N-78

NOTE Gst N° 84

ESPACES D'APPLICATIONS ET DE TOPOLOGIES

Dans la Note 74, nous avons introduit l'espace compact $\bar{\Phi}_{\hat{h}}(E)$ des couples $(\mathring{f},\bar{f})$, où $\mathring{f}$ et $\bar{f}$ sont les régularisées inférieure et supérieure d'une fonction f définie sur E et à valeurs dans $\bar{R}$. Si $\mathring{C}$ désigne le graphe de f et $\bar{C}$ celui de f, on a $\mathring{C} \subset \bar{C}$, $\mathring{C} \in \mathcal{G}(E \times \bar{R})$, $\bar{C} \in \mathcal{F}(E \times \bar{R})$. On peut aussi bien remplaccer le couple $(\mathring{C},\bar{C})$ par un ensemble $H \in \mathcal{F}(E \times \bar{R})$ unique, qui est $H = \bar{C} \cap \complement \mathring{C}$, et vérifie les axiomes suivants :

$$\forall\ x \in E\ ,\quad H_x \neq \emptyset \quad (H_x\ \text{, coupe de H en}\ x \in E)$$
$$\forall\ x \in E\ ,\quad z \in H_x \ \text{et}\ z' \in H_x \Rightarrow [z,z'] \subset H_x$$

Nous obtenons ainsi un premier exemple d'une application $x \to H_x$ d'un espace E dans un espace $\mathcal{F}(E')$ (ici, $E' = \bar{R}$) dont le graphe est fermé dans $E \times E'$. Nous verrons qu'une telle application est semi-continue supérieurement.

Comme autre exemple, considérons une application $f : E \to E'$, E et E' étant des espaces LCD. On peut penser que les valeurs ponctuelles f(x) pour $x \in E$ ne sont pas réellement observables, mais seulement les valeurs d'adhérence dans E' de f(x) selon le filtre $\mathcal{B}_x$ des voisinages de x dans E. Posant $\Gamma(B) = \overline{f(B)}$ et $\Gamma(x) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_x} \Gamma(B)$, on est ainsi conduit à remplacer f(x) par l'ensemble $\Gamma(x)$ de ses valeurs d'adhérence. On vérifiera que le graphe de $\Gamma(x)$ est ici encore fermé dans $E \times E'$.

Nous allons, dans ce qui suit, généraliser cette notion d'application s.c.s. de E dans $\mathcal{F}(E')$, et l'utiliser, en particulier, pour l'étude des topologies fermées déjà envisagées dans la Note 83. Par analogie, nous définirons aussi des applications s.c.i. de E dans $\mathcal{F}(E')$. Il existe entre ces deux semi-continuités une assez remarquable absence de symétrie, qui se manifestera surtout lorsque nous construirons les topologies associées à ces espaces d'applications : seule la semi-continuité supérieure nous conduira à une topologie compacte.

II - $\overline{\lim}\, F_n$ et $\underline{\lim}\, F_n$

Définition 1. Soit E un espace LCD et F_n une suite dans $\mathcal{F}(E)$. On désignera par $\overline{\lim}\, F_n$ la réunion des valeurs d'adhérence dans $\mathcal{F}(E)$ de la suite F_n, et par $\underline{\lim}\, F_n$ leur intersection.

Proposition 1. Pour toute suite F_n dans $\mathcal{F}(E)$, on a $\underline{\lim}\, F_n \subset \overline{\lim}\, F$, et F_n converge dans $\mathcal{F}(E)$ si et seulement si $\underline{\lim}\, F_n = \overline{\lim}\, F_n$: cette valeur commune coi ncide obligatoirement avec $\lim F_n$.

L'inclusion $\underline{\lim}\, F_n \subset \overline{\lim}\, F_n$ résulte de la définition même. La deuxième partie de l'énoncé signifie que F_n converge si et seulement si cette suite n'admet dans $\mathcal{F}(E)$ qu'une seule valeur d'adhérence , nécessairement égale à la limite de la suite.

Proposition 2. Si F_n est une suite dans $\mathcal{F}(E)$, et F un élément de $\mathcal{F}(E)$, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1 - pour tout $G \in \mathcal{G}(E)$ tel que $F \cap G \neq \emptyset$, on peut trouver N avec $F \cap G \neq \emptyset$ pour tout $n \geqslant N$.

1' - Tout $x \in F$ est limite d'une suite d'élements $x_n \in F_n$(n prenant toutes les valeurs entières, sauf au plus un nombre fini)

1" - Pour tout $x \in F$, tout ouvert B contenant x rencontre tous les F_n au delà d'un certain rang.

L'équivalence de 1 et 1' a été établie dans la Note 74 (ch.I, A, 1º, Th.3). celle de 1 et de 1" est évidente.

Corollaire. (caractérisation de $\underline{\lim}\, F_n$) L'ensemble $\underline{\lim}\, F_n$ est le plus grand des fermés $F \in \mathcal{F}(E)$ vérifiant les trois propriétés éq uivalentes de la proposition Autrement dit, un élément x appartient à $\underline{\lim}\, F_n$ si et seulement si x est limite dans E d'une suite $x_n \in F_n$(pour n supérieure à un n fixe); ou encore, si et seulement si tout voisinage de x rencontre tous les F_n au delà d'un certain rang.

En effet, si une suite d'éléments $x_n \in F_n$ converge vers x dans E, toute suite partielle x_{n_k} converge également vers x, et par suite x appartient à toute valeur d'adhérence dans $\mathcal{F}$ (E) de la suite F_n . Ainsi, pour tout F vérifiant 1' on a $F \subset \underline{\lim}\, F_n$.

Inversement, remarquons d'abord que $\underline{\lim}\, F_n$ est fermé, comme intersection
Soit $x \in \underline{\lim}\, F_n$ d'éléments de $\mathcal{F}$ (E) (les valeurs d'adhérence de la suite F). Supposons que cet ensemble ne vérifie pas 1", autrement dit supposons qu'il existe un ouvert G avec $x \in G$ et $\forall$ N, $\exists$ $n \geqslant N$: $F_n \cap G = \emptyset$. On peut alors de la suite F_n extraire une suite partielle F_{n_k} avec $F_{n_k} \cap G = \emptyset$ pour tout k. Cette suite admet une valeur d'adhérence F', puisque $\mathcal{F}$ (E) est compact, et F' est disjoint de G, donc ne contient pas x, ce qui contredit l'hypothèse $x \in \underline{\lim}\, F_n$. Ainsi $\underline{\lim}\, F_n$ vérifie les propriétés de la proposition.

<u>Proposition 3.</u> Soient F_n une suite dans $\mathcal{F}$ (E) et $F \in \mathcal{F}$ (E). Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

2 - Pour tout compact $K \subset E$ disjoint de F, on peut trouver N avec $F_n \cap K = \emptyset$ pour tout $n \geqslant N$.

2' - Toute suite $x_{n_k} \in F_{n_k}$ a ses valeurs d'adhérence dans F.

2" - Si tout voisinage B d'un point $x \in E$ rencontre une infinité d'ensembles F_n , alors $x \in F$.

L'équivalence de 2 et 2' a été démontrée dans la Note 74 (ch.I,A, 1º, th.3). Comme E est localement compact, 2" peut s'énoncer : si $x \notin F$, il existe un voisinage compact $\overline{B}$ de x disjoint de tous les F_n au delà d'un certain rang. Il en résulte $2 \Rightarrow 2"$, car, si x n'est pas dans F, on peut trouver un voisinage compact $\overline{B}$ de x disjoint de F. D'autre part, $2" \Rightarrow 2'$, car, si x est valeur d'adhérence d'une suite $x_{n_k} \in F_{n_k}$ tout voisinage de x rencontre une infinité de F_{n_k} , et $x \in F$.

Corollaire. (caractérisation de $\overline{\lim}\, F_n$). L'ensemble $\overline{\lim}\, F_n$ est le plus petit (l'intersection) de toud les $F \in \mathcal{F}(E)$ vérifiant les trois propositions équivalentes de la proposition 3.
Autrement dit, un point x appartient à $\overline{\lim}\, F_n$ si et seulement si il est limite dans E d'une suite $x_{n_k} \in F_{n_k}$; ou encore si et seulement si tout voisinage de x rencontre une infinité de F_n.

Par définition; si $x \in \overline{\lim}\, F_n$, on peut trouver une suite partielle F_{n_k} convergeant vers une limite F' avec $x \in F'$. Par suite il existe une suite $x_{n_k} \in F_{n_k}$ convergeant vers x, et x appartient à tout $F \in \mathcal{F}$ vérifiant l'énoncé 2' : ainsi $\overline{\lim}\, F_n$ est contenu dans l'intersection des $F \in \mathcal{F}$ vérifiant 2'.

Inversement, montrons que $\overline{\lim}\, F_n$ est un ensemble fermé vérifiant 2". Soit x un point tel que tout voisinage B de x rencontre une infinité de F_n : on peut trouver une suite partielle F_{n_k} et des éléments $x_{n_k} \in F_{n_k}$ tels que la suite x_{n_k} converge vers x. Alors x appartient aux valeurs d'adhérence de F_{n_k}, donc à $\overline{\lim}\, F_n$. Par suite, $\overline{\lim} F_n$ vérifie 2".

Il reste à vérifier que $\overline{\lim}\, F_n$ est fermé, mais celà est immédiat : si un point x appartient à la fermeture de $\overline{\lim}\, F_n$, tout voisinage B de x rencontre une valeur d'adhérence de la suite F_n, donc rencontre une infinité de F_n : d'après 2", on a donc $x \in \overline{\lim}\, F_n$;

Scholie. Si F_n est une suite dans $\mathcal{F}(E)$, et $\mathcal{B}_x$ le filtre des voisinages de x dans E, on a les relations :

$$x \in \underline{\lim}\, F_n \iff \forall B \in \mathcal{B}_x,\ \exists N\ \forall n \geq N,\ B \cap F_n \neq \emptyset$$
$$x \in \overline{\lim}\, F_n \iff \forall B \in \mathcal{B}_x,\ \forall N\ \exists n \geq N\ \ B \cap F_n \neq \emptyset$$

Sous cette forme, on généralise sans peine la définition des limites inférieure et supérieure au cas des familles filtrées. En particulier :

Définition 2. Soient E un espace topologique, E' un espace LCD, Γ une application de E dans $\mathcal{F}(E')$, $\mathcal{B}_{x_0}$ et $\mathcal{B}_{y'}$ les filtres des voisinages de deux points $x_0 \in E$ et $y' \in E'$. On désignera par $\overline{\lim}_{x \to x_0} \Gamma(x)$ et $\underline{\lim}_{x \to x_0} \Gamma(x)$ les ensembles définis par :

$$y' \in \overline{\lim_{x \to x_0}} \Gamma(x) \iff \forall B' \in \mathcal{B}_{y'},\ \forall B \in \mathcal{B}_{x_0}\ \exists x \in B\ :\ B' \cap \Gamma(x) \neq \emptyset$$

$$y' \in \underline{\lim_{x \to x_0}} \Gamma(x) \iff \forall B' \in \mathcal{B}_{y'}\ \exists B \in \mathcal{B}_{x_0}\ \forall x \in B\ ;\ B' \cap \Gamma(x) \neq \emptyset$$

Proposition 4. Les ensembles $\overline{\lim}_{x \to x_0} \Gamma(x)$ et $\underline{\lim}_{x \to x_0} \Gamma(x)$ sont fermés et vérifient :

$$\underline{\lim_{x \to x_0}} \Gamma(x) \subset \Gamma(x_0) \subset \overline{\lim_{x \to x_0}} \Gamma(x)$$

En effet, montrons que $\overline{\lim}\ \Gamma(x)$ est fermé. Si tout voisinage ouvert B' d'un point $z' \in E'$ contient un point $y' \in \overline{\lim}_{x \to x_0} \Gamma(x)$, on a $B' \in \mathcal{B}_{y'}$, et, par suite, $\forall B \in \mathcal{B}_{x_0}\ \exists\ x \in B$ avec $B' \cap \Gamma(x) \neq \emptyset$, donc $z' \in \overline{\lim}_{x \to x_0} \Gamma(x)$. Même démonstration pour $\underline{\lim}\ \Gamma(x)$.

Pour tout $B \in \mathcal{B}_{x_0}$, on a $x_0 \in B$. Si $y' \in \Gamma(x_0)$, tout voisinage B' de y' contient y', donc rencontre $\Gamma(x_0)$: par suite $y' \in \overline{\lim}_{x \to x_0} \Gamma(x)$, d'où la deuxième inclusion de l'énoncé. De même, si $y' \in \underline{\lim}_{x \to x_0} \Gamma(x)$, tout voisinage de y' rencontre le fermé $\Gamma(x_0)$ et par suite $y' \in \Gamma(x_0)$, d'où la première inclusion.

II - Définition des semi-continuités

La topologie d'un espace $\mathcal{F}(E)$ est engendrée par deux espèces bien différentes d'ouverts, ceux du type V_G et ceux du type V^K. $F \in V_G$ signifie que F n'est pas trop petit vis à vis de l'ouvert G, puisqu'il le rencontre. $F \in V^K$ signifie de même que F n'est pas trop grand vis à vis du compact K, puisqu'il en est disjoint. Il est donc naturel d'appeler semi-continuité inférieure la continuité relative à la topologie engendrée par les seuls V_G, et semi-continuité supérieure la continuité relative à la topologie engendrée par les seuls V^K. Ces deux semi-continuités ne jouent en aucune façon des rôles symétriques, et seule la semi-continuité supérieure nous conduira à une topologie compacte.

Définition 1. Soient E un espace ~~topologique~~ LCD, $\mathcal{B}_x$ le filtre des voisinages d'un élément $x \in E$, E' un espace LCD, et Γ une application de E dans $\mathcal{F}(E')$. On dit que Γ est semi-continu inférieurement (sci) en x si :

$$\forall G' \in \mathcal{G}(E') ,\ G' \cap \Gamma(x) \neq \emptyset \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}_x ,\ \forall y \in B : G' \cap \Gamma(y) \neq \emptyset$$

De même, on dit que Γ est semi-continu supérieurement (scs) en x si :

$$\forall K' \in \mathcal{K}(E') ,\ K' \cap \Gamma(x) = \emptyset \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}_x ,\ \forall y \in B : K' \cap \Gamma(y) = \emptyset$$

Enfin, on dit que l'application Γ est sci (scs) si elle est sci (scs) en tout point $x \in E$.

Proposition 1. Γ est sci en $x_0 \in E$ si et seulement si on a $\Gamma(x_0) \subset \underline{\lim}\ \Gamma(x_n)$ pour toute suite x_n convergeant vers x dans E.

La condition est nécessaire : soit $x_n \to x_0$ dans E, $z' \in \Gamma(x_0)$, et G' un voisinage de z'. On peut trouver un voisinage B de x_0 avec $\Gamma(x) \cap G' \neq \emptyset$ pour tout $x \in B$, donc G' rencontre tous les $\Gamma(x_n)$ pour n assez ~~grand,~~ et par suite $z' \in \underline{\lim}\ \Gamma(x_n)$.

La condition est suffisante. Supposons, en effet, que Γ ne soit pas sci en x_0. On peut trouver un ouvert $G' \subset E$ et un point $z' \in G' \cap \Gamma(x_0)$ tel que tout ouvert B_n d'un système fondamental dénombrable de voisinages de x_0 contienne un x_n avec $G' \cap \Gamma(x_n) = \emptyset$. On a alors $x_n \to x_0$ et $z' \notin \underline{\lim}\ \Gamma(x_n)$.

Proposition 2. Γ est scs en $x_0 \in E$ si et seulement si on a $\Gamma(x_0) \supset \overline{\lim}\ \Gamma(x_n)$ pour toute suite x_n convergeant dans E vers x_0.

La condition est nécessaire : soit $K' \in \mathcal{K}(E')$ disjoint de $\Gamma(x_o)$, et $B \in \mathcal{B}_{x_o}$ tel que $\Gamma(y) \cap K' = \emptyset$ pour tout $y \in B$. Si une suite x_n converge vers x_o, on a $x_n \in B$ pour n assez grand, et $K' \cap \Gamma(x_n) = \emptyset$. Donc (I,prop.3) $\Gamma(x_o) \supset \overline{\lim}\, \Gamma(x_n)$

Inversement, supposons que Γ ne soit pas scs en x_o. On peut trouver $K' \in \mathcal{K}(E')$ disjoint de $\Gamma(x_o)$ tel que tout voisinage B_n d'un système fondamental dénombrable) de voisinages de x_o contienne un x_n avec $K' \cap \Gamma(x_n) \neq \emptyset$. On a $x_n \to x_o$ dans E. Mais toute valeur d'adhérence de la suite $\Gamma(x_n)$ dans $\mathcal{F}(E')$ rencontre K', et par suite $\Gamma(x_o) \not\supset \overline{\lim}\ (x_n)$.

<u>Définition 2.</u> Soient toujours E et E' deux espaces LCD, et Γ une application de E dans $\mathcal{F}(E')$. On appelle régularisée supérieure de Γ l'application $\overline{\Gamma} : x \longrightarrow \overline{\lim}_{y \to x} \Gamma(y)$, et régularisée inférieure l'application $\mathring{\Gamma} : x \to \underline{\lim}_{y \to x} \Gamma(y)$.

<u>Proposition 3.</u> La régularisée supérieure $\overline{\Gamma}$ d'une application Γ quelconque est scs.

Par définition, $y' \in \overline{\Gamma}(x_o)$ signifie : $\forall B \in \mathcal{B}_{x_o}$, $\forall B' \in \mathcal{B}_{y'}$, B' rencontre $\bigcup_{x \in B} \Gamma(x)$, c'est à dire :

$$\overline{\Gamma}(x_o) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_{x_o}} \overline{\bigcup_{x \in B} \Gamma(x)}$$

Si un compact K' est disjoint de $\overline{\Gamma}(x_o)$, l'intersection $\bigcap_{B \in \mathcal{B}_{x_o}} \left[K' \cap \overline{\bigcup_{x \in B} \Gamma(x)} \right]$ est vide, et on peut trouver $B_o \in \mathcal{B}_{x_o}$ tel que K' soit disjoint de $\overline{\bigcup_{x \in B_o} \Gamma(x)}$ - Mais dans ce cás K' est disjoint de $\overline{\Gamma}(y)$ pour tout y appartenant à l'ouvert B_o, et $\overline{\Gamma}$ est scs (def.1).

<u>Proposition 4.</u> On a $\Gamma = \overline{\Gamma}$ si et seulement si Γ est scs.

La condition est nécessaire, d'après la proposition 3. Si Γ est scs en x_o, soit $y' \notin \Gamma(x_o)$ et $\overline{B'}$ un voisinage compact de y' disjoint de $\Gamma(x_o)$. On peut trouver $B \in \mathcal{B}_{x_0}$ avec $\overline{B'} \cap \Gamma(x) = \emptyset$ pour tout $x \in B$, ce qui implique (I,def.2) $y \notin \overline{\lim\limits_{y \to x_0}} \Gamma(x) = \overline{\Gamma}(x_0)$. Ainsi, on a $\overline{\Gamma}(x_0) \subset \Gamma(x_0)$, et l'égalité d'après I, prop. 4.

Proposition 5. On a $\Gamma = \mathring{\Gamma}$ si et seulement si Γ est sci.

$\Gamma = \mathring{\Gamma}$ équivaut à : $\forall x_0 \in E$, $y' \in \Gamma(x_0) \Rightarrow \forall B' \in \mathcal{B}_{y'}$, $\exists B \in \mathcal{B}_{x_0}$ $\forall x \in B : B' \cap \Gamma(x) \neq \emptyset$ D'après la définition 1 ceci entraine que Γ est sci.
Inversement, si Γ est sci, et si $y' \in \Gamma(x_0)$, pour tout $B' \in \mathcal{B}_{y'}$ on a : $\exists B \in \mathcal{B}_{x_0}$, $\forall x \in B : B' \cap \Gamma(x) \neq \emptyset$, donc $\Gamma = \mathring{\Gamma}$.

On notera que, pour une application Γ quelconque, la régularisée inférieure $\mathring{\Gamma}$ n'est pas nécessairement sci : la proposition 3 n'a pas d'équivalent pour la semi-continuité inférieure. Ce manque de symétrie entre les deux semi-continuités va s'agraver lorsque nous allons introduire des topologies.

III - Topologies des applications scs.

Nous désignerons par E et E' deux espaces LCD, et par $\Phi_{\mathcal{F}}(E,E')$ l'espace des applications scs de E dans $\mathcal{F}(E')$. Si Γ est une application quelconque de E dans $\mathcal{F}(E')$, nous dirons que l'ensemble $\bigcup\limits_{x \in E} \{x\} \times \Gamma(x) \subset E \times E'$ est le graphe de Γ. L'application Γ est définie par son graphe, puisque $\Gamma(x)$ est la coupe en x de ce graphe.

Proposition 1. Une application Γ de E dans $\mathcal{F}(E')$ est scs si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times E'$.

Supposons Γ scs, et soit (x_n, y_n) une suite convergeant vers (x,y) dans $E \times E'$ avec $y_n \in \Gamma(x_n)$ pour tout n. On a (II, prop.2) $\Gamma(x) \supset \overline{\lim}\, \Gamma(x_n)$, et par suite $y \in \Gamma(x)$: le graphe de Γ est fermé.

Inversement, si le graphe d'une application Γ est fermé, $y'_0 \notin \Gamma(x_0)$ entraine qu'il existe des voisinages ouverts B de x_0 dans E et B' de y'_0 dans E' avec $y' \notin \Gamma(x)$ pour tout $y' \in B'$ et tout $x \in B$. Par suite $y'_0 \notin \overline{\lim}_{x \to x_0} \Gamma(x)$. On a donc $\overline{\Gamma}(x_0) \subset \Gamma(x_0)$ en tout $x_0 \in E$, donc $\Gamma = \overline{\Gamma}$, et Γ est scs, d'après la proposition 4, par.II.

La proposition 1 permet d'identifier l'espace $\Phi_f(E, E')$ des applications scs de E dans $\mathcal{F}(E')$ avec l'espace $\mathcal{F}(E \times E')$ des fermés de $E \times E'$, et, en particulier, de le munir de la topologie compacte dénombrable de ce dernier espace. Pour étudier cette topologie, il est commode d'introduire les fonctionnelles auxiliaires que nous allons maintenant définir.

Définition 1. Soit Γ une application quelconque de E dans $\mathcal{F}(E')$. On posera $\Gamma(B) = \overline{\bigcup_{x \in B} \Gamma(x)}$ pour tout ouvert $B \in \mathcal{G}(E)$, et $\overline{\Gamma}(K) = \bigcap_{B \supset K} \Gamma(B)$ pour tout compact $K \in \mathcal{K}(E)$.

En particulier, $\overline{\Gamma}(\{x\})$ s'identifie à la régularisée supérieure $\overline{\Gamma}(x)$, et nous écrirons en général $\overline{\Gamma}(x)$. On a vu (II, prop.4) que $\overline{\Gamma}(x) = \Gamma(x)$ pour tout $x \in E$ si et seulement si Γ est scs.

Proposition 2. La fonctionnelle $\Gamma(B)$ de la Définition 1 vérifie la relation :

$$1 - \quad \Gamma\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \overline{\bigcup_{i \in I} \Gamma(B_i)}$$

pour toute famille B_i, $i \in I$, d'ouverts. Inversement, si Γ est une application de $\mathcal{G}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$ vérifiant la relation 1, et si l'on pose :

$$2 - \quad \overline{\Gamma}(x) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_x} \Gamma(B)$$

pour tout $x \in E$, l'application $\overline{\Gamma}$ de E dans $\mathcal{F}(E')$ ainsi définie est scs, et la fonctionnelle $\overline{\Gamma}(B)$ qui lui est associée selon la définition 2 vérifie $\overline{\Gamma}(B) = \Gamma(B)$ pour tout $B \in \mathcal{G}(E)$.

a/ Soit $\Gamma(B)$ la fonctionnelle associée à une application Γ de E dans $\mathcal{F}(E')$. On a :

$$\Gamma\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \overline{\bigcup_{i \in I} \bigcup_{x \in B_i} \Gamma(x)} = \overline{\bigcup_{i \in I} \overline{\bigcup_{x \in B_i} \Gamma(x)}}$$

c'est à dire la relation 1.

b/ In versement, soit $\Gamma : \mathcal{G}(E) \rightarrow \mathcal{F}(E')$ une application vérifiant la relation 1, et $\overline{\Gamma}$ l'application de E dans $\mathcal{F}(E')$ définie selon la relation 2. Posons :

$$\overline{\Gamma}(B) = \overline{\bigcup_{x \in B} \overline{\Gamma}(x)} \qquad (B \in \mathcal{G}(E))$$

D'après 2, $x \in B$ entraine $\overline{\Gamma}(x) \subset \Gamma(B)$ et par suite $\overline{\Gamma}(B) \subset \Gamma(B)$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $y' \notin \overline{\Gamma}(B)$ et $K_{y'}$ un voisinage compact de y' dans E' disjoint de $\overline{\Gamma}(B)$. On a $\overline{\Gamma}(x) \cap K_{y'} = \emptyset$ pour tout $x \in B$. D'après 2 et la compacité de $K_{y'}$, on peut trouver un voisinage ouvert B_x de x avec $\Gamma(B_x) \cap K_{y'} = \emptyset$, et on peut d'ailleurs supposer $B_x \subset B$. On a évidemment $B = \bigcup_{x \in B} B_x$. La relation $\bigcup_{x \in B} (\Gamma(B_x) \cap K_{y'}) = \emptyset$ entraine alors $y' \notin \overline{\bigcup_{x \in B} \Gamma(B_x)}$ c'est à dire $y' \notin \Gamma(B)$ d'après la relation 1. On a donc $\Gamma(B) \subset \overline{\Gamma}(B)$, et l'égalité.

L'égalité $\Gamma(B) = \overline{\Gamma}(B)$ montre ensuite que $\overline{\Gamma}(x)$ est sa propre régularisée supérieure (ce qui justifie la notation utilisée), donc que $\overline{\Gamma}$ est scs.

<u>Corollaire.</u> Les relations réciproques :

$$\Gamma(B) = \overline{\bigcup_{x \in B} \Gamma(x)} \quad \text{et} \quad \Gamma(x) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_x} \Gamma(B)$$

établissent une bijection entre les applications scs de E dans $\mathcal{F}(E')$ et les applications de $\mathcal{G}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$ vérifiant la relation 1.

Proposition 3. La topologie de l'espace $\Phi_f(E,E')$ des applications scs de E dans $\mathcal{F}(E')$ est engendrée par les familles de parties de $\Phi_f(E,E')$ du type :

$$1 - \{\Gamma : B' \cap \Gamma(B) \neq \emptyset\} \qquad (B \in \mathcal{G}(E),\ B' \in \mathcal{G}(E'))$$

$$2 - \{\Gamma : K' \cap \Gamma(K) = \emptyset\} \qquad (K \in \mathcal{K}(E),\ K' \in \mathcal{K}(E'))$$

En effet, la topologie de $\mathcal{F}(E \times E')$ est engendrée par : 1 - les $V_{B \times B'}$, 2 - les $V^{K \times K'}$. Désignons par C le graphe de $\Gamma \in \Phi_f$. On a :

$$C \in V_{B \times B'} \Leftrightarrow \exists x \in B,\ y' \in B' : y' \in \Gamma(x) \Leftrightarrow B' \cap \bigcup_{x \in B} \Gamma(x) \neq \emptyset$$

Comme B est ouvert, ceci équivaut à $B' \cap \Gamma(\bar{B}) \neq \emptyset$.

De même, $C \in V^{K \times K'}$ si C est disjoint de $K \times K'$, donc si et seulement si on peut trouver deux ouverts $G \supset K$ et $G' \supset K'$ tels que $G \times G'$ soit disjoint de C, ou encore tels que G' soit disjoint de $\bigcup_{x \in G} \Gamma(x) = \Gamma(G)$. Mais on peut trouver $G' \supset K'$ disjoint du fermé $\Gamma(G)$ si et seulement si $K' \cap \Gamma(G) = \emptyset$. Comme $G \supset K$, ceci entraine $K' \cap \Gamma(K) = \emptyset$. Inversement, $\Gamma(K) = \bigcap_{G \supset K} \Gamma(G)$ n'est disjoint du compact K' que si l'on peut trouver un ouvert $G \supset K$ avec $K' \cap \Gamma(G) = \emptyset$. Par conséquent, $C \in V_{K \times K'}$ équivaut à $K' \cap \Gamma(K) = \emptyset$.

Proposition 4. (Critères de convergence) Une suite Γ_n d'applications scs converge vers Γ dans $\Phi_f(E,E')$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies (pour tous $G \in \mathcal{G}(E)$, $G' \in \mathcal{G}(E')$, $K \in \mathcal{K}(E)$, $K' \in \mathcal{K}(E')$)

$$1 - G' \cap \Gamma(G) \neq \emptyset \Rightarrow \exists N\ \forall n \geq N \quad G' \cap \Gamma_n(G) \neq \emptyset$$
$$2 - K' \cap \Gamma(K) = \emptyset \Rightarrow \exists N\ \forall n \geq N \quad K' \cap \Gamma_n(K) = \emptyset$$

Ces deux conditions 1 et deux sont respectivement équivalentes aux deux suivantes :

1' - Pour tout $x \in E$ et tout $y' \in \Gamma(x)$, on peut trouver une suite x_n et une suite y'_n convergeant vers x et y' respectivement dans E et E' avec $y'_n \in \Gamma_n(x_n)$ pour tout entier n (sauf au plus un nombre fini).

2' - Si deux suites x_{n_k} et y'_{n_k} convergent vers x et y' dans E et E' et vérifient $y'_{n_k} \in \Gamma_{n_k}(x_{n_k})$ pour tout k, on a $y' \in \Gamma(x)$.

Ces deux conditions sont encore équivalentes respectivement aux deux suivantes :

1" - $\underline{\lim}\, \Gamma_n(G) \supset \Gamma(G)$

2" - $\overline{\lim}\, \Gamma_n(K) \subset (K)$

Enfin, de toute suite Γ_n on peut extraire une suite partielle convergeant vers une limite Γ , et vérifiant par suite les six conditions précédentes.

Cette proposition est une simple application à l'espace compact $\mathcal{F}(E \times E')$ des propositions 1, 2 et 3 du paragraphe I .

IV - Espace topologique $\mathcal{F}_T$ des topologies fermées

Considérons maintenant l'espace compact $\Phi_f[\mathcal{F}(E), E] = \mathcal{F}[\mathcal{F}(E) \times E']$ des applications scs de $\mathcal{F}(E)$ dans lui-même, que nous désignerons simplement par Φ_f dans ce paragraphe. Nous dirons qu'une application $\Gamma \in \Phi_f$ est décroissante si $F \supset \Gamma(F)$ pour tout $F \in \mathcal{F}(E)$; isotone, si $F \subset F'$ entraine $\Gamma(F) \subset \Gamma(F')$; idempotente si $\Gamma[\Gamma(F)] = \Gamma(F)$.

Proposition 1. Le sous-espace de Φ_f constitué des applications décroissantes est compact.

Il suffit de vérifier que ce sous-espace est fermé. Soit Γ_n une suite d'applications scs décroissantes convergeant vers Γ dans Φ_f, soit $F \in \mathcal{F}(E)$ et $y \in \Gamma(F)$. D'après le critère 1', on peut trouver deux suites F_n et y_n avec $y_n \in \Gamma_n(F_n)$ et $y_n \to y$, $F_n \to F$. Mais $\Gamma_n(F_n) \subset F_n$ entraine $y_n \in F_n$, et $y_n \to y$ entraine (critère 2') $y \in F$. Donc $\Gamma(F) \subset F$, et Γ est décroissante.

Proposition 2. Le sous-espace de Φ_f constitué des applications isotones est compact.

Soit Γ_n une suite d'applications scs isotones convergeant vers Γ dans Φ_f, $F \subset F'$ deux fermés de E, et soit $y \in \Gamma(F)$. On peut (critère 1') trouver deux suites $F_n \to F$ et $y_n \to y$ avec $y_n \in \Gamma_n(F_n)$. Mais $\Gamma_n(F_n \cup F') \supset \Gamma_n(F_n)$. Ainsi, $y_n \in \Gamma_n(F_n \cup F')$, et $F_n \cup F' \to F \cup F' = F'$ (continuité de $\cup$).
Par suite (critère 2') on a $y \in \Gamma(F')$, donc $\Gamma(F) \subset \Gamma(F')$ et Γ est isotone.

Proposition 3. Dans Φ_f, les applications décroissantes et idempotentes constituent un espace compact.

Soit T_n une suite d'applications scs décroissantes et idempotentes convergeant vers T dans Φ_f. T est décroissante (prop. 1). Montrons que T est idempotente. Soit $F \in \mathcal{F}(E)$ un fermé de E.

a/ Si $y \in T(F)$, on peut (critère 1') trouver deux suites $y_n \to y$ et $F_n \to F$ avec $y_n \in T_n(F_n)$. Soit A une valeur d'adhérence de la suite $T_n(F_n)$, c'est à dire $T_{n_k}(F_{n_k}) \to A$ pour une suite partielle F_{n_k}). Les T_{n_k} étant idempotents, on a : $y_{n_k} \in T_{n_k}[T_{n_k}(F_{n_k})]$, $y_{n_k} \to y$ et $T_{n_k}(F_{n_k}) \to A$. On en déduit (critère 2') $y \in T(A)$ et par suite $T(F) \subset T(A)$

b/ Soit $x \in A$ un point de cet ensemble $A = \lim T_{n_k}(F_{n_k})$. Il existe une suite $x_{n_k} \to x$ dans E avec $x_{n_k} \in T_{n_k}(F_{n_k})$ (critère 1' de la convergence dans $\mathcal{F}(E)$). Mais on a toujours $F_{n_k} \to F$. Le critère 2' de la convergence dans Φ_f s'applique donc et donne : $x \in T(F)$. Ainsi, on a $A \subset T(F)$.

c/ Pour toute valeur d'adhérence A de $T_n(F_n)$, on a ainsi :

$$A \subset T(F) \subset T(A)$$

c'est à dire $A = T(F) = T(A)$ puisque T est décroissante. De $A = T(F)$ découle $T(A) = TT(F)$, donc $T(F) = TT(F)$ et T est idempotente.

Corollaire 1. Si une suite T_n d'applications scs décroissantes et idempotentes converge vers T, on peut, pour tout $F \in \mathcal{F}(E)$, trouver une suite F_n avec $F_n \to F$ et $T_n(F_n) \to T(F)$ dans $\mathcal{F}(E)$.

Dans la démonstration précédente, en effet, on a trouvé une suite $F_n \to F$ tellle que toute valeur d'adhérence A dans $\mathcal{F}(E)$ de la suite $T_n(F_n)$ vérifie $A = T(F)$, ce qui signifie $T_n(F_n) \to T(F)$ dans $\mathcal{F}(E)$;

Corollaire 2. Dans les mêmes conditions, si une suite F_{n_k} converge vers F et vérifie $T_{n_k}(F_{n_k}) \to A$, on a $A \subset T(F)$.

Il suffit de reprendre la partie b/ de la démonstration de la proposition.

Réciproque. Les deux conditions énoncées dans les corollaires 1 et 2 entrainent à leur tour $T_n \to T$ dans le sous-espace de Φ_f des applications décroissantes et idempotentes.

En effet, soient $F \in \mathcal{F}$ et $y \in T(F)$. D'après la première condition, on peut trouver $F_n \to F$ avec $T_n(F_n) \to T(F)$. Donc (critère 1' de la convergence des $T_n(F_n)$) il existe une suite $y_n \to y$ avec $y_n \in T_n(F_n)$. Le critère 1' de la convergence $T_n \to T$ est donc vérifié pour la suite (F_n, y_n).

Inversement, soit $F_{n_k} \to F$, $y_{n_k} \to y$ avec $y_{n_k} \in T_{n_k}(F_{n_k})$. Le point y appartient à toute valeur d'adhérence A de la suite $T_{n_k}(F_{n_k})$. La deuxième condition donne $A \subset T(F)$, donc $y \in T(F)$ et le critère 2' de la convergence $T_n \to T$ est vérifié. Résumons ces résultats :

Proposition 4. Soit Φ_T l'espace des applications scs décroissantes isotones et idempotentes de $\mathcal{F}(E)$ dans lui-même. Φ_T est compact dans Φ_f. Une suite T_n converge vers T dans Φ_T si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1' - Pour tout $F \in \mathcal{F}(E)$ et tout $y \in F$, on peut trouver une suite

) et une suite $y_n \to y$ dans E)

$F_n \to F$ dans $\mathcal{F}$ avec $y_n \in T_n(F_n)$ pour n assez grand.

2' - Si $F_{n_k} \to F$ dans $\mathcal{F}$ et $y_{n_k} \to y$ dans E avec $y_{n_k} \in T_{n_k}(F_{n_k})$ on a $y \in T(F)$.

Ces deux conditions peuvent être remplacées par les deux suivantes :

1'a - Pour tout $F \in \mathcal{F}(E)$, on peut trouver $F_n \to F$ avec $T_n(F_n) \longrightarrow T(F)$ dans $\mathcal{F}(E)$.

2'a - Pour toute suite F_{n_k} convergeant vers F dans $\mathcal{F}(E)$, on a $\overline{\lim}\, T_{n_k}(F_{n_k}) \subset T(F)$.

<u>Proposition 5.</u> L'application $T \to \mathcal{T}' = \{ F : F \in \mathcal{F}(E),\ T(F) = F \}$ est un homéomorphisme de l'espace Φ_T sur le sous-espace compact de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ constitué des familles $\mathcal{T}'$ stables pour $\bigcup$ et contenant $\emptyset$.

Nous montrerons successivement que cette application est bijective (a/ et b/) et bicontinue (c/ et d/).

a/ Soit $T \in \Phi_T$. On a $T(\emptyset) \subset \emptyset$, d'où $\emptyset = T(\emptyset) \in \mathcal{T}'$. Montrons que $\mathcal{T}'$ est stable pour $\bigcup$. Si $F = T(F)$ et $F' = T(F')$, on a $F \subset F \cup F'$ d'où $F \subset T(F \cup F')$ puis $F \cup F' \subset T(F \cup F')$, et par suite $F \cup F' = T(F \cup F') \in \mathcal{T}'$. Enfin, $\mathcal{T}'$ est fermée : si $F_n \to F$ avec $T(F_n) = F_n$, on a $T(F) \supset \overline{\lim}\, T(F_n) = F$, puisque T est scs, d'où l'égalité, puisque T est décroissante : donc $F \in \mathcal{T}'$.

b/ Inversement, soit $\mathcal{T}' \in \mathcal{F}(\mathcal{F})$ stable pour $\bigcup$ et contenant $\emptyset$. La famille filtrante pour $\subset$ des $F' \in \mathcal{T}'$ contenus dans un $F \in \mathcal{F}(E)$ converge vers un élément $T(F) \subset F$. On a $T(F) \in \mathcal{T}'$, puisque $\mathcal{T}'$ est fermé. T(F) est le plus grand élément de $\mathcal{T}'$ contenu dans F. D'où résulte que T est isotone et idempotente et que $F' \in \mathcal{T}'$ si et seulement si $F' = T(F')$.

Montrons que cette application T est scs. Soit $F \in \mathcal{F}(E)$, et $F_n \to F$ dans $\mathcal{F}(E)$. Si A est une valeur d'adhérence de $T_n(F_n)$, l'inégalité $T_n(F_n) \subset F_n$ entraine $A \subset F$. Mais A appartient au fermé $\mathcal{T}'$. On a donc $T(A) \subset F$, et, T étant idempotente, $A = T(A) \subset T(F)$: ainsi $\overline{\lim}\, T_n(F_n) \subset T(F)$, et T est scs.

c/ Montrons maintenant que l'application $T \to \mathcal{T}'$ est continue. Soit T_n une suite convergeant vers T dans Φ_T. Il faut montrer $\mathcal{T}'_n \to \mathcal{T}'$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$

critère 1': soit $F \in \mathcal{T}'$, c'est à dire $F = T(F)$. D'après 1'a, on peut trouver $F_n \to F$ avec $T_n(F_n) \to T(F) = F$. Comme $T_n(F_n) \in \mathcal{T}'_n$, le critère 1' est vérifié dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$.

critère 2'. Soit $F_{n_k} \to F$ avec $F_{n_k} = T_{n_k}(F_{n_k}) \in \mathcal{T}'_{n_k}$. D'après 2'a, on a $F = \overline{\lim}\, T_{n_k}(F_{n_k}) \subset T(F)$, d'où $F = T(F) \in \mathcal{T}'$, et le critère 2' est vérifié.

d/ Montrons enfin que $\mathcal{T}' \to T$ est continue. Soit $\mathcal{T}'_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ stables pour $\cup$ et contenant $\emptyset$, T_n leurs images dans Φ_T. Si $\mathcal{T}'_n$ converge vers $\mathcal{T}'$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$; $\mathcal{T}'$ est stable pour $\cup$ et contient $\emptyset$ (en effet, d'après c/, l'image de l'espace compact Φ_T par l'application continue $T \to \mathcal{T}'$ est un sous-espace compact de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$). Montrons que T_n converge vers l'image T de $\mathcal{T}'$.

Critère 1'a. Soit $F \in \mathcal{F}(E)$. Comme $T(F) \in \mathcal{T}'$, on peut trouver une suite $F'_n \in \mathcal{T}'_n$ $F'_n \to T(F)$. D'après la continuité de $\cup$, $F'_n \cup F$ converge vers $F \cup T(F) = F$. On a $T_n(F'_n \cup F) \supset T_n(F'_n) = F'$. Soit alors A une valeur d'adhérence de la suite $T_n(F'_n \cup F) \in \mathcal{T}'_n$. On a $A \in \mathcal{T}'$. De $T_n(F'_n \cup F) \supset T_n(F'_n) = F'_n$ résulte $A \supset T(F)$. Mais $T_n(F'_n \cup F) \subset F'_n \cup F$ entraine $A \subset F$. Comme $T(F)$ est le plus grand élément de $\mathcal{T}'$ contenu dans F, on a $A = T(F)$, et par suite $T_n(F'_n \cup F)$ converge vers $T(F)$. La suite $F'_n \cup F$ vérifie donc le critère 1'a.

Critère 2'a. Soit $F_{n_k} \to F$ dans $\mathcal{F}(E)$, et $A \in \mathcal{T}'$ une valeur d'adhérence de $T_{n_k}(F_{n_k})$. De $T_{n_k}(F_{n_k}) \subset F_{n_k}$ résulte $A \subset F$, d'où, puisque $A = T(A)$, $A \subset T(F)$, ce qui montre que le critère 2'a est vérifié.

~~Remarque.~~ Remarque. Cet homéomorphisme permet d'identifier l'espace compact Φ_T des applications ~~scs~~ décroissantes et idempotentes de $\mathcal{F}(E)$ dans lui-même avec le sous-espace compact de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ constitué des familles stables pour $\cup$ et contenant $\emptyset$. L'espace $\mathcal{F}_T$ des topologies fermées est alors un sous-espace (non compact) de Φ_T caractérisé par les deux propriétés équivalentes suivantes ;

a/ $\mathcal{T}' \in \Phi_T$ est dans $\mathcal{F}_T$ si et seulement si $\mathcal{T}$ est stable pour $\bigcap$ et contient E.

b/ $T \in \Phi_T$ est dans $\mathcal{F}_T$ si et seulement si $E = T(E)$ et $T(F) \cap T(F') = T(F \cap F')$.

On notera surtout que la topologie de Φ_T induit sur $\mathcal{F}_T$ la même topologie que $\mathcal{F}(\mathcal{F})$.

V - Topologie des applications sci

Nous désignerons par $\Phi_{\mathcal{G}}(E,E')$ l'espace des applications sci de E dans $\mathcal{F}(E')$, E et E' étant toujours supposés LCD.

Proposition 1. L'application $F \to H_F$ qui à tout fermé $F \in \mathcal{F}(E)$ associe la famille $H_F \subset \mathcal{G}(E)$ définie par :

$$H_F = \{ G : G \in \mathcal{G} \; , G \cap F \neq \emptyset \}$$

est un homéomorphisme de $\mathcal{F}(E)$ sur un sous-espace compact de $\mathcal{G}[\mathcal{G}(E)]$ qui est le sous-espace des ensembles $H \subset \mathcal{G}(E)$ ouverts dans $\mathcal{G}$ et vérifiant la relation :

$$1 - G \in H \Rightarrow \exists \; y \in G : W_y \subset H$$

Cette proposition se déduit des prop. 1, 2 et 3 de la Note 83, I,1º, moyennant l'homéomorphisme $H_F \to \mathcal{A}_F$ de $\mathcal{G}(\mathcal{G})$ sur $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ défini par :

$$\mathcal{A}_F = \{ \complement G : G \in \mathcal{G} \, , G \notin H_F \}$$

En particulier, on a :

$$W_K \not\subset H_F \Leftrightarrow F \in V^K$$
$$W_G \subset H_F \Leftrightarrow F \in V_G$$

ce qui permet de définir commodément la topologie des $H \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$ vérifiant 1.

Proposition 2. Soit Γ une application de E dans $\mathcal{F}$ (E'). Posons :

$$H_{\Gamma(x)} = \{ G : G \in \mathcal{G}(E),\ G \cap \Gamma(x) \neq \phi \}$$

L'application $x \to H_{\Gamma(x)}$ applique E dans le sous-espace de $\mathcal{G}[\mathcal{G}(E')]$ vérifiant 1, et en tout $x_0 \in E$ on a :

$$y' \in \underline{\lim}_{x \to x_0} \Gamma(x) \Leftrightarrow W_{y'} \subset \bigcup_{B \in W_{x_0}} \bigcap_{x \in B} H_{\Gamma(x)}$$
$$y' \in \overline{\lim}_{x \to x_0} \Gamma(x) \Leftrightarrow W_{y'} \subset \bigcap_{B \in W_{x_0}} \bigcup_{x \in B} H_{\Gamma(x)}$$

Ce n'est qu'une autre manière d'énoncer la Définition 2 de II.

Définition 1. Une application ψ de E dans $\mathcal{G}$ (E') est scs (sci) en $x_0 \in E$ si l'application $x \to \int \psi(x)$ de E dans $\mathcal{F}$ (E') est sci (scs) en x_0 : autrement dit si pour tout $G' \in \mathcal{G}$ (E') tel que $G' \not\subset \psi(x_0)$ on peut trouver $B \in W_{x_0}$ dans E avec $G' \not\subset \psi(x)$ pour tout $x \in B$ (resp. si pour tout $K' \in \mathcal{K}(E')$ tel que $K' \subset \psi(x_0)$ on peut trouver $B \in W_{x_0}$ avec $K' \subset \psi(x)$ pour tout $x \in B$.)

Proposition 3. Une application $\Gamma : E \to \mathcal{F}(E')$ est scs (resp. sci) si et seulement si l'application $x \to H_{\Gamma(x)}$ de E dans $\mathcal{G}[\mathcal{G}(E')]$ est scs (sci).

$x \to H_{\Gamma(x)}$ sci signifie : $W_G \subset H_{\Gamma(x_0)} \Rightarrow \exists B \in W_{x_0}, \forall x \in B : W_G \subset H_{\Gamma(x)}$
ce qui équivaut à : $G \cap \Gamma(x_0) \neq \phi \Rightarrow \exists B \quad \forall x \in B \quad G \cap \Gamma(x) \neq \phi$
donc à la sci de Γ. De même, dire $x \to H_{\Gamma(x)}$ scs signifie :

$$W_K \not\subset H_{\Gamma(x_0)} \Rightarrow \exists B \in W_{x_0}, \forall x \in B : W_K \not\subset H_{\Gamma(x)}$$

ce qui équivaut à : $K \cap \Gamma(x_0) = \phi \Rightarrow \exists B \in W_{x_0}, \forall x \in B : K \cap \Gamma(x) = \phi$
c'est à dire à la scs de Γ.

Proposition 4. L'application $x \to H_{\Gamma(x)}$ est sci si et seulement si son graphe est ouvert dans $E \times \mathcal{G}(E')$.

En effet, $x \to H_{\Gamma(x)}$ sci équivaut à : $x \to \complement H_{\Gamma(x)}$ scs, donc à $\bigcup_{x \in E} \{x\} \times \complement H_{\Gamma(x)}$ fermé dans $E \times \mathcal{G}(E')$.

Corollaire. La topologie de la semi-continuité inférieure (non compacte) est engendrée par les familles d'applications de la forme :

$$1 - \{\Gamma : \exists x \in G,\ K' \cap \Gamma(x) = \emptyset\} \qquad (G \in \mathcal{G}(E),\ K' \in \mathcal{K}(E'))$$

$$2 - \{\Gamma : \forall x \in K,\ G' \cap \Gamma(x) \neq \emptyset\} \qquad (K \in \mathcal{K}(E),\ G' \in \mathcal{G}(E'))$$

La convergence $\Gamma_n \to \Gamma$ dans Φ_g est soumise aux deux critères :

$$1' - \quad G' \cap \Gamma(x) = \emptyset \Rightarrow \exists x_n \to x,\ G'_n \to G' : G'_n \cap \Gamma_n(x_n) = \emptyset$$

$$2' - \quad x_{n_k} \to x,\ G'_{n_k} \to G',\ G'_{n_k} \cap \Gamma_{n_k}(x_{n_k}) = \emptyset \Rightarrow \underline{G' \cap \Gamma(x) = \emptyset}$$

VI - Caractérisation des topologies fermées.

Soit $\mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ une topologie fermée, et $\mathcal{T}' \in \mathcal{F}(\mathcal{F})$ la famille des fermés de $\mathcal{T}$ $(F \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow \complement F \in \mathcal{T})$. A tout $F \in \mathcal{F}(E)$ correspond sa fermeture $\Gamma(F)$ pour la topologie $\mathcal{T}$ (intersection des $F' \in \mathcal{T}'$ contenant F).
L'application $F \to \Gamma(F)$ de $\mathcal{F}$ dans lui-même vérifie les propriétés habituelles :

1 - $F \subset \Gamma(F)$, $\emptyset = \Gamma(\emptyset)$
2 - $\Gamma[\Gamma(F)] = \Gamma(F)$
3 - $\Gamma(F \cup F') = \Gamma(F) \cup \Gamma(F')$

Montrons de plus que Γ est sci. Soit F_n une suite convergeant vers F dans $\mathcal{F}$ (E). $F_n \subset \Gamma(F_n)$ entraine $F \subset \underline{\lim}\, \Gamma(F_n)$. Mais toute valeur d'adhérence de la suite $\Gamma(F_n) \in \mathcal{C}'$ est dans $\mathcal{C}'$, puisque $\mathcal{C}'$ est fermée, et l'intersection de ces valeurs d'adhérence, qui est $\underline{\lim}\, \Gamma(F_n)$, est dans $\mathcal{C}'$. Par suite, on a $\Gamma(F) \subset \underline{\lim}\, \Gamma(F_n)$, et Γ est sci.

Inversement, soit Γ une application sci de $\mathcal{F}$ (E) dans lui-même vérifiant les conditions 1, 2 et 3 ci-dessus. Posons $\mathcal{C}' = \{F : F \in \mathcal{F}(E), F = \Gamma(F)\}$

$\mathcal{C}'$ contient $\emptyset$ et E, est stable pour la réunion finie et pour l'intersection infinie (conséquence immédiate de 1, 2 et 3). Montrons $\mathcal{C}' \in \mathcal{F}(\mathcal{F})$

Soit $F_n \to F$ dans $\mathcal{F}$ (E) avec $\Gamma(F_n) = F_n$. Comme Γ est sci, on a $F = \underline{\lim}\, \Gamma(F_n) \supset \Gamma(F)$, d'où $F = \Gamma(F)$, puisque Γ est croissante. Ainsi, $F \in \mathcal{C}'$: $\mathcal{C}'$ est bien fermée. Enonçons :

Proposition 1. Les relations :

$$\mathcal{C}' = \{F : F \in \mathcal{F},\ F = \Gamma(F)\} \quad \text{et} \quad \Gamma(F) = \bigcap_{\substack{F' \in \mathcal{C}' \\ F' \supset F}} F'$$

établissent une bijection entre les topologies fermées et les applications sci de $\mathcal{F}$ (E) dans lui-même vérifiant les axiomes 1, 2 et 3 ci-dessus.

En particulier, considérons les fermés $F = \{x\} \in \mathcal{F}(E)$ réduits à un point $x \in E$. Nous écrirons $\Gamma(x)$ au lieu de $\Gamma(\{x\})$ pour désigner la fermeture du point x dans la topologie $\mathcal{C}'$. L'application $x \to \Gamma(x)$ de E dans $\mathcal{F}$ (E) est sci, puisque $x \to \{x\}$ est un homéomorphisme de E sur le sous-espace de $\mathcal{F}$ (E) constitué des fermés réduits à un point.

On a toujours $x \in \Gamma(x)$, mais pas nécessairement $\{x\} = \Gamma(x)$. Posons $\Omega = \{x : \Gamma(x) \neq \{x\}\}$ (ensemble des points qui ne sont pas fermés pour $\mathcal{C}$). On a $\Omega \in \mathcal{G}(E)$. En effet, si une suite x_n converge vers x avec $\Gamma(x_n) = \{x_n\}$, on a $\Gamma(x) \subset \underline{\lim}\{x_n\} = \{x\}$, d'où $\Gamma(x) = \{x\}$, et $x \notin \Omega$.

Pour tout ouvert $G \in \mathcal{T}$ de la topologie fermée $\mathcal{T}$, et pour tout $x \in E$, on a soit $x \in G$, soit $G \cap \Gamma(x) = \emptyset$, puisque $\complement \Gamma(x)$ est le plus grand ouvert de $\mathcal{T}$ disjoint de x. Ainsi :

$$\mathcal{T} \subset \bigcap_{x \in \Omega} \left(S^{\Gamma(x)} \cup W_x \right)$$

(on désigne par S^A la famille des ouverts $G \in \mathcal{G}$ tels que $G \cap A = \emptyset$)

Inversement, soit $F \in \mathcal{F}(E)$ avec pour tout $x \in E$: oubien $x \notin F$, ou bien $F \supset \Gamma(x)$, soit $F = \bigcup_{x \in F} \Gamma(x)$. Les $\Gamma(x)$ sont dans $\mathcal{T}'$, ainsi que toute réunion finie $F_J = \bigcup_{x \in J} \Gamma(x)$, J, partie finie de F : la limite F' dans $\mathcal{F}(E)$ de la famille filtrante des F_J appartient au fermé $\mathcal{T}'$. On a manifestement $F' \supset F$, mais $F_J \subset F$ entraine $F' \subset F$ et l'égalité. Par suite $F \in \mathcal{T}'$.
Nous avons donc établi la proposition :

<u>Proposition 2.</u> Toute topologie fermée moins fine que $\mathcal{G}$, soit $\mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ est de la forme :

$$\mathcal{T} = \bigcap_{x \in E} \left(S^{\Gamma(x)} \cup W_x \right) \tag{1}$$

où Γ est une application sci de E dans $\mathcal{F}(E)$. ($S^{\Gamma(x)} = \{G : G \in \mathcal{G}, G \cap \Gamma(x) = \emptyset\}$)
$\Gamma(x)$ est la fermeture de $\{x\}$ pour $\mathcal{T}$, et l'ensemble $\{x : \Gamma(x) \neq \{x\}\}$ des points non fermés pour $\mathcal{T}$ est un ouvert $\Omega \in \mathcal{G}(E)$;

<u>Réciproque.</u> Inversement, si Γ est une application sci de E dans $\mathcal{F}(E)$, la relation (1) définit une topologie fermée $\mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$

En effet, il est immédiat que la famille $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}(E)$ définie par (1) contient $\emptyset$ et E, et qu'elle est stable pour la réunion et l'intersection finies. Montrons que $\mathcal{T}$ est fermée dans $\mathcal{G}(E)$, ce qui entrainera que $\mathcal{T}$ est stable pour la réunion infinie et achèvera la démonstration.

Soit $G_n \in \mathcal{T}$ une suite convergeant vers G dans $\mathcal{G}(E)$. Soit $x \in E$. On peut avoir soit $x \in G$ (et dans ce cas $G \in W_x$) soit $x \notin G$. Dans ce dernier cas, (critère 1' de convergence dans $\mathcal{G}$) il existe une suite x_n convergeant vers x dans E avec $x_n \notin G_n$. Mais $x_n \notin G_n$ entraine $G_n \cap \Gamma(x_n) = \emptyset$, ou encore $\Gamma(x_n) \subset \complement G_n$. Mais Γ est sci, d'où : $\Gamma(x) \subset \underline{\lim}\, \Gamma(x_n) \subset \lim \complement G_n = \complement G$ c'est à dire $\Gamma(x) \cap G = \emptyset$, ou $G \in S^{\Gamma(x)}$. Ainsi $G \in \mathcal{T}$, et $\mathcal{T}$ est une topologie fermée.

Remarque. Dans cette réciproque, on n'a pas supposé $x \in \Gamma(x)$. Mais, Γ étant une application sci quelconque, l'application $\Gamma' : \Gamma'(x) = \{x\} \cup \Gamma(x)$ est encore sci (continuité de $\cup$) vérifie $x \in \Gamma'(x)$ et définit la même topologie $\mathcal{T}$ que Γ. Par contre $\Gamma'(x)$ n'est la fermeture de $\{x\}$ pour la topologie $\mathcal{T}$ que si $y \in \Gamma'(x)$ entraine $\Gamma'(y) \subset \Gamma'(x)$.

Corollaire 1. Les relations réciproques :

$$\mathcal{T} = \bigcup_{x \in E} \left(S^{\Gamma(x)} \cup W_x \right) \quad , \quad \Gamma : x \to \Gamma(x) = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{T} \\ F \ni x}} F$$

établissent une bijection entre l'ensemble $\mathcal{F}_T$ des topologies fermées et le sous-espace de $\Phi_s(E,E)$ des applications sci de E dans $\mathcal{F}(E)$ telles que $x \in \Gamma(x)$ pour tout $x \in E$ et que $y \in \Gamma(x)$ entraine $\Gamma(y) \subset \Gamma(x)$.

Corollaire 2. Si Γ et Γ' sont deux applications sci de E dans $\mathcal{F}(E)$ vérifiant $\Gamma(x) \subset \Gamma'(x)$ pour tout $x \in E$, nous poserons $\Gamma \leq \Gamma'$. Toute application Γ admet une plus ~~grande~~ petite majorante Γ_T vérifiant : $x \in \Gamma_T(x)$ et $y \in \Gamma_T(x)$ $\Rightarrow \Gamma_T(y) \subset \Gamma_T(x)$. L'application $\Gamma \to \Gamma_T$ est croissante isotone et idempotente.

Soit $\mathcal{T}$ la topologie associée à Γ, et $\Gamma_T(x)$ la fermature de $\{x\}$ pour $\mathcal{T}$, On a pour tout x : $\Gamma_T(x) \in \mathcal{T}$, $x \in \Gamma_T(x)$, donc $\Gamma_T(x) \supset \Gamma(x)$, ou $\Gamma \leq \Gamma_T$. Si $\Gamma_1 \geq \Gamma$ avec $x \in \Gamma_1(x)$ et $y \in \Gamma_1(x) \Rightarrow \Gamma_1(y) \subset \Gamma_1(x)$, $\Gamma_1(x)$ est la fermeture de x pour la topologie $\mathcal{T}_1$ associée à Γ_1. Pour tout $y \in \Gamma_1(x)$ on a $\Gamma(y) \subset \Gamma_1(y) \subset \Gamma_1(x)$. Par suite $\Gamma_1(x)$ est fermée pour la topologie $\mathcal{T}$ et $\Gamma_1 \geq \Gamma_T$, et Γ_T est bien la plus petite majorante de Γ

vérifiant les conditions de l'énoncé. On vérifie d'ailleurs sans peine que $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$.

L'application $\Gamma \to \Gamma_T$ est manifestement croissante $(\Gamma \leq \Gamma_T)$ et idempotente. Si $\Gamma \leq \Gamma'$ on a $\Gamma \leq \Gamma'_T$ et parsuite $\Gamma_T \leq \Gamma'_T$.

Proposition 3. L'application $\mathcal{T} \to \Gamma_T$ est un homéomorphisme de $\mathcal{F}_T$ sur le sous espacè de Φ_g vérifiant les conditions du corollaire 1.

La topologie de $\mathcal{F}_T$ est engendrée par les familles :

$$1- \quad \{\mathcal{T} : \mathcal{T} \cap V_{B_i}^{K} \neq \phi\} \qquad 2- \quad \{\mathcal{T} : \mathcal{T} \cap V_{K_i}^{B} = \phi\}$$

$$(B, B_i \in \mathcal{G}, \; K, K_i \in \mathcal{K})$$

En ce qui concerne les familles du type 1, on peut se limiter aux V_B^K (un seul ouvert B_i). En effet; si $F_1 \in V_{B_1}^K, \ldots F_n \in V_{B_n}^K$ sont des fermés de $\mathcal{T}$ $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ est dans $\mathcal{T}$ et dans $V^K_{B_1, \ldots B_n}$.

Mais la relation : $\exists \; F \in \mathcal{T}, F \cap B \neq \phi, F \cap K = \phi$ entraine que l'on peut trouver $x \in F \cap B$, $\Gamma(x) \subset F$ et $K \cap \Gamma(X) = \phi$. Inversement, la relation $\exists \; x \in B, K \cap \Gamma(x) = \phi$ entraine que le fermé $\Gamma(x) \in \mathcal{T}$ est dans V_B^K .

Ainsi, les ouverts de $\mathcal{F}_T$ du premier type ont pour image dans Φ_g les familles $\{\Gamma : \exists \; x \in B, K \cap \Gamma(x) = \phi\}$ c'est à dire les ouverts de type 1 de la topologie de Φ_g (V, prop.3, corollaire).

En ce qui concerne les ouverts de type 2, on peut se limiter aux $\{\mathcal{T} : \mathcal{T} \cap V_K^B = \phi\}$ (Note 83,2º, lemme 1). $\mathcal{T} \cap V_K^B = \phi$ signifie qu'on ne peut pas avoir à la fois $F \in \mathcal{T}$, $F \cap K \neq \phi$ et $F \cap B = \phi$. Si $x \in K$, on a $\Gamma(x) \in \mathcal{T}$ et $K \cap \Gamma(x) \neq \phi$, donc $\Gamma(x) \cap B \neq \phi$. Inversement, si $\Gamma(x) \cap B \neq \phi$ pour tout $x \in K$, soit $F \in \mathcal{T}$ rencontrant K, et $x_0 \in F \cap K$: $F = \bigcup_{x \in F} \Gamma(x)$ rencontre B. Ainsi, les ouverts de type 2 ont pour image les familles $\{\Gamma : \forall x \in K, B \cap \Gamma(x) \neq \phi\}$, qui sont les ouverts de type 2 de la topologie de Φ_g (V, prop. 3, corollaire).

Note Gst 24 - Table des Matières.