

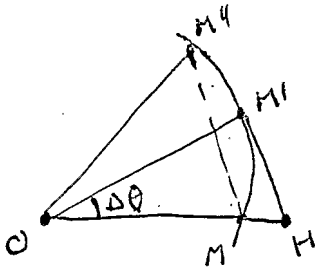
NOTE Gst N° 85COVARIOGRAMME GEOMETRIQUE DES FIGURES CONVEXES PLANES

Nous nous proposons dans ce qui suit d'établir quelques propriétés géométriques des covariogrammes des figures convexes planes.

- A -

Soit $B \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble convexe plan, et O un point intérieur à B que nous prendrons comme origine des coordonnées polaires. La frontière C de B admet l'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, $\rho(\theta)$ étant une fonction continue positive admettant en tout θ une dérivée à droite et une dérivée à gauche, et telle que, pour tout θ :

$$(1) \quad \frac{\rho(\theta + \Delta\theta) \cos \Delta\theta - \rho(\theta)}{\sin \Delta\theta \rho(\theta)}$$



soit une fonction non décroissante de $\Delta\theta$. Cette condition (Fig.1) exprime, en effet, que la projection de M'

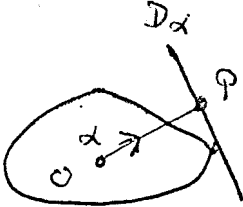
sur OM parallèlement à MM' est un point H n'appartenant pas au segment ouvert $[O, \rho(\theta)]$, et suffit d'ailleurs à elle seule à entraîner la continuité de ρ et l'existence des dérivées à droite et à gauche.

Inversement, si $\rho(\theta)$ est une fonction vérifiant cette condition, et si M_θ est le point de coordonnées polaires $(\rho(\theta), \theta)$, $B = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi]} [O, \rho(\theta)]$ est un ensemble convexe dont la frontière est $C = \bigcup_{\theta} M_\theta$.

- B -

A tout vecteur unitaire α d'origine 0 correspond une droite limite D_α (telle que B soit contenu dans le demi-plan fermé E_α contenant 0 défini par D_α),

$$\text{et on a } B = \bigcap_{\alpha \in [0, 2\pi]} E_\alpha$$



Chaque droite limite D_α est définie par sa distance $r(\alpha)$ à l'origine 0. Le point $P = (r(\alpha), \alpha)$ engendre un ensemble appelé podaire de B.

Inversement, si l'on se donne une famille D_α de droites et si l'on désigne par E_α le demi-plan fermé défini par D_α contenant 0, $\bigcap_\alpha E_\alpha$ est un convexe fermé B. Les demi-droites limite de B, cependant, ne coïncident pas nécessairement avec la famille D_α . On vérifie que les D_α sont les droites limite de B si et seulement si pour tout α la fonction :

$$(2) \quad \frac{r(\alpha + \Delta\alpha) - r(\alpha) \cos \Delta\alpha}{\sin \Delta\alpha}$$

est non décroissante en $\Delta\alpha$.

- B -

L'inverse de la podaire de C a pour équation $\rho = 1/r(\alpha)$. Dire que la fonction (2) de $\Delta\alpha$ est non décroissante équivaut à dire que la fonction (1), avec $\rho = 1/r$, est non croissante en $\Delta\alpha$.

Ainsi, B est un ensemble convexe si et seulement si l'inverse de sa podaire est le contour d'un ensemble convexe.

- C -

Désignons par Π et par J les transformations par podaire et par inversion.

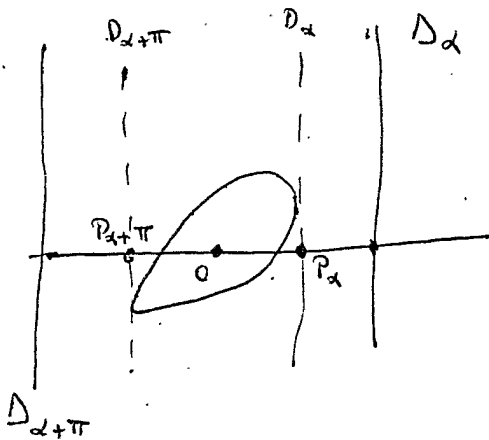
C est le contour d'un ensemble convexe si et seulement si il en est de même de $J\pi C$. D'autre part, $J\pi$ est son propre inverse ($J\pi = \pi^{-1}J$, ou $J\pi J\pi = I$) : propriété élémentaire. Appliquons ces propriétés au covariogramme géométrique.

- D -

Si B est un ensemble convexe ouvert, et $g(h)$ son covariogramme géométrique, l'ensemble $\{h : g(h) \neq 0\}$ est $B \oplus^v B$.

En effet, B étant ouvert, $g(h) \neq 0$ équivaut à $\exists x \in B$ tel que $y = x + h \in B$, donc à $h = y - x$, avec $y \in B$, $x \in B$, soit $h \in B \oplus^v B$.

- E -



$B \oplus^v B$ est symétrique par rapport à l'origine. Il est convexe si B est convexe. En effet, si x et x' sont dans $B \oplus^v B$ ils sont de la forme $b - b_1$ et $b' - b'_1$, avec $b, b_1, b', b'_1 \in B$. Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda(b - b_1) + (1 - \lambda)(b' - b'_1) = \lambda b + (1 - \lambda)b' - \lambda b_1 - (1 - \lambda)b'_1$ est somme d'un point de B et d'un point de B , donc est dans $B \oplus^v B$.

- F -

Cherchons la podaire de $B \oplus^v B$. L'origine O étant intérieure à B, soit D_α et $D_{\alpha+\pi}$ les droites limite de B relatives aux directions α et $\alpha + \pi$, $r(\alpha)$ et $r(\alpha + \pi)$ leurs distances à l'origine, P_α et $P_{\alpha+\pi}$ les points correspondants de la podaire de B. Soient Δ_α et $\Delta_{\alpha+\pi}$ les deux droites parallèles à D_α distantes de $r(\alpha) + r(\alpha + \pi)$ de O. Comme B est contenu dans la bande $D_\alpha, D_{\alpha+\pi}$, $B \oplus^v B$ est contenu dans la bande $\Delta_\alpha, \Delta_{\alpha+\pi}$. Mais le point $P_\alpha - P_{\alpha+\pi} \in \Delta_\alpha$.

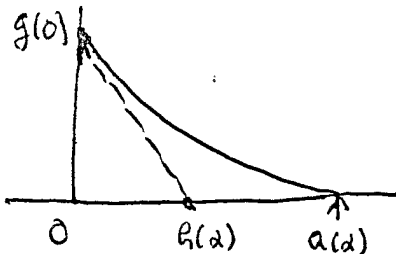
est dans $\overline{B \oplus B}^V$, donc Δ_α est la droite limite de $B \oplus B^V$ pour la direction α .

Autrement dit, la podaire de $B \oplus B^V$ admet le rayon vecteur $r(\alpha) + r(\alpha + \pi)$. Mais cette expression coïncide avec celle du contour apparent de B pour la direction perpendiculaire $\alpha + \pi/2$. Ainsi la courbe d'équation polaire :

$$\rho = r(\alpha) + r(\alpha + \pi) = -g'_{\alpha + \pi/2}(0)$$

est la podaire de l'ensemble convexe $B \oplus B^V = \{h : g(h) \neq 0\}$

- G -

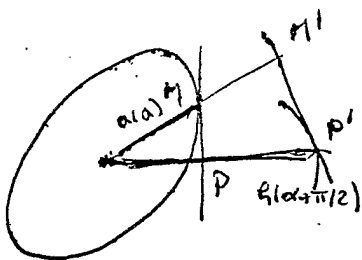


Considérons la section du covariogramme par un plan vertical de direction α . La tangente à l'origine coupe l'axe des x en un point d'abscisse $h(\alpha) = -g(0)/g'_\alpha(0)$

La courbe d'équation polaire $\rho = h(\alpha)$ est donc, à une rotation de 90° près, l'inverse de la podaire du contour de $B \oplus B^V$, d'équation $\rho = a(\alpha)$, $a(\alpha)$ désignant

la portée dans la direction α .

Inversement, d'après D, si l'on effectue sur la courbe $\rho = h(\alpha)$ une transformation par podaire puis une inversion (de module $1/g(0)$), on retrouve, à une rotation de 90° près, le contour de $B \oplus B^V$ c'est à dire la portée $a(\alpha)$. Ces courbes sont convexes ensemble.



Ainsi, la portée $a(\alpha)$ se déduit du contour apparent g'_α et inversement : ce sont des données équivalentes.

- H -

Ces données équivalentes : portée $a(\alpha)$ et contour apparent g'_α caractérisent non pas l'ensemble convexe B lui-même, mais son symétrisé $\frac{1}{2} B \oplus B^V$.

Introduisons une relation d'équivalence $B \equiv B'$ entre ensembles convexes si :
 $B \oplus^V B = B' \oplus^V B'$. Chaque classe d'équivalence est caractérisée par l'unique
convexe symétrique $\frac{1}{2} B \oplus^V B$ qu'elle contient, ou, ce qui revient au même, par
la fonction $a(\alpha)$ représentant la portée (le contour de $B \oplus^V B$ a pour équation
 $P = a(\alpha)$) ou enfin, d'après G, par la fonction $-g'_\alpha$ donnant le contour
apparent des ensembles de cette classe dans la direction α .

- I -

Les ensembles convexes d'une même classe d'équivalence ont le même périmètre
 $2L$. Cela résulte du théorème de Minkowski, qui donne :

$$2L = - \int_0^\pi g'_\alpha d\alpha$$

Analytiquement, (en supposant le rayon vecteur $r(\alpha)$ de la podaire de B deux
fois dérivables) la droite limite D_α a pour équation $x \cos \alpha + y \sin \alpha = r(\alpha)$
et les coordonnées du point de contact de D avec son enveloppe (qui est ici le
contour de B) sont :

$$\begin{cases} x = r \sin \alpha + r' \cos \alpha \\ y = r \cos \alpha - r' \sin \alpha \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} dx = -(r + r'') \sin \alpha d\alpha \\ dy = (r + r'') \cos \alpha d\alpha \end{cases}$$

et l'élément d'arc $ds = (r + r'') d\alpha$. Ainsi :

$$2L = \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} r d\alpha = \int_0^\pi [r(\alpha) + r(\alpha + \pi)] d\alpha$$

conformément au théorème de Minkowski.

- J -

Par contre la valeur à l'origine $g(0) = S$ n'est pas la même pour les différents
convexes d'une même classe d'équivalence. Montrons que cette valeur atteint son
maximum pour l'élément symétrique $\frac{r}{2} B \oplus^V B$ de cette classe : autrement dit,

parmi tous les convexes d'une même classe d'équivalence, l'aire $S = g(0)$ atteint son maximum pour cet unique élément symétrique.

Nous donnerons la démonstration en supposant r deux fois dérivables, mais en fait, cette hypothèse doit être inutile (la dérivée première r' est toujours définie sur $[0, 2\pi]$ sauf au plus sur un ensemble dénombrable, et l'intégrale $\int r'^2 d\alpha$ existe toujours)

D'après les formules donnant x et y et leurs différentielles, (dx, dy) est orthogonal à α , et l'élément d'aire est $\frac{1}{2} r(r + r'') d\alpha$. D'où :

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(r + r'') d\alpha \quad \text{ou encore :}$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r^2 - r'^2) d\alpha$$

Désignons par $r_0(\alpha)$ le rayon vecteur de la podaire de l'ensemble symétrique $\frac{1}{2} B \oplus B$. On a $r_0(\alpha) = \frac{1}{2} [r(\alpha) + r(\alpha + \pi)]$. On peut aussi bien poser :

$$r(\alpha) = r_0(\alpha) + \lambda(\alpha)$$

$r_0(\alpha)$ et $\lambda(\alpha)$ vérifiant : $r_0(\alpha + \pi) = r_0(\alpha)$; $\lambda(\alpha + \pi) = -\lambda(\alpha)$.
On a :

$$\begin{aligned} r^2 &= r_0^2 + 2\lambda r_0 + \lambda^2 \\ r'^2 &= r_0'^2 + 2\lambda' r_0' + \lambda'^2 \end{aligned}$$

L'intégrale de λr_0 ou de $\lambda' r_0'$ de 0 à 2π est nulle. On trouve donc :

$$S_0 - S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\lambda'^2 - \lambda^2) d\alpha$$

Introduisons les développements de Fourier de $\lambda(\alpha)$ et de $\lambda'(\alpha)$. Ils existent puisque $\lambda(\alpha)$ est continu et dérivable à droite et à gauche. Comme $\lambda(\alpha + \pi) = -\lambda(\alpha)$ $\lambda(\alpha)$ ne contient pas de terme constant ::

$$\lambda(\alpha) = \sum_{h=1}^{\infty} [a_h \cos(2h+1)\alpha + b_h \sin(2h+1)\alpha]$$

D'où

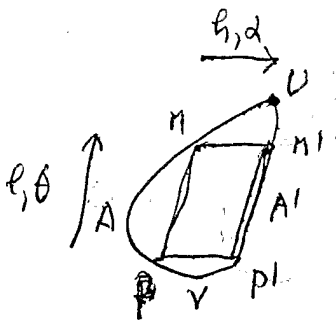
$$\int_0^{2\pi} \lambda^2(\alpha) d\alpha = \pi \sum_{h=1}^{\infty} (a_h^2 + b_h^2)$$

$$\int_0^{2\pi} \lambda'^2(\alpha) d\alpha = \pi \sum (2h+1) (a_h^2 + b_h^2)$$

et par suite :

$$S_0 - S \geq 0$$

L'égalité n'ayant lieu que si les a_h et les b_h sont nuls pour $p > 1$ (le terme d'ordre 1 dans le développement de $\lambda(\alpha)$ représente simplement le choix de la position de l'origine 0) c'est à dire si le contour est symétrique.



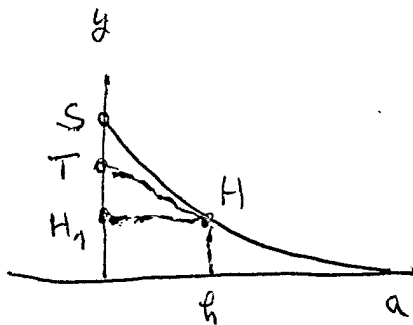
- K -

Interprétons géométriquement ces résultats. Soit $h = MM' = PP'$ une translation dans la direction α , et $p = PM = P'M'$ une translation conjuguée de direction θ .

L'aire du parallélogramme $MM'PP'$ est $-h g'_h(h, \alpha) = -p g'_p(p, \theta)$. La somme des aires MPA et $M'P'A'$ est $g(h, \alpha)$, celle des aires MUM' et PVP' est $g(p, \theta)$.

D'où la relation :

$$\begin{aligned} g(0) &= g(p, \theta) + g(h, \alpha) - h g'_h(h, \alpha) \\ &= g(p, \theta) + g(h, \alpha) - p g'_p(p, \theta) \end{aligned}$$



Considérons le covariogramme d'équation $y = g(r, \alpha)$ dans une direction α , soit H le point $(h, g(h, \alpha))$, H_1 sa projection sur l'axe des y , T l'intersection de la tangente en H avec Oy , et S le sommet d'ordonnée $g(0)$. On a :

$$OH_1 = g(h, \alpha)$$

$$H_1T = -h g'_h(h, \alpha) = -p g'_p(p, \alpha)$$

$$TS = g(p, \theta)$$

Ainsi, connaissant le covariogramme, on peut déterminer l'aire $g(p, \theta)$ de l'inter-

section associée à la translation (l, θ) conjuguée d'une translation (h, α) donnée, et même, en général, déterminer cette translation conjuguée elle-même : le point H' du covariogramme se projetant en (l, θ) a pour cote $OH'_1 = g(l, \theta) = TS$, et pour sous-tangente $T'S = OH_1 = g(h, \alpha)$.

- L -

En conclusion, on peut poser deux questions :

- est-il possible de reconstituer géométriquement un ensemble convexe B à partir de son covariogramme (on peut penser que la réponse doit être oui, d'après ce qui précède)

- A quelle condition une fonction $g(h)$ de type positif est-elle le covariogramme géométrique d'un ensemble convexe borné ? Autrement dit, étant donnée l'équation :

$$g = k \vee k$$

quelle condition doit vérifier g pour qu'il soit possible de trouver un convexe d'indicatrice k solution de cette équation - et inversement, ces conditions étant remplies, la solution k est-elle unique pour un g donné (à une translation et une transposition près) ?