{B' \in \mathcal{B} \\ B' \subset B}} S_{B'} \Big)$$

<u>Définition.</u> (<u>Continuité presque sûre en tout compact</u>) Un ensemble aléatoire A sur $\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V})$ est presque sûrement continu en un compact K_o s'il y a une probabilité unité pour que la fonctionnelle aléatoire $\overline{X}(A,K)$ soit continue en K_o. De même, A est p.s. continu en tout compact si, pour tout compact K, l'évènement : " $\overline{X}$ est continu en K " est presque certain.

Il faut toutefois vérifier que " $\overline{X}$ est continu en K_o " est bien un évènement de $\sigma(\mathcal{V})$. D'après la Proposition 4 de A-4º, on a : " $\overline{X}$ est continue en K_o " $= V^{K_o} \bigcup$ " $\mathring{A} \cap K_o \neq \emptyset$ "

Mais " $\mathring{A} \cap K_o \neq \emptyset$ " équivaut à : " un ouvert B de la base denombrable $\mathcal{B}$ est contenu dans A et rencontre K_o " c'est à dire à : $\bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \cap K_o \neq \emptyset}} S_B \in \sigma(\mathcal{V})$

<u>PROPOSITION 11 -</u> Pour un ensemble aléatoire sur $\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V})$, la continuité p.s. en tout compact entraine la continuité p.s. en tout point, la séparabilité, et l'égalité $V_G \underset{p.s.}{=} V_{\overline{G}}$ pour tout ouvert relativement compact G.

En effet, pour $K = \{x\}$, on obtient la continuité p.s. en $x \in E$. Si G est un ouvert relativement compact, et D une partie dénombrable dense, les inclusions :

$V_{\overline{G}} \supset V_G \supset V_{G \cap D} \supset$ " $G \cap D \cap \mathring{A} \neq \emptyset$ " = " $G \cap \mathring{A} \neq \emptyset$ " = " $\overline{G} \cap \mathring{A} \neq \emptyset$ "

deviennent des égalités p.s., d'après la prop.4 de A-4º, lorsque la continuité en $\overline{G}$ est réalisée, ce qui démontre les deux autres affirmations de l'énoncé.

COROLLAIRE 1 - La continuité en $\overline{G}$ est réalisée pour tout ouvert G relativement compact si et seulement si on a p.s. $V_{\overline{G}} = V_G$ et $A = \overset{\circ}{\overline{A}}$. Toute partie dénombrable dense est alors séparante.

En effet, $A = \overset{\circ}{\overline{A}}$ entraine l'équivalence $G \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow G \cap \overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, et la chaine d'inclusions figurant dans la demonstration de la proposition montre, compte tenu de A-4º, Prop. 4, que la condition de l'énoncé est suffisante.

Inversement, si $\mathcal{B}$ est une base denombrable de la topologie de E constituée d'ouverts relativement compacts, et si la continuité p.s. en tout compact $\overline{G}$ (G ouvert) est réalisée, l'évènement : " $\overline{X}$ est continu en $\overline{B}$ pour tous les $B \in \mathcal{B}$ " est presque certain. L'équivalence $A = \overset{\circ}{\overline{A}} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \emptyset$ ou $\overset{\circ}{A} \cap B \neq \emptyset$ montre que l'on a p. s. $A = \overset{\circ}{\overline{A}}$. Enfin, l'égalité $V_G = V_{\overline{G}}$ et la séparabilité resultent des inclusions figurant dans la demonstration de la proposition.

THEOREME 2 - (Mesurabilité de $\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V})$) . L'application $k(x,A) : E \times \mathcal{F} \to \{0,1\}$ définie par $k(x,A) = 1$ si $x \in A$ et $k(x,A) = 0$ si $x \notin A$ est mesurable pour la σ-algèbre produit $\sigma(\mathcal{F}) \otimes \sigma(\mathcal{V})$

Montrons que $\overset{-1}{k}(0) = \bigcup_{x \in E} \{x\} \times V^x$ est dans $\sigma(\mathcal{V})$. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie de E. On a $x \notin A \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}$, $x \in B$, $A \in V^B$. Ainsi :

$$\overset{-1}{k}(0) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \times V^B \in \sigma(\mathcal{V})$$

COROLLAIRE- Si M est une mesure positive bornée sur $E , \sigma(\mathcal{F})$, l'application X(A) de $\mathcal{F}$ dans R_+ définie par :

$$X(A) = \int_A M(dx) = \int k(x,A)\, M(dx)$$

est une variable aléatoire, et son espérance mathématique est donnée par :

$$E\left[X(A)\right] = \int P(\, x \in A \,)\, M(dx)$$

C'est là une conséquence immédiate du théorème 2 , compte tenu d'un résultat classique.

3º/ Ensembles ouverts aléatoires.

L'application $F \to \complement F$ définit un homéomorphisme de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$, et aussi un isomorphisme des σ-algèbres $\sigma(\mathcal{V})$ et $\sigma(\mathcal{W})$. Par conséquent, à chacune des propositions du paragraphe précédent correspond, par dualité, une proposition relative à $\mathcal{G}$, $\sigma(\mathcal{W})$ que l'on formera facilement. Nous donnerons seulement quelques resultats complémentaires.

<u>PROPOSITION 1 –</u> Les applications $\varphi : F \to \mathring{F}$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$, et $\gamma : G \to \overline{G}$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$, sont mesurables.

En effet, cherchons, par exemple, l'image inverse $\gamma^{-1}(V_B)$ de $V_B \subset \mathcal{F}$, B ouvert dans E, par l'application γ . Comme $\overline{G} \cap B \neq \emptyset$ équivaut à $G \cap B \neq \emptyset$, on a $\gamma^{-1}(V_B) = V_B \subset \mathcal{G}$. Mais par dualité, la prop. 5 du 3º montre que, dans $\mathcal{G}$, $V_B \in \sigma(\mathcal{W})$

<u>Corollaire 1 –</u> L'application $F \to \overline{\mathring{F}}$ de $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$ dans lui-même, et l'application $G \to \mathring{\overline{G}}$ de $\mathcal{G}$, $\sigma(\mathcal{W})$ dans lui-même sont mesurables.

<u>COROLLAIRE 2 –</u> : <u>Mesurabilité de $\mathring{F}$ –</u> L'application $\mathring{k}(x,F)$ de $E \times \mathcal{F}$ dans $\{0,1\}$ définie par $\mathring{k}(x,F) = 1$ si $x \in \mathring{F}$ et $\mathring{k}(x,F) = 0$ si $x \notin \mathring{F}$ est mesurable pour $\sigma(\mathcal{F}) \otimes \sigma(\mathcal{V})$. Pour toute mesure M positive bornée sur E , $\sigma(\mathcal{F})$, l'intégrale $\int_{\mathring{A}} M(dx)$ est une variable aléatoire d'espérance $\int P(x \in \mathring{A})\, M(dx)$.

En effet, $\mathring{k}$ est le produit des applications mesurables $(x,F) \to (x,\mathring{F})$ de $E \times \mathcal{F}$ dans $E \times \mathcal{G}$, et $k(x,G)$ de $E \times \mathcal{G}$ dans $\{0,1\}$. De même :

<u>COROLLAIRE 3 – Mesurabilité de $\overline{G}$</u> . L'application $\overline{k}$ de $E \times \mathcal{G}$ dans $\{0,1\}$ définie par : $\overline{k}(x,G) = 1$ si $x \in \overline{G}$ et $k(x,G) = 0$ si $x \notin \overline{G}$ est mesurable pour $\sigma(\mathcal{G}) \otimes \sigma(\mathcal{W})$. Pour toute mesure positive bornée M sur E, $\sigma(\mathcal{G})$ l'intégrale $\int_{\overline{A}} M(dx)$ est une variable aléatoire de $\mathcal{G}$, $\sigma(\mathcal{W})$ d'espérance $\int P(x \in \overline{A})\, M(dx)$.
La mesurabilité de $\overline{\mathring{A}}$ et celle de $\mathring{\overline{A}}$ font l'objet d'énoncés analogues.

4º/ Ensembles aléatoires de $\mathcal{H}$, $\sigma(\mathcal{S})$

Sur $\mathcal{H}$, la σ-algèbre $\sigma(\mathcal{W}) \otimes \sigma(\mathcal{V})$ est, en fait, engendrée par les W_G et les $V^{G'}$ (G, G' ouverts), c'est à dire, avec nos notations, par la famille $\mathcal{S}$ des parties $S_G^{G'}$ de définies comme suit :

$$A \in S_G^{G'} \Longleftrightarrow A \supset G \text{ , } A \cap G' = \emptyset \Longleftrightarrow \mathring{A} \supset G \text{ , } \overline{A} \cap G' = \emptyset$$

Il est indifférent de définir cette σ-algèbre $\sigma(\mathcal{S})$ sur $\mathcal{P}(E)$ lui-même, ou seulement sur l'espace quotient $\mathcal{H} = \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$. Les deux points de vue conduisent à travailler uniquement sur l'onverture et sur la fermature de l'ensemble aléatoire A. Ainsi :

PROPOSITION 1 - Si $\mathcal{R}$ est la relation : " $A \equiv A'$ si $\mathring{A} = \mathring{A}'$ et $\overline{A} = \overline{A'}$ " dans $\mathcal{P}(E)$, l'espace quotient $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ muni de $\sigma(\mathcal{S})$ est isomorphe à $\mathcal{H}$ muni $\sigma(\mathcal{W}) \otimes \sigma(\mathcal{V})$.

On définira sans peine la semi-algèbre engendrant $\sigma(\mathcal{S})$ dans $\mathcal{H}$, et la classe compacte qu'elle contient, qui est celle des $W_G^{K_1, \ldots K_n} \times V_{K'_1, \ldots K'_q}^{G'}$. De même, on vérifiera la proposition suivante :

PROPOSITION 2 - Si D est une partie dénombrable dense dans E, l'application $\alpha : A \to (\overline{\overline{A \cup \complement D}}, \overline{A \cap D})$ de $\mathcal{P}(E)$ muni de $\sigma(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{H}$ muni de $\sigma(\mathcal{S})$ est mesurable. Si P' est une probabilité sur $\mathcal{P}(E)$, $\sigma(\mathcal{M})$, obtenue, par exemple, en prolongeant une loi spatiale, la formule $P(S) = P'[\alpha^{-1}(S)]$ pour $S \in \sigma(\mathcal{S})$ définit une probabilité sur $\mathcal{H}$, $\sigma(\mathcal{S})$, et l'ensemble aléatoire ainsi obtenu est séparable pour D :

Définition. Une partie D dénombrable dense dans E est séparante pour $\mathcal{H}$, $\sigma(\mathcal{S})$ P si elle est séparante pour $\mathcal{G}$, $\sigma(\mathcal{W})$, P et pour $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$, P, autrement dit, si l'on a p.s. $A \subset \overline{A \cap D}$ et $\complement A \subset \overline{\complement A \cap D}$, ou, ce qui revient au même, si l'on a p.s. $\overline{A} = \overline{A \cap D}$ et $\overline{\complement A} = \overline{\complement A \cap D}$.

PROPOSITION 3 - Une partie D dénombrable dense dans E est séparante pour l'ensemble aléatoire A défini par $\mathcal{H}, \sigma(\mathcal{S})$ P , si et seulement si on a, pour tout ouvert G p.s. $V_G = V_{G\cap D}$ et $W_G = W_{G\cap D}$.

PROPOSITION 4 - L'ensemble aléatoire A défini par $\mathcal{H}, \sigma(\mathcal{S})$, P est dit presque sûrement continu en tout point si, pour tout $x \in E$, on a $P(x \in FrA) = 0$. Pour que A soit p.s. continu en tout point, il faut et il suffit que, pour toute partie D dénombrable dense, on ait p.s. : $A \cap D \subset \mathring{A}$ et $\complement A \cap D \subset \complement \overline{A}$ ~~XXXXX~~.

Lorsqu'il en est ainsi, on a p.s. $\overline{A \cap D} \subset \overline{\mathring{A}}$ et $\overline{\complement A \cap D} \subset \complement \mathring{\overline{A}}$. Par suite :

PROPOSITION 5 - Si A est à la fois séparable et p.s. continu en tout point, on a p.s. $\overline{A} = \overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{A} = \mathring{\overline{A}}$.

Ces relations caractérisent des ensembles bien construits, sans points isolés ni lacunes ponctuelles. On peut penser, par exemple, qu'un milieu poreux se laissera décrire comme une réalisation d'un ensemble aléatoire séparable et p.s. continu en tout point pour $\mathcal{H}, \sigma(\mathcal{S})$, P . On établira sans peine les propriétés de mesurabilité de $\mathring{A}$ et de $\overline{A}$: les applications $A \to \mathring{A}$ et $A \to \overline{A}$ sont ici les projections, et sont donc continues et par suite mesurables.

5º/ Erosions, dilatations et granulométries.

Nous supposons, dans ce paragraphe, que l'espace localement compact de type dénombrable E est également muni d'une structure de groupe abélien compatible avec sa topologie.

Définitions . A et B étant des parties de E l'ensemble $A \oplus B$ est appelé dilaté de A par B. L'ensemble $\complement(\complement A \oplus B)$ est appelé érodé de A par B , et noté $A \ominus B$.

On a vu (A-6º, Prop. 2) que, pour tout compact K, $F \oplus K$ est une application continue de $\mathcal{F}$ dans lui-même. La dilatation selon un compact est donc une opération continue dans $\mathcal{F}$, mais on peut montrer que l'érosion par contre n'est pas continue dans $\mathcal{F}$. Par dualité, on voit que l'érosion est continue dans $\mathcal{G}$, mais non la dilatation.

PROPOSITION 1 - (Mesurabilité des dilatations). Soit A un ensemble aléatoire pour $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$. Pour tout compact K, $A \oplus K$ est un ensemble aléatoire sur $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$, et l'application de $E \times \mathcal{F}$ sur $\{0,1\}$ définie par $k(x) = 1$ si $x \in A \oplus K$ et $k(x) = 0$ si $x \notin A \oplus K$ est mesurable pour $\sigma(\mathcal{F}) \otimes \sigma(\mathcal{V})$

En effet, cette application est le produit de l'application continue $(x,F) \to (x, F \oplus K)$ de $E \times \mathcal{F}$ dans lui-même par l'application mesurable définie en A-2º Prop.I2

COROLLAIRE. Pour toute mesure positive M bornée sur E, $\sigma(\mathcal{F})$; l'intégrale $\int_{A \oplus K} M(dx)$ est une variable aléatoire d'espérance $\int P(\, x \in A \oplus K\,)\, M(dx)$.

THEOREME - L'application $\alpha : A \to A \ominus K$ (K compact) de $\mathcal{F}$ dans lui-même est mesurable pour $\sigma(\mathcal{V})$.

Pour $A \in \mathcal{F}$, $\complement A \oplus K$ est ouvert, et $A \ominus K \in \mathcal{F}$. Comme $\sigma(\mathcal{V})$ est engendrée par les $V_{K'}$ (K' compact), il suffit de montrer que l'image inverse de $V_{K'}$ est dans $\sigma(\mathcal{V})$. Cette image inverse est :

$$\alpha^{-1}(V_{K'}) = \{A : A \in \mathcal{F}, A \ominus K \in V_{K'}\} = \{A : A \in \mathcal{F}, \exists y \in K' \quad (\check{K})_y \subset A\}$$

Soit D' une partie dénombrable dense sur le compact K', et soient $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ un système fondamental dénombrable de voisinages décroissants, symétriques et relativement compacts de ~~XXXXX~~ l'élément 0 du groupe topologique E. Si $A \ominus K$ rencontre ~~[illegible]~~ K', on peut, pour tout $y \in K'$ et tout B_n, trouver $z_n \in D'$ avec $(y - z_n) \in B_n$. Ainsi :

$$\text{~~XXX~~} \quad A \ominus K \in V_{K'} \Rightarrow \forall n \quad \exists z_n \in D' : (\check{K})_{z_n} \subset A \oplus \bar{B}_n$$

Montrons que l'implication inverse est vérifiée. Soit z_n une suite d'éléments de D' avec $(\check{K})_{z_n} \subset A \oplus B_n$. K' étant compact, soit z_{n_k} une suite partielle convergeant ver $z_\delta \in K'$. Dans $\mathcal{F}$, les $(\check{K})_{z_{n_k}}$ convergent vers $(\check{K})_{z_0}$ et les $A \oplus \bar{B}_{n_k}$ vers A, comme on le vérifie facilement. Ainsi, tout $y \in (\check{K})_{z_0}$ est limite d'une suite d'éléments $y_{n_k} \in (\check{K})_{z_{n_k}} \subset A \oplus \bar{B}_{n_k}$. (Th. 3, A-1º, critère 1'). Comme $y_{n_k} \in A \oplus \bar{B}_{n_k}$, le critère 2' de ce même théorème donne $y \in A$. On a donc bien $(\check{K})_{z_0} \subset A$ pour un $z_0 \in K'$, ce qui démontre l'implication que nous avions en vue. Il en résulte que l'on peut écrire :

$$\{A : A \ominus K \in V_{K'}\} = \bigcap_{n>0} \bigcup_{y \in D'} \{A : (\check{K})_y \subset A \oplus \bar{B}_n\}$$

Il reste à montrer que l'ensemble des A vérifiant : " $(\check{K})_y \subset A \oplus \bar{B}_n$ " appartient à $\sigma(\mathcal{V})$. Celà va resulter de la proposition suivante :

PROPOSITION 2 - Si K et $\bar{B}$ sont deux compacts, l'ensemble des $A \in \mathcal{F}$ vérifiant " $K \subset A \oplus \bar{B}$ " appartient à $\sigma(\mathcal{V})$.

Prenons, en effet, D dénombrable dense sur K. Les équivalences :

$$K \subset A \oplus \bar{B} \iff D \subset A \oplus \bar{B} \iff A \in \bigcap_{y \in D} \mathcal{V}_{(\check{B})_y}$$

resultant de la prop. 1 de A-6º et montrent que " $K \subset A \oplus B$ " $\in \sigma(\mathcal{V})$.

COROLLAIRE 1 - Si A est un ensemble aléatoire sur $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$, pour tout compact K, $A \ominus K$ est un ensemble aléatoire sur $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$, et l'application de $E \times \mathcal{F}$ sur $\{0,1\}$ définie par $k(x) = 1$ si $x \in A \ominus K$ et $k(x) = 0$ si $x \notin A \ominus K$ est mesurable pour $\sigma(\mathcal{F}) \otimes \sigma(\mathcal{V})$.

COROLLAIRE 2 - Dans les mêmes conditions, pour toute mesure M positive bornée sur E, $\sigma(\mathcal{F})$ l'intégrale $\int_{A \ominus K} M(dx)$ est une variable aléatoire d'espérance $\int P(x \in A \ominus K)\, M(dx)$.

Définition. A tout $A \in \mathcal{F}$ et à tout compact $K \subset E$ on associe les ensembles $A_{\mathcal{f}_K} = (A \oplus \check{K}) \ominus K$ et $A_{\omega_K} = (A \ominus \check{K}) \oplus K$. On dit que A_{ω_K} est l'ouverture de A selon le compact K, et $A_{\mathcal{f}_K}$ la fermeture de A selon le compact K.

Les applications $A \to A_f$ et $A \to A_\omega$ sont en dualité. On vérifie que la première, par exemple, est une opération croissante, isotone et idempotente, de sorte qu'il s'agit bien d'une ouverture et d'une fermeture au sens de l'algèbre.

PROPOSITION 3 - Mesurabilité des granulométries. Si A est un ensemble aléatoire sur $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{V})$, il en est de même de A_{f_K} et de A_{ω_K} pour tout compact K. De plus, les applications de $E \times \mathcal{F}$ sur $\{0,1\}$ définies par $k_f(x) = 1$ si $x \in A_{f_K}$ et 0 si $x \notin A_{f_K}$, et par $k_\omega(x) = 1$ si $x \in A_{\omega_K}$ et 0 si $x \notin A_{\omega_K}$ sont mesurables pour $\sigma(\mathcal{F}) \otimes \sigma(\mathcal{V})$

En effet, ces applications se mettent sous la forme de produits d'applications mesurables.

COROLLAIRE - Pour toute mesure positive bornée M sur E, $\sigma(\mathcal{F})$ les intégrales $\int_{A_{f_K}} M(dx)$ et $\int_{A_{\omega_K}} M(dx)$ sont des variables aléatoires admettant respectivement les espérances $\int P(x \in A_{f_K}) M(dx)$ et $\int P(x \in A_{\omega_K}) M(dx)$.

$P(x \in A_{f_K})$ est une fonction croissante du compact K, et $P(x \in A_{\omega_K})$ une fonction décroissante. Dans le cas stationnaire, on a $P(V) = P(V_x)$ pour tout $x \in E$ et tout $V \in \sigma(\mathcal{V})$. La fonction $P(x \in A_{\omega_K})$ ne dépend plus de x, et permet alors de définir la granulometrie de l'ensemble aléatoire A sëlon la famille des compacts de E. De même, la fonction $P(x \in A_{f_K})$ permet de définir la granulométrie du complémentaire $\complement A$ de A (granulométrie des pores). Les resultats précedents montrent que l'inférence statistique est alors possible pour ces granulométries.

CHAPITRE II - PARTITIONS ALEATOIRES

Nous désignerons toujours par E un espace localement compact de type dénombrable et par $\mathcal{B}$ une base fondamentale constituée d'ouverts relativement compacts, telle que tout ouvert de E soit réunion dénombrable de $\overline{B}_i$, $B_i \in \mathcal{B}$. L'ensemble des partitions π de E sera noté $\Pi(E)$, ou simplement Π .

A - L'ESPACE COMPACT $\Pi_o(E)$

Graphe de $\pi \in \Pi$ - Une partition $\pi \in \Pi$ de l'espace E peut être définie par l'ensemble $(\Gamma_i)_{i \in I}$ de ses classes (avec $\bigcup_{i \in I} \Gamma_i = E$ et $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ pour $i \neq j$) , ou encore par son graphe, qui est le sous-ensemble $C = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i \times \Gamma_i$ de l'espace $E \times E$. Les axiomes constitutifs de C sont les suivants :

1 - $\forall x \in E$, $(x,x) \in C$

2 - $\forall x,y \in E$, $(x,y) \in C \Rightarrow (y,x) \quad C$

3 $\forall x,y,z \in E$, $(x,y) \in C$ et $(y,z) \in C \Rightarrow (x,z) \in C$

Sous une forme géométrique équivalemte, en désignant par Δ la diagonale de $E \times E$ et par B , B' des parties quelconques de E, ces axiomes s'écrivent :

1' - $\Delta \subset C$

2' - $B \times B' \subset C \Rightarrow B' \times B \subset C$

3' - $B \times B' \subset C \Rightarrow B \times B \subset C$

Espace Π_o . D'un point de vue physique, on peut penser que seules possèdent une signification réelle des propositions dont l'énoncé ne fait intervenir que les ouvertures $\mathring{\Gamma}_i$ des classes de π . L'attribution des points frontières reste douteuse, et l'on ne peut réellement affirmer que deux points x et y sont équivalents pour π que si l'on a pu trouver deux voisinages ouverts de ces points contenus dans une même classe Γ_i (donc dans $\mathring{\Gamma}_i$).Deux partitions seront donc regardées comme équivalentes si les ouvertures de chacune de leurs classes coincident. Ce point de vue conduit à remplacer la partition initiale $\pi \in \Pi$ par une partition $\overset{\circ}{\pi}$ dont les classes sont :

I - celles des $\overset{\circ}{\Gamma}_i$ qui ne sont pas vides

2 - les $\{x\}$, pour x décrivant l'ensemble frontière (fermé) :

$$F = \bigcap_{i \in I} \complement \overset{\circ}{\Gamma}_i = \bigcup_{i \in I} F_r \Gamma_i$$

On passe de π à $\overset{\circ}{\pi}$ <u>en ouvrant les classeset en atomisant les frontières</u>.Nous désignerons par Π_o l'espace des partitions ainsi obtenues : c'est l'espace des partitions <u>dont les classes sont ouvertes ou réduites à un point</u>.

<u>Remarque.</u> Un élément $\overset{\circ}{\pi} \in \overset{\circ}{\Pi}$ définit une équivalence ouverte, au sens de la topologie générale, puisque le saturé Γ_G pour $\overset{\circ}{\pi}$ d'un ouvert G est ouvert dans E . Mais une équivalence ouverte ne définit pas, en général, un élément de Π_o . On évitera donc la terminologie incorrecte " équivalence ouverte " pour désigner les éléments de Π_o .

<u>PROPOSITION 1 -</u> Si C est le graphe de $\pi \in \Pi$, $\overset{\circ}{C} \cup \Delta$ est le graphe de la partition $\overset{\circ}{\pi} \in \Pi_o$ que l'on déduit de π en ouvrant les classes et en atomisant les frontières.

En effet, on a $C = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i \times \Gamma_i$, et $\overset{\circ}{C} \supset \bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{\Gamma}_i \times \overset{\circ}{\Gamma}_i$

In versement, si $(x,y) \in \overset{\circ}{C}$ ($x \neq y$) , on peut trouver deux voisinages B_x et B_y de x et de y dans E avec $B_x \times B_y \subset C$ ~~XXXXX~~ Mais les axiomes 2' et 3' donnent alors $B_x \times B_x \subset C$, d'où $B_x \times (B_y \cup B_x) \subset C$ et $(B_y \cup B_x) \times (B_y \cup B_x) \subset C$. Par suite, on peut trouver i avec $(x,y) \in \overset{\circ}{\Gamma}_i$, d'où $\overset{\circ}{C} = \bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{\Gamma}_i \times \overset{\circ}{\Gamma}_i$

<u>COROLLAIRE 1 -</u> Pour qu'une partition $\pi \in \Pi$ de graphe C soit dans Π_o, il faut et il suffit que $C \cap \complement \Delta$ soit ouvert, ou encore que l'on ait $C = \overset{\circ}{C} \cup \Delta$.

La condition $C = \overset{\circ}{C} \cup \Delta$ est nécéssaire et suffisante d'après la proposition précédente. Elle entraine que $C \cap \complement \Delta = \overset{\circ}{C} \cap \complement \Delta$ est ouvert. Inversement, supposons $C \cap \complement\Delta$ ouvert. Si $C \cap \complement\Delta = \emptyset$, on a $C = \Delta$ et $\pi \in \Pi_o$. Soit donc $(x,y) \in C \cap \complement\Delta$. On peut trouver deux voisinages ouverts B_x et B_y de x et de y avec $B_x \times B_y \subset C \cap \complement\Delta \subset \overset{\circ}{C}$, et l'axiome 3' donne $B_x \times B_x \subset C$. Le point x est donc intérieur à sa classe, et ,ce point étant quelconque, toute classe non réduite à un point est ouverte.

<u>COROLLAIRE 2 -</u> $\overset{\circ}{C}$ étant un ouvert de $E \times E$, $\overset{\circ}{C} \cup \Delta$ est le graphe d'une équivalence $\overset{\circ}{\pi} \in \Pi_o$ si et seulement si pour tous les ensembles ouverts G_1, G_2 de E les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$2'' - \quad G_1 \times G_2 \subset \overset{\circ}{C} \quad \Rightarrow \quad G_2 \times G_1 \subset \overset{\circ}{C}$$
$$3'' - \quad G_1 \times G_2 \subset \overset{\circ}{C} \quad \Rightarrow \quad G_1 \times G_1 \subset \overset{\circ}{C}$$

La condition est nécéssaire, d'après 2' et 3'.Inversement, 1 est vérifié, et 2'' entraine 2. Montrons que 3'' entraine 3. Soient x,y, et z trois points, avec $x \neq y$ et $y \neq z$. Si (x,y) et (y,z) sont dans C , on peut trouver trois voisinages ouverts B_x, B_y, et B_z de x,y et z avec $B_x \times B_y \subset \overset{\circ}{C}$ et $B_y \times B_z \subset \overset{\circ}{C}$. De 2'' on tire $B_z \times B_y \subset \overset{\circ}{C}$, d'où $(B_x \cup B_z) \times B_y \subset \overset{\circ}{C}$, et, d'après 3'', $(B_x \cup B_z) \times ((B_x \cup B_z) \subset \overset{\circ}{C}$. On a bien $(x,z) \in \overset{\circ}{C}$.

Il y a donc une correspondance bijective entre Π_o et le sous-ensemble de $\mathcal{U}(E \times E)$ constitué des ouverts $\overset{\circ}{C}$ de $E \times E$ vérifiant les axiomes 2'' et 3''. Nous identifierons Π_o avec ce sous-ensemble, et nous le munirons de la topologie induite par celle de $\mathcal{U}(E \times E)$, qui est la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{W})$ compacte et admettant une base dénombrable.

<u>Notations.</u> Nous utiliserons la notation R_B pour représenter la famille des partitions π ($\in \Pi$ ou $\in \Pi_o$) pour lesquelles l'ensemble B est contenu dans une classe, et la notation R^B pour désigner son complémentaire (B n'est pas contenu dans une classe) .

PROPOSITION 2 - La topologie de Π_∂ est engendrée par les R_K et les R^G (K compact, et G ouvert dans E).

En effet, la topologie de $\mathcal{U}(E\times E)$ est engendrée par les $W_{K\times K'}$ et les $W^{G\times G'}$ (K, K' compacts, et G, G' ouverts dans E).Mais les axiomes 2' et 3' montrent que la restriction à Π_∂ de $W_{K\times K'}$ est identique à celle de $W_{(K\cup K')\times(K\cup K')}$ qui est $R_{K\cup K'}$, et de même celle de $W^{G\times G'}$ s'identifie à $R^{(G\cup G')}$.

THEOREME - Π_∂ est un sous-espace fermé, donc compact, de $\mathcal{U}(E\times E)$, et possède une base fondamentale dénombrable d'ouverts.

Tout se ramène à montrer que Π_∂ est fermé dans $\mathcal{U}(E\times E)$. Soit une suite $\overset{\circ}{C}_n$ d'éléments de $\mathcal{U}(E\times E)$ vérifiant les axiomes 2'' et 3'' et convergeant vers $\overset{\circ}{C}$ dans $\mathcal{U}(E\times E)$. Il faut montrer que $\overset{\circ}{C}$ vérifie les axiomes 2 et 3 .

Soient donc x, y et z troispoints, avec $x \neq y$ et $y \neq z$, $(x,y) \in \overset{\circ}{C}$ et $(y,z) \in \overset{\circ}{C}$,et soient $\overline{B}_x$, $\overline{B}_y$ et $\overline{B}_z$ trois voisinages compacts de ces points (B_x, B_y eT B_z étant dcs ouverts de la base $\mathcal{B}$) avec : $\overline{B}_x \times \overline{B}_y \subset \overset{\circ}{C}$ et $\overline{B}_y \times \overline{B}_z \subset \overset{\circ}{C}$. Comme $\overset{\circ}{C}_n$ converge vers $\overset{\circ}{C}$ dans $\mathcal{U}(E\times E)$, on a également $\overline{B}_x \times \overline{B}_y \subset \overset{\circ}{C}_n$ et $\overline{B}_y \times \overline{B}_z \subset \overset{\circ}{C}_n$ pour n assez grand, donc aussi $B_x \times B_y \subset \overset{\circ}{C}_n$ et $B_y \times B_z \subset \overset{\circ}{C}_n$. Mais $\overset{\circ}{C}_n$ vérifie 2'' et 3'', et par suite : $B_y \times B_x \subset \overset{\circ}{C}_n$ et $B_x \times B_z \subset \overset{\circ}{C}_n$. Mais alors $\overset{\circ}{C}$ vérifie les mêmes inclusions. En effet, dans le cas contraire, on aurait $\overset{\circ}{C} \in W^{B_y\times B_x} \cup W^{B_x\times B_z}$ et, par suite, pour n assez grand, $\overset{\circ}{C}_n$ appartiendrait aussi à cet ouvert de $\mathcal{U}(E\times E)$ ce qui contredirait les inclusions ci-dessus.

On a donc $B_y \times B_x \in \overset{\circ}{C}$ et $B_x \times B_z \in \overset{\circ}{C}$, ce qui entraine $(y,x) \in \overset{\circ}{C}$ et $(x,z) \in \overset{\circ}{C}$: les axiomes 2 et 3 sont donc vérifiés, et $\overset{\circ}{C} \cup \Delta$ est le graphe d'une partition $\overset{\circ}{\pi}$. Mais $\overset{\circ}{\pi} \in \Pi_\partial$ d'après la proposition 1 .

PROPOSITION 3 - Si une partition $\overset{\circ}{\pi}$ est dans Π_∂ , elle admet au plus une infinité dénombrable de classes non réduites à un point.

En effet, chaque classe ouverte contient au moins un ouvert de la base $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ dénombrable de $E\times E$.

<u>Proposition 4 -</u> Le sous-espace $\Pi_0^{(n)}$ constitué des $\overset{\circ}{\pi} \in \Pi_0$ admettant au plus n classes ouvertes est fermé, donc compact, dans Π_0.

Pour abréger les notations, raisonnons avec $n = 2$. $\overset{\circ}{\pi} \in \Pi_0^{(2)}$ signifie que, parmi trois points appartenant à des classes ouvertes, deux au moins sont équivalents modulo $\overset{\circ}{\pi}$.

Soient $\overset{\circ}{\pi}_n \in \Pi_0^{(2)}$ une suite de partitions dont les graphes ouverts $\overset{\circ}{C}_n$ convergent dans $\mathcal{G}$ vers un ouvert $\overset{\circ}{C}$. Il faut montrer que $\overset{\circ}{C} \cup \Delta$ est le graphe d'une partition $\overset{\circ}{\pi} \in \Pi_0^{(2)}$. Si $\overset{\circ}{C}$ est vide, on a $\overset{\circ}{\pi} \in \Pi_0^{(0)} \subset \Pi_0^{(2)}$. Si $\overset{\circ}{C}$ n'est pas vide, soient x_i $(i = 1,2,3)$ trois points quelconques appartenant à des classes ouvertes de $\overset{\circ}{\pi}$, c'est à dire vérifiant $(x_i, x_i) \in \overset{\circ}{C}$. On peut trouver, pour chaque i, un voisinage ouvert relativement compact B_i de x_i avec $\overline{B}_i \times \overline{B}_i \subset \overset{\circ}{C}$. Pour n assez grand, on a donc : $\overline{B}_i \times \overline{B}_i \subset \overset{\circ}{C}_n$. Par suite, pour chaque n assez grand, on peut trouver deux indices $i_n \neq j_n$ avec $\overline{B}_{i_n} \times \overline{B}_{j_n} \subset \overset{\circ}{C}_n$, donc aussi $B_{i_n} \times B_{j_n} \subset \overset{\circ}{C}_n$. Mais alors, on peut également trouver deux indices distincts i et j avec $B_i \times B_j \subset \overset{\circ}{C}$, car, dans le cas contraire, on aurait $B_i \times B_j \not\subset \overset{\circ}{C}_n$ pour les six couples $i \neq j$ dès que n serait assez grand. Mais $B_i \times B_j \subset \overset{\circ}{C}$ entraine que x_i et x_j appartiennent à la même classe ouverte de $\overset{\circ}{\pi}$; donc $\overset{\circ}{\pi} \in \Pi_0^{(2)}$.

Considéré comme un élément de $\mathcal{H}(E)$, un ensemble $A \subset E$ est assimilé au couple $(\overset{\circ}{A}, \overline{A})$. On peut aussi bien le représenter par le couple $(\overset{\circ}{A}, \complement \overline{A})$ qui est dans $\mathcal{G}(E) \times \mathcal{G}(E)$. Plus précisément :

<u>PROPOSITION 5 -</u> L'application $(\overset{\circ}{A}, \overline{A}) \rightarrow (\overset{\circ}{A}, \complement \overline{A})$ est un homéomorphisme de $\mathcal{H}(E)$ sur le sous-ensemble de $\mathcal{G}(E) \times \mathcal{G}(E)$ constitué par les couples (G, G') d'ouverts disjoints de E.

C'est immédiat, puisque $\overline{A} \rightarrow \complement \overline{A}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{G}$.

Le couple $(\overset{\circ}{A}, \complement \overline{A})$ définit aussi une partition $\overset{\circ}{\pi} \in \Pi_0^{(2)}$ de E comportant au plus deux classes ouvertes $\overset{\circ}{A}$ et $\complement \overline{A}$, et des classes ponctuelles (les $\{x\}$ pour $x \in \mathrm{Fr}\, A$). Inversement, si une partition possède au plus deux classes ouvertes G_1 et G_2, il lui correspond deux éléments possibles (G_1, G_2) et (G_2, G_1) de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, puisque on ne sait pas laquelle des deux classes ouvertes doit être appelée $\overset{\circ}{A}$. Cette indetermination de la terminologie se traduit par la relation d'équivalence $\mathcal{R}_c$; " $A \equiv A'$ si $A = A'$ ou $\complement A = A'$ " dans $\mathcal{G}$. D'où :

<u>PROPOSITION 6 -</u> L'espace $\Pi_\partial^{(2)}$ est homéomorphe à l'espace quotient $\mathcal{H} / \mathcal{R}_c$

En effet, dans $\mathcal{H}$, les ouverts saturés pour la relation $\mathcal{R}_c$ sont engendrés par les $W_K \times \mathcal{F} \bigcup \mathcal{G} \times V^K$ et les $W^G \times \mathcal{F} \bigcup \mathcal{G} \times V_G$ qui correspondent bijectivement aux R_K et aux R^G, lesquels engendrent la topologie de $\Pi_\partial^{(2)}$ (Proposition 2) .

B - σ-ALGEBRES ET PROBABILITES SUR Π ET $\Pi_{\mathcal{D}}$.

1º/ Loi spatiale et σ-algèbre maigre $\sigma(R_I)$ sur Π .

La plus petite σ-algèbre sur Π compatible avec une loi spatiale est engendrée par les propositions du type : " $x \leq y$ modulo π " pour $x, y \in E$, c'est à dire par les R_I , I partie finie de E. On voit facilement que les $R_{I_1, \dots I_n}^{I'_1, \dots I'_k}$ constituent une semi-algèbre de Boole $\mathcal{M}$ qui engendre la σ-algèbre maigre $\sigma(R_I)$. Mais $\mathcal{M}$ engendre également une topologie $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ sur Π , ou topologie maigre.

PROPOSITION 1 - Π muni de la topologie maigre est un espace compact.

En effet, d'après la prop. 1 , ch. I, B, 1º, nous savons que $\mathcal{P}(E \times E)$ muni de sa topologie maigre est un espace compact. La topologie induite sur $\Pi \subset \mathcal{P}(E \times E)$ est engendrée par les R_I et les $R^{I'}$. Il suffit donc de prouver que Π est fermé dans $\mathcal{P}(E \times E)$.

L'axiome 1 des graphes signifie que Π est contenu dans le fermé $\bigcap_{x \in E} S_{\{x,x\}}$ l'axiome 2 signifie que Π est contenu dans le fermé $\bigcap_{\substack{x \in E \\ y \in E}} [S^{\{x,y\}} \cup S_{\{y,x\}}]$

et l'axiome 3 que Π est contenu dans l'ensemble : $\bigcap_{x \in E} \bigcap_{y \in E} \bigcap_{z \in E} [S^{\{x,y\}} \cup S^{\{y,z\}} \cup S_{\{x,z\}}]$ également fermé. Π, intersection de ces trois ensembles fermés, est fermé et compact dans $\mathcal{P}(E \times E)$.

COROLLAIRE 1 - Dans Π, la semi-algèbre $\mathcal{M}$ est également une classe compacte.

COROLLAIRE 2 - Toute fonction additive d'ensemble appliquant $\mathcal{M}$ sur $[0,1]$ - c'est à dire toute loi spatiale - se prolonge en une probabilité sur la σ-algèbre maigre.

La facilité de ce résultat ne doit d'ailleurs pas faire illusion. La σ-algèbre $\sigma(R_I)$ est réellement très maigre, puisqu'elle ne contient pas des propositions du type : " l'ouvert G est dans une classe " qui ont une signification concrète évidente, et dont il n'est pas possible de se passer dans les applications.

2º/ La σ-algèbre $\sigma(R_G)$ sur Π et Π_0.

Nous allons munir Π_0 de la σ-algèbre engendrée par les ouverts de cet espace compact. :

PROPOSITION 1 - La σ-algèbre engendrée par les fermés de Π_0 est identique à $\sigma(R_G)$, G parcourant l'ensemble $\mathcal{U}$ des ouverts de E.

La topologie de Π_0 admettant une base dénombrable, la σ-algèbre engendrée par les ouverts de Π_0 est aussi engendrée par les R^G et les R_K (G ouvert, K compact), qui engendrent cette topologie. Il faut donc montrer $R_K \in \sigma(R_G)$. Mais tout compact admet dans E un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts, G_n, et un compact K non réduit à un point est contenu dans une classe ouverte de $\mathring{\pi}$, si et seulement si l'un des G_n est contenu dans une telle classe. Donc $R_K = \bigcup\limits_{n>0} R_{G_n} \in \sigma(R_G)$. Si $K = \{x\}$ est réduit à un point, on a $R_{\{x\}} = \Pi_0$

PROPOSITION 2 - Soit α l'application de Π sur Π_0 faisant correspondre à toute partition π de graphe C la partition $\alpha(\pi) \in \Pi_0$ de graphe $\mathring{C} \cup \Delta$. L'image inverse par α de la σ-algèbre engendrée par les R_G dans Π_0 est la σ-algèbre engendrée par les R_G dans Π.

En effet, R_G dans Π_0 est l'évènement " $G \times G \subset \mathring{C}$ ", qui équivaut à "$G \times G \subset C$ quelque soit l'ensemble C d'ouverture $\mathring{C}$ pourvu que G soit ouvert. Il en resulte $\alpha^{-1}(R_G) = R_G \subset \Pi$.

COROLLAIRE. Si $\mathcal{R}_g$ est la relation " $C \equiv C'$ si $\mathring{C} = \mathring{C}'$ " dans Π, l'espace quotient $\Pi/\mathcal{R}_g$ muni de $\sigma(R_G)$ est isomorphe à Π_0, $\sigma(R_G)$.

Il n'est donc pas nécéssaire de préciser si c'est l'espace Π ou Π_0 qui a été muni de $\sigma(R_G)$. Dans la logique de cette σ-algèbre, on ne s'interesse qu'aux ouvertures des classes d'équivalence, et il est indifférent de considérer une partition π dans Π ou son image $\mathring{\pi}$ dans Π_0.

Notations. Par contre la notation R_K ne désigne pas le même évènement dans Π et dans Π_∂. Nous l'utiliserons toujours avec le sens qu'elle prend dans Π_∂. Par abus de notation, R_K signifiera donc toujours, même dans l'espace Π : " le compact K (non réduit à un point) est contenu dans l'ouverture d'une classe".

Nous désignons, comme d'habitude, par $\mathcal{B}$ une base fondamentale dénombrable de la topologie de E constituée d'ouverts relativement compacts, telle que tout ouvert de E soit réunion dénombrable de compacts $\bar{B}_i$ avec $B_i \in \mathcal{B}$.

PROPOSITION 3 - La famille $\mathcal{A}$ des parties de Π_∂ de la forme $R_{C_1,\dots C_n}^{C'_1,\dots C'_k}$ où chaque C_i, C'_j est dans $\mathcal{B}$ ou est la fermeture d'un ensemble de $\mathcal{B}$, constitue une semi-algèbre qui engendre $\sigma(R_G)$ et pour laquelle les $R_{\bar{B}_{i_1},\dots \bar{B}_{i_n}}^{\bar{B}_{j_1},\dots \bar{B}_{j_k}}$ $(B_i, B_j \in \mathcal{B})$ constituent une classe compacte $\mathcal{C}$.

En effet, il est immédiat que $\mathcal{A}$ est une semi-algèbre de Boole. D'autre part, les $R_{\bar{B}_j}^{B_i}$ constituent une base dénombrable de la topologie de Π_∂, et par suite $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(R_G)$. Enfin, $\mathcal{C}$ est une classe compacte, puisque tout $R \in \mathcal{C}$ est compact pour la topologie de Π_∂.

COROLLAIRE . Soit $\mathcal{A}_s$ l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{A}$, et $\mathcal{C}_s \subset \mathcal{A}_s$ la classe compacte stable pour la réunion finie engendrée par $\mathcal{C}$. Pour qu'une fonction additive d'ensemble P appliquant $\mathcal{A}_s$ sur $[0,1]$ se prolonge en une probabilité sur $\sigma(R_G)$ il faut et il suffit qu'elle possède la propriété d'approximation : $\forall R \in \mathcal{A}_s$, $P(R) = \operatorname{Sup}\{P(C) ; C \in \mathcal{C}_s , C \subset R\}$

La démonstration découle du théorème du ch. I, B - 2º .

PROPOSITION 4 - Soient D une partie dénombrable dense dans E, et $D' = D \times D$ dense dans $E \times E$. L'application α qui, au graphe C d'une partition $\pi \in \Pi$ fait correspondre l'ouvert $\alpha(C) = \overset{\circ}{\overline{C \cup \complement D'}}$ définit une application mesurable de Π, $\sigma(\mathcal{M})$ dans Π_∂, $\sigma(R_G)$.

Montrons d'abord que $\alpha(C) \cup \Delta$ est le graphe d'une partition $\overset{\circ}{\pi} \in \Pi_\partial$.

Si G et G' sont deux ouverts de E, on a $G \times G' \subset \alpha(C) \Leftrightarrow (G \times G') \cap D' \subset C \cap D'$
Mais $C \cap D'$ est le graphe de la restriction à $D \subset E$ de la partition π, et les axiomes 2' et 3' entrainent : $(G' \times G) \cap D' \subset C \cap D'$ et $(G \times G) \cap D' \subset C \cap D'$, donc aussi $(G' \times G) \subset C \cup \complement D'$ et $(G \times G) \subset C \cup \complement D'$. Par suite, $\alpha(C)$ vérifie les axiomes 2'' et 3'', et $\alpha(C) \cup \Delta$ est le graphe d'une partition $\overset{\circ}{\pi} \in \Pi_0$:

Montrons maintenant que cette application est mesurable, c'est à dire par exemple que l'image inverse de $R_G \subset \Pi_0$ est bien dans $\sigma(R_I)$. Mais, pour que l'ouvert G soit dans une classe ouverte de $\overset{\circ}{\pi} = \alpha(\pi)$, il faut et il suffit que l'on ait : $G \times G \subset C \cup \complement D'$, ou, ce qui revient au même, $(G \times G) \cap D' \subset C$. Comme $D' = D \times D$, ceci est encore équivalent à $R_{G \cap D}$ dans Π. Ainsi, $\alpha^{-1}(R_G) = R_{G \cap D} \in \sigma(R_I)$.

<u>COROLLAIRE.</u> Si P' est une probabilité sur $\sigma(R_I)$ – obtenue, par exemple, en prolongeant une loi spatiale – la formule $P(R) = P'[\alpha^{-1}(R)]$ pour $R \in \sigma(R_G)$ définit une probabilité sur $\Pi_0, \sigma(R_G)$.

La formule $\alpha^{-1}(R_G) = R_{G \cap D}$ montre de plus que la probabilité P ainsi construite fait de D une partie séparante au sens de la :

<u>Définition.</u>Une partie D dénombrable dense dans E est séparante pour la partition aléatoire $\Pi_0, \sigma(R_G)$, P si, et seulement si, pour tout ouvert G on a $R_G \underset{p.s.}{=} R_{G \cap D}$, ou encore si tout point $x \in E$ appartenant à une classe ouverte est p.s. limite d'une suite de points de D équivalents à x.

<u>Définition.</u>Une partition aléatoire $\Pi_0, \sigma(R_G)$, P est p.s. continue en un point $x_0 \in E$ (en tout point $x \in E$) si $P(x_0 \in F) = 0$ ($P(x \in F) = 0$ pour tout $x \in E$), F désignant l'ensemble des classes ponctuelles.

<u>PROPOSITION 5</u> -Les sous-ensembles $\Pi_0^{(n)} =$ " $\overset{\circ}{\pi}$ comporte au plus n classes ouvertes" et $\bigcup_{n>0} \Pi_0^{(n)} =$ " $\overset{\circ}{\pi}$ comporte un nombre fini de classes ouvertes" sont dans $\sigma(R_G)$

En effet, ce sont des sous-ensembles fermés de Π_0 (A, prop. 5).

PROPOSITION 6 – L'application $\alpha : \overset{\circ}{\pi} \to \overset{\circ}{\Gamma}_x$ de Π_0 dans $\mathcal{G}$, faisant correspondre à tout $\overset{\circ}{\pi} \in \Pi_0$ l'ouverture (éventuellement vide) de la classe modulo $\overset{\circ}{\pi}$ d'un élément $x \in E$ donné est mesurable pour $\sigma(R_G)$ et $\sigma(\mathcal{W})$.

En effet, $\alpha^{-1}(W_G) = R_{G \cup \{x\}} \in \sigma(R_G)$

COROLLAIRE 1 – Pour $x \in E$ donné, l'application de $E \times \Pi_0$ sur $\{0,1\}$ définie par $k(x,y) = 1$ si $y \in \overset{\circ}{\Gamma}_x$ et 0 si $y \notin \overset{\circ}{\Gamma}_x$ est mesurable pour $\sigma(\mathcal{F}) \otimes \sigma(R_G)$

COROLLAIRE 2 – Si M est une mesure positive bornée sur E, $\sigma(\mathcal{F})$, l'intégrale $\int_{\overset{\circ}{\Gamma}_x} M(dy)$ est, pour tout $x \in E$, une variable aléatoire sur Π_0, $\sigma(R_G)$, dont l'espérance mathématique est : $\int P(\, y \in \overset{\circ}{\Gamma}_x \,)\, M(dy)$.

CHAPITRE IV - FONCTIONS ALEATOIRES

Nous désignerons par E un espace localement compact de type dénombrable, par $\overline{\Phi}$ (E) (ou simplement par $\overline{\Phi}$) l'ensemble des applications de E dans la droite compacte $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$, par $\overline{\Phi}_{\mathfrak{f}}$(E) (ou $\overline{\Phi}_{\mathfrak{f}}$) le sous-espace de $\overline{\Phi}$ constitué des fonctions semi-continues supérieurement, et par $\overline{\Phi}_{\mathfrak{g}}$(E) (ou $\overline{\Phi}_{\mathfrak{g}}$) le sous-espace des fonctions semi-continues inférieurement. En identifiant une fonction à son graphe, on identifie par là même ces espaces fonctionnels à certains sous-espaces de $\mathcal{P}$ ($E \times \overline{R}$), que les méthodes du chapitre I permettent de munir de topologies pour lesquels ils sont compacts. Ce procédé nous conduira logiquement à identifier deux fonctions dès qu'elles ont en tout point mêmes limites inférieures et supérieures : il est de fait que dans bien des domaines d'application aucune expérience physiquement réalisable ne permettrait de distinguer l'une de l'autre ces deux fonctions. Nous obtiendrons ainsi un espace compact $\overline{\Phi}_{\mathfrak{h}}$ analogue à l'espace $\mathcal{H}$ du chapitre I. A partir de ces topologies compactes, il sera possible de construire des σ-algèbres et des probabilités sur ces différents espaces, et d'aboutir ainsi à une définition de la notion de fonction aléatoire.

On remarquera qu'il n'est possible de construire ces topologies compactes qu'en abandonnant la structure d'espace vectoriel topologique dont ces différents espaces de fonctions sont habituellement munis. Ce n'est que sur le sous-ensemble des fonctions continues et bornées sur tout compact que l'on retrouve intacte cette structure d'espace topologique vectoriel. Mais en contre-partie ce sous-espace de $\overline{\Phi}_{\mathfrak{h}}$ n'est plus compact.

On peut craindre qu'il n'y ait là une source de difficultés sérieuses, lorsqu'il s'agira de définir des mesures ou des distributions aléatoires. Mais le caractère itératif de nos résultats, déjà signalé dans le premier chapitre, nous indiquera la voie à suivre. Si E est localement compact et de type dénombrable, en effet, il en est de même des différents espaces $\mathcal{F}$, .. $\overline{\Phi}_{\mathfrak{f}}$ ... que l'on construit sur E, et par suite aussi des itérés $\mathcal{F}(\mathcal{F})$, $\overline{\Phi}_{\mathfrak{h}}(\overline{\Phi}_{\mathfrak{h}})$ etc.. qui sont des espaces de fonctionnelles, et dont certains sous-espaces seront, par exemple des espaces de mesures. Cette possibilité sera explorée superficiellement dans un dernier ~~chapitre~~ paragraphe, consacré à l'étude des mesures.

A - TOPOLOGIES SUR $\Phi(E)$.

1º/ Espaces Φ_f et Φ_g.

Nous désignons par Φ_f et Φ_g les sous-espaces de $\Phi(E)$ constitués respectivement des fonctions semi-continues supérieurement et inférieurement. Autrement dit, si l'on désigne par $\mathcal{B}_x$ le filtre des voisinages ouverts d'un point $x \in E$, on a :

$$\begin{cases} \varphi \in \Phi_f & \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathcal{B}_x \; ; \; \sup\limits_{x' \in B} \varphi(x') < \varphi(x) + \varepsilon \\ \varphi \in \Phi_g & \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathcal{B}_x \; ; \; \inf\limits_{x' \in B} \varphi(x') > \varphi(x) - \varepsilon \end{cases}$$

A toute fonction $\varphi \in \Phi$ nous ferons correspondre deux fonctions $\mathring{\varphi} = \liminf \varphi$ et $\overline{\varphi} = \limsup \varphi$ définies par :

$$\begin{cases} \mathring{\varphi}(x) = \sup\limits_{B \in \mathcal{B}_x} \inf\limits_{x' \in B} \varphi(x') \\ \overline{\varphi}(x) = \inf\limits_{B \in \mathcal{B}_x} \sup\limits_{x' \in B} \varphi(x') \end{cases}$$

Il est immédiat que $\mathring{\varphi} \in \Phi_g$ et $\overline{\varphi} \in \Phi_f$ et que l'on a :

$$\begin{cases} \varphi \leq \varphi' \quad \Rightarrow \quad \mathring{\varphi} \leq \mathring{\varphi}' \quad \text{et} \quad \overline{\varphi} \leq \overline{\varphi}' \\ \mathring{\varphi} \leq \varphi \leq \overline{\varphi} \\ \liminf \mathring{\varphi} = \mathring{\varphi} \qquad \text{et} \qquad \limsup \overline{\varphi} = \overline{\varphi} \end{cases}$$

Les applications $\varphi \to \mathring{\varphi}$ et $\varphi \to \overline{\varphi}$ sont donc une ouverture et une fermeture, au sens algébrique, de plus : $\varphi \in \Phi_f \Rightarrow \varphi = \overline{\varphi}$ et $\varphi \in \Phi_g \Rightarrow \varphi = \mathring{\varphi}$ de sorte que l'ensemble des éléments ouverts de Φ est l'espace Φ_g des fonctions semi-continues inférieurement, et l'ensemble des éléments fermés est l'espace Φ_f des fonctions semi-continues supérieurement.

Les fonctionnelles $\mathring{X}$ et $\overline{X}$. A toute fonction $\mathring{\varphi} \in \Phi_g$ nous associerons la fonction numérique $\mathring{X}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\mathring{X}(A) = \inf_{x \in A} \mathring{\varphi}(x) \qquad (A \subset E,\ A \neq \emptyset)$$

et, de même, à toute $\overline{\varphi} \in \Phi_f$ la fonction $\overline{X}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\overline{X}(A) = \sup_{x \in A} \overline{\varphi}(x) \qquad (A \subset E,\ A \neq \emptyset)$$

Le plus souvent, A sera un compact K ou un ouvert B. Dans le cas d'un ouvert B, les fonctionnelles $\overset{o}{X}$ et $\overline{X}$ peuvent se construire indifféremment à partir d'une fonction φ ou de son ouverture $\overset{o}{\varphi} \in \Phi_g$ (pour $\overset{o}{X}$) et de sa fermeture (pour $\overline{X}$). On a, en effet, pour tout ouvert B :

$$\begin{cases} \overset{o}{X}(B) = \operatorname*{Inf}_{x \in B} \overset{o}{\varphi}(x) = \operatorname*{Inf}_{x \in B} \varphi(x) \\ \overline{X}(B) = \operatorname*{Sup}_{x \in B} \overline{\varphi}(x) = \operatorname*{Sup}_{x \in B} \varphi(x) \end{cases}$$

Ces fonctionnelles determinent $\overset{o}{\varphi}$ et $\overline{\varphi}$, puisque, par définition, on a :

$$\overset{o}{\varphi}(x) = \operatorname*{Sup}_{B \in \mathcal{B}_x} \overset{o}{X}(B) \qquad \overline{\varphi}(x) = \operatorname*{Inf}_{B \in \mathcal{B}_x} \overline{X}(B)$$

$\overset{o}{X}(B)$ est une fonction décroissante de B , $\overline{X}(B)$ une fonction croissante. Plus précisément, elles vérifient les conditions suivantes : B_i B , étant des ouverts non vides quelconques :

$$\begin{cases} 1 - \overset{o}{X}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \operatorname*{Inf}_{i \in I} \overset{o}{X}(B_i) \\ 2 - \overline{X}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \operatorname*{Sup}_{i \in I} \overline{X}(B_i) \\ 3 - \overset{o}{X}(B) \leq \overline{X}(B) \end{cases}$$

Inversement, donnons nous une fonction $\overset{o}{X}$ définie sur $\mathcal{G}(E)$ (ou sur une base $\mathcal{B}$ de la topologie de E) et vérifiant la condition 1 . La fonction définie par :

$$\overset{o}{\varphi}(x) = \operatorname*{Sup}_{B \in \mathcal{B}_x} \overset{o}{X}(B)$$

est manifestement semi-continue inférieurement. Posons donc : $\overset{o}{Y}(B') = \operatorname*{Inf}_{x \in B'} \overset{o}{\varphi}(x)$ Comme B' est voisinage de tout $x \in B'$, on a $\overset{o}{\varphi}(x) \geq \overset{o}{X}(B')$ pour tout $x \in B'$. Par suite $\overset{o}{Y}(B') \geq \overset{o}{X}(B')$. Montrons qu'en fait on a l'égalité. En effet, supposons $\overset{o}{Y}(B') \geq \overset{o}{X}(B') + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, c'est à dire : $\forall\, x \in B'$, $\overset{o}{\varphi}(x) \geq \overset{o}{X}(B') + \varepsilon$ ce qui entraine, d'après la construction de $\overset{o}{\varphi}(x)$:

$$\forall\, x \in B' \quad \exists\, B_x \in \mathcal{B}_x : \overset{o}{X}(B_x) > \overset{o}{X}(B') + \varepsilon' \qquad (0 < \varepsilon' < \varepsilon)$$

Comme $\overset{\circ}{X}(B)$ est une fonction croissante, on peut remplacer B_x par $B_x \cap B' \in \mathcal{B}_x$
On a ainsi une famille $B_x \cap B' \in \mathcal{G}$ avec : $\forall\, x \in B'$, $\overset{\circ}{X}(B' \cap B_x) > \overset{\circ}{X}(B') + \varepsilon$ –
Mais on a aussi bien $\bigcup_{x \in B'} B' \cap B_x = B'$, et, d'après la condition 1 :

$$\overset{\circ}{X}(B') = \operatorname*{Inf}_{x \in B'} \overset{\circ}{X}(B' \cap B_x)$$

On aboutit ainsi à une contradiction, et on conclut $\overset{\circ}{Y}(B') = \overset{\circ}{X}(B')$. Le cas de la fonctionnelle $\bar{X}$ se traite de manière analogue. Enonçons donc :

<u>PROPOSITION 1 –</u> Les deux applications :

$$\overset{\circ}{X}(G) = \operatorname*{Inf}_{x \in G} \overset{\circ}{\varphi}(x) \qquad \text{et} \qquad \overset{\circ}{\varphi}(x) = \operatorname*{Sup}_{G \in \mathcal{B}_x} \overset{\circ}{X}(G)$$

($x \in E$, $G \in \mathcal{G}$) sont inverses l'une de l'autre, et définissent une bijection de $\bar{\Phi}_g$ sur l'ensemble des fonctions $\overset{\circ}{X}$ (définies sur $\mathcal{G}$ et à valeurs dans $\bar{R}$) vérifiant la condition 1 .

De même, les deux applications :

$$\bar{X}(G) = \operatorname*{Sup}_{x \in G} \bar{\varphi}(x) \qquad \text{et} \qquad \bar{\varphi}(x) = \operatorname*{Inf}_{G \in \mathcal{B}_x} \bar{X}(G)$$

sont inverses l'une de l'autre et définissent une bijection de $\bar{\Phi}_f$ sur l'ensemble des fonctions $\bar{X}$ (définies sur $\mathcal{G}$ et à valeurs dans $\bar{R}$) vérifiant la condition 2.

Nous verrons ultérieurement que la condition 3 exprime que l'on peut trouver une fonction $\varphi \in \bar{\Phi}$ dont l'ouverture et la fermeture soient justement les fonctions $\overset{\circ}{\varphi}$ et $\bar{\varphi}$ attachées à $\overset{\circ}{X}$ et $\bar{X}$.

Si une fonction φ est semi-continue supérieurement en x_0 , on a en ce point $\varphi(x_0) = \bar{\varphi}(x_0)$: en effet; on a toujours $\varphi(x_0) \leq \bar{\varphi}(x_0)$, et, d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}_x$ avec $\bar{X}(B) < \varphi(x_0) + \varepsilon$,d'où $\bar{\varphi}(x_0) < \varphi(x_0) + \varepsilon$ et l'égalité $\varphi(x_0) = \bar{\varphi}(x_0)$. La réciproque est immédiate. On a un résultat analogue pour la semi-continuité inférieure. Enonçons :

PROPOSITION 2 - Une fonction $\varphi \in \overline{\Phi}$ est semi-continue supérieurement en un point x_0 si et seulement si on a $\varphi(x_0) = \overline{\varphi}(x_0)$. Elle est semi-continue inférieurement en x_0 si et seulement si on a $\varphi(x_0) = \mathring{\varphi}(x_0)$. Elle est continue en x_0 si et seulement si $\varphi(x_0) = \mathring{\varphi}(x_0) = \overline{\varphi}(x_0)$.

La continuité dont il vient d'être question est relative à la droite compacte $[-\infty, +\infty]$. Si l'on veut que $\varphi \in \overline{\Phi}$ soit continue et bornée en x_0 , il faut ajouter la condition : $\mathring{\varphi}$ et $\overline{\varphi}$ bornés en x_0 . Plus généralement, cherchons une condition pour que φ soit continue et bornée sur un compact $K \subset E$. Soit $\mathfrak{B}$ une base de la topologie de E constituée d'ouverts relativement compacts. Si φ est continue et bornée sur K , on a $\overline{X}(K) < \infty$ et $\mathring{X}(K) > -\infty$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un recouvrement fini de K par des compacts $\overline{B}_1, \ldots \overline{B}_n$, $B_i \in \mathfrak{B}$, avec $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ pour tout $x \in K$ et tout $y \in K$ appartenant à un même $\overline{B}_i$. Inversement, ces conditions sont manifestement suffisantes :

PROPOSITION 3 - Une fonction φ est continue et bornée sur un compact K si, et seulement si on a $\overline{X}(K) < \infty$, $\mathring{X}(K) > -\infty$,et si, pour tout $\varepsilon > 0$,on peut trouver un recouvrement fini de K par des compacts $\overline{B}_1, \ldots \overline{B}_n$ $(B_i \in \mathfrak{B})$ avec $\overline{X}(\overline{B}_i \cap K) - \mathring{X}(\overline{B}_i \cap K) \leq \varepsilon$, $(i = 1,2,\ldots n)$.

2º/ Graphe de $\varphi \in \overline{\Phi}$

Nous définirons une fonction quelconque $\varphi \in \overline{\Phi}$ par son graphe C dans $E \times [-\infty, +\infty]$ Ce graphe vérifie les deux axiomes suivants :

$$1 - \forall x \in E \quad \exists y \in \overline{R} \quad : \quad (x,y) \in C$$
$$2 - \forall x \in E \quad \forall y \in \overline{R} \quad , \quad (x,y) \in C \quad \Rightarrow \quad x \times [-\infty, y] \subset C$$

On n'oubliera pas que les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ sont admises pour $\varphi(x)$. Cette définition du graphe C diffère de la définition usuelle (ensemble des $(x,f(x))$ pour $x \in E$). Elle lui est équivalente,puisqu'en tout point x on a $\varphi(x) =$ Sup $(y : (x,y) \in C)$.

Il n'est d'ailleurs pas nécéssaire de préciser si le point $(x, \varphi(x))$ appartient lui-même ou non à C : en tout point $x \in E$ la coupe du graphe C est un intervalle $[-\infty, \varphi(x)]$ dont il n'est pas utile de préciser s'il est ouvert ou fermé à droite. Ainsi, une fonction $\varphi \in \Phi$ est caractérisée non par un graphe C unique, mais, en réalité, par une classe de graphes équivalents pour la relation : " $C \simeq C'$ si en tout $x \in E$ les coupes de C et de C' ont même fermeture dans $\overline{R}$ ".

3º/ Espace topologique compact Φ_f

PROPOSITION 1 - Si une fonction $\varphi \in \Phi$ admet un graphe C, sa limite supérieure $\overline{\varphi} \in \Phi_f$ admet le graphe $\overline{C}$ (fermeture de C dans $E \times \overline{R}$).

En effet, on voit immédiatement que $(x,y) \notin \overline{C}$ équivaut à : " $\exists\, \varepsilon > 0, \exists\, B \in \mathcal{B}_x$ $\overline{X}(B) < y - \varepsilon$ " donc à : " $\exists\, \varepsilon' > 0$, $\inf_{B \in \mathcal{B}_x} \overline{X}(B) < y - \varepsilon'$ ", c'est à dire à $\overline{\varphi}(x) < y$.

COROLLAIRE. L'application $\overline{\varphi} \to \overline{C}$ faisant correspondre à $\overline{\varphi} \in \Phi_f$ la fermeture (unique) d'un de ses graphes définit une bijection de Φ_f sur le sous-ensemble de $\mathcal{F}(E \times \overline{R})$ constitué des parties fermées de $E \times \overline{R}$ vérifiant les axiomes 1 et 2 des graphes.

D'après la proposition 1, si $\varphi \in \Phi_f$ admet le graphe C, $\overline{\varphi} = \varphi$ admet le graphe $\overline{C}$. Inversement, si un fermé $\overline{C}$ de $E \times \overline{R}$ est le graphe d'une fonction $\varphi \in \Phi$, limSup $\varphi = \overline{\varphi}$ admet également le graphe $\overline{C}$ et par suite $\varphi = \overline{\varphi}$.

Cette bijection nous permet d'identifier Φ_f à ce sous-ensemble de $\mathcal{F}(E \times \overline{R})$, et de munir Φ_f de la topologie induite par la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{V})$ de $\mathcal{F}(E \times \overline{R})$.

La topologie de $\mathcal{F}(E \times \overline{R})$ est engendrée par les $V^{K'}$ et les $V_{G'}$. En raison de l'axiome 2, celle de Φ_f est engendrée par les $V^{K'}$ et les $V_{G'}$ où les K' et les G' sont de la forme suivante :

$K' = K \times [a, +\infty]$ (K, compact dans E)

$G' = G \times]b, +\infty]$ (G ouvert dans E, a, b réels)

Pour que $\overline{\varphi} \in \overline{\Phi}_f$ appartienne à $V_{G'}$, il faut et il suffit que l'on ait $\overline{\varphi}(x) > b$ pour un point x au moins appartenant à G, soit $\sup_{x \in G} \overline{\varphi}(x) > b$. Pour que $\overline{\varphi} \in V^{K'}$ il faut et il suffit que $\overline{\varphi}(x) < a$ pour tout $x \in K$. Mais $\overline{\varphi}$, fonction semi-continue supérieurement, atteint en un point de K sa borne supérieure sur K. Ainsi $\overline{\varphi} \in V^{K'}$ équivaut à $\sup_{x \in K} \overline{\varphi}(x) < a$. Enonçons ce résultat à l'aide de la fonctionnelle $\overline{X}$:

<u>PROPOSITION 2 -</u> Les ouverts de $\overline{\Phi}_f$ sont engendrés par les parties de $\overline{\Phi}_f$ de la forme $\{\overline{X}(G) > b\}$ et $\{\overline{X}(K) < a\}$, G et K décrivant l'ensemble des ouverts et l'ensemble des compacts de E. Il suffit, d'ailleurs de se limiter aux ouverts $G = B \in \mathcal{B}$ et aux compacts $K = \overline{B}'$, avec $B' \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ désignant une base de la topologie de E constituée d'ouverts relativement compacts.

Examinons maintenant la <u>convergence</u> associée à cette topologie, en nous limitant d'ailleurs au cas des suites, puisque l'espace $\overline{\Phi}_f$ est de type dénombrable. La caractérisation des ouverts qui est donnée par la proposition 2 conduit immédiatement aux critères suivants :

<u>PROPOSITION 3 -</u> Pour qu'une suite $\overline{\varphi}_n$ d'éléments de $\overline{\Phi}_f$ converge vers $\overline{\varphi} \in \overline{\Phi}_f$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées, pour tout ouvert G et tout compact K, par les fonctionnelles $\overline{X}_n$ et $\overline{X}$ associées aux $\overline{\varphi}_n$ et à $\overline{\varphi}$:

1 - $\overline{X}(G) \leq \underline{\lim}\, \overline{X}_n(G)$

2 - $\overline{X}(K) \geq \overline{\lim}\, \overline{X}_n(K)$

De même, pour que $\varphi \in \overline{\Phi}_f$ soit valeur d'adhérence pour la suite $\overline{\varphi}_n$ dans $\overline{\Phi}_f$ il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées pour tout ouvert G et tout compact K :

$$\overline{X}(G) \leq \overline{\lim}\, \overline{X}_n(G)$$
$$\overline{X}(K) \geq \underline{\lim}\, \overline{X}_n(K)$$

En utilisant dans $E \times \overline{R}$ le critère du théorème 3 du Ch. I, A-1º, en tenant compte des axiomes des graphes, et en utilisant la semi-continuïté supérieure, on obtient le théorème suivant :

<u>THEOREME 1 -</u> Pour qu'une suite $\bar{\varphi}_n$ converge vers $\bar{\varphi}$ dans $\bar{\Phi}_f$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1'- Pour tout $x \in E$, il existe une suite x_n de points de E convergeant vers x dans E telle que la suite $\bar{\varphi}_n(x_n)$ converge vers $\bar{\varphi}(x)$ dans $\bar{R}$.

2' - Si une suite x_{n_k} converge vers un point x dans E, la suite des $\bar{\varphi}_{n_k}(x_{n_k})$ vérifie : $\overline{\lim}\ \bar{\varphi}_{n_k}(x_{n_k}) \leq \bar{\varphi}(x)$.

Proposons nous maintenant de montrer que $\bar{\Phi}_f$ est un espace <u>compact</u>. Comme $\mathcal{F}(E \times \bar{R})$ est déjà un espace compact, il suffit de montrer que $\bar{\Phi}_f$ est fermé dans $\mathcal{F}(E \times \bar{R})$. autrement dit, que chacun des deux axiomes des graphes définit un sous-ensemble fermé de $\mathcal{F}(E \times \bar{R})$.

Pour l'axiome 1, celà est immédiat : l'ensemble des fermés $\bar{C} \subset E \times \bar{R}$ vérifiant cet axiome est $\bigcap_{x \in E} V_{\{x \times \bar{R}\}}$ et $V_{\{x\} \times \bar{R}}$ est fermé dans $\mathcal{F}(E \times \bar{R})$. (On notera que ce résultat est lié à la compacité de $\bar{R}$: c'est pour cette raison qu'il est nécéssaire de travailler sur la droite compacte, et d'autoriser les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ pour les fonctions $\bar{\varphi} \in \bar{\Phi}_f$)

Comme l'espace $\mathcal{F}(E \times \bar{R})$ est de type dénombrable, il suffit, pour achever la démonstration, de montrer que si chacun des éléments $\bar{C}_n$ d'une suite convergeant vers $\bar{C}$ dans $\mathcal{F}$ vérifie l'axiome 2, la limite $\bar{C}$ de cette suite vérifie également cet axiome. Soit donc (x,y) un élément de $\bar{C}$. D'après le critère 1' du Th.3, (ch I, A-1º), (x,y) est limite d'une suite $(x_n, y_n) \in \bar{C}_n$. Mais chaque $\bar{C}_n$ contient l'ensemble $x_n \times [-\infty, y_n]$ (axiome 2), et chaque point de $x \times [-\infty, y]$ est limite de points (x_n, z_n) avec $z_n \in [-\infty, y_n]$; de sorte que l'on a bien $x \times [-\infty, y] \subset C$. Enonçons :

<u>THEOREME 2 -</u>L'ensemble $\bar{\Phi}_f$ des fonctions semi-continues supérieurement est fermé, donc compact, dans $\mathcal{F}(E \times \bar{R})$.

4º/ L'espace compact Φ_g

L'application $\varphi \to -\varphi$ définissant un homéomorphisme de Φ_f sur Φ_g, chacun des énoncés du paragraphe précédent se transpose de lui-même. Il faut seulement prendre garde que l'ensemble $E \times \{-\infty\} = \Pi_{-\infty}$ doit appartenir au graphe de toute fonction $\varphi \in \Phi_g$: ~~si C est le graphe de $\varphi \in \Phi_f$, C est un graphe de et réciproquement~~ .

PROPOSITION 1 - Si $\varphi \in \Phi$ admet un graphe C sa limite inférieure $\overset{\circ}{\varphi} \in \Phi_g$ admet le graphe $\overset{\circ}{C} \cup \Pi_{-\infty}$

Corollaire. L'application $\overset{\circ}{\varphi} \to \overset{\circ}{C}$ faisant correspondre à $\overset{\circ}{\varphi} \in \Phi_g$ l'ouverture (unique) d'un de ses graphes est une bijection de Φ_g sur le sous-ensemble de $\mathcal{G}(E \times \overline{R})$ constitué des parties ouvertes de $E \times \overline{R}$ vérifiant l'axiome $\mathfrak{A}$ des graphes.

PROPOSITION 2 - Les ouverts de Φ_g sont engendrés par les parties de Φ_g de la forme $\{ \overset{\circ}{X}(\overset{\circ}{\varphi}, K) > b \}$ et $\{ \overset{\circ}{X}(\overset{\circ}{\varphi} ; G) < a \}$, K compact et G ouvert dans E. Il suffit d'ailleurs de se limiter aux compacts $K = \overline{B}$ et aux ouverts $G = B'$ B et B' appartenant à une base d'ouverts relativement compacts de E .

PROPOSITION 3 - Une suite $\overset{\circ}{\varphi}_n$ converge vers $\overset{\circ}{\varphi}$ dans Φ_g si et seulement si pour tout ouvert G et tout compact K les fonctionnelles associées vérifient les conditions :

$$1 - \quad \overset{\circ}{X}(G) \geq \overline{\lim}\, \overset{\circ}{X}_n(G)$$

$$2 - \quad \overset{\circ}{X}(K) \leq \underline{\lim}\, X_n(K)$$

De même, $\overset{\circ}{\varphi}$ est valeur d'adhérence pour une suite $\overset{\circ}{\varphi}_n$ dans Φ_g si et seulement si pour tout ouvert G et tout compact K les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\overset{\circ}{X}(G) \geq \underline{\lim}\, \overset{\circ}{X}(G)$$

$$\overset{\circ}{X}(K) \leq \overline{\lim}\, X(K)$$

THEOREME 1 - Pour qu'une suite $\overset{\circ}{\varphi}_n$ converge vers $\overset{\circ}{\varphi}$ dans Φ_g ,il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1' - Pour tout $x \in E$, il existe une suite x_n convergeant vers x dans E telle que la suite $\overset{\circ}{\varphi}_n(x_n)$ converge vers $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ dans $\overline{R}$.

2/ Si une suite x_{n_k} converge vers x dans E , la suite des $\bar{\varphi}_{n_k}(x_{n_k})$ vérifie $\underline{\lim}$ $\bar{\varphi}_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \bar{\varphi}(x)$.

Theoreme 2 - Φ_g est fermé, donc compact, dans $\mathcal{G}(E \times \bar{R})$

5º/ L'espace compact $\Phi_{\mathcal{R}} = \Phi / \mathcal{R}$

La relation d'équivalence $\mathcal{R}$: " $A \equiv A'$ si $\mathring{A} = \mathring{A}'$ et $\bar{A} = \bar{A}'$ " dans $E \times \bar{R}$ conduit à un homéomorphisme de l'espace quotient $\mathcal{F}(E \times \bar{R})/\mathcal{R}$ et du sous-espace compact $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \times \mathcal{F}$ défini comme l'ensemble des couples (G,F) vérifiant $G \subset F$. La restriction à Φ de sette équivalence est la relation : " $\varphi \equiv \varphi'$ si $\mathring{\varphi} = \mathring{\varphi}'$ et $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}'$ " que nous désignerons également par $\mathcal{R}$.

PROPOSITION 1 - L'application $C \to (\mathring{C}, \bar{C})$, où C est un graphe d'une fonction $\varphi \in \Phi$ définit une surjection de Φ sur $\mathcal{H} \cap \Phi_g \times \Phi_f$

En effet, on remarque d'abord que $(\mathring{C}, \bar{C})$ ne dépend que de la fonction $\varphi \in \Phi$ et non du choix particulier de C dans la classe des graphes de φ . Le couple $(\mathring{C}, \bar{C})$ est dans $\mathcal{H}$,puisque $\mathring{C} \subset \bar{C}$. Inversement, soient G et F un ouvert et un fermé de $E \times \bar{R}$ tels que $G \cup \Pi_{-\infty}$ et F vérifient les axiomes des graphes. Il faut montrer qu'il existe un ensemble $C \subset E \times \bar{R}$ vérifiant les axiomes des graphes et tel que l'on ait $\mathring{C} = G$ et $\bar{C} = F$.

Soit D_o une partie dense dans E ainsi que son complémentaire $\complement D_o$. L'ensemble $D = D_o \times \bar{R}$ et son complémentaire $\complement D = \complement D_o \times \bar{R}$ sont denses dans $E \times \bar{R}$. Posons $C = G \cup (\complement \bar{G} \cap \mathring{F} \cap D) \cup (F \cap \complement \mathring{F}) \cup \Pi_{-\infty}$. On vérifie sans peine que C est un graphe et que l'on a $\mathring{C} = G$ et $\bar{C} = F$, ce qui établit la proposition.

PROPOSITION 2 - Si $\mathcal{R}$ est la relation : " $\varphi \equiv \varphi'$ si limSup φ = limSup φ' et limInf φ = limInf φ' " dans Φ , l'application $C \to (\mathring{C}, \bar{C})$ définit une bijection de $\Phi_{\mathcal{R}} = \Phi / \mathcal{R}$ sur $\mathcal{H} \cap \Phi_g \times \Phi_f$

En effet, $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence dans Φ associée canoniquement à la surjection de la proposition 1 .

Mais $\mathcal{H}$ est un sous-espace compact de $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$ pour la topologie $\mathcal{T}(\omega) \otimes \mathcal{T}(\upsilon)$ Il en est de même du produit $\Phi_g \times \Phi_f$, puisque Φ_g et Φ_f sont compacts dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ munis de $\mathcal{T}(\omega)$ et de $\mathcal{T}(\upsilon)$. Si donc nous munissons Φ_e de la topologie pour laquelle l'application de la proposition 2 est un homéomorphisme, nous allons faire de Φ_e un espace compact . En fait, nous identifierons Φ_e et $\mathcal{H} \cap \Phi_g \times \Phi_f$: Φ_e est ainsi l'ensemble des couples $(\overset{o}{\varphi}, \overline{\varphi})$ avec $\overset{o}{\varphi} \in \Phi_g$ $\overline{\varphi} \in \Phi_f$ et $\overset{o}{\varphi} \leq \overline{\varphi}$. D'où le resultat :

<u>Theoreme 1-</u> L'espace $\Phi_e = \Phi / \mathcal{R}$ est un sous-espace fermé, donc compact, de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$-

On notera que travailler dans Φ_e revient à admettre que l'on ne peut pas distinguer l'une de l'autre deux fonctions ayant même limites inférieure et supérieure en tout point. En appliquant les resultats des paragraphes 3º et 4º à chacune des composantes $\overset{o}{\varphi}$ et $\overline{\varphi}$, on formera sans peine les critères de convergence dans Φ_e . On notera aussi que la relation $\overset{o}{X}(G) \leq \overline{X}(G)$ pour tout ouvert G est une condition nécéssaire et suffisante pour que deux fonctionnelles $\overset{o}{X}$ et $\overline{X}$ vérifiant les conditions I et 2 du paragraphe 1º définissent un élément (nécéssairement unique) $(\overset{o}{\varphi}, \overline{\varphi})$ de Φ_e .

B— FONCTIONS ALEATOIRES.

1º/ La σ-algèbre maigre sur Φ, ( )

La restriction à Φ de la σ-algèbre maigre de $\mathcal{P}(E \times \overline{R})$ est engendrée par la semi-algèbre $\mathcal{M}$ constituée des parties de Φ de la forme :

$$\{\varphi \quad : \varphi \in \Phi \quad , \varphi(x_1) < y_1 , \ldots \quad \varphi(x_n) < y_n \ ; \ \varphi(x'_1) \geq y'_1 , \ldots \quad \varphi(x'_k) \quad y'_k \}$$

Comme cette semi-algèbre est en même temps une classe compacte, on voit que toute fonction additive d'ensemble appliquant $\mathcal{M}$ sur $[0,1]$ – c'est à dire toute loi spatiale – se prolongera d'une manière unique en une probabilité sur la σ-algèbre maigre.

2º/ σ-algèbres et probabilités sur Φ_f, Φ_g et Φ_h.

Sur Φ_f, la σ-algèbre $\sigma(\mathcal{V})$ engendrée par les fermés de $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ est aussi engendrée par la semi-algèbre des $V_{B_i}^{C_j}$ où les B_i et les C_j (en nombre fini) sont ouverts ou compacts. Cette semi-algèbre possède une classe compacte, celle des $V_K^{G_i}$, et par suite, moyennant la propriété d'approximation habituelle, une fonction simplement additive d'ensemble se prolongera en une probabilité.

Nous designerons par $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie de l'espace E. Sur Φ_f, $\sigma(V_G)$ est engendrée par les évènements : " $\overline{X}(B) < a$ ", $B \in \mathcal{B}$. Pour toute fonction $\varphi \in \Phi$, on a $\overline{X}(\varphi ; B) = \overline{X}(\overline{\varphi} ; B)$, $B \in \mathcal{B}$. Par suite, si l'on désigne par $\mathcal{R}_f$ la relation d'équivalence : " $\varphi \equiv \varphi'$ si lim Sup φ = lim Sup φ' " dans Φ, on a la :

PROPOSITION 1 – Muni de $\sigma(V_G)$, l'espace quotient $\Phi/\mathcal{R}_f$ est isomorphe à Φ_f muni de $\sigma(V_G)$

Le point de vue de $\sigma(V_G)$ revient à étudier les fonction $\varphi \in \bar{\Phi}$ à partir de leurs limites supérieures $\bar{\varphi} = \lim \operatorname{Sup} \varphi$. Il est équivalent d'étudier φ par l'intermédiaire des $\bar{X}(\varphi, G)$ qui sont des variables aléatoires, pour G ouvert, d'après la définition même des V_G. Ainsi :

PROPOSITION 2 -Toute fonctionnelle $\bar{X}(\varphi ; G)$ vérifiant la condition 2 de A-1º pour tout G ouvert est une variable aléatoire sur $\bar{\Phi}$, $\sigma(V_G)$. La σ-algèbre $\sigma(V_G)$ sur $\bar{\Phi}$ est engendrée par la famille des variables aléatoires $\bar{X}(\varphi ; G)$, $G \in \mathcal{G}$ (ou fonction aléatoire sur $\mathcal{G}$) vérifiant cette condition.

Montrons qu'il est effectivement possible de construire des probabilités P sur $\bar{\Phi}_\ell$, $\sigma(V_G)$. Pour celà, soit D une partie dénombrable dense dans E. Considérons l'application $\alpha : C \to \overline{C \cap (D \times \bar{R})}$ de $\bar{\Phi}$ dans $\bar{\Phi}_\ell$ qui, à la fonction $\varphi \in \bar{\Phi}$ de graphe C fait correspondre $\alpha(\varphi) \in \bar{\Phi}_\ell$ de graphe $\overline{C \cap D \times \bar{R}}$ (Il est immédiat que cet ensemble vérifie les axiomes I et 2 des graphes). Cette application est mesurable pour la σ-algèbre maigre. Si $G = \mathring{B} \times]a, +\infty]$ est un ouvert de $E \times \bar{R}$, on a :

$$\alpha(C) \cap G \neq \emptyset \iff C \cap (D \times \bar{R}) \cap G \neq \emptyset \iff C \cap (\mathring{B} \cap D) \times]a, +\infty] \neq \emptyset$$

c'est à dire : $\alpha^{-1}(V_G) = V_{(\mathring{B} \cap D) \times]a,+\infty]} \in \sigma(\mathcal{M})$

Proposition 3 - Si P' est une probabilité sur $\bar{\Phi}$, $\sigma(\mathcal{M})$, obtenue, par exemple, en prolongeant une loi spatiale, la fonction P définie par $P(V) = P'[\alpha^{-1}(V)]$ pour $V \in \sigma(V_G)$ est une probabilité sur $\bar{\Phi}_\ell$, $\sigma(V_G)$.

Pour la probabilité P ainsi construite, la partie dénombrable dense D est séparante. D'une manière générale, on dira qu'une partie dénombrable dense D est séparante pour la fonction aléatoire $\bar{\Phi}_\ell$, $\sigma(\mathcal{U})$, P si l'évènement " Pour tout $x \in E$ il existe une suite formée d'éléments $x_n \in D$ convergeant vers x dans E telle que la suite $\varphi(x_n)$ converge vers $\varphi(x)$ dans $\bar{R}$ " est presque certain.

Si C est un graphe de φ, cet évènement implique manifestement $\bar{C} = \overline{C \cap D \times \bar{R}}$.
Mais, inversement, puisque φ est semi-continue supérieurement, et que son graphe C peut être supposé fermé, l'égalité $C = \overline{C \cap D \times \bar{R}}$ implique l'évènement de la définition précédente :

PROPOSITION 4 - Pour qu'une partie dénombrable dense D soit séparante pour Φ_{ℓ}, $\sigma(\vartheta)$, P il faut et il suffit que l'on ait $P(\bar{C} = \overline{C \cap D \cap \bar{R}}) = 1$, $\bar{C}$ étant le graphe fermé aléatoire associé à cette fonction aléatoire.

Il faut toutefois montrer que " $\bar{C} = \overline{C \cap D \times \bar{R}}$ " est bien un évènement pour $\sigma(\vartheta)$. Mais celà resulte immédiatement du fait que pour toute pa rtie dénombrable Q dense dans $\bar{R}$ on a $\overline{C \cap D \times \bar{R}} = \overline{C \cap D \times Q}$ et du fait que, dans $\mathfrak{F}$, $\sigma(\vartheta)$, l'ensemble des fermés A vérifiant " $A = \overline{A \cap D \times Q}$ " est mesurable.

Continuité p.s. La proposition : " φ est continue en x_0 " définit un évènement pour Φ_{ℓ}, $\sigma(\vartheta)$. En effet, d'après la proposition 2 du A-1º , elle équivaut à : " $\forall y \in \bar{R}$, $(x_0, y) \notin C$ ou $\exists \varepsilon > 0$, $(x_0, y-\varepsilon) \in \overset{\circ}{C}$ " qui est dans $\sigma(\vartheta)$, puisqu'on peut se limiter aux y et aux ε rationnels.

Si cet évènement possède la probabilité 1, on dira que la fonction aléatoire est p.s. co ntinue en x_0. Elle sera continue p.s. en tout point si l'évènement " φ est continue en x " est presque certain pour tout $x \in E$.

Une fonction aléatoire sera dite presque sûrement à trajectoire continue s'il y a une probabilité unité pour que φ soit continue et bornée en tout p oint. Comme E admet un recouvrement compact dénombrable, la proposition 3 de chI, A-1º montre que : " φ est continue et bornée sur tout compact " définit bien un évènement de $\sigma(\omega) \otimes \sigma(\vartheta)$

La transposition des resultats précedents à Φ_g et à Φ_h se fait d'elle même. En particulier,

C - MESURES ALEATOIRES ET ESPACE COMPACT $\mathcal{M}$.

Nous nous bornons, dans ce qui suit, à une étude sommaire de l'espace compact $\Phi_g(\mathcal{G})$ des fonctions semi-continues inférieurement définies sur l'ensemble $\mathcal{G}(E)$ des ouverts de E, et, plus précisément, à l'étude d'un sous espace compact de $\Phi_g(\mathcal{G})$ qui s'identifie avec un espace $\mathcal{M}$ de mesures positives.

Définition. Une mesure (positive) μ sur l'espace localement compact de type dénombrable E est una application de $\sigma[\mathcal{F}(E)]$ dans $[0,\infty]$ vérifiant la propriété de σ-additivité :

1- Si A_n est une suite d'ensembles disjoints appartenant à $\sigma(\mathcal{F})$, on a :

$$\mu\left[\bigcup_{n>0} A_n\right] = \sum_{n>0} \mu(A_n)$$

Nous désignerons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures vérifiant en outre la condition suivante :

2 - Pour tout compact $K \subset E$, on a : $\mu(K) = \operatorname{Inf}\{\mu(G),\ G \in \mathcal{G}\ \ G \supset K\}$

S'il s'agit d'une mesure bornée, l'axiome 2 est automatiquement vérifié. Dans le cas général, cependant,il s'agit bien d'une condition supplémentaire.

Comme E est localement compact et de type dénombrable, tout compact K admet un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts G_n, et l'axiome 2 est équivalent à la condition $\mu(K) = \lim_n \downarrow \mu(G_n)$.

Nous désignerons par $\mathcal{B}$ l'ensemble des ouverts relativement compacts de E. Une mesure $\mu \in \mathcal{M}$ est déterminée lorsque l'on connait sa restriction à l'ensemble $\mathcal{G}$ des ouverts de E. Plus précisément, nous allons établir le théorème suivant :

<u>THEOREME 1</u> – Pour qu'une fonction M positive définie sur $\mathcal{G}(E)$ se prolonge sur $\sigma(\mathcal{F})$ en une mesure $\mu \in \mathcal{M}$ nécéssairement unique, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1 – $\forall G \in \mathcal{G} \qquad M(G) = \operatorname{Sup}\{M(B) , B \in \mathcal{B} , \bar{B} \subset G\}$

2 – $\forall G , G' \in \mathcal{G} \quad , G \cap G' = \emptyset \Rightarrow M(G \cup G') = M(G) + M(G')$

Montrons d'abord que ces conditions sont nécéssaires. Celà est immédiat pour la condition 2 . Si G est un ouvert, on formera une suite croissante $B_n \subset \bar{B}_n \subset B_{n+1} \subset \dots$ d'ouverts $B_n \in \mathcal{B}$ avec $G = \bigcup_{n>0} B_n = \bigcup_{n>0} \bar{B}_n$. Pour $\mu \in \mathcal{M}$,on a $\mu(G) = \lim_n \uparrow \mu(\bar{B}_n) = \lim_n \uparrow \mu(B_n)$, et la condition 1 est nécéssaire.

Inversement, soit M une fonction positive sur $\mathcal{G}$ vérifiant les conditions de l'énoncé. De 1 résulte aussitot que M est une fonction <u>croissante</u> sur $\mathcal{G}$. Pour démontrer le théorème 1 , nous établirons d'abord quelques lemmes.

<u>Lemme 1.</u> Pour tout compact $K \subset E$,on posera :

$$3 - \quad M'(K) = \operatorname{Inf}\{M(G) , G \in \mathcal{G} , G \supset K\}$$

$M'(K)$ est une fonction croissante et simplement additive du compact K , et de plus, pour tout ouvert $G \in \mathcal{G}$ on a :

$$4 - \quad M(G) = \operatorname{Sup}\{M'(K) , K \subset G\}$$

En effet, si $K \subset K'$, tout ouvert contenant K' contient K , d'où $M'(K) \leq M'(K')$. Si K et K' sont deux compacts disjoints, soient G_n et G'_m deux systèmes fondamentaux dénombrables et décroissants de voisinages ouverts de K et de K' respectivement, tels que G_n et G'_m soient disjoints pour tout n et tout m. On a par définition : $M'(K) = \lim_n \downarrow M(G_n)$, $M'(K') = \lim \downarrow M(G'_m)$ et $M'(K \cup K') = \lim \downarrow M(G_n \cup G'_m)$ .La condition 2 donne $M'(K \cup K') = M'(K) + M'(K')$.

Pour Tout ouvert G contenu dans un compact K , on a $M(G) \leq M'(K)$. En effet, tout ouvert G' contenant K contient G , d'où $M(G') \geq M(G)$, et, d'après 3 , $M(G) \leq M'(K)$. Inversement, si G est un ouvert, on forme une suite croissante $B_n \subset \bar{B}_n \subset B_{n+1}$ .... avec $B_n \in \mathcal{B}$ et $G = \bigcup_{n>0} B_n = \bigcup_{n>0} \bar{B}_n$. On a alors, pour tout n , $M(B_n) \leq M'(\bar{B}_n) \leq M(B_{n+1})$, d'où , d'après 1 , $M(G) = \lim \uparrow M(B_n) = \lim \uparrow M'(\bar{B}_n)$, ce qui établit la relation 4 .

Lemme 2 . Soit $B \in \mathcal{U}$ un ouvert vérifiant $M(B) < \infty$. Il existe une et une seule mesure bornée μ_B , définie sur B pour la restriction à B de $\sigma(\mathcal{F})$, vérifiant $\mu_B(G) = M(G)$ pour tout ouvert $G \subset B$ et $\mu_B(K) = M'(K)$ pour tout compact K de E inclus dans B .

En effet, considérons sur B la semi-algèbre de Boole $\mathcal{A}_B$ comprenant :

- les compacts K de E inclus dans B
- les ouverts G complémentaires dans B des précédents ($G = B \cap \complement K$)
- les intersections $K \cap G$ des précedents.

Il est clair que $\sigma(\mathcal{A}_B)$ coïncide avec la restriction à B de $\sigma(\mathcal{F})$. Pour toute mesure μ_B (bornée) vérifiant les conditions de l'énoncé on a nécéssairement $\mu_B(K \cap G) = \sup\limits_{K' \subset G} M'(K \cap K')$, d'où l'unicité de μ_B .

Inversement, posons $\mu_B(G) = M(G)$, $\mu_B(K) = M'(K)$ et :
$\mu_B(G \cap K) = \sup\limits_{K' \subset G} M'(K \cap K')$, pour G ouvert, K , K' compacts dans $\mathcal{A}_B$.
La fonction d'ensemble ainsi définie est simplement additive. En effet, soient $G \cap K$ et $G' \cap K'$ deux ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{A}_B$, et H_i un compact avec $H_i \subset (G \cap K) \cup (G' \cap K')$. Prenant $K_i = H_i \cap K \cap \complement G'$ et $K'_i = H_i \cap K' \cap \complement G$ on a $H_i = K_i \cup K'_i$ et les deux compacts $K_i \subset G \cap K$ et $K'_i \subset G' \cap K'$ sont deux compacts disjoints contenus respectivement dans $G \cap K$ et $G' \cap K'$. Mais inversement, si $K_i \subset G \cap K$ et $K'_i \subset G' \cap K'$ sont deux compacts inclus dans $G \cap K$ et dans $G' \cap K'$, $H_i = K_i \cup K'_i$ est compact et contenu dans $(G \cap K) \cup (G' \cap K')$ L'additivité de M' (lemme 1) donne $\mu_B(H_i) = \mu_B(K_i) + \mu_B(K'_i)$. Passant aux bornes supérieures, on trouve, d'après la définition de μ_B :

$$\mu_B\left[(G \cap K) \cup (G' \cap K')\right] = \mu_B(G \cap K) + \mu_B(G' \cap K')$$

D'autre part les ensembles K compacts dans E et contenus dans B constituent une classe compacte vérifiant la condition d'approximation :

$$\mu_B(A) = \sup \left\{ \mu_B(K) , K \subset A , K \text{ compact dans } E \right\}$$

pour tout $A \in \mathcal{A}_B$. Par suite μ_B se prolonge en une mesure bornée sur $\sigma(\mathcal{A}_B)$ qui vérifie manifestement les conditions de l'énoncé.

Corollaire 1 .Si B et B' sont deux ouverts, avec $B \subset B'$ et $M(B') < \infty$, la restriction de $\mu_{B'}$ à B coincide avec μ_B .

En effet, pour tout $A \in \mathcal{O}_B \subset \sigma(\mathcal{O}_{B'})$ on a $\mu_B(A) = \mu_{B'}(A) = \sup_{K \subset A} [M'(K)]$

Corollaire 2.Si B et B' sont deux ouverts vérifiant $M(B) < \infty$ et $M(B') < \infty$ on a $M(B \cup B') + M(B \cap B') = M(B) + M(B')$, et, en particulier $M(B \cup B') \leq M(B) + M(B') < \infty$. De plus, la restriction à B (à B') de $\mu_{B \cup B'}$ coincide avec μ_B ($\mu_{B'}$) .

Si $B \cap B' = \emptyset$, le resultat découle du corollaire 1 . Si $B \cap B' \neq \emptyset$, les restrictions à $B \cap B'$ de μ_B et de $\mu_{B'}$ coïncident avec $\mu_{B \cap B'}$. Pour $A \subset B \cup B'$ appartenant à $\sigma(\mathcal{F})$, la formule $\mu'(A) = \mu_B(A \cap B \cap \complement B') + \mu_{B \cap B'}(A \cap B \cap B') + \mu_{B'}(A \cap B' \cap \complement B)$ définit une mesure bornée dont la restriction à B (à B') coincide avec μ_B (avec $\mu_{B'}$) . Pour tout ouvert G inclus dans B (dans B') on a $\mu'(G) = \mu_B(G)$ ($= \mu_{B'}(G)$) , et par suite , $\mu' = \mu_{B \cup B'}$ puisque les G inclus dans B ou dans B' engendrent $\sigma(\mathcal{O}_{B \cup B'})$.

Corollaire 3 . Si G et G' sont deux ouverts quelconques, on a toujours : $M(G \cup G') + M(G \cap G') = M(G) + M(G')$ et $M(G \cup G') \leq M(G) + M(G')$.

Si G et G' vérifient $M(G) < \infty$ et $M(G') < \infty$, la conclusion découle du corollaire 2 . Si M(G) ou M(G') est infini, $M(G \cup G')$ est également infini, puisque M est une fonction croissante en $G \in \mathcal{G}$.

Lemme 3 . Il existe un ouvert $E_0 \subset E$ tel que, pour tout compact $K \subset E$ on ait $M'(K) < \infty$ si et seulement si K est inclus dans E_0.

En effet, soit G_i , $i \in I$, la famille des ouverts de E tels que $M(G_i) < \infty$. Posons $E_0 = \bigcup_{i \in I} G_i$. Soit K un compact. Si K est contenu dans E_0 , il est contenu dans une réunion finie de G_i , $i \in I'_1$. D'après le lemme 4, corollaire 2 , on a $M(K) \leq M(\bigcup_{i \in I'} G_i) < \infty$

Soit x un point n'appartenant pas à E_0 . On a $M(G) = \infty$ pour tout voisinage ouvert G de x , et, par suite, $M'(\{x\}) = \infty$ d'après la définition de M' . Mais M' étant une fonction croissante (lemme 1) , on a alors $M'(K) = \infty$ pour tout compact K non contenu dans E_0 .

Lemme 4 : Il existe une mesure $\mu_0 \in \mathcal{M}$ unique définie sur E_0 et pour la restriction à E_0 de $\sigma(\mathcal{F})$ vérifiant $\mu_0(G) = M(G)$ et $\mu_0(K) = M'(K)$ pour tout ouvert G et tout compact K contenu dans E_0.

Soit, en effet, B_n une suite croissante d'ouverts relativement compacts vérifiant $B_n \subset \bar{B}_n \subset B_{n+1}$ .... et $E_0 = \bigcup_{n>0} \bar{B}_n$. On a, pour tout n , $M(B_n) \leq M'(\bar{B}_n) < \infty$ (lemme 3) . Si une mesure μ_0 vérifie les conditions de l'énoncé, sa restriction à chaque B_n coincide avec μ_{B_n} (lemme 2), et, pour tout $A \in \sigma(\mathcal{F})$ inclus dans E_0 la relation $A = \bigcup_{n>0} A \cap B_n$ implique $\mu_0(A) = \lim_n \uparrow \mu_0(A \cap B_n) = \lim \uparrow \mu_{B_n}(A)$. Mais inversement, cette formule définit bien une mesure $\mu_0 \in \mathcal{M}$ sur E_0 répondant à la question. (La vérification de l'axiome 2 des mesures de $\mathcal{M}$ découle du fait que tout compact K inclus dans E_0 est contenu dans un B_n et que μ_{B_n} vérifie cet axiome.) . Le corollaire 1 du lemme 2 permet de vérifier directement que μ_0 ne dépend pas du choix des B_n .

Démontrons maintenant le théorème 1 . Si E_0 est vide, on prendra $\mu(\emptyset) = M(\emptyset)$ et $\mu(A) = \infty$ pour tout A non vide appartenant à $\sigma(\mathcal{F})$: on obtient ainsi l'unique solution possible. Si E_0 n'est pas vide, toute mesure $\mu \in \mathcal{M}$ prolongeant M et M' sur $\sigma(\mathcal{F})$ vérifie $\mu(A) = \mu_0(A)$ pour $A \subset E_0$ (lemme 4) et $\mu(A) = \infty$ si A n'est pas contenu dans E_0 (lemme 3) . Mais inversement, la formule $\mu(A) = \mu_0(A)$ si $A \subset E_0$ et $\mu(A) = \infty$ si $A \not\subset E_0$ définit une fonction σ-additive sur $\sigma(\mathcal{F})$. La vérification de l'axiome 2 resulte comme ci-dessus du fait que tout compact contenu dans $E_0 = \bigcup_{i \in I} G_i$ est contenu dans un G_i avec $M(G_i) < \infty$; par suite $\mu \in \mathcal{M}$.

THEOREME 2 – Une fonction $M \in \Phi_g(\mathcal{G})$ peut être prolongée sur $\sigma(\mathcal{F})$ en une mesure $\mu \in \mathcal{M}$ nécessairement unique si, et seulement si M est croissante et simplement additive sur $\mathcal{G}$. Inversement, la restriction à $\mathcal{G}(E)$ de toute mesure $\mu \in \mathcal{M}$ définit une fonction $M \in \Phi_g(\mathcal{G})$ –

Montrons d'abord la ~~XXXXXXXX~~ dernière partie de l'énoncé. Soit $\mu \in \mathcal{M}$, et posons $M(G) = \mu(G)$ pour $G \in \mathcal{G}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver, d'après le Th. 1, lemme 1, propriété 4, un compact $K \subset G$ avec $M(G) = \mu(G) \leq \mu(K) + \varepsilon$. Pour tout ouvert G' contenant K, on aura $\mu(G') \geqslant \mu(K) \geqslant \mu(G) - \varepsilon$ Ainsi, $G' \in \mathcal{V}_K$ entraine $M(G') \geqslant M(G) - \varepsilon$, et $M \in \Phi_g(\mathcal{G})$

Montrons la première partie de l'énoncé. Si $M \in \Phi_g(\mathcal{G})$ vérifie $M(G) = \mu(G)$ pour une mesure $\mu \in \mathcal{M}$, M est croissante et additive sur $\mathcal{G}$. Inversement, soit $M \in \Phi_g(\mathcal{G})$ une fonction croissante et simplement additive, donc positive. Il suffit de montrer que M vérifie la condition 1 du théorème 1. Soit donc G un ouvert. M étant croissante, on a $M(B) \leq M(G)$ pour tout ouvert $B \in \mathcal{B}$ relativement compact ~~contenu dans G~~ tel que $\overline{B} \subset G$. D'autre part, puisque M est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{G}$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact $K \subset G$ avec $M(G') \geqslant M(G) - \varepsilon$ pour tout ouvert G' tel que $K \subset G' \subset G$. En particulier, si $\overline{B}$ est un voisinage compact de K avec $B \in \mathcal{B}$ et $\overline{B} \subset G$, on a : $M(B) \geqslant M(G) - \varepsilon$, et, par suite, la condition 1 du théorème 1 est vérifiée.

Le théorème 2 montre qu'il est possible d'identifier $\mathcal{M}$ au sous-espace des fonctions $M \in \Phi_g(\mathcal{G})$ croissantes et simplement additives. (Il resulte d'ailleurs du Th. 2 que ces fonctions sont nécéssairement aussi σ-additives). Ainsi, l'espace $\mathcal{M}$ se trouve muni de la topologie induite par celle de $\Phi_g(\mathcal{G})$.

PROPOSITION 1 – Soit T_n une suite convergeant vers T dans $\Phi_g(\mathcal{G})$, G et G_n des ouverts avec $G_n \to G$ dans $\mathcal{G}$ et $T_n(G_n) \to T(G)$. Si les T_n sont des fonctions croissantes sur $\mathcal{G}$, on a $G_n \cap G'_n \to G$ et $T_n(G_n \cap G'_n) \to T(G)$ pour toute autre suite G'_n convergeant vers G dans $\mathcal{G}$.

En effet, on vérifie immédiatement que $G_n \cap G'_n$ converge vers G dans $\mathcal{G}$. De $T_n(G_n \cap G'_n) \leqslant T_n(G_n)$ resulte ensuite $\overline{\lim}\ T_n(G_n \cap G'_n) \leqslant T(G)$, d'où la proposition, puisque l'on a aussi $\underline{\lim}\ T_n(G_n \cap G'_n) \geqslant T(G)$, d'après le critère 2' du Th. 1, A- 4º .

<u>COROLLAIRE</u> - Le sous-espace de $\Phi_g(\mathcal{G})$ constitué des fonctions croissantes sur $\mathcal{G}$ est fermé, donc compact , dans $\Phi_g(\mathcal{G})$.

En effet, Soient $T_n \in \Phi_g(\mathcal{G})$ des fonctions croissantes convergeant vers T dans $\Phi_g(\mathcal{G})$, et G , G' deux ouverts avec $G \subset G'$ .Soient aussi dans $\mathcal{G}$ deux suites $G_n \to G$ et $G'_n \to G'$ telles que $T_n(G_n) \to T(G)$ et $T_n(G'_n) \to T(G'_n)$ D'après la proposition, on peut supposer $G_n \subset G$ et $G'_n \subset G'$. D'autre part, on vérifie que $G_n \cap G'_n$ converge également vers G dans $\mathcal{G}$, donc aussi, d'après la proposition, $T_n(G_n \cap G'_n) \to T(G)$. Comme les T_n sont croissantes, on a : $T_n(G_n \cap G'_n) \leqslant T_n(G'_n)$, d'où résulte $T(G) \leqslant T(G')$.

<u>PROPOSITION 2</u> - Si G et G' sont deux ouverts disjoints, $G_n \subset G$ et $G'_n \subset G'$ deux suites convergeant vers G et G' dans $\mathcal{G}$, la suite $G_n \cup G'_n$ converge vers $G \cup G'$.

En effet, si un ouvert H n'est pas contenu dans $G \cup G'$, il n'est pas contenu dans $G_n \cup G'_n \subset G \cup G'$. Si un compact K est contenu dans $G \cup G'$, il est réunion de deux compacts $K_1 = K \cap \complement G' \subset G$ et $K'_1 = K \cap \complement G \subset G'$. Pour n assez grand, on a $K_1 \subset G_n$ et $K'_1 \subset G'_n$, d'où $K = K_1 \cup K'_1 \subset G_n \cup G'_n$.

<u>PROPOSITION 3</u> - Le sous-espace de $\Phi_g(\mathcal{G})$ constitué des fonctions additives sur $\mathcal{G}$ est fermé, donc compact, dans $\Phi_g(\mathcal{G})$.

Montrons que si une suite de fonctions additives T_n converge vers T dans $\Phi_g(\mathcal{G})$, T est additive. Soient G et G' deux ouverts disjoints, G_n et G'_n deux suites convergeant dans $\mathcal{G}$ vers G et G' respectivement, avec $T_n(G_n) \to T(G)$ et $T_n(G'_n) \to T(G')$. D'après la proposition 1 , on peut supposer $G_n \subset G$ et $G'_n \subset G'$. La proposition 2 montre que $G_n \cup G'_n$ converge vers $G \cup G'$ dans $\mathcal{G}$.

On a donc $T(G \cup G') \leq \underline{\lim}\, T_n(G_n \cup G'_n) = \underline{\lim}\, [T_n(G_n) + T_n(G'_n)] = T(G) + T(G')$.

Inversement, soit $S_n \to G \cup G'$ dans $\mathcal{G}$ avec $T_n(S_n) \to T(G \cup G')$, et $S_n \subset G \cup G'$ pour tout n. Les suites $G_n = S_n \cap G$ et $G'_n = S_n \cap G'$ convergent vers G et G' (Prop. 2) , et on a $S_n = G_n \cup G'_n$. Ainsi :

$T(G \cup G') = \lim T_n(S_n) = \lim [T_n(G_n) + T_n(G'_n)] \geqslant T(G) + T(G')$

On a donc l'égalité, et T est bien additive.

<u>THEOREME 3 –</u> L'espace $\mathcal{M}$ est fermé, donc compact, dans $\Phi_g(\mathcal{G})$.

En effet, d'après le théorème 2 , $\mathcal{M}$ est l'espace des fonctions additives et croissantes, et cet espace est fermé, d'après la proposition 3 et le corollaire de la proposition 2 .

Dans la demonstration du Th 1 , nous avons vu que, si l'ouvert E_0 du lemme 3 n'est pas vide, on a $\mu(\emptyset) = 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}$. Mais, si $E_0 = \emptyset$, on obtient des mesures "dégénérées" ,prenant la valeur $+\infty$ pour tout A non vide de $\sigma(\mathcal{F})$ et une valeur quelconque en $A = \emptyset$. Le corollaire suivant montre qu'il est possible de supposer dans tous les cas $\mu(\emptyset) = 0$.

<u>COROLLAIRE –</u> le sous-espace $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$ constitué des mesures vérifiant $\mu(\emptyset) = 0$ est fermé et compact dans $\mathcal{M}$.

En effet, si une suite T_n de fonctions croissantes vérifiant $T_n(\emptyset) = 0$ converge vers T dans $\Phi_g(\mathcal{G})$, on a , d'après le critère 2' du Th. 1, A-4º ,
$0 = \lim T_n(\emptyset) \geqslant T(\emptyset)$.

<u>PROPOSITION 4 –</u> La topologie de $\mathcal{M}$ (ou de $\mathcal{M}_0$) est engendrée par les familles de mesures μ vérifiant $\{\mu(G) > a\}$, G ouvert, a réel , ou $\{\mu(K) < b\}$ K compact, b réel.

En effet, la topologie de $\Phi_g(\mathcal{G})$ est engendrée par les familles d'éléments $T \in \Phi_g(\mathcal{G})$ vérifiant " :

$$\text{" } \operatorname*{Inf}_{G' \in W_G^{K_1 \cdots K_n}} T(G') > a \text{ "} \qquad \text{ou} \qquad \text{" } \operatorname*{Inf}_{G \in W_K^{G_1 \cdots G_n}} T(G) < b \text{ "}$$

(Ch. III; A-4º , prop. 2) . Sur le sous espace de $\Phi_g(\mathcal{G})$ constitué des fonctions T croissantes sur $\mathcal{G}$, un ensemble du premier type se réduit à : $\{T(G') > a\}$ (G' ouvert) , et un ensemble du deuxième type à : $\{\exists\, G \in \mathcal{G} \text{ , } G \supset K \text{ , } T(G) < b\}$ (K compact, b réel) . Mais sur $\mathcal{M}$ (ou $\mathcal{M}_0$) le premier ensemble s'identifie à $\{\mu(G) > a\}$ et le deuxième à $\{\mu(K) < b\}$.

<u>COROLLAIRE 1 - (Critère de convergence)</u> Une suite μ_n de mesures converge dans $\mathcal{M}$ (ou dans $\mathcal{M}_0$) vers $\mu \in \mathcal{M}$ (ou $\in \mathcal{M}_0$) si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

1 - Pour tout ouvert G, on a $\underline{\lim}\, \mu_n(G) \geq \mu(G)$

2 - Pour tout compact K, on a : $\overline{\lim}\, \mu_n(K) \leq \mu(K)$

COROLLAIRE 2 - Dans les mêmes conditions, μ est valeur d'adhérence dans $\mathcal{M}$ ou dans $\mathcal{M}_0$ pour une suite μ_n si et seulement si , pour tout ouvert G et tout compact K, on a $\overline{\lim}\, \mu_n(G) \geq \mu(G)$ et $\underline{\lim}\, \mu_n(K) \leq \mu(K)$.

<u>THEOREME 4 -</u> Pour qu'une suite μ_n converge vers μ dans $\mathcal{M}$ (ou dans $\mathcal{M}_0$) , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1' - Pour tout ouvert G et toute suite $G_{n_\xi} \to G$ dans $\mathcal{G}$, la suite partielle des $\mu_{n_\xi}(G_{n_\xi})$ vérifie $\underline{\lim}\, \mu_{n_\xi}(G_{n_\xi}) \geq \mu(G)$.

2' - Pour tout ouvert $G \in \mathcal{G}$, on peut trouver une suite G_n convergeant vers G dans $\mathcal{G}$ telle que $\mu_n(G_n)$ converge vers $\mu(G)$.

<u>COROLLAIRE.</u> De toute suite μ_n de mesures de $\mathcal{M}_0$, il est possible d'extraire une suite partielle convergeant vers une mesure $\mu \in \mathcal{M}_0$ au sens des critères 1' et 2' du théorème 4, et 1 et 2 du corollaire 1 de la proposition 4 .

On notera toutefois que cette limite $\mu \in \mathcal{M}_0$ peut très bien être la mesure dégénérée prenant une valeur infinie sur tout ensemble non vide appartenant à $\sigma(\mathcal{F})$.

Examinons maintenant la notion de <u>mesure aléatoire.</u> La restriction à $\mathcal{M}$ de la σ-algèbre $\sigma(\mathcal{W})$ de $\Phi_q(\mathcal{G})$ est engendrée par les ouverts de $\mathcal{M}$. La proposition 4 montre que les $\mu(G)$ et les $\mu(K)$ sont des variables aléatoires qui engendrent cette σ-algèbre. On peut d'ailleurs se limiter aux seuls $\mu(G)$, G ouvert, puisque pour tout compact K on a $\mu(K) = \operatorname{Inf}\{\mu(G)\ ,\ G \supset K\}$. Ainsi :

<u>PROPOSITION 5</u>. La σ-algèbre $\sigma(\mathcal{W})$ sur $\mathcal{M}$ est engendrée par la famille des variables aléatoires $\mu(G)$, $G \in \mathcal{G}$ vérifiant les deux conditions du Th. 1 .

Ce point de vue revient à considérer une mesure aléatoire comme une fonction aléatoire $\mu(G)$, $G \in \mathcal{G}$,astreinte seulement à vérifier les deux conditions du Th. 1 . Il est peut-être préférable, cependant, d'introduire simultanément les variables aléatoires $\mu(G)$ et $\mu(K)$, G ouvert, K compact, bien que les $\mu(K)$ soient déterminées par les $\mu(G)$. Les conditions constitutives que doivent vérifier ces variables sont alors celles du lemme 1 du Th. 1, et l'additivité simple sur $\mathcal{G}$ (condition 2 du Th. 1) .

Considérons la classe $\mathcal{A}$ stable pour l'intersection finie engendrée par les $\{\mu(G) > a\}$ et les $\{\mu(K) < b\}$ qui sont des ouverts de $\mathcal{M}$, et les $\{\mu(G) \leq a\}$ et les $\{\mu(K) \geq b\}$ qui sont des compacts de $\mathcal{M}$. Il est visible que $\mathcal{A}$ est une semi-algèbre de Boole sur $\mathcal{M}$ qui engendre $\sigma(\mathcal{W})$ et contient une classe compacte $\mathcal{C}$, celle justement des intersections finies d'ensembles compacts du type $\{\mu(G) \leq a\}$ et $\{\mu(K) \geq b\}$. Les conditions 3 et 4 du lemme 1, Th. 1, entrainent que toute probabilité P sur $\mathcal{M}$, $\sigma(\mathcal{W})$ doit posseder sur $\mathcal{A}$ la propriété d'approximation habituelle relativement à la classe compacte $\mathcal{C}$. E étant de type dénombrable, celà résulte des relations :

$$\{\mu(G) > a\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcup_{K \subset G} \{\mu(K) \geq a + \varepsilon\}$$

$$\{\mu(K) < b\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcup_{G \supset K} \{\mu(G) \leq b - \varepsilon\}$$

Na turellement, cette probabilité P sur $\mathcal{M}$ et sa restriction à $\mathcal{A}$ doivent vérifier la troisième condition constitutive (additivité de μ). Le Th. 1, condition 2 montre qu'il suffit que l'additivité soit vérifiée sur $\mathcal{G}$. Sur $\mathcal{A}$, par conséquent, Il suffit que P vérifie, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout ensemble fini de couples d'ouverts disjoints G_i, G'_i la condition suivante :

$$2' - P\left\{\mu(G_i \cup G'_i) > a_i \quad \text{et} \quad A\right\} = P\left\{\mu(G_i) + \mu(G'_i) > a_i \quad \text{et} \quad A\right\}$$

Mais inversement, soit une fonction additive d'ensembles P appliquant $\mathcal{A}$ sur $[0,1]$ et vérifiant la propriété d'approximation $P(A) = \operatorname{Sup}\left\{P(C)\ ,\ C \in \mathcal{C}\ ,\ C \subset A\right\}$ Si P est compatible avec l'additivité de μ sur $\mathcal{G}$, c'est à dire vérifie la condition 2' , sa restriction à $\mathcal{M}$ possède, vis-à-vis de la semi-algèbre $\mathcal{A}$ construite sur $\mathcal{M}$, les propriétés requises pour qu'il soit possible de la prolonger en une probabilité sur $\mathcal{M}$, $\sigma(\mathcal{W})$. Ainsi :

<u>PROPOSITION ~~6~~ -</u> Toute loi spatiale définie sur $\mathcal{M}$ muni de la semi-algèbre $\mathcal{A}$, c'est à dire toute fonction additive d'ensembles P appliquant $\mathcal{A}$ sur $[0,1]$ et vérifiant la condition 2' , se prolonge en une probabilité sur $\mathcal{M}$, $\sigma(\mathcal{W})$ - et caractérise une mesure aléatoire - si et seulement si elle vérifie la propriété d'approximation $P(A) = \operatorname{Sup}\left\{P(C)\ ,\ C \in \mathcal{C}\ ,\ C \subset A\right\}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ désignant la classe compacte engendrée dans $\mathcal{A}$ par les $\left\{\mu(K) \geq a\right\}$ et les $\left\{\mu(G) \leq b\right\}$ (G ouvert, K compact) .

PROPOSITION 7 -(Espérance d'une mesure aléatoire) Si μ est une mesure aléatoire définie par $\mathcal{M}$, $\sigma(\vartheta)$, P , il existe une mesure $m_1 \in \mathcal{M}$ telle que l'on ait pour tout ouvert $G \in \mathcal{G}$: $m_1(G) = E[\mu(G)]$.

En effet, la formule $m_1(G) = E[\mu(G)]$ définit sur $\mathcal{G}$ une fonctionnelle manifestement additive ~~linéaire~~. Montrons que m_1 vérifie la condition 1 du Th. 1 . Soit G un ouvert, et B_n une suite d'ouverts relativement compacts tels que : $B_n \subset \overline{B}_n \subset B_{n+1}$ et $G = \bigcup_{n>0} B_n$. La variable aléatoire $\mu(G)$ est égale à $\lim \uparrow \mu(B_n)$, et par suite on a aussi $E[\mu(G)] = \lim \uparrow E[\mu(B_n)]$, ce qui achève la demonstration.

Pour définir les moments d'ordre supérieur en termes de mesures , nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME - Soient E et E' deux espaces localement compacts de type dénombrables. si $\mu \in \mathcal{M}(E)$ et $\mu' \in \mathcal{M}(E')$ sont deux mesures sur E et E' , il existe une mesure $\mu'' \in \mathcal{M}(E \times E')$ nécessairement unique vérifiant $\mu''(A \times A') = \mu(A)\,\mu(A')$ pour tout $A \in \sigma[\mathcal{F}(E)]$ et tout $A' \in \sigma[\mathcal{F}(E')]$ si $\mu(A) < \infty$ et $\mu(A') < \infty$, et $\mu''(A \times A') = \infty$ si $\mu(A)$ ou $\mu'(A') = \infty$

Soient, en effet, E_0 et E'_0 les ouverts de E et de E' tels que pour tout compact K on ait $\mu(K) < \infty$ ($\mu'(K) < \infty$) si et seulement si $K \subset E_0$ ($K \subset E'_0$). Soient B_n et B'_n des suites croissantes d'ouverts relativement compacts avec $E_0 = \bigcup_{n>0} \overline{B}_n$ et $E'_0 = \bigcup_{n>0} \overline{B'}_n$. Les mesures bornées μ_{B_n} et $\mu'_{B'_n}$ du lemme 2, Th. 1 , se prolongent en une mesure bornée unique $\mu''_{B_n \times B'_n}$ sur $\sigma(\mathcal{O}_B) \otimes \sigma(\mathcal{O}'_{B'})$ vérifiant $\mu''_{B_n \times B'_n}(A \times A') = \mu(A)\,\mu'(A')$ pour $A \in \sigma(\mathcal{O}_B)$ et $A' \in \sigma(\mathcal{O}'_{B'})$. la formule $\mu''(A'') = \operatorname{Sup}_n [\mu''_{B_n \times B'_n}(A'' \cap B_n \times B'_n)$, $B_n \subset E_0$, $B'_n \subset E'_0]$ pour $A'' \subset E_0 \times E'_0$ et $\mu''(A'') = \infty$ si $A'' \cap E_0 \cap E'_0 \neq \emptyset$ définit une mesure prolongeant $\mu(G)\,\mu'(G')$ sur $\sigma[\mathcal{F}(E)] \otimes \sigma[\mathcal{F}(E')]$. Mais μ'' est bornée sur tout ouvert relativement compact B'' contenu dans $E_0 \times E'_0$. En effet, les projections de B'' dans E et E' étant des ouverts relativement compacts, on peut trouver n avec $B'' \subset \overline{B}_n \times \overline{B}'_n$. Par suite μ'' vérifie l'axiome 2 des espaces $\mathcal{M}$, et $\mu'' \in \mathcal{M}(E \times E')$. On vérifie sans peine que μ'' est la seule mesure répondant à la question .

PROPOSITION 8 - Soit μ une mesure aléatoire définie par $\mathcal{M}$, $\sigma(\vartheta)$, P. Il existe une mesure $m_n \in \mathcal{M}(E^n)$ telle que l'on ait :

$$m_n (G_1 \times \ldots\ldots \times G_n) = E\left[\mu(G_1)\ \mu(G_2) \ldots\ldots\ \mu(G_n)\right]$$

pour $G_i \in \mathcal{G}$ $(i = 1,2,\ldots n)$.

En effet, d'après le lemme, la fonction définie sur $\left[\mathcal{G}(E)\right]^n$ par le produit $\mu(G_1)\,\mu(G_2)\ldots\mu(G_n)$ se prolonge en une mesure aléatoire $\mu_n \in \mathcal{M}(E^n)$, et il suffit alors d'appliquer la proposition 7 .

POUR UNE THEORIE DES STRUCTURES ALEATOIRES - TABLE DES MATIERES.

Nous marquons d'un astérisque les paragraphes se rapportant à des questions spéciales, liées surtout à la théorie des milieux poreux .