

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 80Existence de solutions stationnaires dans le problème de la genèse des perméabilités

On se propose, dans ce qui suit, de discuter l'existence et l'unicité des solutions stationnaires susceptibles d'engendrer une perméabilité macroscopique constante K^{ij} dans les deux cas typiques suivants :

1/ Composition des perméabilités : cas d'un milieu dont la perméabilité ponctuelle $k^{ij}(x)$ est une fonction aléatoire tensorielle ergodique et stationnaire.

2/ Génèse de la loi de Darcy : cas d'un milieu poreux, lorsque l'indicateur $k(x)$ des pores est une fonction aléatoire en tout ou rien ergodique et stationnaire.

Dans le premier cas, on part d'une loi de Darcy à coefficients $k^{ij}(x)$ aléatoires; dans le deuxième, on part des équations de Navier avec des conditions aux limites aléatoires. Dans les deux cas, on cherche à établir l'existence d'une loi de Darcy macroscopique à perméabilités constantes. On notera la généralité du procédé que nous allons utiliser : il doit permettre, en effet, d'expliquer l'apparition au niveau macroscopique de relations phénoménologiques du type de la loi d'Ohm ou de la loi de Darcy à partir d'équations linéaires d'un type beaucoup plus général supposées valables au niveau microscopique.

Il semble que le succès de l'entreprise soit lié à la possibilité de remplacer ces équations linéaires du niveau microscopique par un principe variationnel possédant une signification énergétique et permettant l'introduction de formes quadratiques définies positives : dans la transposition probabiliste de ces problèmes physiques, tout se ramène, en effet, à examiner si cette forme quadratique possède un minimum et l'atteint dans un certain sous-espace d'un espace de Hilbert convenable. Sous cette forme, le problème sera souvent soluble. Mais il restera à discuter la signification de la solution ainsi formée, et à examiner si elle est physiquement acceptable.

I - PRINCIPES VARIATIONNELS

1 - Examinons d'abord le cas de la composition des perméabilités. Dans l'énoncé physique, on cherche une fonction $p(x)$ et un vecteur $q(x)$ vérifiant le système de Darcy :

$$(1) \quad \begin{cases} q^i = -k^{ij} \partial_j p \\ \partial_i q^i = 0 \end{cases}$$

en tout x intérieur à un domaine V , $p(x)$ prenant sur la frontière de V des valeurs données. Ce problème équivaut au suivant : trouver la fonction p vérifiant les conditions aux limites et réalisant le minimum de l'intégrale $I(p)$ qui représente la puissance consommée :

$$(2) \quad I = \int_V k^{ij} \partial_i p \partial_j p \, dx$$

Dans la formulation probabiliste, on devra donc chercher s'il existe un gradient stationnaire ∂p d'espérance $E(\partial p) = \partial P$ donnée minimisant l'espérance de la densité de puissance $E(k^{ij} \partial_i p \partial_j p)$.

2 - Dans le cas d'un milieu poreux défini par l'indicatrice $k(x)$ des pores, on cherche à déterminer une fonction $p(x)$ prenant des valeurs données sur la frontière de V et un vecteur $v(x)$ identiquement nul dans les grains (vérifiant $v = kv$) et satisfaisant au système de Navier :

$$(3) \quad \begin{cases} \partial_i t = \mu \Delta v_i \\ \partial_i v^i = 0 \end{cases}$$

Si l'on désigne par $e_{ij} = \frac{1}{2} [\partial_i v_j + \partial_j v_i]$ le tenseur des déformations, la densité de puissance consommée par les forces de viscosité est $2\mu e^{ij} e_{ij}$. Le système

(3) équivaut au principe variationnel suivant : trouver le vecteur $v = kv$ et la fonction p vérifiant les conditions aux limites et réalisant l'extremum de l'intégrale :

$$I = \int_V [2\mu e^{ij} e_{ij} + 2\sigma^i \partial_i t] dx$$

Faisant varier p , on obtient en effet l'équation de continuité $\operatorname{div} v = 0$.

Ensuite, de

$$2\mu \delta [e^{ij} e_{ij}] = 2\mu [\partial^i \sigma^j \partial_i \delta \sigma_j + \partial^i \sigma^j \partial_j \delta \sigma_i]$$

on déduit la condition d'extremum en v :

$$\partial_i t - \mu \Delta \sigma_i - \mu \partial_{ij} \sigma^j = 0$$

qui se réduit à l'équation de Navier compte tenu de l'équation de continuité.

Si $\partial_i v^i = 0$, l'intégrale $\int_V v^i \partial_i p dx$ est égale au flux de $p v^i$ à travers la frontière de V , et en particulier ne dépend de $p(x)$ que par l'intermédiaire des valeurs données que prend cette fonction sur la frontière de V . On a donc un deuxième principe variationnel équivalent au précédent : étant donnée une fonction $p(x)$ vérifiant les conditions aux limites, mais à cela près quelconque, trouver un vecteur v vérifiant $v = kv$, $\operatorname{div} v = 0$, et minimisant l'intégrale :

$$(4) \quad I = \int_V [\mu \partial^i \sigma^j \partial_i \sigma_j + 2\sigma^i \partial_i t] dx$$

La transposition probabiliste de ce problème pourra donc s'énoncer comme suit : étant donné un vecteur covariant constant ω_i , trouver un vecteur aléatoire stationnaire de divergence nulle, vérifiant $v = kv$ et minimisant l'espérance :

$$\mu E[\partial^i \sigma^j \partial_i \sigma_j] + 2\omega_i E(\sigma^i)$$

II - PASSAGE AUX ESPACES DE HILBERT

Pour définir une famille de fonctions aléatoires stationnaires, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni d'un groupe d'automorphismes τ_h conservant la probabilité, avec $h \in \mathbb{R}^n$ et $\tau_{h+h'} = \tau_h \tau_{h'}$. On désigne par U_h le groupe d'opérateurs unitaires prolongeant τ_h et opérant dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est ergodique, de sorte que $U_h f = f$ entraîne $f =$ constante si f est dans L^2 . A toute variable aléatoire $f \in L^2$ on associe la fonction aléatoire définie par $f(x) = U_x f$. On suppose enfin l'opérateur U_h continu : pour $f \in L^2$, $\|U_h f - f\| \rightarrow 0$ pour $|h| \rightarrow 0$.

Opérateur ∂_i de dérivation. L'opérateur $\partial_i = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{U_{h_i} - 1}{h_i}$ est défini sur un sous-espace (non fermé) $L^2_{\partial_i} \subset L^2$: $f \in L^2_{\partial_i}$ si $\frac{U_{h_i} f - f}{h_i}$ converge fortement vers une limite notée $\partial_i f$. On désigne par $L^2_{\partial} = \bigcap_i L^2_{\partial_i}$ l'ensemble des fonctions $f \in L^2$ dérivables (domaine de l'opérateur ∂) et on suppose que L^2_{∂} est dense dans L^2 .

Comme U_{h_i} est unitaire, on vérifie immédiatement $\langle \partial_i f, g \rangle = - \langle f, \partial_i g \rangle$ pour $f, g \in L^2_{\partial_i}$. Au signe près, ∂_i est autoadjoint : $\partial_i^* = -\partial_i$. Comme les domaines de ∂_i et de ∂_i^* sont denses dans L^2 , ∂_i est un opérateur fermé : si $f_n \in L^2_{\partial_i}$ converge faiblement vers f_0 et si $\partial_i f_n$ converge faiblement vers f'_0 , on a $f_0 \in L^2_{\partial_i}$ et $f'_0 = \partial_i f_0$.

Application gradient ∂ : l'application gradient ∂ applique L^2 sur un sous-espace $H_0 \subset H$ de l'espace produit $H = (L^2)^n$. H_0 , espace des vecteurs gradients, n'est pas fermé dans H . Sa fermeture $\overline{H_0}$ est le supplémentaire orthogonal dans H du sous-espace de H constitué des vecteurs v vérifiant $\partial_i v^i = 0$: celà résulte de :

$$\langle \partial_i f, v^i \rangle = - \langle f, \partial_i v^i \rangle$$

L'orthogonal $H_0^\perp$ de H_0 est la fermeture dans H du sous-espace des vecteurs de divergence nulle. Nous appellerons vecteur conservatif (au sens large) tout élément de $H_0^\perp$.

Au signe près, les applications gradient et divergence sont adjointes. Comme leurs domaines sont denses (dans L^2 et dans H respectivement) ce sont des applications fermées.

Dans l'espace de Hilbert H (muni de la norme $\sqrt{\langle f^i, f_i \rangle}$), $H_\partial = (L_\partial^2)^n$ est le domaine d'une application ∂ qui applique H_∂ dans l'espace de Hilbert $H^\otimes$ dont les éléments sont les $t = (t^{ij})$ avec $t^{ij} \in L^2$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) et dont la norme est $\sqrt{\langle t^{ij}, t_{ij} \rangle}$. Le domaine H_∂ de ∂ est dense dans H .

Désignons par $H_\partial^\otimes$ le sous-espace dense dans $H^\otimes$ des t tels que $t^{ij} \in L_\partial^2$. Pour $v \in H_\partial$ et $t \in H_\partial^\otimes$, on a :

$$\langle \partial_i v_j, t^{ij} \rangle = - \langle v_j, \partial_i t^{ij} \rangle$$

de sorte que l'adjoint de ∂ est $\partial^* : t^{ij} \rightarrow -\partial_i t^{ij}$ dont le domaine $H_\partial^\otimes$ est encore dense dans $H^\otimes$. Ainsi, ces applications sont fermées.

III - PREMIER PROBLEME : COMPOSITION DES OPERATEURS

On désigne par $A = A^{ij} : f \rightarrow Af = A^{ij} f_j$ un opérateur autoadjoint, strictement positif dont le domaine D_A est dense dans H . C'est donc un opérateur fermé.

On suppose de plus que l'espace image $A(D_A)$ est également dense dans H , et que A admet un inverse $B = B_{ij}$ également autoadjoint, dense et fermé. On suppose enfin $\bar{H}_0 \cap D_A$ dense dans $\bar{H}_0$.

Soit $\omega = (\omega_i) \in H$ un vecteur réel constant non nul de H . On note que $\omega \notin H_0$ car les vecteurs gradients vérifient $\langle \omega, \partial_i f \rangle = 0$.

On se pose le problème suivant : trouver un élément $f_0 \in \bar{H}_0 \cap D_A$ minimisant l'intégrale

$$I(f) = \langle \omega + f, A, \omega + f \rangle \quad \text{pour } f \in \bar{H}_0 \cap D_A$$

On vérifie immédiatement qu'il suffit de considérer les f réelles de $\bar{H}_0$. On pose :

$$\gamma = \inf_{f \in \bar{H}_0 \cap D_A} I(f)$$

On a $\gamma \geq 0$, d'après la définition de $I(f)$, et aussi $\gamma \leq \langle wAw \rangle$ puisque $0 \in \bar{H}_0$. Ainsi $0 \leq \gamma \leq \langle wAw \rangle$. Enfin, on peut expliciter $I(f)$ comme suit :

$$(5) \quad I(f) = \langle wAw \rangle + 2 \langle fAw \rangle + \langle fAf \rangle$$

a/ On a $\gamma = \langle wAw \rangle$ si et seulement si $\bar{H}_0$ est orthogonal au vecteur Aw . Dans ce cas le problème admet la solution triviale $f_0 = 0$. Si $\gamma < \langle wAw \rangle$ pour tout vecteur constant w , l'opérateur A vérifie $\partial_i A^{ij} = 0$ (au sens large, c'est à dire $\langle \partial_i f, A^{ij} g_j \rangle = 0$ pour tout $g_j \in H$ et tout $f \in L^2_\partial$)

En effet, si $\langle fAw \rangle = 0$ pour tout $f \in \bar{H}_0 \cap D_A$, il résulte aussitôt de (5) que $I(0) = \langle wAw \rangle$ réalise le minimum de $I(f)$. Inversement, soit $f \in \bar{H}_0 \cap D_A$ avec $\langle fAw \rangle \neq 0$ (donc $f \neq 0$). On a, pour tout λ réel :

$$I(\lambda f) = \langle wAw \rangle + 2\lambda \langle fAw \rangle + \lambda^2 \langle fAf \rangle$$

Cette expression est minimale pour $\lambda = - \langle fAw \rangle / \langle fAf \rangle$. Changeant f en λf , on peut donc supposer :

$$(6) \quad I(f) = \langle wAw \rangle - \langle fAf \rangle$$

$$\langle fAf \rangle = - \langle fAw \rangle$$

Comme $f \neq 0$, on a $\gamma \leq I(f) < \langle wAw \rangle$

Enfin, si $\langle fAw \rangle = 0$ pour tout $f_i = \partial_i p \in H_0$ et tout vecteur constant w_j , on a

$$\langle \partial_i p, A^{ij} w_j \rangle = - \langle p, \partial_i A^{ij} w_j \rangle$$

et $\partial_i A^{ij} = 0$

b/ Il existe une solution unique $f_0 \in \bar{H}_0 \cap D_A$ réalisant le minimum de $I(f)$, et le vecteur courant $q = A(\varpi + f)$ est conservatif (orthogonal à H_0)

Il suffit d'examiner le cas $\gamma < \langle \varpi, A\varpi \rangle$. Soit $f_n \in \bar{H}_0 \cap D_A$ une suite vérifiant les relations (6) et telle que $I(f_n) \rightarrow \gamma$:

$$\langle f_n, A f_n \rangle = - \langle \varpi, A f_n \rangle \rightarrow \langle \varpi, A \varpi \rangle - \gamma > 0$$

Comme $\|A^{1/2} f_n\|$ est bornée, on peut extraire de f_n une suite partielle (que nous désignerons encore par f_n) telle que $A^{1/2} f_n$ converge faiblement vers une limite φ_0 . Soit $g \in D_A$ un élément quelconque du domaine de A . On a :

$$\langle g, A f_n \rangle = \langle A g, f_n \rangle = \langle A^{1/2} g, A^{1/2} f_n \rangle \rightarrow \langle A^{1/2} g, \varphi_0 \rangle$$

Comme le domaine et l'image de A sont denses, $A f_n$ et f_n sont des suites de Cauchy faibles. Elles convergent vers f'_0 et $f_0 \in \bar{H}_0$ respectivement. Mais, A étant fermé, f_0 est dans D_A et $f'_0 = A f_0$. D'après les propriétés de la convergence faible, on a :

$$\langle f_0, A f_0 \rangle = \|A^{1/2} f_0\|^2 \leq \lim \|A^{1/2} f_n\|^2 = \lim \langle f_n, A f_n \rangle$$

$$\langle \varpi, A f_0 \rangle = \lim \langle \varpi, A f_n \rangle$$

d'où :

$$\gamma \leq \langle \varpi + f_0, A(\varpi + f_0) \rangle \leq \lim I(f_n) = \gamma$$

et l'égalité : ainsi cet élément $f_0 \in \bar{H}_0 \cap D_A$ réalise le minimum de $I(f)$. De l'égalité $I(f_0) = \lim I(f_n)$ résulte également $\langle f_0, A f_0 \rangle = \lim \langle f_n, A f_n \rangle$ et, d'après les conditions (6) : (relationn énergétique)

$$(7) \quad \langle f_0, A f_0 \rangle = - \langle \varpi, A f_0 \rangle = \langle \varpi, A \varpi \rangle - \gamma$$

Soit maintenant $g \in \overline{H}_0$ un gradient (au sens large). On a $\gamma = I(f_0) \leq I(f_0 + \varepsilon g)$ pour tout ε réel. Comme :

$$I(f_0 + \varepsilon g) = I(f_0) + 2\varepsilon \langle w + f_0, Ag \rangle + \varepsilon^2 \langle g, Ag \rangle$$

on voit que $I(f_0) = \gamma$ entraîne :

$$(8) \quad \langle w + f_0, Ag \rangle = \langle A(w + f_0), g \rangle = 0$$

pour tout $g \in \overline{H}_0$, donc que $A(w + f_0) = q$ est un vecteur conservatif.

Inversement, cette propriété caractérise la solution f_0 , comme on le voit aussitôt, et il en résulte que la solution f_0 ainsi obtenue est unique. (compte tenu du fait que A est strictement positif).

c/ Le tenseur K^{ij} Il est clair que si l'on change w en λw , on change f_0 en λf_0 et γ en $\lambda^2 \gamma$. Soient w_1 et w_2 deux vecteurs constants de H , f_1 et f_2 les solutions correspondantes. $w_1 + f_1$ et $w_2 + f_2$ sont orthogonaux à AH_0 , et la propriété caractéristique (8) montre que $f_1 + f_2$ est la solution unique associée au vecteur constant $w_1 + w_2$. De (7) on déduit :

$$\begin{aligned} \gamma(w_1 + w_2) &= \langle w_1 + w_2, A(f_1 + f_2) \rangle + \langle w_1 + w_2, A(w_1 + w_2) \rangle \\ &= \gamma(w_1) + \gamma(w_2) + 2 \langle w_1 + f_1, A w_2 \rangle \end{aligned}$$

La forme quadratique : $K(w_1, w_2) = \langle w_1 + f_1, A(w_2 + f_2) \rangle = \langle w_1 + f_1, A w_2 \rangle$
 $= \langle w_2 + f_2, A w_1 \rangle$

est définie positive, ce qui établit l'existence d'un tenseur K^{ij} symétrique et défini positif vérifiant :

$$(9) \quad \gamma(w) = K^{ij} w_i w_j \leq \langle w_i A^{ij} w_j \rangle$$

pour tout vecteur w constant, avec égalité pour tout w si et seulement si

$$\partial_i A^{ij} = 0.$$

d/ Le tenseur H_{ij} Le tenseur K admet un inverse H . En effet, pour tout vecteur ϖ constant non nul on a :

$$K^{ij} \varpi_i \varpi_j = \gamma(\varpi) = \langle \varpi + f_0, A, \varpi + f_0 \rangle$$

avec $f_0 \in \overline{H}_0$. Comme A est strictement positif, et que le vecteur $-\varpi$ dont l'intégrale n'est pas nulle n'est pas dans $\overline{H}_0$, on a $\gamma(\varpi) > 0$, et K est inversible.

Lorsque le vecteur q parcourt le sous-espace de H_0^+ défini par $\langle q^i, 1 \rangle = \rho^i$ (vecteurs conservatifs d'espérances Q donnée), la forme quadratique $\langle q B q \rangle$ atteint son minimum, qui est $H_{ij} Q^i Q^j$, pour le vecteur q_0 unique défini par $q_0 = A(\varpi + f_0)$, avec $\varpi_i = H_{ij} Q^j$, $f_0 \in \overline{H}_0 \cap D_A$ étant la solution associée dans H au vecteur constant ϖ .

En effet, prenant $\varpi_i = H_{ij} Q^j$, on associe au vecteur constant ϖ la solution $\varpi + f_0$, et le vecteur $q_0 = A(\varpi + f_0)$ vérifie $\langle 1, q_0^i \rangle = K^{ij} \varpi_j = \rho^i$. Comme le vecteur $\varpi + f_0 = B q_0$ est orthogonal à tout $q \in H_0^+$, q_0 réalise bien le minimum de $\langle q B q \rangle$, et on a

$$H_{ij} \rho^i \rho^j = K^{ij} \varpi_i \varpi_j = \langle \varpi + f_0, A, \varpi + f_0 \rangle = \langle q_0 B q_0 \rangle \leq \langle q B q \rangle$$

En particulier, prenant pour q le vecteur constant Q , on trouve :

$$(10) \quad H_{ij} \rho^i \rho^j \leq \langle \rho^i B_{ij} \rho^j \rangle$$

Il est commode d'introduire les tenseurs $E(A)$ et $E(B) = E(A^{-1})$ définis par

$$\varpi_i \varpi_j E(A^{ij}) = \langle \varpi_i A^{ij} \varpi_j \rangle \quad \text{et} \quad \rho^i \rho^j E(B_{ij}) = \langle \rho^i B_{ij} \rho^j \rangle$$

Les inégalités (9) et (10) expriment que l'on a toujours $K \leq E(A)$ et $H \leq E(B)$ ce que l'on peut aussi écrire :

$$(11) \quad [E(A^{-1})]^{-1} \leq K \leq E(A)$$

Exemple : composition des perméabilités. On se donne un tenseur $k^{ij} \in H^{\otimes}$ admettant (p.s. sur Ω) un inverse $h_{ij} \in H^{\otimes}$. $U_x k^{ij}$ est la réalisation d'une perméabilité aléatoire ergodique et stationnaire. L'opérateur multiplicatif $A : f_j \rightarrow A^{ij} f_j = k^{ij} f_j$ admet un domaine dense dans H ou $\tilde{H}_0$ et vérifie les conditions voulues pour qu'il existe un et un seul écoulement stationnaire de gradient macroscopique ϖ donné : le tenseur K^{ij} est la perméabilité macroscopique correspondante.

IV - DEUXIEME PROBLEME : GENESE DE LA LOI DE DARCY

Pour définir un milieu poreux, on se donne l'indicatrice $k(\omega)$ d'un ensemble de la $\mathcal{C}$ -algèbre $\mathcal{A}$ sur Ω , et on interprète $U_x k$ comme la réalisation de l'indicatrice aléatoire des pores. Dans L^2 on considère le sous-espace fermé L^2_k des f vérifiant $f = kf$. On suppose :

- 1- $L^2_{\partial} \cap L^2_k$ dense dans L^2_k (L^2_{∂} domaine de ∂)
- 2- $1 \notin L^2_k$ (c'est à dire $k(\omega) \neq 1$ p.s.)

$H_0^{\perp} \subset (L^2)^n$ désignant toujours l'espace des vecteurs conservatifs, et posant $H_k = (L^2_k)^n$ on considère l'espace : $F = H_0^{\perp} \cap H_k \cap H_{\partial}$ des vecteurs $v = (v_i)$ vérifiant $v = kv$ et $\partial_i v^i = 0$ (au sens strict, puisque $v \in H_{\partial}$). D'après 1, F est dense dans $H_0^{\perp} \cap H_k$, et d'après 2, F ne contient pas de vecteur constant non nul.

On désignera par A l'application de H_{∂} dans $H^{\otimes}$ définie par : $v_j \rightarrow \partial_i v_j$. C'est une application fermée (par. I, in fine). Soit enfin $\varpi = (\varpi_i)$ un vecteur constant non nul de H . Il n'appartient pas à F . On cherche un élément $f \in F$ réalisant le minimum de :

$$(12) \quad I(f) = \|Af\|^2 + 2 \langle f, \varpi \rangle$$

a/ S'il n'existe aucun $f \in F$ tel que $\langle f, \omega \rangle \neq 0$, on a la solution triviale $f = 0$. Physiquement, ce cas correspond à un milieu imperméable.

b/ On suppose qu'il existe $f \in F$ avec $\langle f, \omega \rangle \neq 0$. Af n'est pas nul : en effet, $Af = 0$, c'est à dire $\partial_i f_j = 0$ entraîne, par ergodicité, $f = \text{constante}$. Mais f est dans H_k et H_k ne contient pas de vecteur constant non nul, d'où $f = 0$, ce qui contredirait $\langle f, \omega \rangle \neq 0$.

Changeant f en λf , on voit que la forme :

$$I(\lambda f) = \lambda^2 \|Af\|^2 + 2\lambda \langle f, \omega \rangle$$

est minimale pour $\lambda = - \langle f, \omega \rangle / \|Af\|^2$

On peut donc se limiter aux $f \in F$ vérifiant :

$$(13) \quad \langle f, \omega \rangle = - \|Af\|^2 = I(f) < 0$$

Posons ensuite : $\gamma = \inf_{f \in F} I(f) < 0$

et formons une suite f_n vérifiant la condition (13) et telle que $I(f_n)$ converge vers γ . Il convient de distinguer deux cas, selon que la suite $\|f_n\|$ admet ou non une valeur d'adhérence finie.

c/ Cas où $\|f_n\|$ admet une valeur d'adhérence finie. On peut alors extraire une sous-suite $\|f_{n_k}\|$ bornée, puis de celle-ci une suite partielle, que nous désignerons à nouveau par f_n , convergeant faiblement vers un élément $f_0 \in H_0^\perp \cap H_k$ (sous-espace fermé contenant F).

Comme $\langle f_n, \omega \rangle \rightarrow \langle f_0, \omega \rangle$ les conditions (13) donnent $\|Af_n\|^2 \rightarrow -\langle f_0, \omega \rangle$: La suite Af_n est bornée. On peut donc extraire de f_n une suite partielle (que nous désignerons encore par) f_n telle que Af_n converge faiblement vers un élément $f'_0 \in H^0$. Comme l'application A est fermée, $f_n \rightarrow f_0$ et $Af_n \rightarrow f'_0$ entraîne que f_0 est dans le domaine de A , c'est à dire $f \in F$, et $Af_0 = f'_0$.

Cet élément f réalise le minimum γ de $I(f)$. En effet, la convergence faible $Af_n \rightarrow Af_0$ entraîne $\|Af_0\| \leq \liminf \|Af_n\|$. D'où :

Cet élément f_0 réalise le minimum γ de $I(f)$. En effet, la convergence faible $Af_n \rightarrow Af_0$ entraîne : $\|Af_0\| \leq \lim \|Af_n\|$. D'où :

$$\gamma \leq \|Af_0\|^2 + 2 \langle f_0, w \rangle \leq \lim [\|Af_n\|^2 + 2 \langle f_n, w \rangle] = \gamma$$

et l'égalité. En particulier, Af_n converge fortement vers Af_0 , et :

$$\|Af_0\|^2 = \lim \|Af_n\|^2 = - \lim \langle f_n, w \rangle = - \langle f_0, w \rangle = -\gamma$$

D'où la relation énergétique :

$$(14) \quad -\gamma = \|Af_0\|^2 = - \langle f_0, w \rangle$$

Pour f quelconque dans F , on doit avoir pour tout ε réel :

$$(15) \quad \gamma \leq I(f_0 + \varepsilon f) = \gamma + 2\varepsilon \langle Af_0, Af \rangle + 2\varepsilon \langle f, w \rangle + \varepsilon^2 \|Af_0\|^2$$

ce qui entraîne :

$$(16) \quad \forall f \in F : \langle Af_0, Af \rangle = - \langle f, w \rangle$$

Inversement, comme $Af = 0$ entraîne $f = 0$ si f est dans F , la relation (15) montre que la condition (16) caractérise la solution f_0 , et, en particulier, établit son unicité.

d/ Il reste maintenant à examiner le cas où $\|f_n\| \rightarrow \infty$. Montrons que, dans ce cas, on a nécessairement $\inf I(f) = -\infty$. En effet, supposons $\|f_n\| \rightarrow \infty$ et : $-\langle f_n, w \rangle = \|Af_n\|^2 \rightarrow -\gamma < \infty$

Af_n étant borné, on peut extraire une sous-suite (que nous désignerons encore par) f_n telle que Af_n converge faiblement vers un élément $f'_0 \in H^{\otimes}$. Pour tout $g \in H_0^{\otimes}$, on a :

$$(17) \quad \langle Af_n, g \rangle = \langle f_n, A^*g \rangle \rightarrow \langle f'_0, g \rangle$$

~~$(\lim \langle Af_n, Af \rangle = 0 \Rightarrow \langle f'_0, Af \rangle = 0 \Rightarrow A^*f'_0 = 0 \Rightarrow f'_0 = 0 \Rightarrow \gamma = 0$~~
 ~~$0 = \langle A^*f'_0, f'_0 \rangle = 0$~~

g est un tenseur $t^{ij} \in H_0^2$, et $A^*g = -\partial_i t^{ij}$. Mais les éléments de cette forme sont denses dans le sous-espace M_0 de H constitué des vecteurs v d'espérance nulle $\langle 1, v^i \rangle = 0$. Comme $\|f_n\| \rightarrow \infty$, f_n ne converge pas faiblement, et (17) montre qu'il existe dans le supplémentaire orthogonal $M_0^\perp$ de M_0 (qui est le sous-espace des vecteurs constants) un vecteur constant a au moins tel que $\langle a, f_n \rangle \rightarrow \infty$. D'ailleurs a vérifie $\langle a, w \rangle = 0$, puisque $\langle f_n, w \rangle = -\|Af_n\|^2$ converge vers une limite γ finie.

Physiquement, ceci correspondrait à un débit infini dans une direction perpendiculaire au gradient w , mais fini dans la direction de ce gradient. Montrons que cette hypothèse conduit à une contradiction, et que, par suite, $\gamma = -\infty$.

Pour cela, considérons les vecteurs unitaires $u_n = f_n / \|f_n\|$, avec, d'après (13) :

$$-\|f_n\| \langle u_n, w \rangle = \|f_n\|^2 \|Au_n\|^2 \leq -\gamma < \infty$$

Au_n converge donc fortement vers 0. Comme $\|u_n\| = 1$, on peut trouver une sous-suite (que nous désignerons encore par) u_n convergeant faiblement vers un élément u_0 . Comme A est fermé, on a $Au_0 = 0$, ce qui entraîne, dans H_0 , $u_0 = 0$.

Désignons alors par f'_n la projection de f_n dans le sous-espace engendré par w et les vecteurs de somme nulle : f'_n converge faiblement, d'après (17) et $\langle f_n, w \rangle \rightarrow \gamma$. Comme $\|f'_n\|$ est bornée, $f'_n / \|f_n\|$ converge fortement vers 0. Or, on a :

$$(18) \quad u_n = \frac{f'_n}{\|f_n\|} + \frac{f_n - f'_n}{\|f_n\|}$$

Comme u_n admet lui-même 0 comme limite faible, il en résulte $\frac{f_n - f'_n}{\|f_n\|} \rightarrow 0$ faiblement. Mais $f_n - f'_n$ appartient à un sous-espace de dimension finie (celui des vecteurs constants orthogonaux à w). Donc $\frac{f_n - f'_n}{\|f_n\|}$ converge fortement vers 0, ce qui contredit $\|u_n\| = 1$.

Ainsi, pour $\|f_n\| \rightarrow \infty$, on a nécessairement $\gamma = -\infty$ et $\|Af_n\| \rightarrow \infty$: le milieu a une perméabilité infinie. en résumé :

Proposition. Si $\gamma = \inf_{f \in F} I(f) > -\infty$, il existe une solution et une seule $f_0 \in F$ vérifiant $I(f_0) = \gamma$ et la relation énergétique (14). En particulier, cette solution unique est la solution triviale $f_0 = 0$ si et seulement si $\gamma = 0$. (perméabilité nulle). Si au contraire $\gamma = -\infty$, on peut trouver une suite $f_n \in F$ avec $\|f_n\| \rightarrow \infty$, $\|Af_n\| \rightarrow \infty$ et $I(f_n) \rightarrow -\infty$ (perméabilité infinie).

Tenseur K_{ij} Nous supposons $\gamma(\omega) > -\infty$ pour tout vecteur ω constant. On a $\gamma(\lambda\omega) = \lambda^2 \gamma(\omega)$ pour tout λ réel. Le critère (15) montre que, si f_0 et f'_0 sont les solutions associées à ω et ω' , $f_0 + f'_0$ est la solution associée à $\omega + \omega'$. En particulier :

$$\langle Af_0, Af'_0 \rangle = - \langle \omega, f'_0 \rangle = - \langle \omega', f_0 \rangle$$

est une forme bilinéaire en ω, ω' positive (strictement ou non selon que $\gamma(\omega) < 0$ pour tout ω ou non). Ainsi, la relation :

$$K_{ij} \omega_i \omega'_j = \langle Af_0, Af'_0 \rangle$$

définit la perméabilité macroscopique sous la forme d'un tenseur symétrique et défini positif, (strictement ou non).

Remarque. On peut se demander si la solution que nous avons ainsi obtenue dans l'espace de Hilbert H convient ou non pour le problème physique initial. Si les "grains" forment un ensemble dénombrable sans points d'accumulation (cas d'un schéma de Poisson) on a $k = 0$ p.s., et, visiblement, la méthode précédente conduirait à $\gamma = -\infty$ (résistivité nulle) alors que le milieu physique correspondant possède une perméabilité finie. Plus généralement, si l'on modifie $k(\omega)$ (mais non $k \in L^2$) en adjoignant aux grains un ensemble aléatoire dénombrable aléatoire du type précédent, on modifie la perméabilité du milieu physique réel, mais non la solution obtenue dans H .

Il est probablement nécessaire, pour obtenir une solution physiquement acceptable, d'imposer une condition supplémentaire à $k(\omega)$, telle, par exemple, que la réalisation des pores soit p.s. un ensemble fermé dans R^n . Il n'est sans doute pas possible d'exprimer une condition de ce genre sans introduire des hypothèses assez fortes (de nature topologique) sur l'espace Ω et le groupe U_λ . On pourrait, par exemple, prendre pour Ω l'espace localement compact de type dénombrable $\mathcal{U}(R^n)$ des ouverts de R^n . Tout $\omega \in \Omega$ représentera ici un ouvert $G_\omega \subset R^n$. Il reste à voir si l'on peut ensuite construire une probabilité P invariante pour un groupe τ_λ (continu en un sens à préciser) et un sous-ensemble (ouvert?) de Ω dont l'indicatrice $k(\omega)$ vérifierait la propriété : $\tau_\lambda k(\omega)$ est p.s. l'indicatrice d'un ouvert de R^n . Tout ceci méritera un examen approfondi.

V - FORME EXPLICITE DE LA LOI DE COMPOSITION D'UN OPERATEUR

Nous revenons au problème de la composition des opérateurs, en supposant, en plus des hypothèses faites au paragraphe III, que l'opérateur A est continu et peut s'écrire :

$$(19) \quad A = a(I + P) \quad \text{avec} \quad \|P\| < 1$$

(a constante, I opérateur unité). On peut supposer de plus $E(A) = a$, mais nous n'utiliserons pas cette hypothèse. De même, on supposera $B = A^{-1}$ continu, et:

$$(20) \quad B = b(I + J) \quad \text{avec} \quad \|J\| < 1$$

Les conditions (19) et (20) ne sont pas incompatibles : on le voit en prenant un opérateur hermitique α de norme $\|\alpha\| < \log 2$. Prenant $A = a e^{+\alpha}$ et $B = 1/a e^{-\alpha}$, on a $\|P\| = \|e^{\alpha} - 1\| \leq e^{\|\alpha\|} - 1 < 1$ et de même $\|J\| < 1$.

Notations. On désignera par M_0 l'espace des vecteurs d'espérance nulle, et par E le projecteur de $M_0^{\perp}$: $E q = E(q)$, $M_0^{\perp}$ étant le sous-espace constitué des vecteurs constants. Soient π_0 le projecteur de $\bar{H}_0$, $\pi^{\perp}$ celui de $H_0^{\perp}$ et $\pi_0^{\perp}$ celui de $H_0^{\perp} \cap M_0$:

π_0	est le projecteur de l'espace $\bar{H}_0$ des <u>gradients</u>
$\pi^{\perp}$	$H_0^{\perp}$ des vecteurs conservatifs
$\pi_0^{\perp}$	$H_0^{\perp} \cap M_0$ des vecteurs conservatifs de somme nulle
E	des vecteurs constants

$$\text{On a} \quad I = \pi_0 + \pi_0^{\perp} + E = \pi_0 + \pi^{\perp}$$

Soit $f \in \bar{H}_0$ le vecteur unique associé à un vecteur constant $\bar{\omega}$ donné réalisant le minimum de $\langle \bar{\omega} + f, A, \bar{\omega} + f \rangle$. D'après le critère (8), ce vecteur est l'unique élément $f \in \bar{H}_0$ tel que :

$$(21) \quad A(\varpi + f) \in H_0^+ \quad \text{ou} \quad (I + \Gamma)(\varpi + f) \in H_0^+$$

Mais $I + \Gamma = I + \pi_0 \Gamma + \pi^+ \Gamma$ D'où :

$$(I + \Gamma)(\varpi + f) = \varpi + \pi^+ \Gamma(\varpi + f) + f + \pi_0 \Gamma(\varpi + f)$$

Ainsi, f est caractérisé comme l'unique élément de $\bar{H}_0$ vérifiant la relation :
 $f + \pi_0 \Gamma(\varpi + f) = 0$, soit :

$$(22) \quad (I + \pi_0 \Gamma) f = -\pi_0 \Gamma \varpi$$

Or, $\|\pi_0 \Gamma\| \leq \|\Gamma\| < 1$ entraîne que $I + \pi_0 \Gamma$ est inversible. Ainsi f est donné par :

$$(23) \quad f = -(I + \pi_0 \Gamma)^{-1} \pi_0 \Gamma \varpi = -\pi_0 \Gamma (I + \pi_0 \Gamma)^{-1} \varpi$$

On sait a priori que cet élément f est l'unique solution. Mais on peut le vérifier directement : $f \in \bar{H}_0$, puisque π_0 est en facteur à gauche. On a
 $\varpi + f = (I + \pi_0 \Gamma)^{-1} \varpi$. Comme :

$$(I + \Gamma) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\pi_0 \Gamma)^n = I + \pi^+ \Gamma \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\pi_0 \Gamma)^n = I + \pi^+ \Gamma (I + \pi_0 \Gamma)^{-1}$$

on vérifie ensuite : $(I + \Gamma)(\varpi + f) \in H_0^+$

Ainsi, pour tout vecteur constant ϖ , on a :

$$\varpi + f = G \varpi, \quad -q = A(\varpi + f) = a C \varpi$$

avec un opérateur "gradient" G et un opérateur "Courant" $C = (I + \Gamma)G$ donnés par :

$$(24) \quad \begin{cases} G = (I + \pi_0 \Gamma)^{-1} \\ C = I + \pi^+ \Gamma (I + \pi_0 \Gamma)^{-1} = (I + \Gamma)G \end{cases}$$

La relation $C = I + \pi^\perp \Gamma G$ donne $CG^{-1} = I + \pi_0 \Gamma + \pi^\perp \Gamma$, d'où :

$$(25) \quad A = a(1 + \Gamma) = aCG^{-1}$$

Enfin, G vérifie la relation $EG = E$. Enonçons :

Proposition. L'opérateur A se factorise sous la forme $A = aCG^{-1}$ du produit de deux opérateurs dont le premier $C = I + \pi^\perp \Gamma G$ applique H dans $H_0^\perp$ et le deuxième G^{-1} est l'inverse d'un opérateur $G = (I + \pi_0 \Gamma)^{-1}$ tel que $G - E$ applique H dans $\bar{H}_0$. L'écoulement stationnaire associé à un vecteur constant $\bar{\omega}$ est défini par $\bar{\omega} + f = G\bar{\omega}$ et $q = -A(\bar{\omega} + f) = -aC\bar{\omega}$. Le tenseur macroscopique K est donné par $K = aE(C)$. Plus précisément, les relations $A = a(I + \Gamma G)$ et $\|\Gamma\| < 1$ entraînent la loi de composition :

$$(26) \quad K = aE[I + \pi^\perp \Gamma (I + \pi_0 \Gamma)^{-1}]$$

On a aussi $C = (I + \Gamma)G$, et, comme $E(G) = E(I)$, il vient $K = aE(C) = aE(I + \Gamma G)$. Le projecteur $\pi^\perp$ est superflu dans (26). De plus, $B - I + (A - I)B = J + \Gamma B = 0$ entraîne, compte tenu de la factorisation (25), $JC + \Gamma G = 0$. D'où :

$$(27) \quad K = aE(I + \Gamma G) = aE(I - JC)$$

Enoncé dual. On peut aussi formuler le problème sous la forme duale : Q étant un vecteur constant donné, chercher le vecteur unique $q_0 \in H_0^\perp \cap M_0$ tel que :

$$B(Q + q_0) \in \bar{H}_0 \oplus M_0^\perp$$

On a $B = b(I + J)$, $\|J\| < 1$. De $I + J = I + \pi J + \pi_0^\perp J$ ($\pi = \pi_0 + E$) on déduit :

$$(I + J)(\varphi + q_0) = \varphi + \pi J(\varphi + q_0) + q_0 + \pi_0^\perp J(\varphi + q_0)$$

D'où la solution unique :

$$q_0 = -\pi_0^+ J (I + \pi_0^+ J)^{-1} 0$$

On posera donc :

$$\begin{cases} C' &= (I + \pi_0^+ J)^{-1} \\ G' &= (I + J)C' = I + \pi J (I + \pi_0^+ J)^{-1} \end{cases}$$

L'écoulement stationnaire admet le courant $(Q + q_0) = C'Q$ et le gradient

$\omega + f = -bG'Q$. Ici, on a $E(C') = E(I)$, et la loi de composition $H = bE(G')$ donne :

$$(28) \quad H = b E [I + \pi J (I + \pi_0^+ J)^{-1}] = E [I + J C'] = E [I - \Gamma G']$$

Elle se déduit de la loi (26) en changeant Γ et J , π^+ et π , π_0 et π_0^+

Cas de l'espace à deux dimensions. L'opérateur $R : (F, f') \rightarrow (-f', f)$ vérifie $ER = RE$; $\pi_0^+ R = R \pi_0$; $\pi_0 R = R \pi_0^+$. Pour l'opérateur $A_1 = RAR^{-1}$ déduit de A par la même rotation de 90° , l'opérateur "Gradient" associé a pour inverse : $(G_1)^{-1} = (I + \pi_0 R \Gamma R^{-1}) = R(I + \pi_0^+ \Gamma)R^{-1}$ Ainsi :

$$\begin{cases} G_1 &= R (I + \pi_0^+ \Gamma)^{-1} R^{-1} \\ C_1 &= R [I + \pi \Gamma (I + \pi_0^+ \Gamma)^{-1}] R^{-1} \end{cases}$$

D'où la loi de composition :

$$RK_1 R^{-1} = a E [I + \pi (I + \pi_0^+ \Gamma)^{-1}]$$

qui est du type de la loi duale, avec Γ au lieu de J . D'ailleurs, $RK_1 R^{-1} = \text{Det} K_1 (K_1)^{-1} = H_1 / \text{Det} H_1$. Si A et A_1 ont même loi (C.&D. si chaque événement de la $\mathfrak{G}$ -algèbre engendrée par les A_g , $g \in H$ a même probabilité que l'événement homologue dans la $\mathfrak{G}$ -algèbre engendrée par les $A_1 g$) on a $K = K_1$. La loi (28) appliquée à au lieu de J conduit à $H / \text{Det} H = K$ (c'est un tenseur isotrope) au lieu de H . Si de plus A/a et B/b ont même loi (au sens précédemment défini), $K/a = H/b$. D'où cette fois $K = \sqrt{\frac{a}{b}}$

