NOTE GEOSTATISTIQUE N° 78

COMPLEMENTS SUR LES LOIS STABLES, INDEFINIMENT DIVISIBLES ETC....

En complément à la Note 76, j'indique ici quelques propriétés relatives aux lois stables, aux rapports de deux variables stables, et aux lois stables prises conditionnellement.

I - LOI DU RAPPORT Y/X DE DEUX VARIABLES STABLES

Soient X et Y deux variables positives indépendantes obéissant à la même loi stable $e^{-\lambda^\alpha}$. Il résulte de la formule (6) de la Note 76 que $\log(Y/X)$ admet la fonction caractéristique :

$$E\left[e^{iu \log \frac{Y}{X}} \right] = \frac{\Gamma\left(1-\frac{iu}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{iu}{\alpha}\right)}{\Gamma(1-iu)\,\Gamma(1+iu)} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\operatorname{sh} \pi u}{\operatorname{sh} \pi \frac{u}{\alpha}}$$

(d'après la formule des compléments : $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$

Loi de $\alpha \log(Y/X)$; La variable $Z = \alpha \log(Y/X)$ admet la fonction caractéristique :

$$(1) \qquad E\left(e^{iuZ}\right) = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\operatorname{sh} \alpha\pi u}{\operatorname{sh} \pi u}$$

Pour inverser la relation (1), et trouver la loi de Z, le plus rapide est d'utiliser le développement en série de Fourier de la fonction impaire de α coincidant avec $\operatorname{sh}(\alpha\pi u)$ sur l'intervalle (-1, +1). On obtient sans peine :

$$\operatorname{sh} \alpha\pi u = \frac{2\operatorname{sh}\pi u}{\pi} \sum (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+u^2} \sin n\pi\alpha$$

~~On en déduit que la variable Z = α log(Y/X) admet la densité :~~

Il résulte alors de (1) que l'on a :

$$(2) \qquad E(e^{iuZ}) = \frac{2}{\pi\alpha} \cdot \sum (-1)^{n+1} \sin n\pi\alpha \, \frac{n}{n^2+u^2}$$

On en déduit aussitot que la variable $Z = \alpha \log(Y/X)$ admet la densité :

$$f(z) = \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin n\pi\alpha \; e^{-n|z|}$$

Il s'agit de la partie imaginaire d'une série géométrique, et l'on trouve :

$$(3) \qquad f(z) = \frac{1}{\pi\alpha} \frac{e^{z}\sin\pi\alpha}{1+2e^{z}\cos\pi\alpha + e^{2z}}$$

On notera la symétrie en z : $f(z) = f(-z)$, évidente du fait que X et Y obéissent à la même loi stable.

<u>Moments absolus de $Z = \alpha\log(Y/X)$.</u> A partir du développement en série de Fourier de f(z), on obtient l'expression du moment absolu d'ordre s :

$$E(|Z|^{s}) = \frac{2\Gamma(1+s)}{\pi\alpha} \sum (-1)^{n+1} \frac{\sin n\pi\alpha}{n^{1+s}}$$

Lorsque s est un entier pair 2k on voit apparaitre l'expression du <u>polynome de Bernoulli</u> :

$$B_{1+2k}(x) = \frac{(-1)^{k}(2k+1)!}{2(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n^{1+2k}}$$

Il vient ainsi :

$$E\left[\left(\alpha\log\frac{Y}{X}\right)^{2k}\right] = (-1)^{k} \frac{2(2\pi)^{2k}}{\alpha(1+2k)} B_{1+2k}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

Pour $k = 0$, $B_1(x) = 1/2 - x$, et on obtient bien l'unité. Pour $k = 1$, $B_3(x) = x(1-x)(x-1/2)$, et on trouve :

$$E\left[\left(\alpha\log\frac{Y}{X}\right)^{2}\right] = 2\alpha^2 D^2(\log X) = \frac{\pi^2}{3}(1-\alpha^2)$$

en accord avec la formule (8) de la Note 76. On peut également mettre en évidence le role des polynomes de Bernoulli en partant de leur fonction génératrice $te^{tx}/(e^t-1) = \sum B_n(x)\, t^n/n\,!$

Loi de $(Y/X)^\alpha$ Par un changement de variable immédiat, on déduit de (3) que la variable $e^z = (Y/X)^\alpha$ admet la densité :

$$(4) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi\alpha} \frac{\sin \pi\alpha}{1 + 2x\cos\pi\alpha + x^2}$$

On reconnait une loi de Cauchy tronquée. La variable $T = \dfrac{(Y/X)^\alpha + \cos\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}$ possède en effet la densité $\dfrac{1}{\pi\alpha}\,\dfrac{1}{1+t^2}$ pour $t \geqslant tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\pi\right)$ (et 0 ailleurs)

Loi de Y/X Posant enfin $Z = Y/X$, on déduit de (4) que le rapport Y/X de deux variables stables admet la densité :

$$(5) \qquad f(z) = \frac{1}{\pi} \frac{z^{\alpha-1}\sin\alpha\pi}{1 + 2z^\alpha\cos\alpha\pi + z^{2\alpha}}$$

Nous avons donné dans la Note 76 , formule 12, l'expression de la transformée de Laplace de f(z), quiz est $M_\alpha(\lambda^\alpha)$, $M_\alpha(z)$ désignant la fonction classique de Mittag-Leffler. On peut d'ailleurs retrouver ce résultat comme suit : si X est une variable stable de loi $e^{-\lambda^\alpha}$,la variable associée $1/X^\alpha$ (dont la loi donne la probabilité d'absorption dans le processus à accroissements indépendants et stationnaires engendré par $e^{-t\lambda^\alpha}$) admet classiquement la fonction $M_\alpha(\lambda)$ comme transformée de Laplace :

$$(6) \qquad E\left[e^{-\lambda/X^\alpha}\right] = M_\alpha(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n\alpha)}\, \lambda^n$$

On retrouve d'ailleurs sans peine cette relation (6) en partant de la formule (3) de la Note 76. Si maintenant Y et X sont deux variables indépendantes de même loi $e^{-\lambda^\alpha}$, on a,à X = x fixé :

$$E\left[e^{-\lambda Y/x}\right] = e^{-(\lambda/x)^\alpha}$$

D'où; lorsque X redevient aléatoire :

$$E[e^{-\lambda Y/X}] = E[e^{-\lambda^\alpha X^{-\alpha}}] = M_\alpha(\lambda^\alpha)$$

conformément à la formule (12) de la Note 76. Comparant ce résultat avec l'expression (5) de la densité de Y/X , nous obtenons l'identité suivante, valable pour $0 < \alpha < 1$

$$(7) \qquad M_\alpha(\lambda^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n\alpha)} \lambda^{n\alpha} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda z} z^{\alpha-1}\sin\alpha\pi}{1+2z^\alpha\cos\alpha\pi + z^{2\alpha}}\, dz$$

Généralisation. Nous avons supposé que X et Y admettent la même loi $e^{-\lambda^\alpha}$. Introduisant des paramètres d'échelle différents a_1 (pour X) et a_2 (pour Y) ces lois deviennent $e^{-a_1\lambda^\alpha}$ et $e^{-a_2\lambda^\alpha}$. Mais si X obéit à la loi $e^{-a_1\lambda^\alpha}$, $X/a_1^{1/\alpha}$ obéit à $e^{-\lambda^\alpha}$, et $(a_2/a_1)^{1/\alpha}(X/Y)$ obéit à $M_\alpha(\lambda^\alpha)$ donc admet la densité (5). Les paramètres d'échelle n'apportent rien de substantiellement nouveau, et, dans le cas général, la densité de $Z = Y/X$ est :

$$(8) \qquad f(z) = \frac{1}{\pi}\,\frac{a_1 a_2 z^{\alpha-1}\sin\alpha\pi}{a_2^2 + 2a_1a_2 z^\alpha\cos\alpha\pi + a_1^2 z^{2\alpha}}$$

Loi de X/(X+Y) Le changement de variable $T = X/(X+Y)$, soit $T = 1/(1+Z)$ effectué sur $f(z)\,dz$ montre que la variable T , dont la signification géostatistique a été examiné dans la Note 76, admet la densité :

$$(9) \qquad f(t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{a_1 a_2 t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}\sin\alpha\pi}{a_1^2(1-t)^{2\alpha} + 2a_1a_2 t^\alpha(1-t)^\alpha\cos\pi\alpha + a_2^2 t^{2\alpha}}$$

(pour $0 \leq t \leq 1$). L'expression générale des moments associés à cette loi figure dans la Note 76, formule (12). En particulier, on a :

$$(10) \qquad m = E\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{a_1}{a_1+a_2}$$

Inversement, compte tenu du fait que a_1 et a_2 sont de simples paramètres d'échelle, la formule (10) suffit à elle seule pour caractériser les lois (8) ou (9). En effet, $Z = Y/X$ admet la transformée de Laplace $M_\alpha[(\frac{a_1\lambda}{a_2})^\alpha]$ de sorte que $1 - M_\alpha(\quad)$ est la fonction de répartition d'une variable $\Lambda = U/Z$, où U est une variable à loi exponentielle réduite indépendante de Z. A son tour, Λ admet une transformée de Laplace $\Phi(\mu) = E(e^{-\mu\Lambda})$.

La donnée de cette transformée $\bar{\Phi}(\mu)$ détermine la loi de Λ, donc $E(e^{-\lambda Z})$ et par suite aussi la loi de Z. Or, d'aprés un calcul déjà effectué dans la Note 76, on a clairement :

$$\bar{\Phi}(\mu) = E\left[e^{-\mu U/Z}\right] = \int_0^\infty F(dz)\int_0^\infty e^{-\mu\frac{u}{z}-u}\,du$$

$$= \int_0^\infty \frac{z}{z+\mu}\,F(dz) = E\left[\frac{Z}{Z+\mu}\right]$$

Comme enfin $Z = Y/X$, on a aussi bien $\bar{\Phi}(\mu) = E[Y/(Y+\mu X)]$. Pour $\mu = 1$, la formule (10) donne $\bar{\Phi}(1) = a_2/(a_1+a_2)$. Mais remplacer X par μX , c'est à dire $e^{-a_1\lambda^\alpha}$ par $e^{-a_1\mu^\alpha\lambda^\alpha}$ équivaut à changer a_1 en $a_1\mu^\alpha$. Par suite, on a :

$$\bar{\Phi}(\mu) = E\left[\frac{Y}{Y+\mu X}\right] = \frac{a_2}{a_2+a_1\mu^\alpha} \tag{11}$$

Il est d'ailleurs facile de vérifier ce résultat en effectuant une intégration directe sur le développement de la fonction de Mittag- Leffler.

Moments de $X/(X+Y)$ La formule (11) permet de calculer facilement les moments succesifs de $Z = X/(X+Y)$. Elle s'écrit, en effet, sous une forme équivalente :

$$E\left[\frac{X}{Y+\mu X}\right] = \frac{a_1\,\mu^{\alpha-1}}{a_2+a_1\mu^\alpha}$$

Il suffit de dériver n fois en μ avant de faire $\mu = 1$ pour en déduire l'expression du moment d'ordre n. Pour n = 2, on trouve ainsi :

$$E\left[\left(\frac{X}{X+Y}\right)^2\right] = \frac{a_1}{a_1+a_2} - \alpha\,\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}$$

d'où l'on déduit la variance, obtenue dans la Note 76 par un autre procédé :

$$D^2\left[\frac{X}{X+Y}\right] = (1-\alpha)\,\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}$$

Loi de log(X/(X+Y)). On peut obtenir l'expression de la densité de cette variable en effectuant un changement de variable $z = e^{t}$ dans l'équation (9). Mais le résultat n'est pas très encourageant. Nous partirons plutot de la fonction caractéristique, dont l'expression, établie dans la Note 76, s'écrit (en posant $a = a_2/a_1$) :

$$E\left[\left(\frac{X}{X+Y}\right)^{iu}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n \frac{\Gamma(iu+n\alpha)}{\Gamma(iu)\,\Gamma(1+n\alpha)}$$

Pour $n > 0$, l'intégrale eulérienne $\int_0^1 x^{n\alpha+iu-1}(1-x)^{-iu} = \frac{\Gamma(iu+n\alpha)\,\Gamma(1-iu)}{\Gamma(1+n\alpha)}$ permet d'écrire :

$$\frac{\Gamma(iu+n\alpha)}{\Gamma(iu)\,\Gamma(1+n\alpha)} = \frac{\sin \pi iu}{\pi} \int_0^1 x^{n\alpha-1+iu}(1-x)^{-iu}\,dx$$

et d'obtenir :

$$E\left[\left(\frac{X}{X+Y}\right)^{iu}\right] = 1 - \left[a\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+a\,x^{\alpha}}\, e^{iu\log\frac{x}{1-x}}\,dx\right]\frac{\sin \pi iu}{\pi} \tag{12}$$

On en déduit l'expression de l'espérance

$$E\left[\log\frac{X}{X+Y}\right] = -a\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+a\,x^{\alpha}}\,dx = -\frac{1}{\alpha}\log(1+a)$$

Soit :

$$E\left[\log\frac{X}{X+Y}\right] = \frac{1}{\alpha}\cdot\log\left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)$$

(par suite d'une erreur de calcul, la Note 76 donne un résultat faux pour cette espérance.) Pour le moment d'ordre 2, on déduit de (12) :

$$E\left[\left(\log\frac{X}{X+Y}\right)^2\right] = -2a\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+a\,x^{\alpha}}\log\left(\frac{x}{1-x}\right)dx$$

—

II - LOI CONDITIONNELLE DE X A X + Y = z FIXÉ

1º Cas général.

Soient X et Y deux variables indépendantes, admettant les densités f_1 et f_2, $Z = X+Y$ leur somme, admettant la densité $f = f_1 * f_2$. À Z = z fixé, X admet la densité conditionnelle :

$$(14) \qquad f_1(x \mid z) = \frac{f_1(x)\, f_2(z-x)}{f(z)} \qquad (0 \leq x \leq z)$$

(C'est seulement pour la commodité de l'exposé que nous supposons l'existence de ces densités : c'est là une hypothèse qui n'a rien d'essentiel, comme le suggère déjà la relation (15) ci-dessous. Pour s'en affranchir, il faudrait introduire l'espérance conditionnelle $E(X \mid \mathcal{B})$ de X relativement à la σ-algèbre $\mathcal{B}$ engendrée par Z).

Prenons la transformée de Laplace du numérateur de l'expression (14), qui est une fonction des deux variables x et z. En désignant par Φ_1 et Φ_2 les transformées de X et de Y , on obtient :

$$(15) \qquad \int_0^\infty e^{-\mu z} dz \int_0^z f_1(x)\, f_2(z-x)\, e^{-\lambda x} dx = \Phi_1(\lambda+\mu)\, \Phi_2(\mu)$$

Il n'est en général pas facile d'inverser la relation (15) elle-même. Mais on peut parfois en déduire au moins les moments conditionnels de X à X+Y = z fixé, que nous désignerons par $m_n(z)$:

$$m_n(z) = \int_0^z x^n f_1(x \mid z)\, dx$$

Il suffit, en effet, de dériver n fois en λ la relation (15) avant de faire $\lambda = 0$ pour obtenir la transformée de Laplace de $f(z)\, m_n(z)$:

$$(16) \qquad \int_0^\infty e^{-\mu z} m_n(z)\, f(z)\, dz = (-1)^n\, \Phi_1^{(n)}(\mu)\, \Phi_2(\mu)$$

En particulier, pour l'espérance conditionnelle, on obtient :

$$(17) \qquad \int_0^\infty e^{-\mu z} E(X \mid z)\, f(z)\, dz = -\, \Phi_1'(\mu)\, \Phi_2(\mu)$$

<u>Remarque.</u> Si l'on pondère les densités f_1 et f_2 de X et Y par une <u>même</u> exponentielle $e^{-\alpha x}$, <u>la loi conditionnelle de X à X+Y = z fixé reste invariante</u>.

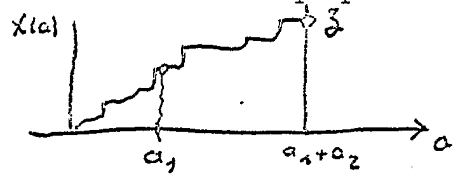
On vérifie facilement, en effet, que la densité f de Z = X+Y se trouve elle-même pondérée par cette exponentielle, et un simple coup d'oeil sur (14) permet de conclure.

Dans le cas où X/(X+Y) est indépendant de X+Y, la proposition précedente implique que la loi de X/(X+Y) reste invariante lorsque l'on pondère les densités par une même exponentielle. Il existe ainsi un rapport étroit entre les deux critères qui nous ont servi, dans la Note 76, à caractériser la loi gamma.

<u>2º Cas des lois indéfiniment divisibles.</u>

Soient maintenant X et Y deux variables indépendantes indéfiniment divisibles, de lois $\Phi_1 = e^{-a_1\psi}$ et $\Phi_2 = e^{-a_2\psi}$ avec la <u>même</u> fonction $\psi(\lambda) = \int_0^\lambda \gamma(\mu)\,d\mu$ γ désignant la transformée de la mesure positive G associée à cette loi. La somme Z = X+Y admet donc la loi $\Phi = e^{-(a_1+a_2)\psi}$

Si l'on interprete a comme un temps, $e^{-a\psi}$ est la loi d'un processus à accroissements indépendants et stationnaires X(a). On a $X = X(a_1)$, $Z = X(a_1+a_2)$ et la loi de X à Z fixé décrit le comportement de X(a) au temps $a = a_1$ lorsque l'on sait que X(a) a pris la valeur z au temps postérieur $a = a_1+a_2$ (et la valeur 0 en a = 0).



<u>Calcul de l'espérance conditionnelle m(z).</u> La formule (17) donne immédiatement :

$$\int_0^\infty e^{-\mu z}\, m(z)\, f(z)\,dz = -\,a_1\,\psi'\,e^{-(a_1+a_2)\psi} = -\frac{a_1}{a_1+a_2}\,\Phi'$$

(avec $\Phi = \Phi_1\Phi_2 = e^{-(a_1+a_2)\psi}$, loi de Z). Mais $-\Phi'$ est justement la transformée de z f(z) , d'où résulte :

$$m(z) = \frac{a_1}{a_1+a_2}\, z \tag{18}$$

Nous obtenons ainsi un résultat déjà mentionné dans la Note 76, et que l'interprétation en termes de processus rend du reste très intuitif : l'espérance conditionnelle de X à X+Y = z est proportionnelle à z, le coëfficient de proportionnalité étant égal au rapport des "temps" correspondant à X et à Z.

Réciproque. Inversement, l'espérance conditionnelle m(z) n'est proportionnelle à z que si les transformées de X et de Y sont de la forme $e^{-a_1\psi}$ et $e^{-a_2\psi}$ avec une même fonction $\psi(\lambda)$.(ce qui n'entraine pas nécessairement l'indéfinie divisibilité)

En effet, si $m(z) = Az$, la relation (17) entraine $A[\phi_1'\phi_2 + \phi_1\phi_2'] = \phi_1'\phi_2$ d'où l'on déduit $\phi_1 = e^{-a_1\psi}$ et $\Phi_2 = e^{-a_2\psi}$ avec $A = a_1/(a_1+a_2)$

Moment d'ordre 2. La relation (16) montre de même que le moment conditionnel d'ordre 2, $m_2(z)$, admet la transformée :

$$\int_0^\infty e^{-\mu z} m_2(z) f(z)\,dz = [(a_1\psi')^2 - a_1\psi''] e^{-(a_1+a_2)\psi} \tag{19}$$

d'où nous allons déduire la variance.

Variance conditionnelle $\sigma^2(z)$. Calculons $\int_0^\infty e^{-\mu z}\sigma^2(z) f(z)\,dz$ avec $\sigma^2(z) = m_2(z) - [m(z)]^2$. La contribution de $m_2(z)$ vient d'être évaluée en (19). D'après (18), on a $[m(z)]^2 = \left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)^2 z^2$ et, par suite, :

$$\int_0^\infty e^{-\mu z}[m(z)]^2 f(z)\,dz = \left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)^2 \Phi''(\mu)$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)^2 [(a_1+a_2)^2\psi'^2 - (a_1+a_2)\psi''] e^{-(a_1+a_2)\psi}$$

Retranchons de (19). Le terme en ψ'^2 disparait, et il reste :

$$\int_0^\infty e^{-\mu z}\sigma^2(z) f(z)\,dz = -\frac{a_1 a_2}{a_1+a_2}\psi''(\mu)\, e^{-(a_1+a_2)\psi(\mu)} \tag{20}$$

Cette relation fort instructive mérite quelques commentaires. On sait que $\psi' = \gamma(\lambda)$ est la transformée de la mesure positive $G(dz)$ qui, (du moins lorsqu'elle est sommable) représente la granulométrie en longueur des sauts du processus associé. Ainsi, $-\psi'' = -\gamma'$ est la transformée de la mesure $z\,G(dz)$: au deuxième membre de (20) figure donc l'image du produit de convolutiàn de $f(z)$ par $zG(dz)$. D'où la formule générale donnant la variance conditionnelle :

(21) $$\sigma^2(z) = \frac{a_1 a_2}{a_1+a_2} \; \frac{\int_0^z x\, f(z-x)\, G(dx)}{f(z)}$$

Ces relations (20) ou (21) montrent qu'il est possible de caractériser une famille de lois indéfiniment divisibles (c'est à dire une fonction ψ ou une mesure G, définies éventuellement à un paramètre d'échelle près) par une propriété de la variahbe conditionnelle. Donnons un exemple.

Critère 1 pour la loi gamma. La seule loi indéfiniment divisible pour laquelle la variance conditionnelle (21) est proportionnelle à z^2 est la loi gamma.

En effet, pour une loi gamma, X/Z est indépendant de Z, et par suite $\sigma^2(z) = A\,z^2$, avec une constante A dont il est facile de trouver l'expression : si $\psi = \alpha \log(1+\lambda/b)$, A ne dépend pas du paramètre d'échelle b et vérifie :

(22) $$A = \frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2\left[1+\alpha(a_1+a_2)\right]}$$

Inversement, supposons $\sigma^2(z) = A\,z^2$. La relation (20) conduit à :

$$-\frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2}\,\psi'' = A\left[(a_1+a_2)^2\,\psi'^2 - (a_1+a_2)\,\psi''\right]$$

La solution ψ telle que $\psi(0) = 0$ est de la forme $\psi = \alpha \log(1+\lambda/b)$ avec un paramètre b arbitraire, et un paramètre α se déduisant de A par (22)

Si nous combinons ce critère avec la réciproque de la relation (18), nous pouvons énoncer :

Critère 2 pour la loi gamma. Si X et Y sont deux variables indépendantes, et Z = X+Y leur somme, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a/ X et Y sont des variables gamma admettant même paramètre d'échelle b.

b/ à Z=z fixé, l'espérance de X est proportionnelle à z et sa variance est proportionnelle à z^2 .

En effet, la condition relative à l'espérance entraine $\phi_1 = e^{-a_1\psi}$ et $\phi_2 = e^{-a_2\psi}$
Il n'en résulte d'ailleurs pas que ces lois sont indéfiniment divisibles, mais la démonstration du critère 1 reste valable.

Dans la Note 76, nous avons obtenu un critère apparenté : l'indépendance de $X/(X+Y)$ et de $X+Y$. Celle-ci entraine évidemment la propriété b du critère 2. Nous voyons que la réciproque est vraie : la seule hypothèse que les espérances conditionnelles de $X/(X+Y)$ et de $[X/(X+Y)]^2$ ne dépendent pas de z entraine l'indépendance stochastique des variables $X/(X+Y)$ et $X+Y$, et suffit à caractériser la loi gamma.

3º Cas des lois stables.

Examinons maintenant le cas des lois stables, c'est à dire $\psi(\lambda) = \lambda^{\alpha}$ ou $G(dz) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} z^{-\alpha} dz$ (avec $0 < \alpha < 1$). La relation (21) conduit directement à une première expression de la variance conditionnelle :

$$\sigma^2(z) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)} \frac{\int_0^z x^{1-\alpha} f(z-x)\, dx}{f(z)} \tag{23}$$

Pour obtenir une expression plus parlante, partons de (22), qui s'écrit ici :

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu z} \sigma^2(z) f(z)\, dz = \alpha(1-\alpha) \frac{a_1 a_2}{a_1+a_2} \mu^{\alpha-2} e^{-(a_1+a_2)\mu^{\alpha}}$$

Or $zf(z)$ a pour image de Laplace $-\phi'(\mu) = \alpha(a_1+a_2)\mu^{\alpha-1} e^{-(a_1+a_2)\mu^{\alpha}}$ et le deuxième membre de la relation précédente, qui est $-(1-\alpha)\frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2}\phi'(\mu)/\mu$ est lui-même, à un facteur près, l'image de $\int_0^z x f(x)\, dx$. D'où la deuxième expression de la variance conditionnelle :

$$\sigma^2(z) = (1-\alpha) \frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2} \frac{\int_0^z x f(x)\, dx}{f(z)} \tag{24}$$

Corollaire. La densité $f(x)$ de la loi stable $e^{-a\lambda^{\alpha}}$ vérifie la relation :

$$\int_0^z \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(z-x)\, dx = \frac{1}{\alpha a} \int_0^z x f(x)\, dx \tag{25}$$

Inversement, la relation (25) caractérise la loi $e^{-a\lambda^{\alpha}}$.

En effet, il suffit de comparer (23) et (24) pour obtenir (25). Réciproquement, (25) entraine pour la transformée $\bar{\mathcal{G}}$ de la loi f la relation :

$$\lambda^{\alpha-2}\,\bar{\mathcal{G}}(\lambda) = -\frac{1}{a\alpha}\,\frac{\phi'(\lambda)}{\lambda}$$

d'où l'on tire $\log \bar{\mathcal{G}} = -a\lambda^{\alpha}$. Notons aussi le critère suivant :

<u>Critère de la loi stable.</u> La loi stable de paramètre α est la seule loi indéfiniment divisible (à un paramètre d'échelle près) pour laquelle la variance conditionnelle soit donnée par (24).

En effet, si (24) est vrai, $f(z)\,\sigma^2(z)$ a pour image $(\alpha-1)\,\dfrac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2}\,\dfrac{\phi'(\lambda)}{\lambda}$
d'où, compte tenu de (20) la relation : $(\alpha-1)\,\psi'/\lambda = \psi''$
On en tire : $\log \psi' = (\alpha-1)\log\lambda + C$ et $\psi = a\lambda^{\alpha}$

Passons maintenant à l'étude de la variance conditionnelle relative.

<u>Comportement asymptotique de $\sigma^2(z)/z^2$.</u> Le comportement asymptotique de la variance relative pour z infini peut se déduire des théorèmes taubériens. Mais il est plus simple de partir de l'expression de la densité associée à la loi $e^{-a\lambda^{\alpha}}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a^n \,\frac{\Gamma(1+n\alpha)}{n!}\,\frac{\sin n\pi\alpha}{\pi}\,\frac{1}{x^{1+n\alpha}}$$

On en déduit pour z grand : $f(z) \sim \dfrac{a\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\, z^{-1-\alpha}$ et $1 - F(z) \sim \dfrac{a}{\Gamma(1-\alpha)}\, z^{-\alpha}$

Utilisant d'autre part un résultat concernant les fonctions de répartition G telles que $[1 - G(x)]\,x^{\alpha}$ soit à variation lente à l'infini (Feller, Vol.II, p.275) on a aussi :

$$\int_0^z x\, f(x)\, dx \sim \frac{\alpha}{1-\alpha}\, z\,[1-F(z)] \sim \frac{a\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\, z^{1-\alpha}$$

et par suite : $\dfrac{\int_0^z x\, f(x)\, dx}{f(z)} \sim \dfrac{1}{1-\alpha}\, z^2$

La formule (24) montre alors que la variance relative admet la limite finie :

$$(26) \qquad \lim_{z \to \infty} \frac{\sigma^2(z)}{z^2} = \frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2}$$

Cette limite asymptotique est plus grande que la variance a priori de X/Z , qui est $(1-\alpha)\frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2}$. Comme l'espérance de X/Z à Z=z fixé ne dépend pas de z, on doit avoir :

$$D^2(X/Z) = (1-\alpha)\frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2} = \int_0^\infty \frac{\sigma^2(z)}{z^2} f(z)\, dz$$

(il est du reste facile de déduire cette relation de (24), compte tenu du fait que f(z) s'annule en z=0 plus vite que toute puissance de z). Ainsi,la variance relative prend à l'infini une valeur~~XXXX~~ supérieure à sa valeur "moyenne" $D^2(X/Z)$.

Il serait également interessant d'étudier le comportement de $\sigma^2(z)/z^2$ lorsque z tend vers 0. Nous n'aborderons ce probleme que sur un cas particulier ;

Cas $\alpha = 1/2$. La loi $e^{-a\sqrt{\lambda}}$ admet la densité : $f(x) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4x}} \frac{1}{x^{3/2}}$
(1/X est une variable gamma de paramètre 1/2). On a :

$$\int_0^z x\, f(x)\, dx = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-a^2/4x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{a\sqrt{z}}{2\sqrt{\pi}} \int_1^\infty e^{-a^2 y/4z} \frac{dy}{y^{3/2}}$$

Par suite :

$$\frac{\int_0^z x f(x)\, dx}{f(z)} = z^2 \int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{4z} v} \frac{dv}{(1+v)^{3/2}}$$

D'où l'expression de la variance relative pour $\alpha = 1/2$:

$$(27) \qquad \frac{\sigma^2(z)}{z^2} = \frac{1}{2} \frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2} \int_0^\infty e^{-\frac{(a_1+a_2)^2}{4z} v} \frac{dv}{(1+v)^{3/2}}$$

Pour z infini, on retrouve bien la limite (26). Pour z tendant vers 0, l'intégrale est équivalente à $\int_0^\varepsilon e^{-\frac{a^2 v}{4z}} (1+v)^{-3/2} dv$, expression majorée par ;

$$\int_0^\varepsilon e^{-a^2 v/4z}\, dv = 4z/a^2 \left[1 - e^{-a^2\varepsilon/4z}\right] < 4z/a^2$$

(pour $\varepsilon > 0$ fixé quelconque), et de même minorée par $(1+\varepsilon)^{-3/2} \int_0^\varepsilon e^{-a^2 v/4z}\, dv$
Il en résulte que, pour z tendant vers 0, la variance relative tend vers 0 avec :

$$(28) \qquad \frac{\sigma^2(z)}{z^2} \sim \frac{2 a_1 a_2}{(a_1+a_2)^4}\, z$$

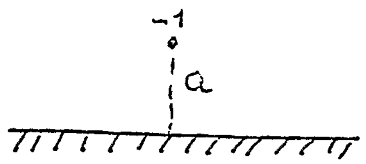
D'autre part, il suffit de dériver (27) en z pour vérifier que $\sigma^2(z)/z^2$ est une fonction croissante de z. D'où la conclusion :

Pour $\alpha = 1/2$, la variance conditionnelle relative est une <u>fonction croissante</u> de z. Elle est <u>nulle</u> en $z = 0$ et y présente une tangente égale à $2\,\frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^4}$. Pour z infini, elle tend vers la limite finie : $\frac{a_1 a_2}{(a_1+a_2)^2}$

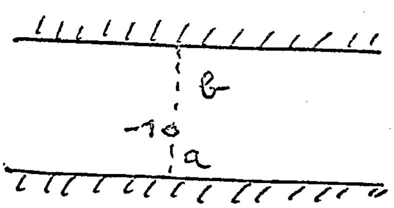
Bien qu'il ne soit établi ici que pour $\alpha = 1/2$, ce résultat a sans doute une signification générale : lorsque Z prend une valeur z faible, il y a une probabilité élevée pour que les composantes X/z et Y/z ne diffèrent que très peu de leurs espérances $a_1/(a_1+a_2)$ et $a_2/(a_1+a_2)$. Cette conclusion se comprend assez bien si l'on se reporte au processus à accroissements indépendants et stationnaires $X(t)$ de loi $e^{-t\lambda^\alpha}$: si, en $t = a_1 + a_2$, $X(t)$ prend une valeur faible, c'est qu'il ne s'est produit entre $t = 0$ et $t = a_1 + a_2$ que des sauts d'amplitude très faible. $X(a_1)$, somme d'un nombre très grand de sauts très petits, ne peut pas différer beaucoup de son espérance.

<u>III - INTERPRETATION EN TERMES DE POTENTIEL ET DE PROCESSUS SUBORDONNES</u>

Revenons à l'expression (3) de la densité de la variable $\alpha \log(Y/X)$, lorsque Y et X sont des variables stables de même loi, et à sa fonction caractéristique $1/\alpha\ \mathrm{sh}\,\alpha\pi u/\mathrm{sh}\,\pi u$. La densité $f(z)$ est une <u>fonction harmonique</u> des deux variables z et $\pi\alpha$ (celà se voit immédiatement sur le développement en série de Fourier de $f(z)$). Cette remarque conduit à interpréter $f(z)$ à l'aide du potentiel logarithmique classique.



Soit une masse -1 placée à la distance a d'un demi-plan conducteur : elle induit sur la droite limite la densité de Cauchy $U_a(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{a}{a^2+x^2}$ dont la fonction caractéristique est $e^{-a|u|}$



Si maintenant la masse inductrice -1 est placée dans la bande séparant deux conducteurs limités par deux droites parallèles, et si a et b désignent les distances de la masse -1 à ces droites, les densités induites f_a et f_b vérifient le système :

$$(29)\qquad \begin{cases} f_a = U_a - f_b * U_{a+b} \\ f_b = U_b - f_a * U_{a+b} \end{cases}$$

prenons les fonctions caractéristiques : il vient

$$(30)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= e^{-a|u|} - \Phi_b \, e^{-(a+b)|u|} \\ \Phi_b &= e^{-b|u|} - \Phi_a \, e^{-(a+b)|u|} \end{aligned}$$

La solution de ce système est :

$$(31)\qquad \begin{cases} \Phi_a = \dfrac{\operatorname{sh} b u}{\operatorname{sh}(a+b)u} \\[2mm] \Phi_b = \dfrac{\operatorname{sh} a u}{\operatorname{sh}(a+b)u} \end{cases}$$

Les masses induites sur les deux droites sont b/(a+b) et a/(a+b) respectivement (en raison inverse de la distance de la masse inductrice). Si l'on prend $a+b = \pi$ et $a/(a+b) = 1-\alpha$, la densité f_a normée à l'unité, soit f_a/α, admet la fonction caractéristique $\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\operatorname{sh} \alpha\pi u}{\operatorname{sh} \pi u}$: elle coïncide avec la densité de la variable $\alpha \log(Y/X)$

Dans le système (29), remplaçons U_α par une loi indéfiniment divisible admettant la fonction caractéristique $e^{-a\,\psi(u)}$. On obtient encore la solution (3), u étant remplacé par $\psi(u)$. Mais il n'est pas certain a priori que $\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\operatorname{sh} \alpha\pi\psi}{\operatorname{sh} \pi\psi}$ soit une fonction caractéristique. Considérons le développement :

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\operatorname{sh} \alpha\pi\psi}{\operatorname{sh} \pi\psi} = \frac{2}{\alpha\pi}\sum (-1)^{n+1} \sin n\pi\alpha \, \frac{n}{n^2+\psi^2}$$

Il s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\operatorname{sh} \alpha\pi\psi}{\operatorname{sh} \pi\psi} = \dfrac{2}{\alpha\pi}\displaystyle\int_0^\infty H_\alpha(y)\, e^{-y\psi^2}\, dy \\[4mm] H_\alpha(y) = \sum (-1)^{n+1}\, n \sin n\pi\alpha \; e^{-n^2 y} \end{cases}$$

La fonction H (qui intervient dans la théorie de la chaleur) est positive. Par conséquent, si $e^{-y\psi^2}$ est une fonction caractéristique, il en est de même de $\operatorname{sh}\alpha\pi\psi / \alpha \operatorname{sh}\pi\psi$. En particu lier, on peut prendre $\psi = |u|^{\alpha}$ avec $0<\alpha\leq 1$ (loi stable symétrique). Le cas $\alpha = 1$ conduit aux relations (31).

Si U_a est la densité d'une variable positive, et $e^{-c\,\psi(\lambda)}$ sa transformée de Laplace, f_a et f_b sont concentrées sur $(0,\infty)$: $\operatorname{sh}\alpha\pi\psi(\lambda) / \alpha \operatorname{sh}\pi\psi(\lambda)$ représente cette fois la transformée de Laplace d'une loi concentrée sur $(0,\infty)$, pourvu que $e^{-y\psi^2}$ soit elle-même une loi. En particulier, $\psi = \lambda^{\alpha}$ convient si $\alpha \leq 1/2$. Pour $\alpha = 1/2$, $e^{-\sqrt{\lambda}}$ représente le temps d'atteinte associé à un mouvement brownien. D'où une deuxième interprétation :

Processus subordonnés. Considérons, sur l'axe des x, une particule animée d'un mouvement brownien e^{-ctu^2}. Le temps T_a de premier passage par le point d'abscisse a admet la transformée de Laplace $e^{-a\sqrt{\lambda/c}}$, loi stable de paramètre 1/2.

Soit alors $Y(t)$ un deuxième Wiener-Lévy indépendant du premier $X(t)$, mais de même loi e^{-ctu^2}. Considérons le processus subordonné $Y(T_a)$, représentant la valeur prise par $Y(t)$ au temps aléatoire T_a où $X(t)$ atteint pour la première fois l'abscisse a. On a :

$$E\left[e^{iuY(T_a)}\right] = E\left[e^{-cT_a u^2}\right] = e^{-a|u|}$$

valeur de $e^{-a\sqrt{\lambda/c}}$ pour $\lambda = c\,u^2$. Le processus subordonné $Y(T_a)$ obéit donc à la loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi}\,\frac{a}{a^2+y^2}$

En termes plus imagés, on interprète $X(t)$ et $Y(t)$ comme les coordonnées d'une particule animée d'un mouvement brownien dans le plan. Si la droite $x = a$ est une barrière absorbante, $Y(T_a)$ représente l'ordonnée de la particule au moment où l'absorption se produit (le point d'impact sur la droite $x=a$). La loi de ce point d'impact est la loi de Cauchy ; elle s'identifie avec la masse induite sur $x = a$ par une masse inductrice -1 placée à l'origine.

Plaçons maintenant <u>deux</u> barrières absorbantes en $x = a$ et $x = -b$. Désignons par $T(a,b)$ l'époque d'absorption, par $g_a(t)\,dt$ la probabilité pour que l'absorption se produise sur la droite $x = a$ entre les instants t et $t+dt$, et de même par $g_b(t)\,dt$ pour l'évenement analogue relatif à $x = -b$. Soient Γ_a et Γ_b les transformées de Laplace en t de ces densités.

En l'absence de barrière en $x = -b$, le temps d'atteinte T_a de $x=a$ obéit à la loi $V_a(t)$ de transformée $e^{-a\sqrt{\frac{\lambda}{c}}}$. Mais l'évènement $t \le T_a < t + dt$ peut, ou non, avoir été précédé d'un premier passage par $x = -b$. On a donc :

$$V_a = g_a + g_b * V_{a+b}$$

et une équation analogue en b. On reconnait le système (29). En passant aux transformées de Laplace, on obtient donc :

$$\begin{cases} \Gamma_a(\lambda) = \dfrac{\operatorname{sh} b\sqrt{\frac{\lambda}{c}}}{\operatorname{sh}(a+b)\sqrt{\frac{\lambda}{c}}} \\ \Gamma_b(\lambda) = \dfrac{\operatorname{sh} a\sqrt{\lambda/c}}{\operatorname{sh}(a+b)\sqrt{\lambda/c}} \end{cases}$$

En particulier, la probabilité pour que l'absorption ait lieu sur $x = a$ est $b/(a+b)$. La loi conditionnelle correspondante pour le temps d'atteinte est $\Gamma_a \frac{(a+b)}{b}$ .Considérons maintenant l'ordonnée du <u>point d'impact</u> $Y[T(a,b)]$ Elle est soumise à la loi de fonction caractéristique :

$$E\left[e^{iuY[T(a,b)]}\right] = E\left[e^{-cu^2T(a,b)}\right]$$

Dans l'hypothèse où l'impact a lieu sur la droite $x = a$ la loi conditionnelle correspondante de $Y(T(a,b))$ admet la fonction caractéristique :

$$\frac{a+b}{b}\,\Gamma_a(cu^2) = \frac{a+b}{b}\,\frac{\operatorname{sh} bu}{\operatorname{sh}(a+b)u}$$

Autrement dit,la variable $\alpha\log(Y/X)$ de densité (3) peut être interprétée comme l'ordonnée conditionnelle du point d'impact dans un mouvement brownien comportant des barrières absorbantes en $a = \pi(1-\alpha)$ et en $b = -\pi\alpha$ lorsque l'on sait que l'absorption a eu lieu sur la droite d'abscisse $a = \pi(1-\alpha)$ —

IV - PROCESSUS MARKOVIENS STATIONNAIRES ASSOCIES

Soit Z_α une variable de loi stable $e^{-\lambda^\alpha}$: nous allons construire un processus markovien où α variera de 0 à 1 et jouera le rôle du temps. Posons :

$$X_\alpha = \alpha \log Z_\alpha$$

On sait que X_α admet la fonction caractéristique $\dfrac{\Gamma(1-iu)}{\Gamma(1-iu\alpha)}$

La relation évidente :

$$\frac{\Gamma(1-iu)}{\Gamma(1-iu\alpha\beta)} = \frac{\Gamma(1-iu)}{\Gamma(1-iu\alpha)} \, \frac{\Gamma(1-iu\alpha)}{\Gamma(1-iu\alpha\beta)}$$

montre que l'on peut mettre $X_{\alpha\beta}$ sous la forme :

(32) $$X_{\alpha\beta} \overset{\mathcal{L}}{\equiv} X_\alpha + \alpha X_\beta$$

(X_α et X_β étant supposées indépendantes). Pour les variables stables initiales, $Z_\alpha = \exp(X_\alpha/\alpha)$ cette relation équivaut à $Z_{\alpha\beta} \overset{\mathcal{L}}{\equiv} Z_\alpha (Z_\beta)^{1/\beta}$ et exprime un résultat classique. Pour donner à α une signification temporelle, posons $\alpha = e^{-t}$ $(0 < t < \infty)$ et convenons d'écrire $X(t)$ au lieu de $X_{e^{-t}}$.

La relation (32) devient :

(33) $$X(t_1 + t_2) \overset{\mathcal{L}}{\equiv} X(t_2) + e^{-t_2} X(t_1)$$

étant entendu que $X(t_1)$ et $X(t_2)$ sont considérées comme des variables indépendantes. Le symbole $\overset{\mathcal{L}}{\equiv}$ (équivalent en loi) signifie que les variables figurant à droite et à gauche ont la même loi. Montrons qu'il est possible d'interpréter $X(t)$ comme un véritable processus markovien stationnaire, obtenu en effectuant une <u>pondération exponentielle</u> sur un processus auxiliaire $Y(t)$ à accroissements indépendants et stationnaires, soit :

(34) $$X(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \, Y(d\tau)$$

a/ Si Y(t) est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, (34) entraine toujours (33). En effet, on a :

$$X(t_1 + t_2) = \int_0^{t_1} e^{-(t_1+t_2-\tau)} Y(d\tau) + \int_{t_1}^{t_2} e^{-(t_1+t_2-\tau)} Y(d\tau)$$

La première intégrale est $e^{-t_2} \int_0^{t_1} e^{-(t_1-\tau)} Y(d\tau) = e^{-t_2} X(t_1)$ par définition. La deuxième représente une variable aléatoire <u>Indépendante de la première</u> (puisqu' Y est à accroissements indépendants) et admettant (puisque $Y(d\tau)$ est stationnaire) <u>la même loi</u> que $\int_0^{t_2} e^{-(t_2-\tau)} Y(d\tau) = X(t_2)$

b/ Il reste à montrer que l'on peut effectivement trouver un processus Y(t) tel que la relation (34) conduise à un X(t) de loi $\Gamma(1-iu)/\Gamma(1-iu\,e^{-t})$
Si $e^{tH(u)}$ est la fonction caractéristique de Y(t) , il faut que l'on ait :

$$(35) \qquad \log \frac{\Gamma(1-iu)}{\Gamma(1-iu\,e^{-t})} = \int_0^t H(u\,e^{-\tau})\,d\tau$$

Dérivons en t. Il vient :

$$-iu\,e^{-t}\,\frac{\Gamma'(1-iu\,e^{-t})}{\Gamma(1-iu\,e^{-t})} = H(u\,e^{-t})$$

c'est à dire :

$$(36) \qquad H(u) = -iu\,\frac{\Gamma'(1-iu)}{\Gamma(1-iu)}$$

Inversement, si H(u) est de cette forme, on obtient bien (35). Tout se ramène donc à montrer que $e^{tH(u)}$ est bien une loi indéfiniment divisible si H(u) est donné par (36). Or, on trouve facilement :

$$-H''(u) = \frac{d^2}{du^2}\left[iu\,\frac{\Gamma'(1-iu)}{\Gamma(1-iu)}\right] = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1-iu)^3}$$

de sorte que $-H''$ est la transformée de la mesure positive G de densité g(x) nulle pour $x < 0$ et donnée pour $x \geq 0$ par :

$$(37) \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^2 (n+1)\,e^{-(n+1)x} = \frac{x^2 e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

Par suite, e^{tH} est bien une loi indéfiniment divisible.

<u>Limite ergodique</u>. Lorsque t tend vers l'infini, le processus markovien stationnaire $X(t)$ défini en (34) tend vers un état stationnaire. La loi de $X(t)$ converge en effet vers $\Gamma(1 - iu)$, qui est la loi de $\log(1/Y)$ Y désignant une <u>variable exponentielle</u> réduite.

<u>Processus symétrisé.</u> Si $X(t)$ et $X'(t)$ sont deux processus markoviens indépendants obéissant tous les deux à la loi précédente, $X(t) - X'(t)$ est lui-même un processus markovien stationnaire vérifiant la relation (34), avec pour $Y(t)$ la loi symétrisée $e^{t(H+\overline{H})}$. On a :

$$H + \overline{H} = u \frac{d}{du} \log [\Gamma(1+iu)\Gamma(1-iu)] = 1 - \frac{\pi u \operatorname{ch} \pi u}{\operatorname{sh} \pi u}$$

Pour $X(0) = 0$, la loi de $X(t)$ admet la densité $f(z)$ écrite en (3).

Janvier 1968